جامعة يحي فارس يالمدية
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة مقدمة من طرف:

الدكتور: محمد رتيعة

محاضرات في:

نمـــاذج التنبـــؤ، مع أمثلة محلولة

(مقرر: سلاسل زمنية- نماذج التنبؤ)

مقدمة لطلبة الليسانس والماستر علوم إقتصادية، تخصص : إقتصاد كمي
ميدان: علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم تسيير

السنة الجامعية :2019-2020

محاضرات في: نماذج التنبؤ

(مقرر: سلاسل زمنية – نماذج التنبؤ)

إعداد: د. مُحَّد رتيعة

2020-2019

مقدمة

هذه المطبوعة هي عبارة عن محاضرات في نماذج التنبؤ حسب البرنامج المقرر للمقياس. برمج هذا المقياس للطلبة، لكي يستفيد الطلبة من القاعدة التي اكتسبوها عند دراستهم المبدئية في السنوات الماضية، لكن هدفه الأساسي هو التمهيد التطبيقي للنماذج الاقتصادية النظرية وإعطائها صيغة رياضية.

لقد حاولنا أن نستفيد من هذه التجربة لصياغة محتوى المقياس بطريقة تلاءم مستوى طلبة كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير، تخصصي اقتصاد كمي وتحليل اقتصادي واستشراف. لتحقيق هذا الغرض حرصنا على ربط المفاهيم والقواعد النظرية باستخداماتها التطبيقية؛ فعملنا على إعطاء أمثلة محلولة عن كل مفهوم جديد.

ولأن فهم القواعد الرياضية يكون أسهل إذا كان للمتلقي خلفية عن المشكلة التي يحتاج حلها إلى استخدام هذه القواعد، عملنا في كثير من الأحيان إلى التقديم لبعض الدروس أو النظريات بمسألة تكون بمثابة التمهيد، وأحيانا بمثابة مشكلة ننطلق منها لنتوصل إلى النظرية. هذا وننبه طلابنا الأعزاء إلى أنه يفترض بهم عند دراسة نماذج التنبؤ والسلاسل الزمنية أن يكونوا قادرين على استيعاب المفاهيم الرياضية بعموميتها ولا يبقوا خيالهم حبيس الأمثلة والمسائل النظرية البحتة.

وباعتبار مقياس نماذج التنبؤ أصبح يتبوأ مكانة بارزة بين الدراسات الرياضية لما له من استخدامات تطبيقية واسعة ومفيدة في مجال البحث العلمي، ونذكر بخاصة في مجال اتخاذ القرارات في النواحي الإدارية والاقتصادية. كما أن أسلوب التنبؤ وتحديد الاتجاهات المستقبلية للعديد من الظواهر إنما يعتمد على النماذج الاحتمالية والإحصاء الاستدلالي. ويعد أسلوب تحليل السلاسل الزمنية Time Series Analysis من الأساليب الإحصائية الجديرة بالاهتمام، والتي تطورت كثيراً وأصبح بالإمكان استخدامها لغرض التوقع للمستقبل. وهذه النظرية ليست حديثة العهد بل أن التفكير في استخدام مبادئها، تطور واستمر حتى وصل إلى شكله الراهن بنظرية لها أصولها، قواعدها وقوانينها وأصبحت من الفروع الأساسية في الإحصاء الاستدلالي، ودخلت في مجالات استخدام عديدة وبقوة كبيرة في مظاهر الحياة الحديثة.

من المؤكد أن تحليل نماذج التنبؤ للسلاسل الزمنية على المستوى العالمي قد شهد تطورا بالغ الأهمية خاصة في العقود الأخيرة، ويعزى هذا التطور إلى المنهجية التي قدمها العالمان بوكس وجينكينز في مطلع السبعينات من نفس القرن والتي أصبحت منذ ذلك الوقت الأداة الأكثر قبولا وشيوعا في الأوساط العلمية

والنظرية والتطبيقية خاصة في العالم المتقدم، حيث أثبتت هذه المنهجية كفاءة عالية في نمذجة البيانات الزمنية والتنبؤ بها.

يتضمن البرنامج المقرر لهذه المطبوعة على خمسة فصول، من حيث المنهجية العملية التي تساعد على تعلم أفضل لأسس السلاسل الزمنية ونماذج التنبؤ. وسوف يتركز اهتمامنا في الفصل الأول على مفاهيم حول السلاسل الزمنية وأهم مركباتها وطرق تقديرها مع التطرق إلى تحليل التباين واختبار فيشر في الكشف عنها.

يقدم الفصل الثاني التعاريف والمفاهيم الأساسية الضرورية لاستيعاب موضوع السلاسل الزمنية ونماذج التنبؤ باستخدام منهجية بوكس وجينكينز مثل الإستقرارية، بنوعيها التامة والضعيفة، ودالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي وطرق تقديرهما وأهم التحويلات الرياضية لجعل السلسلة مستقرة. أما الفصل الثالث فيتناول أهم نماذج التمهيد الأسي للتنبؤ بالسلاسل الزمنية حيث كان تركيزنا على التمهيد الأسي البسيط والمضاعف، وكذلك عرض طريقة التنبؤ لهولت ووينترز.

ولقد تناولنا في الفصل الرابع أهم نماذج السلاسل الزمنية العشوائية، حيث تطرقنا في بدايته إلى مفهوم العمليات العشوائية وصيغة الانعكاس والاضطرابات الهادئة والعلاقة بينهما. ما يقدم هذا الفصل كذلك نماذج الانحدار الذاتي ونماذج المتوسطات المتحركة ونماذج ARMA المختلطة واشتقاق الخصائص الرئيسية الهامة لها، بالإضافة إلى النماذج التكاملية والفصلية.

وفي الفصل الأخير نقدم تفصيلا للمراحل الأربعة لمنهجية بوكس جينكينز، حيث نبدأ بمرحلة التعرف على النموذج المبدئي الملائم وكيفية توظيف دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لاختيار النموذج الملائم، ثم نقدم أهم طرق التقدير مثل طريقة المربعات الصغرى الشرطية وطريقة المعقولية العظمى الشرطية، وفي المرحلة الثالثة تناولنا الفحوص والاختبارات التشخيصية لدراسة ملائمة النموذج المبدئي، أما المرحلة الأخيرة فقد تطرقنا إلى أسلوب التنبؤ، وكيفية تقدير أخطاء التنبؤ والتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية، وبناء فترات ثقة لها.

متطلبات المقياس

فيما يتعلق بما تحتاجه متابعة وفهم هذا المقياس، في فصوله الخمسة فيتطلب فهمها أن يقوم الطالب بمراجعة عدد من المفاهيم الرياضية والإحصائية أغلبها متضمنة في برامج الرياضيات، الإحصاء والاحتمالات للسنة الأولى والسنة الثانية تتمثل هذه المفاهيم أساسا في الدوال، الاشتقاق، التكامل، المتغيرات العشوائية، العزوم، كما يحتاج الطالب إلى قاعدة بسيطة في مفاهيم التوزيعات الاحتمالية الشهيرة.

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

مقدمة.....**أ–ب**

الفصل الأول: عموميات حول السلاسل الزمنية و تقدير مركباتها.....(**3**–*28*)

1.1 مفاهيم عامة.....**4**

1.1.1 تعريف السلسلة الزمنية.....**4**

2.1 المؤشرات الأساسية للسلسة الزمنية.....**6**

***3.1* مركبات السلسلة الزمنية** **6**

1.3.1 مركبة الاتجاه العام 6

2.3.1 التغيرات الموسمية 7

3.3.1 التغيرات الدورية 8

4.3.1 –التغيرات العشوائية.....8

4.1 تقدير الاتجاه العام **9**

1.4.1 أسلوب الانحدار: 9

2.4.1 المتوسطات المتحركة:.....14

***5.1* الشكل النموذجي العام وطرق اكتشاف مركبات السلسلة الزمنية**.....**18**

6.1 تقدير المركبة الفصلية.....**20**

7.1 تحليل التباين واختبار فيشر للكشف عن مركبات السلسلة.....**23**

8.1 تمـــارين **26**

9.1 مراجع وإحالات الفصل الأول.....**28**

الفصل الثاني: مفاهيم خصائص السلاسل الزمنية.....(**29**–**51**)

1.2 الإستقرارية:.....**30**

1.1.2 الاستقرار التام.....30

2.1.2 الإستقرارية الضعيفة.....31

2.2 أهمية الإستقرارية.....**34**

***3.2* الشوشرة البيضاء**.....**35**

4.2 دالة الارتباط الذاتي **35**

1.4.2 تقدير دالة الارتباط الذاتي.....36

5.2 دالة الارتباط الذاتي الجزئي.....**38**
1.5.2 تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي.....**39**
6.2 معامل التأخير.....**44**
7.2 معامل الفروقات.....**44**
8.2 السلاسل الزمنية غير المستقرة.....**46**
2.8.2 أهم العمليات غير المستقرة.....47
9.2 تمارين الفصل الثاني.....**50**
10.2 مراجع وإحالات الفصل الثاني.....**51**
الفصل الثالث: نماذج التمهيد الأسي للتنبؤ بالسلاسل الزمنية.....**(52–76)**
1.3 مفهوم التنبؤ.....**53**
2.3 التنبؤ باستخدام نماذج المتوسطات المتحركة.....**54**
1.2.3 تقنية الأوساط المتحركة البسيطة.....54
2.2.3 تقنية الأوساط المتحركة المرجحة.....55
3.2.3 تقنية الأوساط المتحركة المضاعفة.....55
3.3 مفهوم التمهيد الأسي.....**56**
4.3 نموذج التمهيد الأسي البسيط **57**
1.3.3 مجال الثقة للتنبؤ باستخدام التمهيد الأسي البسيط.....60
4.3 طريقة التمهيد الأسي المضاعف.....**63**
5.3 التنبؤ بطريقة هولت.....66
6.3 التنبؤ بطريقة هولت وينترز: **67**
7.3 تقييم نماذج التنبؤ.....**73**
8.3 تمارين الفصل الثالث.....**75**
9.3 مراجع وإحالات الفصل الثالث.....**76**
الفصل الرابع: نماذج السلاسل الزمنية العشوائية.....**(78–114)**
1–4 عمليات الانحدار الذاتي: *Autoregressive Processes*.....**78**

1.1.4 عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى.....79
2.1.4 عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية.....85
2.4 عمليات المتوسطات المتحركة 90
1.2.4 عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى.....90
2.2.4 عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية.....100
3.2.4 عمليات المتوسطات المتحركة العامة.....103
3.4 عمليات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة *ARMA*.....104
1.3.4 نموذج ARMA(1,1).....105
4.4 نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية *ARIMA*.....109
5.4 النماذج الموسمية المختلطة *SARIMA*.....111
1.5.4 النماذج الفصلية الأصلية.....111
2.5.4 النماذج الفصلية المختلطة المضاعفة 111
3.5.4 النماذج الفصلية المختلطة غير المضاعفة 112
6.4 تمارين الفصل الرابع.....112
7.4 مراجع وإحالات الفصل الثالث.....114
الفصل الخامس: منهجية بوكس جينكينز.....(115-141)
1.5 التعرف:.....116
1.1.5 تحديد رتبة الفروق.....117
2.1.5 تحديد رتبتي الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة.....118
3.1.5 اختبار معنوية معاملات الارتباط الذاتي النظرية.....119
2.5 التقدير.....123
1.2.5 تقدير معلمة نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى.....123
2.2.5 تقدير معلمات نماذج الانحدار الذاتي العامة.....126
3.5 التشخيص: 129
1.3.5 اختبار دالة الارتباط الذاتي للسلسلة.....129

2.3.5 اختبار معنوية معلمات النموذج.....132
3.3.5 معايير التفضيل بين النماذج المرشحة 132
4.5 التنبؤ.....133
1.4.5 التنبؤ ذو أصغر متوسط مربعات الأخطاء.....134
2.4.5 تقدير الأخطاء والتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية.....136
3.4.5 التنبؤ بمجال.....137
5.5 تمارين الفصل الخامس..... 139
6.5 مراجع وإحالات الفصل الخامس.....141
6.المراجع.....145–142
7. الملاحق.....151–146

الفصل الأول: عموميات حول السلاسل الزمنية وتقدير مركباتها

تمهيد:

إن موضوع السلاسل الزمنية واسع جدا إذ أن الطرق الإحصائية والرياضية المتبعة في تحليل السلاسل الزمنية كثيرة ومتعددة، فمعظم هذه التحاليل أصبحت تعطي دوال مهمة للتقدير فضلا عن نقاط أخرى مهمة جدا في اتخاذ القرارات في مواضيع كثيرة وأنه يساعد على ملاءمة بعض النماذج الرياضية والإحصائية للمشكلة المراد دراستها، حيث يحدد بوضوح المعادلة ويستدل من تقدير معلماتها إلى التنبؤ نحو المستقبل واتخاذ القرارات الصحيحة، هذا إذا كانت السلسلة مستقرة وليس فيها مشاكل، وان استقرارية السلسلة ضرورية جدا في التحليل وذلك للحصول على نموذج رياضي ملائم للسلسلة.

إن دراسة نماذج التنبؤ تتطلب منا دراسة تحليلية للسلاسل الزمنية ومركباتها وأشكالها بعد التطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية حول التنبؤ. ولاختيار أحد هذه الطرق فإنه توجد عدة معايير تؤخذ بعين الاعتبار بعد تحديد الأهداف المتوخاة من عملية التوقع، وهو ما سنحاول التطرق إليه في هذا الفصل.

1.1 مفاهيم عامة

من المعروف أنه يمكن تصنيف البيانات التي يتم تحليلها إحصائيا إلى نوعين من البيانات هما بيانات إقطاعية وكذلك بيانات السلال الزمنية ومنه:

- بيانات قطاعية: وهي البيانات عن نشاط معين لنفس الفترة الزمنية، أي أنها تعبر عن مستوي أفقي، وبالتالي فهي لا تدخل في التحليل ،ومثال ذلك بيانات الإنتاج أو الاستهلاك لقطاعات مختلفة خلال سنة معينة أو شهر معين .

- بيانات سلاسل الزمنية: وهي بيانات عن ظاهرة معينة خلال مدى زمني يعبر عنه كفترات زمنية وهي المعنية بالدراسات في هذا المبحث. (سعيد هتهات، 2006ص 130)[1].

1.1.1 تعريف السلسلة الزمنية

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات لظاهرة ما مرتبة حسب تسلسل زمني، بحيث كل فترة زمنية يقابلها قيمة عددية للمؤشر تسمى مستوى السلسلة. وبمعنى آخر هي متتالية لقيم متغير إحصائي خلال مجالات زمنية متساوية "أسبوع، شهر، سنة،...." أو هي مجموعة من المعطيات لظاهرة ما مشاهدة عبر الترتيب التصاعدي للزمن. (شفيق العتوم، فتحي العاروري، 1995، ص: 295)[2].

- **تعريف رياضي:**

تعرف السلسة الزمنية رياضياً بأنها متتابعة من المتغيرات العشوائية معرفة ضمن فضاء الاحتمالية متعددة المتغيرات ومؤشرة بالدليل t والذي يعود إلى مجموعة دليلية T ويرمز للسلسة الزمنية عادة $\{X(t), t\epsilon T\}$ أو

اختصارا X(t) وتتكون من متغيرين أحدهما تفسيري وهو متغير الزمن والآخر متغير خارجي وهو قيمة الظاهرة المدروسة ويمكن التعبير عنها رياضياً كالآتي: (MONINO. J-L et autres, (2004), p 179)[3]

$$x_t = f(t) \quad .....(1-1)$$

أما إذا كان هناك عوامل أخرى (متغيرات توضيحية أخرى) إلى جانب الزمن تؤثر على الظاهرة y نستخدم العلاقة الرياضية التالية:

$$x_t = f(t, x_1, x_2, ..., x_2) \quad .....(2-1)$$

ومن استعمالات السلاسل الزمنية:

- التنبؤ بالمستقبل باستعمال البيانات الإحصائية التي أخذت في الماضي.
- اكتشاف الدورات التي تتكرر فيها بيانات فترة محددة.
- اكتشاف الحالات الاقتصادية الشاذة التي تحصل في زمن ما.

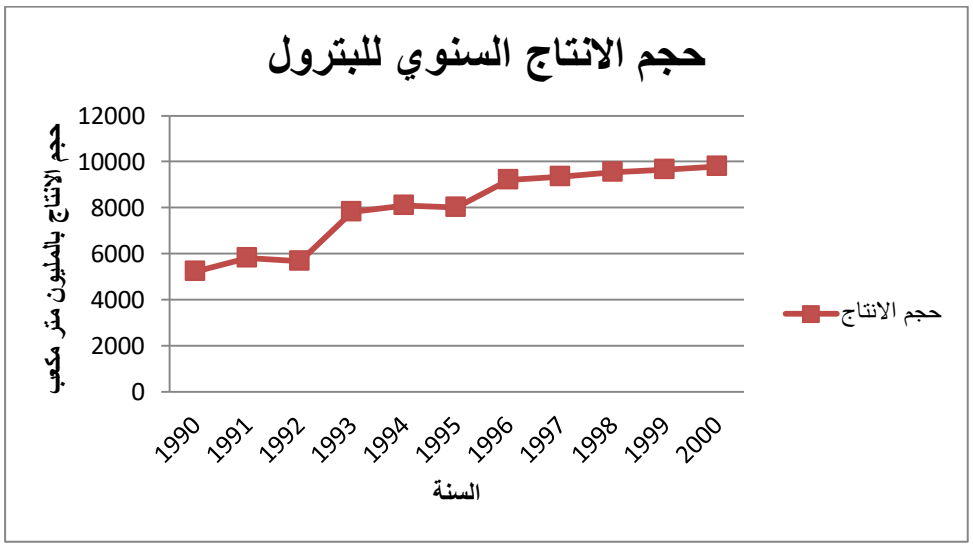
ويمكن تمثيل السلاسل الزمنية على شكل بياني بتعيين أزواج مرتبة (الزمن، قيمة الظاهرة) في المستوى البياني، ثم توصيل تلك النقاط، ويسمى المنحنى الناتج: المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية. وتعرض السلسلة الزمنية عادة في شكل جدول أو خط أو منحنى بياني كما في المثال التالي:

مثال1-1: يوضح الجدول التالي حجم الإنتاج السنوي للبترول بالمليون متر مكعب في إحدى الدول خلال الفترة 1990-2000

جدول1-1: حجم الانتاج السنوي للبترول خلال الفترة 1990-2000 بالمليون متر مكعب

السنوات	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
حجم الانتاج	5210	5820	5655	7800	8100	8010	9200	9335	9532	9652	9800

الشكل1-1: منحنى بياني لبيانات المثال1-1



المصدر: بيانات المثال 1-1 بالاعتماد على برنامج *excel*

2.1 المؤشرات الأساسية للسلسة الزمنية:

وهي مجموعة المؤشرات تقيس سرعة تغير الظاهرة المدروسة خلال فترة زمنية معينة، أهمها التغير المطلق، معدل النمو، معدل الزيادة إن حساب هذه المؤشرات قائم علي مبدأ المقارنة فيما بين المستويات السلسلة الزمنية، وعادة ما تجري هذه المقارنة بالنسبة لمستوى معين من السلسلة الزمنية، يستوي الأساس، وغالبا ما يكون مستوى متوسط الظاهرة لعدة فترات زمنية، خاصة عند السلاسل الزمنية شديدة التقلبات. (سعيد هتهات، 2006، ص131) [4]

3.1 مركبات السلسلة الزمنية

تكون مشاهدات السلسلة الزمنية تابعة للزمن الذي يحدد خاصيتها أو سمتها الرئيسية، والعلاقة الزمنية هذه قد تأخذ أشكالا مختلفة، وعادة ما تكون السلاسل الزمنية ذات اتجاه واحد، فهي منتظمة حيث تتكرر دوريتها بنفس الصيغة كل سنة أو ذات تغير عشوائي لعناصر مرتبطة ذاتيا، أي كل قيمة مرتبطة بالقيم السابقة وتغيير بواسطة أو بسبب عامل عشوائي .

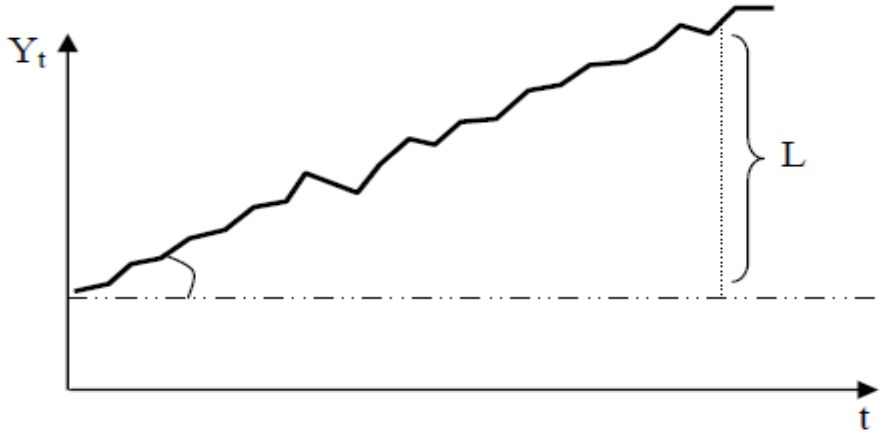
إن معظم السلاسل الزمنية تتأثر بتغيرات عدة وذلك نتيجة عوامل كثيرة منها اقتصادية وطبيعية وموسمية ....الخ. وبعض هذه العوامل قد تؤثر على تغيرات السلسلة الزمنية في الأجل الطويل والقصير. و نقصد بها كذلك العناصر المكونة للسلسة الزمنية، وهذا بهدف معرفة سلوك السلسة وتحديد مقدار تغيراتها وإدراك طبيعتها واتجاهها حتى يصبح بالإمكان القيام بالتقديرات اللازمة والتنبؤات الضرورية، وهذه العناصر هي :

1.3.1 مركبة الاتجاه العام

هي النمو الطبيعي للظاهرة، حيث يعبر عن تطور متغير ما عبر الزمن، سواء كان هذا التطور بميل موجب أو سالب، إلا أن هذا التطور لا يلاحظ في الفترات القصيرة، بينما يكون واضحا في الفترات الطويلة ويرمز له بالرمز L. ويمكن تعريف الاتجاه العام بأنه التحركات الصاعدة أو الهابطة في مستوى السلسلة. وعادة ما يمكن تقريب الاتجاه العام بواسطة كثير حدود أو دالة أسية في الزمن.

والشكل رقم 1-3 يوضح حالة وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة.

الشكل1–3: يوضح حالة وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة

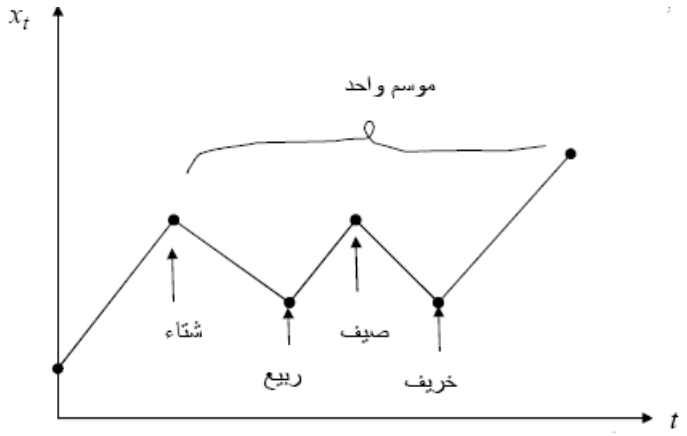


2.3.1 التغيرات الموسمية (الفصلية) (*Seasonal Variations*)

وهي التغيرات التي تحدث بانتظام في الوحدات الزمنية متعاقبة والتي تنجم من تأثير عوامل خارجية، أو هي تقلبات في مواسم أو فصول السنة والتغييرات الموسمية عادة تكرر نفسها. فالعوامل الطبيعية من أهم العوامل التي تسبب التغيرات الموسمية بالإضافة إلى عوامل أخرى. كما إن الاختلاف في فصول السنة يعد أحد الأسباب الرئيسة في التغيرات الموسمية، ويرمز لها بالرمزS .

وكمثال لهذه التغيرات نأخذ: العطل والإجازات. والشكل التالي يوضح حالة وجود مركبة موسمية في السلسلة الزمنية y_t .

الشكل 1–4:يوضح حالة وجود مركبة الموسمية في السلسلة الزمنية



3.3.1 التغيرات الدورية: *Cyclical Variation*

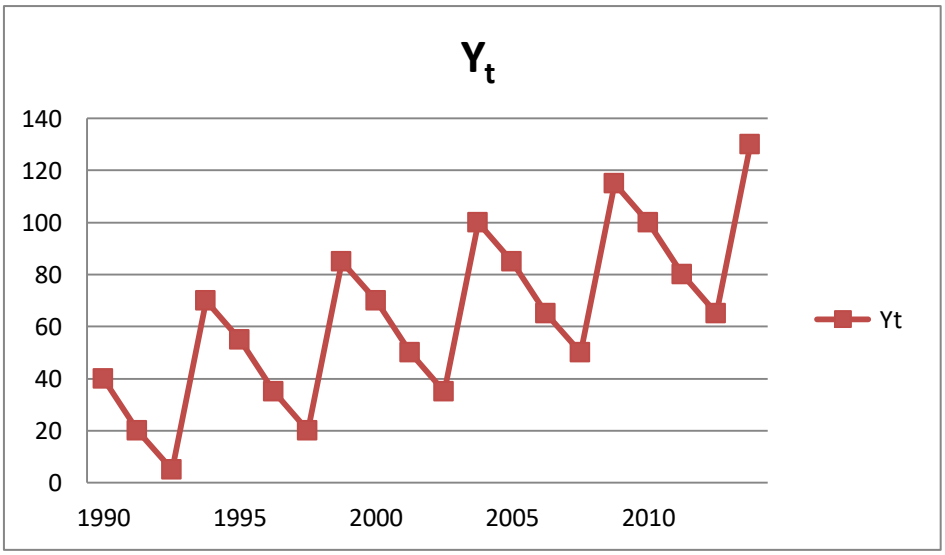
وهي تغيرات تؤدي إلى حدوث نمط دوري في السلسلة يتكرر كل فترة زمنية طويلة. وهي في ذلك تشبه التغيرات الموسمية إلا أنها تختلف عنها في العديد من الأوجه:

- طول الدورة التي تحدثها هذه التغيرات أكبر من طول الدورة الموسمية وتسمى هذه التغيرات بالتغيرات طويلة الأجل.
- أسباب حدوث هذه التغيرات حيث أن هذه التغيرات تعكس آثار الدورات والتقلبات الاقتصادية من حيث الكساد والرواج للظواهر الاقتصادية.
- طول هذا النوع من التغيرات لا يمكن تحديده بشكل دقيق فهو يتسم بعدم الانتظام مما أدى إلى عدم الاعتماد على تقديره. خاصة أن هذا النوع من التغيرات يحتاج إلى فترة طويلة لاكتشافه وتقديره.

وبالمقارنة بالتغيرات الموسمية فإن طول الفترة الزمنية غير معلوم وإنما يتراوح عادة بين 03 إلى 10 سنوات، وبالتالي يصعب التعرف علي التقلبات الدورية ومقاديرها ألانها تختلف اختلافا كبيرا من الدورة الأخرى سواء من حيث طول الفترة الزمنية للدورة أو اتساع تقلباتها ومدادها ،ونرمز لها بالمز : C

والشكل التالي يوضح حالة وجود مركبة الدورات في السلسلة الزمنية Y_t .

الشكل 1-5:يوضح حالة وجود مركبة الدورات في السلسلة الزمنية



4.3.1 –التغيرات العشوائية: *Random Variations* (et)

ويقصد بها التحركات المفاجئة في السلسلة الزمنية الراجعة للعوامل العشوائية *Randomes* مثل الزلازل والبراكين و الأوبئة والحروب والإضرابات العمالية، التي لا يمكن التنبؤ بها أو تحديد حجمها نظرا لعشوائيتها، كما تعتبر من قبيل التحركات العرضية التغيرات التي تطرأ على السلسلة الزمنية خلال فترة معينة نتيجة

الصدفة، فعلى سبيل المثال قد يزيد حجم المبيعات لأحد المحلات فجائيا خلال شهر ما نتيجة إقامة مهرجان رياضي غير متوقع بالقرب منه خلال ذلك الشهر، وهي أيضا عبارة عن تذبذبات وانحرافات أو تغيرات غير منتظمة (عشوائية) وهي عادة ما تكون تابعة لأحداث مرتبطة باحتمالات ضعيفة جدا ومن ثم فإنها لا تقع عادة على المدى الطويل ولكن تعتبر (تفترض) عادة أن أثر هذه التغيرات غير المنتظمة يكون على المدى القصير كما يمكن اعتبارها تحرف أو تعدل من الاتجاه الموسمي أو الدوري كذلك (مثل تأثير الإضرابات العمالية. (وفي الواقع قل ما نجد أسباب هذه التغيرات مشخصة تماما لأنها تنتج عادة من عدة عوامل أو أحداث غير محددة، وبالتالي يصبح غير ممكن معالجة السلسلة الزمنية بالأساليب الإحصائية العادية لإزالة العامل العشوائي.

إذن عموما تصف هذه التغيرات ما تبقى من العوامل التي لم تدخل في العناصر السابقة للسلسلة الزمنية، وقد تعزى لأخطاء لا يمكن تفسيرها، والتغيرات غير المنتظمة قد تقع بصورة غير متوقعة تماما كما هو الحال في حال مثلا التدهور الحاد لمبيعات منتوج ما إثر ظهور منتوج بديل وبجودة عالية وبسعر أقل، أو حالة تزايد المبيعات توقعا لنشوب الحروب، أو انقطاع التموينات لإنتاج منتج ما بسبب الظروف الجوية، لذا يعتبر هذا العنصر عشوائي كون وقوعه يعتمد على الصدفة، إلا أن تأثيره يكون مؤقتا ويزول بزوال الأسباب المؤدية إليه.

4.1 تقدير الاتجاه العام

الاتجاه العام أهم مركبة من مركبات السلسلة الزمنية ويمثل التغير طويل الأجل في السلسلة، وقياسه مهم للأسباب التالية:

- يمكننا من معرفة الكيفية التي تتطور بها الظاهرة على المدى الطويل.
- يساعد في التنبؤ بما سيكون عليه حال القيم المستقبلية.
- يستخدم في حذف أثر الاتجاه العام من السلسلة حتى دراسة المتغيرات بشكل أفضل.

سوف ندرس هنا أهم طريقتين لقياس الاتجاه العام وهما طريقة الانحدار وطريقة المتوسطات المتحركة. وسنفترض أن هذه السلسلة يمكن تجزئتها إلى مركبتين إحداهما أساسية مركبة الاتجاه العام. وهي المركبة المنتظمة الوحيدة في السلسلة والتي يمكن تقديرها والأخرى التغيرات غير المنتظمة والتي لا يمكن تقديرها. أو التنبؤ بها.

1.4.1 أسلوب الانحدار:

يعتبر أسلوب الانحدار من أهم الطرق التقليدية في تقدير الاتجاه العام. ويعتمد الأسلوب على تحديد معادلة رياضية غير عشوائية $f(t)$ لتمثيل الاتجاه العام، ومن ثم يفترض أن أسلوب الانحدار الملائم لدراسة تطور الظاهرة يمكن كتابته على الصورة:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t \quad .....(3-1)$$

حيث $f(t)$ دالة في الزمن تمثل مركبة الاتجاه العام، ويفترض الأسلوب المقترح هنا أن هذه الدالة محددة *deterministic* أي غير عشوائية. وعادة ما يمكن التعبير عن هذه الدالة عن طريق كثير حدود أو صورة أسية ε_t تمثل التغيرات العشوائية التي تعبر عن التغيرات غير المنتظمة في السلسلة. والتي اسطلح على تسميتها بالأخطاء العشوائية.

- **الاتجاه الخطي *linear trend*:**

تظهر الكثير من الظواهر التي تنشأ في مجالات مختلفة اتجاها عاما خطيا مع الزمن على المدى الطويل، وفي مثل هذه الحالات يمكن كتابة النموذج وفق الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \quad .....(4-1)$$

حيث تمثل Y_t قيمة الظاهرة عند الفترة الزمنية t، والثابتان β_0 ، β_1 يمثلان معلمتي النموذج أو معاملي الانحدار. ويكون النموذج ملائما إذا كان مستوى السلسلة يتغير بمقدار ثابت بتغير الزمن فترة زمنية واحدة. ويتم تقدير النموذج أعلاه باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، حيث يلعب الزمن هنا دور المتغير المستقل.

مثال1-2: فيما يلي بيانات عدد المواليد بالآلاف في أحدى الدول خلال مدة زمنية معينة.

جدول1-2 عدد المواليد بالآلاف في أحدى الدول للفترة 2001-2008

السنة	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
عدد المواليد	15	20	35	30	35	40	45	50

المطلوب:

1- أوجد تقدير معادلة الاتجاه العام

2- تنبأ بقيمة الاتجاه العام سنة 2009.

الحل:

1. تقدير معادلة الاتجاه العام

$$[X'X] = \begin{pmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{pmatrix}, \quad (X'X)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{336}} \begin{pmatrix} 204 & -36 \\ -36 & 8 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 270 \\ 1410 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\mathbf{336}} \begin{pmatrix} 204 & -36 \\ -36 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 270 \\ 1410 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.86 \\ 4.64 \end{pmatrix}$$

الشكل 1–6: نتائج التقدير باستخدام برنامج *EVIEWS 10*

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 09/08/19 Time: 05:14
Sample: 2001 2008
Included observations: 8

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	12.85714	2.883067	4.459537	0.0043
T	4.642857	0.570932	8.132062	0.0002

R-squared	0.916817	Mean dependent var	33.75000
Adjusted R-squared	0.902954	S.D. dependent var	11.87735
S.E. of regression	3.700064	Akaike info criterion	5.666895
Sum squared resid	82.14286	Schwarz criterion	5.686756
Log likelihood	-20.66758	Hannan-Quinn criter.	5.532945
F-statistic	66.13043	Durbin-Watson stat	2.445652
Prob(F-statistic)	0.000186		

المصدر: *EVIEWS10*

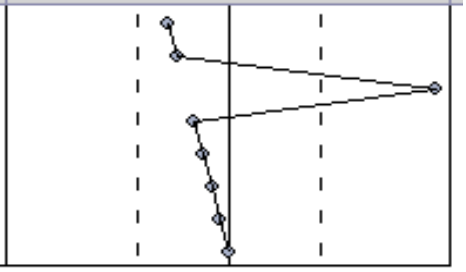
ومنه معادلة الاتجاه العام

$$\hat{Y}_t = 12.86 + 4.64t$$

بالتعويض عن قيم t نجد القيم المقدرة لـ Y

الشكل1–7: القيم الأصلية، المقدرة، البواقي

Actual	Fitted	Residual	Residual Plot
15.0000	17.5000	-2.50000	
20.0000	22.1429	-2.14286	
35.0000	26.7857	8.21429	
30.0000	31.4286	-1.42857	
35.0000	36.0714	-1.07143	
40.0000	40.7143	-0.71429	
45.0000	45.3571	-0.35714	
50.0000	50.0000	-1.4E-14	



المصدر: *EVIEWS10*

جدول رقم1–1 : القيم الأصلية، المقدرة، البواقي

المشاهدات	y	$\hat{y}$	e	e^2
2001	*15*	*17,500*	*-2,500*	*6,25*
2002	*20*	*22,143*	*-2,143*	*4,59*
2003	*35*	*26,786*	*8,214*	*67,47*
2004	*30*	*31,429*	*-1,429*	*2,04*
2005	*35*	*36,071*	*-1,071*	*1,15*
2006	*40*	*40,714*	*-0,714*	*0,51*
2007	*45*	*45,357*	*-0,357*	*0,13*
2008	*50*	*50,000*	*0,000*	*0,00*

2. التنبؤ بقيمة الاتجاه العام سنة 2009.

$$SCR = \sum_{i=1}^{8} e_i^2 = 82.142$$

$$s^2 = \frac{82.142}{6} = 13,690 \quad s = 3,70, \quad T_c = \frac{4.648}{0.570} = 8.132$$

عند $\alpha = 0.05$ $t_6^{\alpha/2} = t_6^{0.025} = 2.447$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة لستيودنت T_c أكبر من القيمة المجدولة $t_6^{0.025} = 2.447$

ولذلك نرفض الفرضية العدمية $\beta = 0$ ونقر بوجود علاقة معنوية بين الظاهرة والزمن عند مستوى معنوية 5% نعوض في النموذج المقدر بـ t=9

$$\hat{y}_t = 12.857 + 4.648 \times (9) = 54,689$$

ومنه مجال التنبؤ يكون كالتالي:

$$y_0 = \hat{y}_0 \mp t_{n-2}^{\alpha/2} \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + 1 + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^{n} (X_t - \bar{X})^2}} = 54.689 \mp 2.447 \times 3.70 \sqrt{1 + \frac{1}{8} + \frac{(9-4.5)^2}{42}}$$

– الاتجاه العام من الدرجة الثانية *Quadratic Trend*:

أحيانا قد لايكون الخط المستقيم ملائما لتمثيل الاتجاه العام والافضل توفيق منحنى من الدرجة الثانية لتمثيله وفي مثل هذه الحالات يمكن كتابة النموذج العام للظاهرة على الصورة:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t \quad .....(5-1)$$

مثال1–3: فيما يلي بيانات قيمة المبيعات بآلاف الدولارات من إحدى السلع التي ينتجها أحد المصانع

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	*2008*
قيمة المبيعات	12	8	6	5	6	8	8	10

المطلوب:

1. قدر معادلة الاتجاه العام بافتراض انها من الدرجة الثانية

2. أوجد القيم المقدرة والبواقي

الحل:

1. تقدير معادلة الاتجاه العام

$$[X'X]=\begin{pmatrix}8 & 36 & 204\\ 36 & 204 & 1296\\ 204 & 1296 & 8772\end{pmatrix},\quad (X'X)^{-1}=\begin{pmatrix}1.946 & -0911 & 0.089\\ -0.911 & 0.506 & -0.54\\ 0.089 & -0.054 & 0.006\end{pmatrix},$$

$$X'Y=\begin{pmatrix}62\\ 273\\ 1648\end{pmatrix}\quad ,\quad \hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y\quad ,\quad \hat{\beta}=\begin{pmatrix}14.767\\ -3.994\\ 0.434\end{pmatrix}$$

الشكل 1–8: نتائج التقدير باستخدام برنامج *EVIEWS 10*

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 09/08/19 Time: 05:39
Sample: 2001 2008
Included observations: 8

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
T	-3.994048	0.701498	-5.693601	0.0023
T2	0.434524	0.076088	5.710798	0.0023
C	14.76786	1.375912	10.73314	0.0001

R-squared	0.868119	Mean dependent var	7.875000
Adjusted R-squared	0.815367	S.D. dependent var	2.295181
S.E. of regression	0.986215	Akaike info criterion	3.090111
Sum squared resid	4.863095	Schwarz criterion	3.119901
Log likelihood	-9.360443	Hannan-Quinn criter.	2.889185
F-statistic	16.45655	Durbin-Watson stat	1.523664
Prob(F-statistic)	0.006316		

المصدر: *EVIEWS10*

حيث النموذج المقدر هو:

$$\hat{Y}_t = 14.767 - 3.994t + 0.434t^2$$

بالتعويض عن قيم t نجد القيم المقدرة لـ Y المحسوبة في الجدول 1–2

جدول: 1–2: السلسلة الأصلية، السلسلة المقدرة، البواقي

المشاهدات	Y_t	$\hat{y}_t$	e_t	e_t^2
1	*12*	*11.208*	*0.791*	*0,626*
2	*8*	*8.51*	*-0.517*	*0,267*
3	*6*	*6.696*	*-0.696*	*0,484*
4	*5*	*5.744*	*-0.744*	*0,554*
5	*6*	*5.66*	*0.339*	*0,115*
6	*8*	*5.446*	*1.55*	*2,403*
7	*8*	*8.101*	*-0.101*	*0,010*
8	*10*	*10.625*	*-0.625*	*0,391*

نعوض في النموذج المقدر بـ t=9

$$\hat{y}_t = 14.776 - 3.994(9) + 0.434(81) = 13.984$$

– الاتجاه الأسي: *Exponential trend*

تظهر العديد من السلاسل الزمنية التي تنشأ في مجالات الاقتصاد اتجاها عاما أسيا مع الزمن خاصة في المدى الطويل. وفي مثل هذه الحالات يمكن التعبير عن الاتجاه العام كما يلي:

$$Y_t = ce^{rt+\varepsilon_t} \quad .....(6-1)$$

حيث r و c ثابتان وفي مثل هذه الحالات يمكن التعبير عن مشاهدات السلسلة يالستخدام النموذج الأسي التالي:

$$Y_t = ce^{rt}e^{\varepsilon_t}$$

حيث ε_t تمثل الخطأ العشوائي، ويمكن تحويل النموذج أعلاه إلى الشكل الخطي باستخدام اللوغاريتم أي:

$$\ln Y_t = \ln c + rt + \varepsilon_t$$

ومن ثم يمكن تطبيق القواعد الخاصة بتحليل الانحدار الخطي البسيط على البيانات المحولة $\ln Y_t$ للحصول على تقدير لكل من $\ln c$ و rt ، ويمكن الحصول على تقدير الثابت كما يلي: $\hat{c} = e^{\hat{\ln c}}$

وبالتالي يكون تقدير منحنى الاتجاه الأسي كما يلي: $\hat{Y}_t = \hat{c}e^{\hat{r}t}$

2.4.1 المتوسطات المتحركة:

تعتبر من بين الطرق البسيطة لتقدير الاتجاه العام وذلك بتمهيد البيانات وتخليصها من التغيرات قصيرة الأجل التي تحدث بسبب التغيرات الفجائية العشوائية (والتغيرات الموسمية إن وجدت).

ولحساب المتوسطات المتحركة لابد أولا من تحديد عدد معين من الوحدات الزمنية p يطلق عليه طول الدورة. يكون أساسا لحساب هذه المتوسطات وتمهيد البيانات بالتخلص من الذبذبات والتعرجات التي تعتريه. بعد ذلك يتم تعريف وحساب المتوسطات المتحركة واللذان يختلفان باختلاف كون العدد p فردي أو زوجي. (مولود حشمان، 1998ص69) [5]

– في حالة p فردي: $p = 2m+1$: إذا كان العدد p فرديا فإن المتوسط المتحرك يعرف كما يلي:

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{2m+1}\sum_{i=-m}^{i=m} y_{t+i} \quad .....(7-1)$$

أي:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{p}\left[y_{t-m} + ... + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + ... + y_{t+m}\right]$$

فإذا كانت $p=5$ فإن:

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{5}\sum_{i=-2}^{2} y_{t+i} = \frac{1}{5}\left(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}\right)$$

ويلاحظ على هذه الصورة أنه تعذر حساب المتوسطات المتحركة لأول $\frac{p-1}{2}$ مشاهدة ولآخر $\frac{p-1}{2}$ مشاهدة. وبذلك نحصل على $n-(p-1)$, متوسط متحرك فقط لسلسلة طولها n تمثل القيم الاتجاهية المناظرة للقيم: $y_t : t = \frac{(p+1)}{2},...,n-\frac{(p-1)}{2}$

يوضع كل متوسط متحرك $\hat{y}_t$ أمام منتصف الفترة الزمنية التي حسب لها المتوسط الحسابي، فيوضع المتوسط المتحرك الأول $\hat{y}_{\frac{p+1}{2}}$ أمام القيمة $y_{\frac{p+1}{2}}$ ويوضع المتوسط المتحرك $\hat{y}_{\frac{p+3}{2}}$ أمام القيمة $y_{\frac{p+3}{2}}$ ، وهكذا تمثل هذه المتوسطات تقديرات الاتجاه العام للقيم المناظرة.(سمير مصطفى شعراوي، 2005. ص 64)[6]

وعلى سبيل المثال إذا كان $p=3$ فإن:

$$\hat{y}_2 = \frac{1}{3}[y_1 + y_2 + y_3]$$
$$\hat{y}_3 = \frac{1}{3}[y_2 + y_3 + y_4]$$
$$\vdots$$
$$\hat{y}_{n-1} = \frac{1}{3}[y_{n-2} + y_{n-1} + y_n]$$

وتكون المتوسطات $\hat{y}_2, \hat{y}_3,..., \hat{y}_{n-1}$ تقديرات الاتجاه العام للقيم $y_2, y_3,..., y_{n-1}$ على التوالي.

مثال1–4: أوجد المتوسطات المتحركة لبيانات السلسلة الزمنية الآتية بافتراض أن طول الدورة يساوي 5 وحدات زمنية ثم ارسم معادلة الاتجاه العام المقدرة في مقابل القيم الحقيقية.

جدول رقم 1–3: خاص بالمثال 1–4

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	20	25	18	22	25	30	33	27	35	28	25	30

الحل:

بما أن طول الدورة $p=5$ فإنه نقوم بحساب المتوسطات المتحركة باستخدام العلاقة التالية:

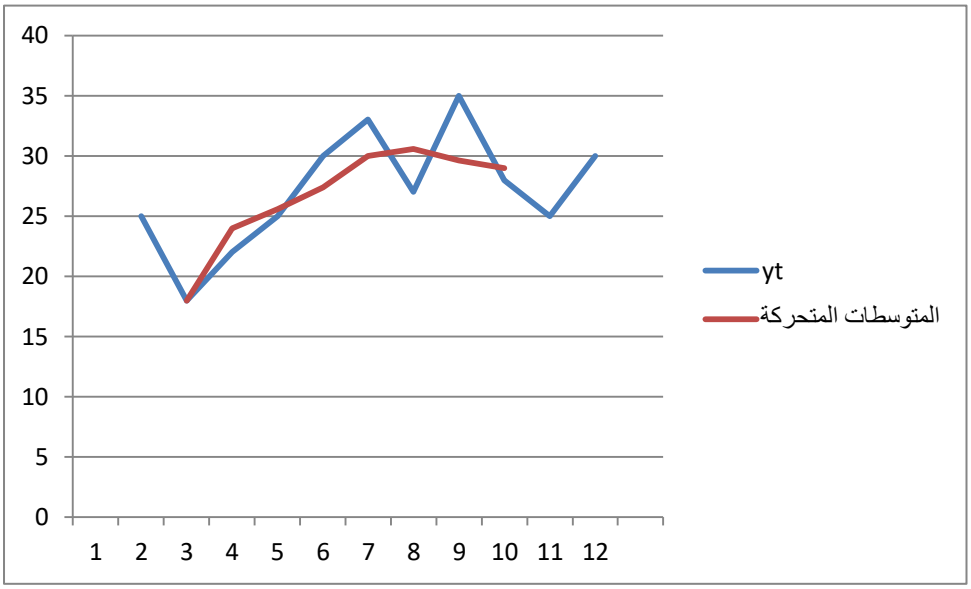
$$\hat{y}_t = \frac{1}{p}[y_{t-m} + ... + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + ... + y_{t+m}] \quad , p = 2m+1$$

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{5}[y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}] = \frac{1}{5}[20+25+18+22+25] = 22$$

جدول 1-4 حساب المتوسطات المتحركة لبيانات السلسلة الزمنية للمثال 1-4

y_t	المتوسطات المتحركة $\hat{y}_t$
20	------
25	------
18	1/5(20+25+18+22+25)=22
22	24
25	25,6
30	27,4
33	30
27	30,6
35	29,6
28	29
25	------
30	------

الشكل1-10: التمثيل البياني للمتوسطات المتحركة



نلاحظ أن منحنى المتوسطات المتحركة أو تقديرات الاتجاه العام في الشكل رقم (1-10) أكثر تمهيدا ونعومة من منحنى السلسلة الأصلي والسبب في ذلك أنه بأخذ المتوسطات المتحركة تميل التغيرات غير المنتظمة أن تلاشى لأنهاتغيرات لا تستمر طويلا وأحيانا تؤثر على الظاهرة بالزيادة وأحيانا أخرى بالنقصان.

ب. في حالة p زوجي: من ناحية أخرى إذا كان طول الدورة زوجيا فإن المتوسط المتحرك لا يمكن وضعه أمام إحدى القيم المشاهدة وإنما يوضع بين قيمتين معينتين، ومن ثم كان لابد من مركزة المتوسطات المتحركة

حتى يتسنى وضعها مقابلة للقيم الحقيقية المشاهدة، ولذلك يعرف المتوسط المتحرك إذا كان طول الدورة زوجي على الصورة:

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2}y_{t-m} + \sum_{i=-m+1}^{m+1} y_{t+i} + \frac{1}{2}y_{t+m}\right] \dots\dots\dots\dots\dots (8-1)$$

حيث: $p = 2m$

ونلاحظ تعذر حساب المتوسطات المتحركة لأول $p/2$ مشاهدة وللآخر $p/2$ مشاهدة وبذلك نحصل على عدد $(n-p)$ متوسط متحرك فقط لسلسلة طولها n تمثل القيم الاتجاهية المناظرة للقيم y_t : $t = \frac{p}{2}+1,.\frac{p}{2}+3..,n-p$

مثال1–5: تمثل البيانات الآتية القروض ربع السنوية بآلاف الدولارات التي مولها أحد البنوك في ثلاث سنوات.

جدول1–5: القروض ربع السنوية بآلاف الدولارات

الفصل / السنة	الفصل الأول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصل الرابع
2000	19	24	34	43
2001	23	28	38	47
2002	32	32	38	43

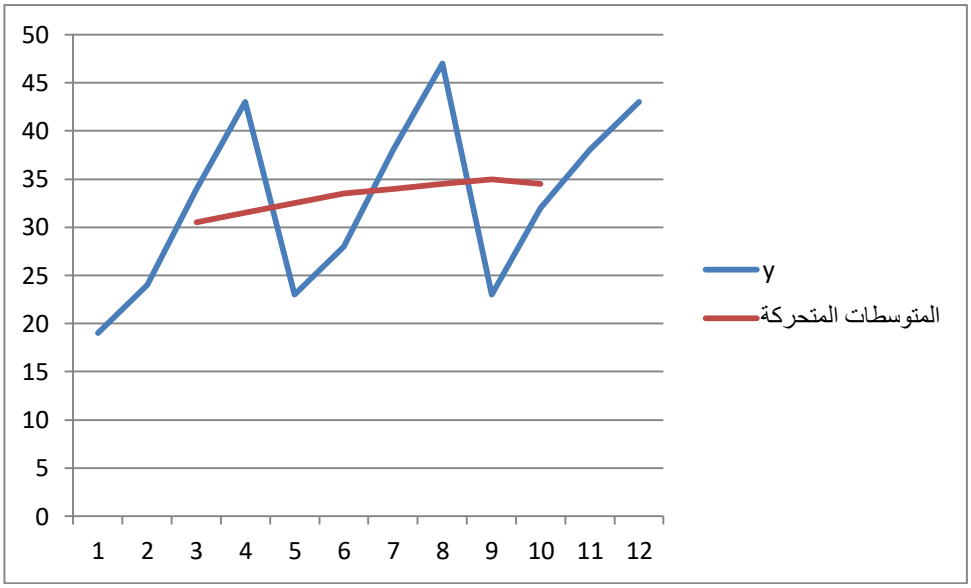
– أحسب المتوسطات المتحركة لهذه البيانات وارسمها في مقابل القيم الأصلية.

الحل:

جدول1–6 المتوسطات المتحركة خاصة بالمثال1–5

السنة	y	المتوسطات المتحركة
1	19	
2	24	
3	34	30,5
4	43	31,5
5	23	32,5
6	28	33,5
7	38	34
8	47	34,5
9	23	35
10	32	34,5
11	38	
12	43	

الشكل1-10: التمثيل البياني للمتوسطات المتحركة



5.1 الشكل النموذجي العام وطرق اكتشاف مركبات السلسلة الزمنية.

أولا- الشكل النموذجي العام السلسلة الزمنية : يفترض نموذج السلسلة الزمنية أن قيم السلسلة دالة في مجموعة من العناصر المكونة لها وفقا للزمن، وفي هذا الصياغ يبرز نموذجين (عموما) لتجسيد العلاقة بين العناصر المتداخلة والتي بتفاعلها تتشكل السلسلة الزمنية، ويمكن أن نعتبر أن نموذج السلسلة الزمنية يظهر على شكل معادلة تحدد كيفية تعامل أو تفاعل المكونات فيما بينها، أي أنه يمكن كتابة قيمة الظاهرة بدلالة العوامل الأربعة وفقا للزمن بأحد النموذجين التاليين:

أ. **النموذج التجميعي additive model**: أي نموذج حاصل الجمع، ويفترض هذا النموذج أن قيم الظاهرة تساوي مجموع مكوناتها الأربعة ويعني هذا الافتراض أن قيمة كل من هذه المكونات لا تؤثر ولا تتأثر بقيمة غيرها من المكونات، أي أنها مستقلة. فإذا رمزنا للقيمة المشاهدة بالرمز Y والاتجاه العام بالرمز T والتغير الفصلي بالرمز S والتغير الدوري بالرمز C والتغير العشوائي بالرمز I، فإن النموذج التجميعي يكتب على الصيغة التالية:

$$Y = T + S + C + I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9-1)$$

ب. **النموذج الجدائي *multiplicative model***: هو أكثر استخداما وشيوعا في التطبيقات العملية ولذلك ستقتصر دراستنا في تقدير المركبات الفصلية والتنبؤ بالسلاسل الفصلية على هذا النموذج، ويأخذ النموذج الشكل العام التالي:

$$Y = T * S * C * I \quad \ldots\ldots\ldots (10-1)$$

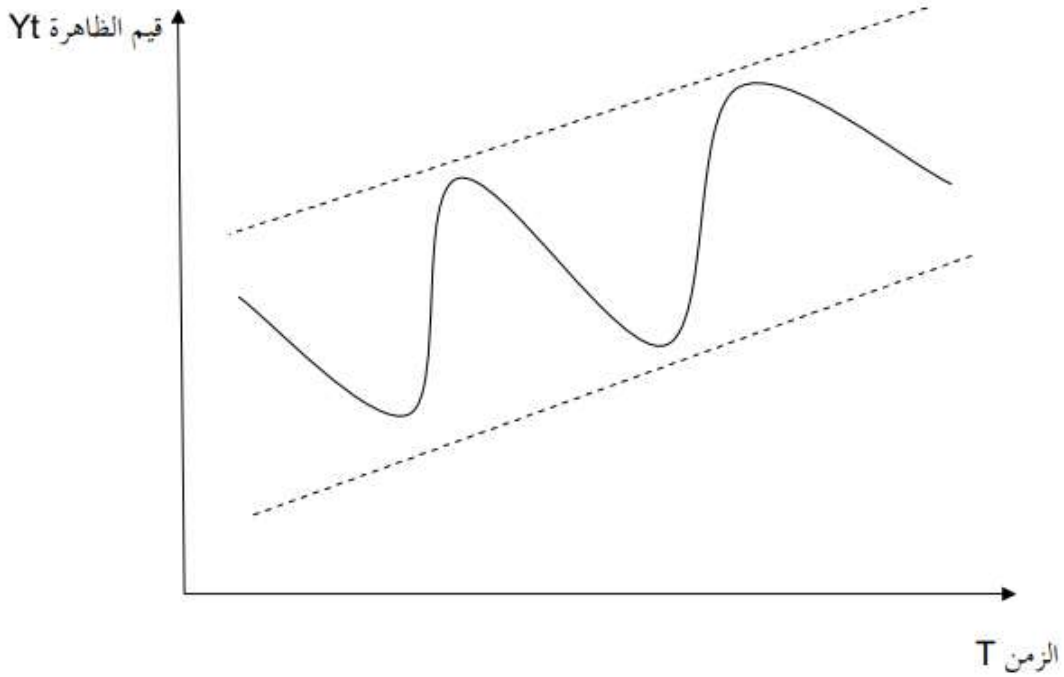
وهذا هو النموذج الأكثر استخداما في تحليل السلاسل الزمنية.

وفي هذا النموذج تحسب T جميعها بنفس وحدات البيانات الأساسية. وتحسب باقي المكونات كنسب.

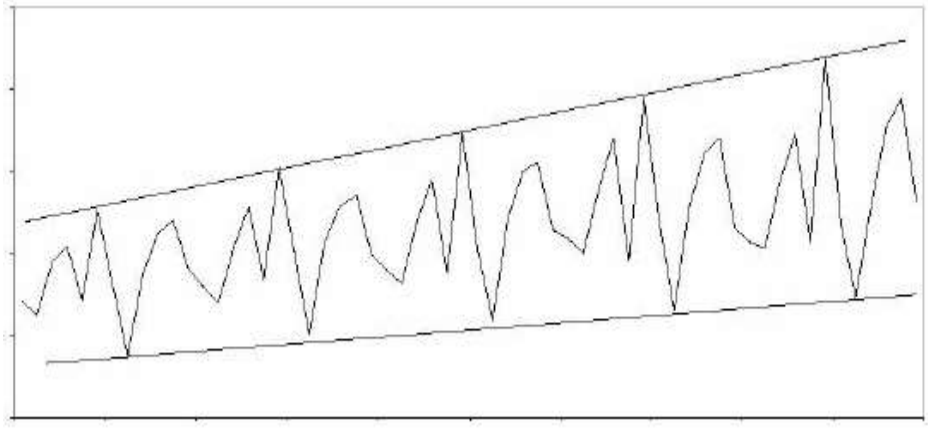
ولمعرفة شكل السلسلة يمكن الاعتماد على طريقتين:

أولا: الطريقة البيانية: في هذه الحالة تكون السلسلة الزمنية ذات شكل جدائي إذا كانت ذبذباتها غير ثابتة الشدة أي تغيراتها متطايرة بحيث يكون تباينها أحيانا متزايدا وأحيانا أخرى متناقصا ، وتقع بين خطين منفرجين غير متوازيين. ونقول عن السلسلة أنها تجميعية أذا انحصرت تغيراتها بين خطين منفرجين وبالتالي فهي غالبا ما تتميز بتباين ثابت الشدة (*مولود حشمان مرجع سابق، ص12*)[7].

الشكل1-11: الشكل التجميعي



الشكل1-12: الشكل الجدائي



ثانيا: اختبار بايز بالوت *Buys-Ballot*: هو اختبار تحليلي يأخذ بعين الاعتبار المتوسطات والانحرافات المعيارية لكل سنة. ويعتمد هذا الاختبار على حساب المتوسطات والانحرافات المعيارية سنويًا. حيث يكون شكل النموذج تجميعي، إذا كان الانحراف المعياري والمتوسط مستقلان؛ ويكون الشكل جدائي في الحالة المعاكسة.

وعندما يكون عدد السنوات كافياً، فإنه يمكننا تقدير المعلمتين α و β بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية *OLS* المتعلقتين بالنموذج الخطي البسيط التالي:

$$\sigma_i = \alpha + \beta \bar{y}_i + \varepsilon_i \qquad i = 1,2..., n$$

ويكون ذلك بعد التحقق من خلال الرسم البياني أن شكل الانتشار لـ (σ_i, x_i) يمثله هذا النوع من النماذج.

حيث: n: يمثل عدد السنوات.

$$\bar{y}_i = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{ij} \qquad \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2} \quad j = 1,2,...p$$

يمكن تقدير المعلمة β أعلاه باستخدام طريقة المربعات الصغرى كما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \bar{y}_i - n\bar{\bar{\sigma}}\bar{\bar{y}}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i - n\bar{\bar{y}}^2}$$

وتكون قاعدة القرار كما يلي: مختلطة إذا كان: $0.05 < \hat{\beta} < 0.1$ ، تجميعية إذا كان: $\hat{\beta} < 0.05$ ، جدائية إذا كان: $\hat{\beta} > 0.1$.

ملاحظة: في حالة عدم معنوية المعامل β (معنويا يساوي الصفر، اختبار ستيودنت)، فإننا نقبل فرضية الشكل التجميعي؛ أما إذا كان β معنويا فإن شكل السلسة جدائي.

6.1 تقدير المركبة الفصلية:

تعرف تأثيرات الفصلية المختلفة S_t بالمعاملات الموسمية *Seasonal Factors*. ولنفترض أن نموذج السلسلة هو ذا شكل جدائي أي: $Y = T * S * C * I$

لنفترض أن طول الدورة 4 إذا كانت البيانات فصلية، وإذا كانت البيانات شهرية نستخدم طول الدورة 12،.... وهكذا. بحساب المتوسطات المتحركة نكون قد تخلصنا من مركبتي الموسم وغير المنتظمة، وبالتالي فإن هذه المتوسطات عبارة عن توليفة من مركبتي الاتجاه العام والدورية،(وهذا تقدير للاتجاه العام والدورية) أي أن:

$$(MA)_t = (t_t . c_t)$$

حيث تشير $(MA)_t$ إلى المتوسط المتحرك عند الزمن t

1. بقسمة قيمة السلسلة الأصلية Y_t التي تتكون من حاصل ضرب المركبات الأربع على المتوسطات المتحركة نحصل على تقدير المركبة الموسمية والغير المنتظمة معا، أي أن:

$$(s_t.i_t)=\frac{Y_t}{(MA)_t}$$

2. يتم إزالة أثر العوامل العشوائية من التوليفة $(s_t.i_t)$ بإيجاد المتوسط الحسابي لها وبالتالي نحصل على متوسطات المركبات الفصلية $\bar{S}_j$.

3. أحيانا يتم تعديل التقديرات بحيث يساوي مجموعها طول الدورة، حيث يتم مقارنة كل معامل موسمي بالواحد الصحيح، ويعرف معامل التصحيح *Correction Factor* على الصورة:

$$CF=\frac{p}{\sum_{j=1}^{p}\bar{s}_j}$$

4. تحسب تقديرات المعاملات الموسمية كما يلي:

$$s_t=(CF)(\bar{s}_j);\ t=1,2,...,p$$

مثال: 1–6: المثال السابق(1–5): أحسب تقديرات المعاملات الموسمية

الحل:

جدول: 1–7 تقديرات المعاملات الموسمية

السنوات	t	Y_t	$(MA)_t=(t_t.c_t)$	$(s_t.i_t)=\frac{Y_t}{(MA)_t}$	s_t	$D_t=Y_t/s_t$
2000	*1*	*19*			*0,685*	*27,94*
	2	*24*			*0,87*	*27,59*
	3	*34*	*30,5*	*1,11*	*1,1*	*30,91*
	4	*43*	*31,5*	*1,37*	*1,35*	*31,85*
2001	*5*	*23*	*32,5*	*0,71*	*0,685*	*33,58*
	6	*28*	*33,5*	*0,84*	*0,87*	*32,18*
	7	*38*	*34*	*1,12*	*1,1*	*34,55*
	8	*47*	*34,5*	*1,36*	*1,35*	*34,81*
2002	*9*	*23*	*35*	*0,66*	*0,685*	*33,58*
	10	*32*	*34,5*	*0,93*	*0,87*	*36,78*
	11	*38*			*1,1*	*34,55*
	12	*43*			*1,35*	*31,85*

ويمكن تلخيص بيانات العمود $(s_t.i_t)$ في جدول كما يلي:

جدول:1-8 متوسطات المعاملات الموسمية

	q1	q2	q3	q4
	0,71	0,84	1,11	1,37
	0,66	0,93	1,118	1,362
المتوسط الحسابي $\bar{S}_j$	**0,685**	**0,882**	**1,116**	**1,364**

وبالتالي فإن:

$$CF = \frac{p}{\sum_{j=1}^{p} \bar{s}_j} = \frac{4}{4.05} = 0.9877$$

ومنه فإن تقديرات المعاملات الموسمية تكون:

$$s_1 = (0.9877)(0.685) = 0.685$$
$$s_2 = (0.9877)(0.885) = 0.87$$
$$s_3 = (0.9877)(0.115) = 1.1$$
$$s_4 = (0.9877)(0.365) = 1.35$$

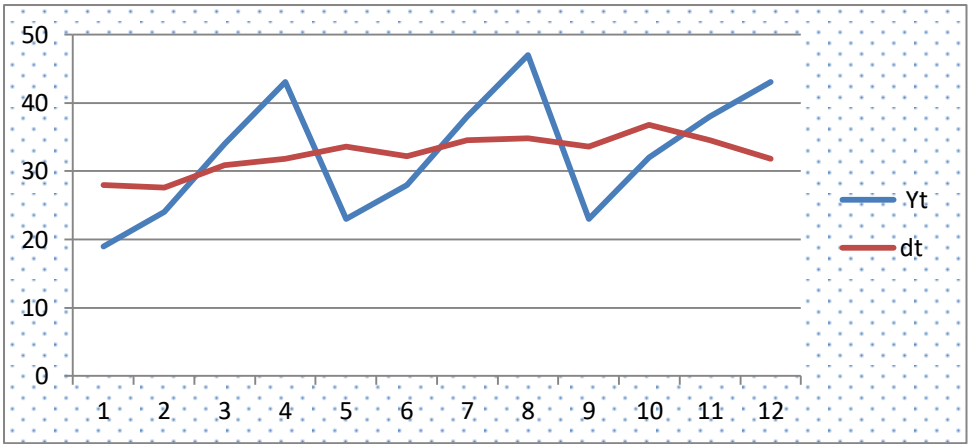
حيث أن مجموع تقديرات المعاملات الموسمية يساوي 4.

إذا كان المعامل الموسمي المناظر لموسم معين يساوي الواحد الصحيح فإن هذا يعني أن هذا الموسم ليس له أثر على السلسلة. إذا كان المعامل الموسمي أكبر من الواحد الصحيح فإن هذا يعني أن هذا الموسم يؤثر بالزيادة، أما إذا كان المعامل الموسمي أقل من الواحد الصحيح فإن هذا يعني أن هذا الموسم يؤثر بالنقصان. ففي المثال السابق يمكن القول بأن الموسم الأول (الربع الأول) يؤثر على السلسلة بنسبة 32% تقريبا، فإذا كانت قيمة الاتجاه العام 100 فإن المعامل الموسمي s_1 يجذب هذه القيمة إلى أسفل لتصبح 68 فقط، كما يمكن القول أن الموسم الرابع يزيد من مستوى السلسلة بنسبة 35% تقريبا، فإذا كانت قيمة الاتجاه العام 100 فإن المعامل الموسمي s_4 يزيد من هذه القيمة لتصبح 135.

ولإيجاد قيم السلسلة منزوع منها المركبة الموسمية يتم قسمة العمود Y_t على s_t لنحصل على القيم المعدلة للسلسلة والتي رمزنا لها بالرمز d_t في الجدول، أي أن:

$$d_t = Y_t / s_t = (t_t)(c_t)(i_t)$$

شكل 1-13 السلسلة الأصلية والسلسلة المعدلة



7.1 تحليل التباين (*Analyse of Variance*) واختبار فيشر للكشف عن مركبات السلسلة

في كثير من الحالات يمكن كشف المركبة الفصلية ومركبة الاتجاه العام بكل بساطة عند معرفة موضوع السلسلة الزمنية، كما أن الاختبار المبني على الشكل البياني أو الجدول لا يسمح دائما بالكشف عن المركبة الفصلية ومركبة الاتجاه العام، فضلا عن ذلك فإنه لا يسمح بالمعالجة الآلية التي تبدو ضرورية في حالة عدد كبير من السلاسل قيد الاختبار.

و يعتبر تحليل التباين واختبار فيشر أهم اختبار يعتمد عليه في الكشف على المركبتين. ويجنب الوقوع في مثل هذه المشاكل، حيث يرتكز على عنصرين هما:

أ. الدورية معلومة و هي تساوي p=12 في حالة المعطيات الشهرية p=4 في حالة المعطيات الفصلية.

ب. يفترض عدم وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة، و في حالة و جودها يتم إزالتها.

ليكن n : عدد السنوات

P : الدورة في السنة

بافتراض أنه يمكن كتابة السلسلة الزمنية كالتالي:

$$x_{ij} = m_{ij} + e_{ij} \quad .....(11-1)$$

حيث:

$$m_{ij} = a_i + b_j \quad i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,p$$

m_{ij}=أثر السنة + أثر الدورة

مجموع المربعات الكلية:

$$S_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2$$

المتوسط العام:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_{ij}$$

متوسط السنة i:

$$\bar{x}_{i\bullet} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{ij}$$

متوسط الدورة (الفصل..j):

$$\bar{x}_{\bullet j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

تحليل التباين:

$$\begin{aligned}
S_T &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ij}-\bar{\bar{x}}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left[\left(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{\bar{x}}\right)+\left(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{\bar{x}}\right)+\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{\bar{x}}\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{\bar{x}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{\bar{x}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{\bar{x}}\right)^2+0 \\
&= p\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{\bar{x}}\right)^2+n\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{\bar{x}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{\bar{x}}\right)^2 \\
S_T &= \underbrace{S_A}_{\text{السنة}} + \underbrace{S_P}_{\text{الدورة}} + \underbrace{S_R}_{\text{البواقي}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12-1)
\end{aligned}$$

جدول: 1–9 حساب المتوسطات لكل سنة ولكل دورة

الدورة / السنوات	1	2	...	J	...	P	متوسط السنوات
	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1p}	
...							
i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ij}	....	X_{ip}	$\bar{x}_{i\bullet}=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}x_{ij}$
....							
n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nj}	....	X_{np}	
متوسط الدورة				$\bar{x}_{\bullet j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$			$\bar{\bar{x}}=\frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}x_{ij}$

جدول 1-10: جدول تحليل التباين من أجل اكتشاف المركبة الموسمية ومركبة الاتجاه العام[8]

	التباين	درجة الحرية	مجموع المربعات
$F_C = \frac{V_A}{V_R}$	$V_A = \frac{S_A}{n-1}$	*n-1*	S_A
$F_C = \frac{V_P}{V_R}$	$V_P = \frac{S_P}{P-1}$	*p-1*	S_P
	$V_R = \frac{S_R}{(n-1)(p-1)}$	*(n-1)(p-1)*	S_R
	$V_T = \frac{S_T}{np-1}$	*np-1*	S_T

أما فيما يخص اتخاذ القرار:

عند مستوى معنوية: α =5% وباستعمال جدول فيشر يكون القرار على النحو التالي:

- إذا كان: $\frac{V_P}{V_R} > F_{(p-1,(p-1)(n-1))}$ فإننا نرفض H_0 و بالتالي يوجد تأثير موسمي .وإذا كان العكس فإننا نقبل H_0 ، وبالتالي لا يوجد تأثير موسمي.

.

- إذا كان: $\frac{V_A}{V_R} > F_{(n-1,(p-1)(n-1))}$ فإننا نرفض H_0 و بالتالي يوجد تأثير العامل السنوي وإذا كان العكس فإننا نقبل H_0 ، و بالتالي لا يوجد تأثير العامل السنوي .

مثال1-7: لتكن لدينا البيانات التالية:

جدول:1-11 بيانات المثال1-7

	الفصل1	الفصل2	الفصل3	الفصل4
1988	14	20	44	21
1989	10	19	64	32
1990	12	12	68	29
1991	7	18	60	36
1992	6	11	64	50

المطلوب:

- الكشف عن المركبة الفصلية ومركبة الاتجاه العام باستخدام اختبار فيشر وتحليل التباين عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

1. حساب المتوسطات والتباينات السنوية للسلسلة: وهي مبينة في الجدول (1-12)

جدول:1-12 المتوسطات السنوية والفصلية لبيانات المثال1-7

	الفصل1	الفصل2	الفصل3	الفصل4	المتوسط	التباين
1988	14	20	44	21	24,75	174,25
1989	10	19	64	32	31,25	558,25
1990	12	12	68	29	30,25	697,583
1991	7	18	60	36	30,25	536,25
1992	6	11	64	50	32,75	820,91666
moyenne	*9,8*	*16*	*60*	*33,6*	$\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{\bar{x}})^2=1516,91$	$\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{\bar{x}})^2=36.7$
variance	*11,2*	*17,5*	*88*	*114,3*		

بالاعتماد على برنامج *Excel* تحصلنا على النتائج التالية:

جدول:1-13جدول تحليل التباين باستخدام*EXCEL*

ANALYSE DE VARIANCE						
Source des variations	**Somme des carrés**	**Degré de liberté**	**Moyenne des carrés**	**F**	**Probabilité**	**Valeur critique pour F**
Lignes (S_A)	*146,80*	*4*	*36,70*	*0,57*	*0,69*	*3,26*
Colonnes (S_P)	*7584,55*	*3*	*2528,18*	*39,04*	*0,00*	*3,49*
Erreur (S_R)	*777,20*	*12*	*64,77*			
Total (S_T)	*8508,55*	*19*				

8.1 تمـــــــــارين الفصل الأول:

التمرين رقم1:

- عرف السلسلة الزمنية ثم اشرح العوامل التي تؤثر عليها.
- أذكر بإيجاز أهم طرق حساب الاتجاه العام للسلسلة الزمنية مع ذكر أهم مميزات وعيوب كل طريقة
- ما هو الفرق بين المركبة الموسمية والمركبة الدورية؟
- كيف يتم تقدير المركبة الموسمية وما هو الاختبار المناسب للكشف عليها؟
- ماهي الطريقة المناسبة لإزالة المركبة الموسمية من السلسلة؟

- احسب القيم الاتجاهية بطريقة المتوسطات المتحركة إذا علوت أن طول الدورة يساوي 3 من خلال الجدول التالي:

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Y	512	540	560	580	470	600	610	550	520	475

التمرين رقم02: لتكن لدينا البيانات الفصلية التالية:

التاريخ	الفصل الأول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصل الرابع
السنة1	12	14	16	17
السنة2	13	15	16	18
السنة 3	13	15	15	17
السنة4	11	14	12	16

المطلوب:

- حدد الشكل المناسب للسلسلة
- قدر لاتجاه العام
- اختبر وجود المركبة الموسمية في السلسلة عند مستوى معنوية 5%
- قدر المركبة الفصلية

التمرين رقم03:

إذا كانت واردات احدى الدول من سلعة ما هي كما في الجدول التالي:

السنة	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
بالالاف وحدة	650	510	575	625	458	500	610	550	520	475

- أحسب المتوسط المتحرك الذي فترته ثلاث سنوات

التمرين رقم04: فيما يلي قيم الانتاج لسلعة ما خلال الفترة 1995-1999 (بالالاف طن)

السنة	قيم المتغير
1995	3
1996	3
1997	5
1998	6
1999	8

المطلوب:

- إيجاد معادلة الاتجاه العام الخطية باستخدام طريقة المربعات الصغرى

9.1 مراجع وإحالات الفصل الأول:

[1] سعيد هتهات، دراسة اقتصادية و قياسية لظاهرة التضخم في الجزائر ،مذكرة ماجستير في العلوم الاقتصادية ،جامعة ورقلة 2006ص 130

[2] شفيق العتوم، فتحي العاروري، الأساليب الإحصائية، ج1، ط1، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 1995، ص: 295.

[3] MONINO. J-L et autres, (2004), "Statistique Descriptive", Dunod, Paris, 2eme édition, p 179.

[4] سعيد هتهات، مرجع سابق ص131

[5] مولود حشمان، نماذج وتقيات التنبؤ على المدى القصير، ديوان المطبوعات الجامعية، ط4، الجزائر، 1998ص69

[6] سمير مصطفى شعراوي، " مقدمة في التحليل الحيص للسلاسل الزمنية" كلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 2005. ص 64

[7] مولود حشمان مرجع سابق، ص12

[8] R. Bourbonnais Michel Terraza, « **Analyse des séries temporelles** » Applications à l'économie et à la gestion , 3e édition , Paris 2010, p13

الفصل الثاني: مفاهيم خصائص السلاسل الزمنية

تمهيد:

يهدف هذا الفصل إلى تقديم التعاريف والمفاهيم الضرورية لاستيعاب القارئ للتحليل الحديث للسلاسل الزمنية. والمادة العلمية لهذا الجزء تهدف إلى تعريف القارئ بمعنى الإستقرارية التامة والضعيفة وأهميتها في تحليل نماذج التنبؤ، كما تهدف المادة العلمية لهذا الفصل كذلك إلى دراسة ماهية الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي، وطرق تقديرهما.

1.2 الإستقرارية:

يقال عن السلسلة الزمنية أنها مستقرة إذا كانت الخصائص الإحصائية لها ثابتة خلال الزمن أي أن هذه الخصائص لا تتغير بالإزاحة إلى الأمام أو إلى الخلف أي عدد من الوحدات الزمنية. والخصائص الإحصائية للسلسلة (العملية) يمكن وصفها بشكل مؤكد وكامل عن طريق دالة الاحتمال التراكمي. ويمكن وصفها بشكل جزئي عن طريق بعض المؤشرات الهامة وأهمها التوقع والتباين والتغاير(عزوم الدرجة الأولى والثانية). ولذلك يفرق الإحصائيون بين الاستقرار التام والاستقرار الضعيف.

1.1.2 الاستقرار التام:

يقال أن السلسلة الزمنية أو العملية العشوائية المتقطعة$(X_t, t \in Z)$ أنها مستقرة استقرارا تاما إذا كان توزيع الاحتمال التراكمي المشترك لأي مجموعة جزئية من المتغيرات التي تتكون منها السلسلة لا يتأثر بالإزاحة إلى الأمام أو إلى الخلف أي عدد من الوحدات الزمنية. فإذا كانت$(t_1, t_2, ..., t_n)$ مجموعة جزئية من الوحدات الزمنية حيث: $m = 1,2,...$ ، وكان: $k = \pm 1, \pm 2, ...$ فإن السلسلة $(X_t, t \in Z)$ مستقرة استقرارا تاما إذا كانت دالة الاحتمال التراكمي المشتركة للمتغيرات$(X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tm})$ تساوي دالة الاحتمال التراكمي المشتركة للمتغيرات$(X_{t1+k}, X_{t2+k}, ..., X_{tm+k})$ لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, ..., t_m)$ وأي تأخر k. وبصورة رياضية فإن السلسلة X_t تامة الإستقرارية إذا كان:[1] [1] (*DERGAOUI. R (2016); p6*)

$$P(X_{t1} \le c_1, X_{t2} \le c_2, ..., X_{tm} \le c_m) = P(X_{t1+k} \le c_1, X_{t2+k} \le c_2, ..., X_{tm+k} \le c_2)$$
$$= F(c_1, c_2, ..., c_m) \quad .....(1-2)$$

لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, ..., t_m)$ وأي تأخر k.

وتمثل القيم $(c_1, c_2, ..., c_m)$ أي ثوابت تقع داخل نطاق العملية العشوائية، والاستقرار التام بمفهومه السابق يعني ببساطة أن آلية التوليد للعملية العشوائية تحت الدراسة ثابتة من خلال الزمن، بحيث إن شكل النموذج وقيم معالمه لا تتغير بتغير الزمن.

وبوضع: m=n و $t_i=i$ نجد:

$$P(X_1, X_2, ..., X_n) = P(X_{1+k}, X_{2+k}, ..., X_{n+k}) = F(c_1, c_2, ..., c_m). \forall k = \pm 1, \pm 2, \quad .....(2-2)$$

مثال2–1: إذا كانت السلسلة $(X_t,t\epsilon Z)$ تامة الاستقرارية، أثبت أن:

$$(i)\quad F(X_t)=F(X_{t+k})$$
$$(ii)\quad F(X_t,X_{t-1})=F(X_{t+k},X_{t-1+k})$$

الحل:

1- نضع $m=1$, $t_1=t$ في المعادلة (2-1):

$$P(X_t\le c_1)=P(X_{t+k}\le c_1)\quad \forall c_1$$

ومن ثم فإن:

$$F(X_t)=F(X_{t+k})\quad \forall k\ .$$

2. نضع $t_1=t\,,t_2=t-1,m=2$ في المعادلة (2.1) نجد:

$$P(X_t\le c_1,X_{t-1}\le c_2)=P(X_{1+k}\le c_1,X_{2+k}\le c_2)\quad \forall(c_1,c_2)$$

$$Donc:$$

$$F(X_t,X_{t-1})=F(X_{1+k},X_{2+k})\,\forall k$$

3. نضع $k=\pm1,t_1=2\,,t_2=5\,,t_3=10,m=3$ في المعادلة (2.1) نجد:

$$P(X_2\le c_1,X_5\le c_2,X_{10}\le c_3)=P(X_3\le c_1,X_6\le c_2,,X_{11}\le c_3)\quad \forall(c_1,c_2)$$

ومن ثم فإن:

$$F(X_2,X_5,X_{10})=F(X_3,X_6,X_{11})=F(X_1,X_4,X_9)$$

ومن التعريف السابق نجد أن الاستقرار التام للعملية العشوائية يؤدي بالضرورة إلى ثبات متوسط وتباين العملية العشوائية، وذلك إذا كانت العزوم من الدرجة الأولى والثانية موجودة. أيضا التغاير بين أي متغيرين X_s, X_t X_s, X_t يعتمد على الفجوة الزمنية التي تفصل بين هذين المتغيرين، أي أن الإستقرارية التامة تؤدي إلى:

$$u_t=E(X_t)=\mu\quad \forall t\in Z$$
$$\sigma_t^2=V(X_t)=\sigma^2\quad \forall t\in Z$$
$$\gamma(s,t)=Cov(X_s,X_t)=E[(X_s-u)(X_t-u)]=\gamma(s-t)$$

2.1.2 الإستقرارية الضعيفة:

لدراسة خصائص العملية العشوائية $(X_t,t\in Z)$ واختبار سكونها واختبار استقرارها التام يجب معرفة دالة الاحتمال التراكمي المشتركة لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1,t_2,...,t_m)$، وأي قيمة صحيحة m أو على الأقل تقديرها بشكل جيد إحصائيا، ويعد هذا من الأمور الصعبة إن لم يكن مستحيلا. ولحسن الحظ في موضوعات الإحصاء بصفة عامة وفي مجال السلاسل الزمنية بصفة خاصة أن العزوم الأولى والثانية غالبا ما

تعكس الملامح الرئيسية للعمليات العشوائية بافتراض الخطية، وهذه المؤشرات كافية لوصف خصائص التوزيع الاحتمالي للعمليات العشوائية بشكل كامل. لذلك فقد عرف الفكر الإحصائي نوعا آخر من الاستقرار يرتبط بالعزوم الأولى والثانية فقط إذا كانت موجودة يطلق عليه **بالاستقرار الضعيف**. وتكون العملية X_t مستقرة إذا كانت العزوم الأولى والثانية مستقلة عن الزمن *(Michel Tenenhaus (1994), p282)*[2].

تعريف 2-1: يقال أن العملية العشوائية $(X_t, t \in Z)$ مستقرة استقرارا ضعيفا إذا كانت العزوم حتى الدرجة الثانية موجودة و تحقق الشروط الآتية:

1. التوقع لا يعتمد على الزمن $E(X_t)=\mu \quad \forall t \in Z$
2. التباين لا يعتمد على الزمن $V(X_t)=\sigma^2=\gamma(0) \quad \forall t \in Z$
3. التغاير بين أي متغيرين يعتمد فقط على الفجوة *lag* الزمنية التي تفصل بينهما، أي أن:

$$COV(X_t, X_{t-h})=\gamma(h) \quad \forall t \in Z$$

في مجال الإحصاء لا نشترط أن تكون السلسلة الزمنية مستقرة استقرارا تاما، ولكن نكتفي فقط بالاستقرار الضعيف.

يقيس التغاير الذاتي $\gamma(h)=\gamma(s,t)$ درجة الاعتماد (الارتباط) الخطي بين جميع القيم التي يمكن أن تولدها العملية عند الزمن s وتلك القيم التي يمكن أن تولدها عند الزمن t.

تعريف2-2: لتكن $(X_t)_{t\in Z}$ عملية عشوائية. نسمى دالة التغاير الذاتي للعملية $(X_t)_{t\in Z}$ الدالة γ المعرفة كما يلي: *((Hamilton.J-D (2016))*[3]

$$\forall\, h \in Z : \gamma(h)=Cov(X_t, X_{t-h}) \qquad .....(3-2)$$

حيث:

$$Cov(X_t, X_{t-h})=E[(X_t-E(X_t))(X_{t-h}-E(X_{t-h}))]$$

ملاحظة: الدالة γ هي دالة زوجية

$$\gamma(h)=\gamma(-h) \quad \forall h$$

حيث:

$$\gamma(h)=Cov(X_t, X_{t+h})=Cov(X_{t-h}, X_{(t-h)+h})=Cov(X_{t-h}, X_t)=\gamma(-h)$$

ملاحظة: يمكن تقدير الوسط والتباين لأي سلسلة زمنية $(X_t)_{t\in Z}$ كما يلي :

$$\overline{X}=\hat{u}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t \qquad .....(4-2)$$

$$s_X^2=\hat{\gamma}(0)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2 \qquad .....(5-2)$$

وبالمثل يمكن تقدير دالة التغاير الذاتي كما يلي:

$$\hat{\gamma}(k)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}\left(X_t-\overline{X}\right)\left(X_{t+K}-\overline{X}\right),\ k=1,2,...,n-1 \quad .....(6-2)$$

مثال2–2: لتكن $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ متتالية من المتغيرات العشوائية التي تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع 0وتباين σ^2 ($E(z_t)=0 \quad V(z_t)=\sigma^2$). حيث:

$$X_t=z_t \text{ et } Y_t=(-1)^t z_t$$

- بين إن كانت X_t و Y_t مستقرة.
- نفس السؤال بالنسبة لـ: X_t+Y_t

الحل:

1.

$$E(X_t)=E(z_t)=0 \quad \forall t\in Z$$
$$V(X_t)=V(z_t)=\sigma^2 \quad \forall t\in Z$$
$$\gamma(h)=Cov(X_t,X_{t-h})=E(X_tX_{t-h})-E(X_t)E(X_{t-h}) \quad \forall t\in Z$$
$$\gamma(h)=E(X_tX_{t-h})$$
$$for \quad h=0 \ ; \ \gamma(h)=E(X_tX_t)=V(X_t)=\sigma^2$$
$$for \quad h=1 \ ; \ \gamma(h)=E(X_tX_{t-1})=E(z_tz_{t-1})=0 \quad \forall t\in Z$$
$$or \quad h>1 \ ; \ \gamma(h)=0 \quad \forall t\in Z$$

وبالتالي العملية العشوائية X_t مستقرة

2.

$$E(Y_t)=E\left((-1)^t z_t\right)=(-1)^t E(z_t)=0, \quad \forall t\in Z$$
$$V(Y_t)=V\left((-1)^t z_t\right)=(-1)^{2t}Var(z_t)=\sigma^2, \quad \forall t\in Z$$
$$\gamma(h)=Cov(Y_t,Y_{t-h})=E(Y_tY_{t-h})-E(Y_t)E(Y_{t-h}) \quad \forall t\in Z$$
$$\gamma(h)=E(Y_tY_{t-h})$$
$$for \quad h=0 \ ; \ \gamma(h)=E(Y_tY_t)=V(Y_t)=\sigma^2$$
$$for \quad h=1 \ ; \ \gamma(h)=E(Y_tY_{t-1})=E\left((-1)^t z_t(-1)^{t-1}z_{t-1}\right)=(-1)^{2t-1}E(z_t)=0 \quad \forall t\in Z$$
$$or \quad h>1 \ ; \ \gamma(h)=0 \quad \forall t\in Z$$

وبالتالي العملية العشوائية Y_t مستقرة

3.

$$E(X_t+Y_t)=E\left(z_t+(-1)^t z_t\right)=E(z_t)+(-1)^t E(z_t)=0,\quad \forall t\in Z$$
$$V(X_t+Y_t)=V\left(z_t+(-1)^t z_t\right)=V(z_t)+(-1)^{2t}Var(z_t)+2Cov\left(z_t,(-1)^t z_t\right)=\sigma^2,\quad \forall t\in Z$$
$$=V(z_t)+(-1)^{2t}Var(z_t)+2(-1)^t Cov(z_t,z_t),\quad \forall t\in Z$$
$$=V(z_t)+(-1)^{2t}Var(z_t)+2(-1)^t V(z_t,z_t),\quad \forall t\in Z$$
$$=2\sigma^2+2(-1)^t\sigma^2,\quad \forall t\in Z$$
$$V(X_t+Y_t)=\begin{cases}4\sigma^2 & if\quad t\quad paire\\ 0 & if\quad t\quad impaire\end{cases}$$

التباين مرتبط بالزمن، وبالتالي العملية العشوائية X_t+Y_t غير مستقرة.

ملاحظة:- كل عملية عشوائية مستقرة استقرارا تاما هي كذلك مستقرة استقرارا ضعيفا.

2.2 أهمية الإستقرارية: إذا كانت الخصائص الإحصائية للعملية العشوائية التي ولدت السلسلة الزمنية المتاحة غير مستقرة، فإننا سنواجه العديد من الصعوبات الهامة والخطيرة. ومنها كثرة المؤشرات (المعالم) الرئيسية مثل التوقعات والتباينات والتغايرات وصعوبة تفسير هذه المؤشرات وصعوبة أو استحالة تقدير هذه المؤشرات بأي مستوى دقة من البيانات المتاحة. كما يصعب في مثل هذه الحالات نمذجة البيانات بشكل مباشر بواسطة نموذج إحصائي يعكس خصائص العملية العشوائية.

وفيما يلي عرض لأهمية الدور الذي تلعبه الإستقرارية في التغلب على هذه المشاكل:

- تخفيض عدد معالم النموذج: في العمليات غير المستقرة فإن التوقعات تكون مختلفة بافتراض أنه لدينا n مشاهدة، وبالتالي فعدد التوقعات المختلفة هو n، وبالنسبة لعدد معالم مصفوفة التباين والتغاير الذاتي المختلفة فعددها $n(n+1)/2$،

ومنه عدد المعالم الإجمالية التي يجب تقديرها في هذه الحالة هو:

$$n+n(n+1)/2=n(n+3)/2$$

وهذا عدد كبير خاصة إذا كان عد المشاهدات كبيرا. أما في حالة الإستقرارية فإن عدد المعالم هو $n+1$ فقط وهي: $E(X),\gamma(0),\gamma(1),\gamma(2),...,\gamma(n-1)$

–إمكانية تقدير المعالم: في حالة الإستقرارية فإن كل قيمة من قيم السلسلة الزمنية ينظر إليها كمشاهدة مسحوبة من مجتمع ما متوسطه μ وتباينه$\gamma(0)$، وبالتالي يمكن تقدير المتوسط والتباين من خلال الوسط الحسابي للسلسلة الزمنية المتاحة و تباينها. كما يمكن تقدير دالة التغاير الذاتي.

– إمكانية استخدام نظرية *Wold*:

الأفكار النظرية التي طرحت بواسطة *(yule 1921,1927)* والتي طورت من طرف *wold(1938)* في نظرية التجزئة المنسوبة إليه تؤكد على أن أي عملية عشوائية مستقرة $(X_t)_{t\in Z}$ يمكن التعبير عنها كتوليفة لسلسلة من المتغيرات العشوائية غير المرتبطة $(\varepsilon_t)_{t\in Z}$ توقعها معدوم وتباينها ثابت كما يلي:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \ , \psi_0 = 1$$

وتكون العملية مستقرة إذا كانت المعاملات ψ_j ثابتة ومستقلة عن الزمن، كذلك عددها قد يكون محدودا أو غير محدود ولها خاصية التقارب، وذلك لضمان ثبات التوقع.

3.2 الشوشرة البيضاء

نسمي الضوضاء أي اختلاف لا يمكن التنبؤ به لسيرورة معينة مع مرور الوقت. الشوشرة البيضاء هي الأكثر عشوائية من الضجات. في هذه الحالة، لايوجد أي ارتباط بين الزيادات المتتالية في السيرورة. بمعنى آخر، فإن دالة الارتباط الذاتي معدومة.*(Delignieres. D, 2001)* [4]

تعريف2–3: تدعى العملية $(\varepsilon_t, t\in Z)$ شوشرة البيضاء إذا كانت عبارة عن سلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة والموزعة بشكل متماثل، بتوقع معدوم وتباين ثابت .

- $E(\varepsilon_t) = 0, \forall t$
- $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2, \forall t$
- $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \forall t \neq s$

ليس لهذه العملية اتجاه ولا ذاكرة: حيث أن معرفة قيمة العملية في تاريخ معين لا توفر أي معلومات للتنبؤ بقيمتها في تاريخ لاحق.

4.2 دالة الارتباط الذاتي:

في العملية $(X_t,t\in Z)$ يعتمد المتغير العشوائي في الوقت t عادة على المشاهدات السابقة. وتتيح دالتي التغاير الذاتي و الارتباط الذاتي فهم الروابط التي قد تكون موجودة بين شروط هذه العملية العشوائية.

بالنسبة للعمليات غير المتعددة (متغير واحد مشاهد) ، فإننا نتحدث عن التباين أو التغاير الذاتي، وعن الارتباط أو الارتباط الذاتي.

تعريف2–4: يعرف معامل الارتباط الذاتي $\rho(s,t)$ بأنه معامل الارتباط الخطي بين المتغيرتين X_s, X_t ويكتب على الصورة:

$$\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{Var(X_s).Var(X_t)}} \quad .....(7-2)$$

$$= \frac{E(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)}{\sqrt{E(X_s - \mu_s)^2 . E(X_t - \mu_t)^2}} \quad ; s,t = 0,\pm1,\pm2,...$$

ونسمي الدالة $\rho(h)$ بدالة الارتباط الذاتي البسيطة عند تأخر h، حيث $h \in Z$ التي نرمز لها بالرمز AC.

$$\rho(h) = corr(X_t, X_{t-h}) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-h})}} .....(8-2)$$

أما إذا كانت العملية العشوائية (السلسلة) مستقرة فإنه يمكن إعادة كتابة معامل الارتباط الذاتي كما يلي:

$$\rho(h) = \frac{E(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)}{E(X - \mu)^2}$$

$$= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}; h = 0,\pm1,\pm2,...$$

$$Var(X_t) = Var(X_{t-h}) = Cste \quad \forall h \; et \; \forall t$$

حيث يرمز $\gamma(0)$ إلى تباين العملية العشوائية المستقرة، ويرمز $\gamma(h)$ إلى التغاير الذاتي عند الفجوة h .[5]

1.4.2 تقدير دالة الارتباط الذاتي: يمكن تقدير دالة الارتباط الذاتي (ac) للعملية العشوائية المستقرة من خلال العينة كما يلي:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-k})}{\sigma_{X_t}\sigma_{X_t-k}} \quad .....(9-2)$$

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}$$

مثال2–3: لتكن البيانات التالية:

جدول2–1: بيانات المثال 2–3

السنة	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010		
Y	*158*	222	248	216	226	239	206	178	169	206		

- أحسب دالة الارتباط الذاتي

الحل:

جدول2-2 تقدير معاملات الارتباط الذاتي

	$(y_t-\bar{y})^2$	$(y_t-\bar{y})$	$(y_{t-1}-\bar{y})$	$(y_t-\bar{y})(y_{t-1}-\bar{y})$	$(y_{t-2}-\bar{y})$	$(y_t-\bar{y})(y_{t-2}-\bar{y})$
158	2390,1	-48,9		0		
222	228,3	15,1	-48,9	-738,8		
248	1690,1	41,1	15,1	621,2	-48,9	-2009,9
216	83	9,1	41,1	374,6	15,1	137,7
226	365,2	19,1	9,1	174,1	41,1	785,7
239	1031,1	32,1	19,1	613,7	9,1	292,6
206	0,8	-0,9	32,1	-28,5	19,1	-17
178	834,6	-28,9	-0,9	25,7	32,1	-927,7
169	1435,6	-37,9	-28,9	1094,6	-0,9	33,7
206	**8058,9**			**2136,5**	**66,8**	**-1704,9**

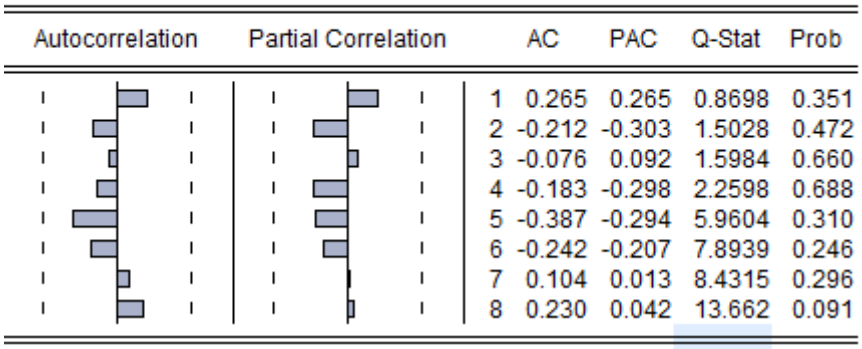
$(y_{t-3}-\bar{y})$	$(y_t-\bar{y})(y_{t-3}-\bar{y})$	$(y_{t-4}-\bar{y})$	$(y_t-\bar{y})(y_{t-4}-\bar{y})$	$(y_{t-4}-\bar{y})$	
-48,9	-445,4				
15,1	288,8	-48,9	-934,3		
41,1	1320,1	15,1	485,2	-48,89	-1569,88
9,1	-8,1	41,1	-36,5	15,11	-13,43
19,1	-552,1	9,1	-263,2	41,11	-1187,65
32,1	-1216,7	19,1	-724,1	9,11	-345,21
67,7	**-613,4**	**35,6**	**-1472,9**	**16,4**	**-3116,2**

ومنه معاملات الارتباط الذاتي هي:

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
0,265	-0,212	-0,076	-0,183	-0,387	-0,242	0,104	0,230

الشكل رقم 2–1: دالتي الارتباط الذاتي والجزئي

Date: 10/05/19 Time: 20:19
Sample: 2001 2009
Included observations: 9



	Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1			1	0.265	0.265	0.8698	0.351
2			2	-0.212	-0.303	1.5028	0.472
3			3	-0.076	0.092	1.5984	0.660
4			4	-0.183	-0.298	2.2598	0.688
5			5	-0.387	-0.294	5.9604	0.310
6			6	-0.242	-0.207	7.8939	0.246
7			7	0.104	0.013	8.4315	0.296
8			8	0.230	0.042	13.662	0.091

المصدر: مخرجات برنامج *eviews10*

5.2 دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

في موضوعات السلاسل الزمنية تحظى دراسة معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الثانية بأهمية خاصة. حيث يقيس هذا المعامل درجة الارتباط الخطي بين متغيرين يبعدان عن بعضهما البعض وحدتان زمنيتان بعد حذف تأثير المتغير الذي يقع بينهما أي بافتراض ثبات هذا المتغير. فهذا المعامل يقيس قوة العلاقة الخطية بين متغيرين y_1 ، y_3 بعد حذف تأثير المتغير y_2، ويقيس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرتين y_2 ، y_4 بعد حذف تأثير المتغير y_3،.... وهكذا . وبصفة عامة يقيس هذا المعامل قوة الارتباط الخطي بين المتغيرين y_{t-2} و y_t بعد حذف تأثير المتغير الذي يقع بينهما وهو y_{t-1} أي بافتراض ثبات هذا المتغير، ويرمز لهذا المتغير عادة بالرمز ϕ_{22} ويمكن تفسيره بأنه معامل الارتباط الخطي بين $\left[Y_t - E(Y_t/Y_{t-1})\right]$ والمتغير $\left[Y_{t-2} - E(Y_t/Y_{t-2})\right]$

تعريف2–5: يعرف معامل الارتباط الذاتي الجزئي للعملية المستقرة $(Y_t, t\in Z)$ عند الفجوة الزمنية k بأنه معامل الارتباط الخطي بين Y_{t-k} و Y_t بعد حذف تأثير المتغيرات التي تقع بينهما: $Y_{t-1}, Y_{t-2,...}, Y_{t-k+1}$.

ويرمز عادة لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة k بالرمز ϕ_{kk} ويمكن تفسيره بأنه معامل الارتباط الخطي بين $\left[Y_{t-k} - E(Y_{t-k}/Y_{t-1}, Y_{t-2},..., Y_{t-k+1})\right]$ والمتغير $\left[Y_t - E(Y_t/Y_{t-1}, Y_{t-2}..., Y_{t-k+1})\right]$

وتأخذ الدالة ϕ_{kk} في التحليل أشكالا قريبة الشبه من أشكال دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ ، فتارة تتلاشى ببطء، وتارة تتلاشى بسرعة في صورة أسية وتارة تقترب تدريجيا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب أو في شكل توليفة من الدوال الأسية، وتارة تنقطع كليا بعد عدد معين من الفجوات الزمنية، وتلعب دالة الارتباط الذاتي الجزئي دورا لا يقل أهمية عن دور دالة الارتباط الذاتي، فتستخدم لاختبار استقرارية المتغيرات بجانب الطرق الأخرى.

1.5.2تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي(*FAP*):

قدم الفكر الخاص بالسلاسل الزمنية أساليب عديدة لتقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي، ويعتبر أسلوب أو نظام يول والكر من أهم هذه الأساليب على الإطلاق.

- **الأسلوب الأول**: لدراسة الارتباط الجزئي بين الارتباط الخطي بين Y_{t-k} و Y_t يفترض هذا الأسلوب أن علاقة الانحدار بين المتغير Y_{t-k} والمتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_t على الصورة الخطية التالية:

$$Y_{t-k} = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-k+1} + \beta_2 Y_{t-k+2} + ... + \beta_{k-1} Y_{t-1} + \varepsilon_{t-k}, \quad k = 2,3,..., n-1 \quad .....(10-2)$$

و بالتالي فإن المتغير العشوائي:

$$\varepsilon_{t-k} = Y_{t-k} - (\beta_0 + \beta_1 Y_{t-k+1} + \beta_2 Y_{t-k+2} + ... + \beta_{k-1} Y_{t-1}).....(11-2)$$

يمثل المتغير Y_{t-k} بعد حذف تأثير المتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_t .

وبالمثل يفترض هذا الأسلوب أن علاقة الانحدار بين المتغير Y_t والمتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_{t-k} على الصورة الخطية التالية:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-k+1} + \alpha_2 Y_{t-k+2} + ... + \alpha_{k-1} Y_{t-1} + u_t, \quad k = 2,3,..., n-1.....(12-2)$$

و بالتالي فإن المتغير العشوائي:

$$u_t = Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-k+1} + \alpha_2 Y_{t-k+2} + ... + \alpha_{k-1} Y_{t-1}).....(13-2)$$

يمثل المتغير Y_t بعد حذف تأثير المتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_{t-k}، وبناءا على ذلك يمكن تقدير ϕ_{kk} عن طريق اتباع الخطوات التالية:

1. نضع $k=2$ ونجري الانحدار رقم (2-10) ونحصل منه على البواقي $\hat{\varepsilon}_t$، ثم نجري الانحدار رقم (2-12) ونحصل منه على البواقي $\hat{u}_t$

2. نحسب معامل الارتباط الخطي بين $\hat{\varepsilon}_t$ و $\hat{u}_t$. هذا المعامل يعطي تقدير مناسب بمعامل الارتباط الجزئي ϕ_{22} ويرمز له عادة بالرمز $\hat{\phi}_{22}$.

3. نضع $k=3$ ونكرر الخطوتين السابقتين ونحصل على تقدير مناسب لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{33} ويرمز له عادة بالرمز $\hat{\phi}_{33}$.

4. نكرر الخطوتين 1 و 2 لجميع القيم الأخرى للفجوة الزمنية k، وبالتالي يمكن الحصول على التقديرات $\hat{\phi}_{22}, \hat{\phi}_{33},..., \hat{\phi}_{kk}$ (سمير مصطفى شعراوي،2005، ص 140) [6]

– نظام معادلات يوول والكر *yule-walker eystem* [7]

بصفة عامة بافتراض الاستقرارية يمكن تعريف معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية k أي ϕ_{kk} بأنه معامل Y_{t-k} في نموذج الانحدار الذاتي:

$$Y_t = \phi_{k1}Y_{t-1} + \phi_{k2}Y_{t-2} + ... + \phi_{kk}Y_{t-k} + \varepsilon_t, \quad k = 1,2,3,... \quad .....(14-2)$$

و من ثم فإن دالة التغاير الذاتي لهذا النموذج هي:

$$\gamma(h) = Cov(Y_t, Y_{t-h}) = E(Y_t Y_{t-h})$$
$$\gamma(h) = E[(\phi_{k1}Y_{t-1} + \phi_{k2}Y_{t-2} + ... + \phi_{kk}Y_{t-k} + \varepsilon_t)Y_{t-h}]$$
$$\gamma(h) = \phi_{k1}\gamma(h-1) + \phi_{k2}\gamma(h-2) + ... + \phi_{kk}\gamma(h-k) \quad h = 1,2,..., k$$

بقسمة $\gamma(h)$ على التباين $\gamma(0)$ نصل إلى دالة الارتباط الذاتي للنموذج (1) على الصورة:

$$\rho(h) = \phi_{k1}\rho(h-1) + \phi_{k2}\rho(h-2) + ... + \phi_{kk}\rho(h-k) \quad h = 1,2,..., k \quad .....(15-2)$$

يعرف هذا النظام بنظام يوول والكر والذي يتكون من k معادلة خطية في النموذج في المجاهيل:

$\phi_{k1}, \phi_{k2}, ..., \phi_{kk}$

ويمكن حل هذا النظام بأسلوب المحددات لإيجاد ϕ_{kk} ولتوضيح ذلك نكتب النظام على شكل تفصيلي كما يلي:

$$\rho(1) = \phi_{k1}\rho(0) + \phi_{k2}\rho(1) + ... + \phi_{kk}\rho(k-1)$$
$$\rho(2) = \phi_{k1}\rho(1) + \phi_{k2}\rho(0) + ... + \phi_{kk}\rho(k-2)$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\rho(k) = \phi_{k1}\rho(k-1) + \phi_{k2}\rho(k-2) + ... + \phi_{kk}\rho(0)$$

ومن ثم يمكن كتابة نظام يوول والكر باستخدام المصفوفات كما يلي:

$$R(k) = P_k \Phi_k \quad .....(16-2)$$

حيث: $R(k)$ شعاع عمودي يتكون من k عنصر ويعرف على الشكل:

$$R(k) = (\rho(1)\ \rho(2) ...\ \rho(k))'$$

Φ_k شعاع عمودي يتكون من k عنصر ويعرف على الشكل: $\Phi_k = (\phi_{k1}\ \phi_{k2} ... \phi_{kk})'$. بالإضافة إلى ذلك فإن P_k مصفوفة الارتباط التناظرية للعملية العشوائية المستقرة وهي مصفوفة مربعة من الرتبة k وتعرف على الشكل التالي:

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathrm{N} \quad .....(17-2)$$

وبالتالي يمكن حل نظام يوول والكر بصور عامة لإيجاد ϕ_{kk}

ومنه نحسب دالة الارتباط الذاتي الجزئي كما يلي:

$$\phi_{kk} = \frac{\left|P_K^*\right|}{\left|P_k\right|} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18-2)$$

$\left|P_K^*\right|$ هو محدد المصفوفة P_k ، أين نستبدل العمود الأخير بالشعاع [ρ(1) ...ρ(k)]

$$P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \cdots & \rho(k-1) \end{pmatrix} \quad k \in \mathrm{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19-2)$$

مثال2–4: استخدم نظام يوول والكر في إيجاد ϕ_{11} بدلالة $\rho(1)$

الحل:

لدينا: من خلال المعادلة التالية:

$$\rho(h) = \phi_{k1}\rho(h-1) + \phi_{k2}\rho(h-2) + \ldots + \phi_{kk}\rho(h-k) \quad h = 1,2,\ldots,k$$

ومنه:

$$\rho(1) = \phi_{11}\rho(0) \quad \rho(0) = 1$$

وبالتالي: $\rho(1) = \phi_{11}$

مثال2–5: استخدم نظام يوول والكر في إيجاد ϕ_{22} بدلالة $\rho(1), \rho(2)$

الحل:

بوضع $k=2$ في المعادلة التالية:

$$\rho(h) = \phi_{k1}\rho(h-1) + \phi_{k2}\rho(h-2) + \ldots + \phi_{kk}\rho(h-k) \quad h = 1,2,\ldots,k$$

نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\rho(1) = \phi_{21}\rho(0) + \phi_{22}\rho(1)$$
$$\rho(2) = \phi_{21}\rho(1) + \phi_{22}\rho(0)$$

وبالتالي:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2^k = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن:

$$\phi_{22} = \frac{P_2^k}{P_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

مثال2–6: تمثل البيانات التالية متوسط النسب المئوية السنوية للرطوبة في إحدى المدن

جدول2 –3: النسب المئوية للرطوبة خلال الفترة (2014–1010)

السنة	2010	2011	2012	2013	2014
عدد الوحدات بالمائة	20	30	10	20	20

المطلوب:

- أحسب دالة الارتباط الذاتي الجزئي

الحل:

$$\hat{\rho}(1) = \frac{1}{2}, \ \hat{\rho}(2) = \hat{\rho}(3) = \hat{\rho}(4) = 0$$

$$\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}(1) = 0.5$$

$$\rho(2) = \phi_{21}\rho(1) + \hat{\phi}_{22} = \frac{\hat{\rho}(2) - \hat{\rho}^2(1)}{1 - \hat{\rho}^2(1)} = \frac{-0.25}{1 - 0.25} = -\frac{1}{3}$$

$$P_3=\begin{pmatrix}1 & \rho(1) & \rho(2)\\ \rho(1) & 1 & \rho(1)\\ \rho(2) & \rho(1) & 1\end{pmatrix},\quad P_3^k=\begin{pmatrix}1 & \rho(1) & \rho(1)\\ \rho(1) & 1 & \rho(2)\\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3)\end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_3=\begin{pmatrix}1 & -0.5 & 0\\ -0.5 & 1 & -0.5\\ 0 & -0.5 & 1\end{pmatrix},\quad \hat{P}_3^k=\begin{pmatrix}1 & -0.5 & -0.5\\ -0.5 & 1 & 0\\ 0 & -0.5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi}_{33}=\frac{\left|\hat{P}_3^k\right|}{\left|\hat{P}_3\right|}=\frac{-0.125}{0.5}=-0.25$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1 & \rho(1) & \rho(2) & \rho(3)\\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(2)\\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \rho(1)\\ \rho(3) & \rho(2) & \rho(1) & 1\end{pmatrix},\quad P_4^k=\begin{pmatrix}1 & \rho(1) & \rho(2) & \rho(1)\\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(2)\\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \rho(3)\\ \rho(3) & \rho(2) & \rho(1) & \rho(3)\end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_4=\begin{pmatrix}1 & -0.5 & 0 & 0\\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0\\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5\\ 0 & 0 & -0.5 & 1\end{pmatrix},\quad \hat{P}_4^k=\begin{pmatrix}1 & -0.5 & 0 & -0.5\\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0\\ 0 & -0.5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -0.5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi}_{44}=\frac{\left|\hat{P}_4^k\right|}{\left|\hat{P}_4\right|}=\frac{0.0625}{0.3125}=0.2$$

يمكن أيضا استخدام الكتابة التراجعية لـ ϕ_{kk} من أجل حساب معاملات الارتباط الذاتي الجزئي باستخدام الدالة التالية:

$$\phi_{ii}=\rho(ii)=\begin{cases}\rho(1)\\ \dfrac{\rho(i)-\sum_{j=1}^{i-1}\rho(i-1,j)\rho(i-j)}{1-\sum_{j=1}^{i-1}\rho(i-1)\rho(j)} & i=2,3,...,k\end{cases}\quad .....(20-2)$$

$$\rho(ij)=\rho(i-1,j)-\rho(ii)\rho(i-1,i-j)\quad ;\ j=1,2,...,i-1$$

أثناء الدراسة التطبيقية فإن حساب دالة الارتباط الذاتي الجزئي يعتمد على نظام معادلات يوول والكر.

وبالنسبة للعينات ذات الحجم الكبير، فإن معاملات الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج الانحدار الذاتي يتقارب توزيعها من التوزيع الطبيعي بتوقع معدوم وتباين $\frac{1}{n}$ من أجل k>p

ومنه من الممكن بناء فرضية حول معامل الارتباط الذاتي الجزئي، التي تكون صياغتها وفق الشكل:

$$\begin{cases} H_0: & \rho(kk)=0 \\ H_1: & \rho(kk)\neq 0 \end{cases}$$

وبالتالي نقوم بحساب إحصائية ستيودنت كما يلي:

$$t_c = \frac{|r(kk)|}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \to t_{n-1}^{\alpha/2} \to N(0,1)$$

يتم مقارنة القيمة المحسوبة لستيودنت بقيمة Z المعيارية (عندما يكون حجم العينة كبير فإن توزيع ستيودنت يتقارب من التوزيع المعياري Z).

من أجل مستوى معنوية $\alpha=5\%$ فإن قيمة $t_{n-1}^{\alpha/2} \approx Z = 1.96$ ومنه يمكن استنتاج مجال الثقة لـ $\rho(kk)$ عند مستوى ثقة 95% كما يلي:

$$IC = \left[\pm 1.96\sqrt{\frac{1}{n}} \right].$$

وما يمكن قوله أن هذا المجال ثابت ومتطابق مع دالة الارتباط الذاتي الجزئي إذا كانت السلسلة الزمنية المتاحة عبارة عن شوشرة بيضاء.[8] *(R. Bourbonnais M.Terraza (2010), P90)*

2-6 معامل التأخير

نضطر غالبًا إلى ترجمة متغير ما بناءً على ماضيه. لذلك من المريح تحديد معامل يحول متغير X_t إلى قيمته السابقة. وهذا هو معامل التأخير المحدد بالحرف B (ويرمز له كذلك بالرمز L). حيث:

$$\begin{cases} BX_t = X_{t-1} \\ B^2 X_t = X_{t-2} \\ \vdots \\ B^d X_t = X_{t-d} \end{cases}$$

مع العلم أن: $B^0=1$ حيث: $1X_t=X_t$

- العمليات المعتادة مثل الجمع والضرب والقسمة والعكسية ممكنة على مجموعة متعددة الحدود المؤخرة مع نفس الخصائص الموجودة في السلسلة بأكملها.

2-7 معامل الفروقات

المعامل Δ هو الفرق بين السلسلة الزمنية (الظاهرة) والتأخر الخاص بها لوحدة من الزمن.

$$\begin{cases} \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1-B)X_t \\ \quad \Rightarrow \Delta = (1-B) \\ \Delta^2 X_t = (1-B)^2 X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \\ \quad \vdots \\ \Delta^d X_t = (1-B)^d X_t \end{cases}$$

- **بعض الخصائص:**

– إزالة الاتجاه العام

أحيانا نستخدم العملية Δ في إزالة الاتجاه العام . حيث من أجل سيرورة من الشكل:

$$Xt = at + b + Et$$

مع العلم أن Et مستقرة، فإن:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (at + b + E_t) - [a(t-1) + b + E_{t-1}] = a + (E_t - E_{t-1})$$

كحالة عامة فإن العملية العملية Δ تزيل الاتجاهات العامة المتعددة الحدود من الدرجة d.

مثال2–7: إذا كان اتجاه من الدرجة 2 من الشكل:

$$X_t = at^2 + bt + c + E_T$$

$$\Delta^2 = (1-B)^2 = 1 - 2B + B^2$$

ومنه:

$$\Delta^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = \ldots = 2a + \left[E_t - 2E_{t-1} + E_{t-2}\right]$$

تجدر الإشارة إلى أن المعامل Δ^d يقلل مشاهدات السلسلة X_t بمقدار d قيمة لأن $\Delta^d X_t$ تكون معرفة فقط من أجل، $t>d$ ، أيضا، استخدام الفروقات لدرجة أكبر من 2 أمر نادر الحدوث.

تفترض معظم النماذج أن السلسلة المدروسة مستقرة. ومع ذلك، فإن معظم السلاسل التي نتعامل معها تنمو مع الوقت، أو حتى إذا لم تكن تنمو، فإن تقلباتها ليست منتظمة. وبالتالي فهي غير مستقر.

من الممكن عمومًا استخدام عامل الفروقات لإنشاء سلسلة مستقرة.

– معامل الفروقات الفصلي:

نعرفه كما يلي: $\Delta_s = 1 - B_s$.

مثال2–8 :

$$\Delta_{12} X_t = (1 - B^{12}) X_t = X_t - X_{t-12}$$

نستخدم الفروقات Δ_s لإزالة المركبة الفصلية عند الفترة s من السلسلة. (DERGAOUI. R (2016)[9]

2-8 السلاسل الزمنية غير المستقرة.

إذا تميزت السلسلة الزمنية المشاهدة بالاستقرارية، فهذا يدل على أن الخصائص الإحصائية لهذه السلسلة الزمنية ثابتة مهما تغير الزمن، وبالتالي من السهل التعبير عنها في صورة نموذج أو معادلة رياضية بسيطة تعتمد على معلمات ثابتة يمكن تقديرها بالطرق المناسبة. لكن إذا كانت السلسلة الزمنية المشاهدة غير مستقرة، ففي هذه الحالة هناك صعوبة في التعبير عنها بواسطة نموذج رياضي، وقد يسهل أحيانا نمذجة مثل هذه العمليات التي تولد هذه السلاسل إذا كانت عبارة عن سير عشوائي ذا اتجاه.

1.8.2 السلاسل المتجانسة:

إن معظم السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ في الاقتصاد ومجال الأعمال والبيئة وغيرها غالبا ما تكون غير مستقرة في الوسط ولكنها تتميز بخاصية تعرف بالتجانس. ويقصد بهذه الخاصية أنه بالرغم من أن المتوسط الحسابي لهذه العمليات قد يتغير مع الزمن، إلا أن **أجزاء من السلسلة** تسلك سلوكا متشابها إلى حد كبير يمكن معه تحويل السلسلة إلى سلسلة مستقرة. من ناحية أخرى بغض النظر عن ثبات المتوسط أو تغيره مع الزمن فإن الكثير من السلاسل الزمنية يتغير تباينها بتغير الزمن (غالبا مايتزايد)، ومثل هذه السلاسل يمكن تحويلها إلى سلاسل مستقرة عن طريق إجراء بعض التحويلات الرياضية البسيطة، وبصفة عامة يطلق على هذه السلاسل التي يمكن تحويلها بالسلاسل الزمنية غير المستقرة. (سمير مصطفى شعراوي 2005. ص140)[10]

وتجدر الإشارة أن هذه التحويلات الرياضية المستخدمة من أجل جعل السلسلة مستقرة لا يقتصر استخدامها مع النماذج العشوائية فقط، بل يمتد استخدامها كذلك ليشمل النماذج المحددة (غير عشوائي). فإذا كان الاتجاه العام للسلسلة محددا (*Deteministic*) الذي يمكن تمثيله في شكل كثير حدود من بمعلمات لا تتغير مع الزمن.

مثال2-9: إذا كان لدينا النموذج التالي:

$$Y_t = 2Y_{t-1} - Y_{t-2} + \delta + \varepsilon_t$$

حيث ε_t شوشرة بيضاء، و δ مقدار ثابت غير معدوم.

- بين أن العملية $(Y_t, t \in Z)$ غير مستقرة وحولها إلى عملية مستقرة.

الحل:

$$E(Y_t) = 2E(Y_{t-1}) - E(Y_{t-2}) + \delta \quad .....(1)$$

اذا كانت العملية $(Y_t, t \in Z)$ مستقرة فإن:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = E(Y_{t-2}) = \mu \quad .....(2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد:

$$\mu = 2\mu - \mu + \delta$$
$$\Rightarrow \delta = 0$$

وهذا يخالف الفرض القائل بأن δ مقدار غير معدوم ومنه فإن العملية $(Y_t, t \in Z)$ غير مستقرة،

$$Y_t - Y_{t-1} = 2Y_{t-1} - Y_{t-2} + \delta + \varepsilon_t - Y_{t-1}$$
$$(Y_t - Y_{t-1}) = (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \delta + \varepsilon_t$$

ليكن: $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$ وبالتالي:

$$Z_t = Z_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

واضح أن العملية Z_t غير مستقرة

$$Z_t - Z_{t-1} = Z_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - Z_{t-1}$$
$$(Z_t - Z_{t-1}) = \delta + \varepsilon_t$$
$$w_t = \delta + \varepsilon_t$$

ومنه فإن:

$$E(w_t) = \delta$$
$$Var(w_t) = \sigma^2$$
$$\gamma(h) = Cov(w_t, w_{t-h}) = 0$$

وبالتالي فإن العملية w_t مستقرة لأن عزومها حتى الرتبة الثانية لا تعتمد على الزمن.

2.8.2 أهم العمليات غير المستقرة:

غالبًا ما تُظهر السلسلة المشاهدة سلوكًا غير مستقر. وفي هذه الحالات، من الضروري عندئذٍ تحديد نوع عدم الإستقرارية الذي تتقيد به السلسلة. وهذا يجعل من الممكن استخدام نموذج مناسب من أجل اختيار الطريقة الملائمة لتحويل السلسلة المعنية إلى سلسلة مستقرة.

يمكن أن يتعلق عدم استقرارية العمليات العشوائية بكل من التوقع الرياضي والتباين ودالة التغاير الذاتي. في طريقة *Box* و *Jenkins* ، يتم الكشف عن عدم الإستقرارية من خلال الشكل البياني (الاتجاه، الدورة الطويلة، الموسمية المتفجرة، تعديل الهيكل...) أو عن طريق دالة الارتباط الذاتي وطيف السلسلة الخام (دالة الارتباط الذاتي تتناقص تدريجيا ببطء ،...).

حتى الثمانينيات، لم يكن هناك تحليل دقيق حول اختبارات للكشف عن عدم الاستقرارية. نتيجة لذلك ، كانت التحويلات المستخدمة هي مرشحات الفرق وصيغة *Box Cox* التي تحتوي كحالة خاصة على البيانات اللوغاريتمية. في ظل هذه الظروف، كان يحدث في كثير من الأحيان أن التحول تم تكييفه بشكل سيء لخصائص عدم الاستقرارية، لقد أشار كل من نيلسون وبلوسر(1982) إلى أن حالات عدم الاستقرارية يتم تحليلها من خلال نوعين من العمليات: *(R. Bourbonnais Terraza. M (2010), p153)* [11]

- عمليات (TS , Trend Stationnary) التي تمثل نوعًا محددًا غير مستقر.
- عمليات (*DS (Differency Stationnary)*) للعمليات العشوائية غير المستقرة

أولا: عمليات تحديدية من نوع *TS* : وهي الفئة الأولى من العمليات غير المستقرة التي سيتم النظر فيها هي الفئة التي يجب إزالة منها مركبة الاتجاه العام لتكون مستقرة.

تعريف2–6: يقال أن عملية X_t تتميز بعدم الاستقرارية التحديدية، أي أن عملية X_t هي (*TS,Trend Stationnary*) إذا كان أمكن كتابتها:

$$X_t = f_t + C_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21-2)$$

حيث: ***f(t)*** هي دالة في الزمن التي تدل على الاتجاه العام و C_t هو المكون "الدوري" الذي يتكون من عمليات *ARMA* المستقرة. ووفقًا للتعريف (2-2)، فإن العملية X_t هي مجموع دالة تحديدية للزمن ومكون ثابت دوري. وهذه العملية لا تلبي شروط الإستقرارية من الرتبة الأولى.

وفي الواقع أن التوقع : $E(X_t) = f(t) + C$ ، مع: $C = E(c_t)$ هو عبارة عن دالة للزمن.

ويأتي عدم الإستقرارية نتيجة تغير التوقع للعملية مع الزمن، في حين أن التباين يبقى ثابتا. وتصبح هذه العملية مستقرة عندما نطرح منها ميلها التحديدي:

$$X_t - f(t) = w_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22-2)$$

f(t) هي دالة تحديدية، على سبيل المثال: $f(t) = a + bt$ ويمكننا أيضًا اعتبار أنها دالة ذات اتجاه تربيعي، أي شبه خطي كما يلي مثلا: $f(t) = a + bt + ct^2$

تتعلق الخاصية الأولى المهمة في تمثيل الظواهر الاقتصادية بآثار الصدمات على سلسلة من نوع *TS*: صدمة مفاجئة ε_t (بمعنى أنها تحديد ε_t) ليس لها تأثير مستمر على العملية ومن ثم أنه ليس بالإمكان تغيير في اتجاهه. لذلك يكون له تأثير فقط على الجزء الدوري الذي هو مستقر، لذلك يكون تأثيره مؤقتًا. في الواقع توجد خاصية أساسية للعمليات المستقرة وهي خاصية الذاكرة القصيرة، بمعنى أن الارتباطات الذاتية تظهر متناقصة بشكل أسي.

تتميز عمليات *TS* بخاصية عدم استمرار الصدمات. في الواقع، عندما تتعرض لصدمة عشوائية، ويميل تأثير هذ الأخير إلى الزوال بسرعة بمرور الوقت. وهذا يعني أنه عندما يكون لدينا عملية *TS*، فإن تأثير الصدمة الإيجابية أو السلبية، مع بقاء العناصر الأخرى متساوية، واتجاه عام يميل إلى الاختفاء بمرور الوقت، وينضم المتغير المدروس إلى ديناميكيته الطويلة الأجل التي يحددها الجزء التحديدي ***f(t)***.

تعكس هذه الخاصية وجود اتجاه غير عشوائي لا يظهر أي كسر من الناحية الاقتصادية، هذا يعني أن المسار الطويل المدى للسلسلة غير حساس للتقلبات الدورية.

الخاصية المهمة الثانية، ذات الصلة بالأولى، تتعلق بتفكيك دورة الاتجاه لعملية *TS* ، وهي واضحة بشكل خاص في هذه الحالة، لأن الاتجاه العام يتكون من ***f(t)*** والدورة المعبر عنها بواسطة C_t، التي هي عملية الانحرافات في الاتجاه.

ثانيا: عمليات من نوع *DS* (*Difference Stationnary*): وهي عمليات غير مستقرة عشوائيا، ويمكن جعلها مستقرة عن طريق استخدام عامل الفروق $(1-\mathrm{B})^d X_t = \beta + \varepsilon_t$، حيث ε_t عملية مستقرة من نوع ARMA أو شوشرة بيضاء بتوقع معدوم وتباين σ^2، β ثابت حقيقي وd درجة مرشح الفرق.

تعريف2–7: يقال أن العملية X_t تتميز بعدم الإستقرارية العشوائية، أو أن عملية X_t هي من نوع *DS* إذا كان الفرق الأول لهذه العملية $(1\text{-B})X_t$ مستقرا. ونقول عن هذه العملية أنها متكاملة من الدرجة واحد، ونكتب $X_t \to I(1)$

حيث غالباً ما يتم تمثيل هذه العمليات باستخدام عامل تصفية الفرق الأول (d=1). ونكتب:

$$(1-\mathrm{B})X_t = \beta + \varepsilon_t$$
$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

إن إدراج الثابت β ضمن عمليات *DS* يسمح بمعرفة حالتين:

- إذا كان $\beta = 0$ فإن العملية DS تكون بدون مشتقة، وتكتب: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$

وهي عبارة عن عملية انحدار ذاتي من الرتبة الأولى حيث المعلمة (ϕ_1=1). وبما أن ε_t شوشرة بيضاء، فإن العملية DS تُعرف باسم (*Random Walk Model*) نموذج المشي العشوائي وهو عملية بدون ذاكرة، وبالتالي بطبيعتها لا يمكن التنبؤ بهذا النوع من العمليات، مثلا الحركات في أسعار الأسهم ينظر إليها على أنها مثل المشي العشوائي، وهذا هو السلوك الذي لا يمكن التنبؤ به. وهذه العمليات كثيرا ما تستخدم لتحليل الكفاءة في الأسواق المالية.

من أجل معرفة خصائص هذا النموذج فإنه سنقوم بكتابته على صورة المتوسطات المتحركة اللامنتهية:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$
$$X_{t-2} = X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$

ليتم كتابة النموذج كما يلي:

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

وخصائص هذه العملية هي:

$$E(X_t) = X_0$$
$$Var(X_t) = t\sigma^2$$
$$Cov(X_t X_{t'}) = \sigma^2 \times Min(t,t'); t \neq t'$$

حيث نلاحظ أن التباين لـ X_t يؤول إلى ما لانهاية لما t تقترب من مالا نهاية. وبالتالي تباين العملية العشوائية *AR(1)* غير ثابت مع الزمن عندما يكون جذر الوحدة موجودًا في عملية الانحدار الذاتي، ومنه فإن السلسلة X_t ليست مستقرة ولكن الفرق الأساسي لها مستقر.(*Régis Bourbonnais Michel, 2010*)

- إذا كان $\beta \neq 0$ فإن العملية DS تكون بمشتقة، وتكتب: $X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$

$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$
$$X_{t-1} = X_{t-2} + \beta + \varepsilon_{t-1}$$
$$X_{t-2} = X_{t-3} + \beta + \varepsilon_{t-2}$$

وبالتالي:

$$X_t = X_0 + \beta t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

ومنه:

$$E(X_t) = X_0 + \beta t$$
$$Var(X_t) = t\sigma^2$$
$$Cov(X_t X_{t'}) = \sigma^2 \times Min(t,t'); t \neq t'$$

وبالتالي هذه العملية غير مستقرة في التوقع والتباين، ومن أجل تحويلها لأي عملية مستقرة نستخدم الفرق الأول كما يلي:

$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-\mathrm{B})X_t = \beta + \varepsilon_t$$

9.2 تمارين الفصل الثاني

التمرين 01: تمثل البيانات التالية عدد الوحدات المباعة سنويا من إحدى السلع في أحد المحلات

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
المبيعات	1	3	2	4	3	2	3	2

- أحسب معاملات الارتباط الذاتي

التمرين02: لتكن $(X_t)_{t\in z}$ المعرفة كما يلي: $X_t = z_t + \theta z_{t-1}$

حيث: $(z_t)_{t\in z}$ عبارة عن سلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتطابقة التوزيع $(v.a.iid)$.

$E(z_t) = 0, \quad Var(z_t) = \sigma^2$

- هل X_t مستقرة؟

التمرين 03:

لتكن $(z_t)_{t\in z}$ متتالية من المتغيرات العشوائية التي تتبع التوزيع الطبيعي، ولدينا:

$X_t = z_t$ et $Y_t = (-1)^t z_t$

حيث: $E(z_t) = 0, \quad Var(z_t) = \sigma^2$

- بين إن كانت X_t و Y_t مستقرة. نفس السؤال بالنسبة لـ: $X_t + Y_t$

التمرين 04: نعتبر النموذج التالي:

$$Y_t = at + b + \varepsilon_t, \quad \forall t \in z$$

حيث : $a, b \in R$ و $(\varepsilon_t \in Z)$ سلسلة من المتغيرات العشوائية:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$
$$E(\varepsilon_t \varepsilon_j) = 0, \forall t \neq j$$
$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

- هل ε_t مستقرة؟ و هل Y_t مستقرة؟

10.2 مراجع وإحالات الفصل الثاني

[1] **DERGAOUI. R (2016);** « Processus de longue mémoire » Faculté des Sciences Exactes Département MI/Mathématiques, Université A. Mira de Béjaia p6.

[2] **Michel Tenenhaus (1994)** "Méthode statistique en gestion " ,Dunode ETP. france, p282

[3] **Hamilton.J-D (2016).** "Time Séries Analysis". Princeton University Press, Princetion, New Jersey

[4] **Delignieres. D, (Janvier 2001)** « L'analyse des processus stochastiques ». EA 2991 "Sport performance, santé", Université de Montpellier 1.

[5] **Daudin, JJ, Duby. C, Robin.S et P. Trécourt. (1996).** « Analyse des Séries Chronologiques ». INAPG, Mathématiques.

[6] سمير مصطفى شعراوي، " مقدمة في التحليل الحيص للسلاسل الزمنية" كلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 2005. ص140.

[7] *Michael Falk, Frank Marohn, René Michel, Daniel Hofmann, Maria Macke* ***"A First Course on Time Series Analysis Examples with SAS"****, Chair of Statistics, University of Wurzburg February 1, 2006, P 65*

[8] Régis Bourbonnais Michel Terraza (2010) « Analyse des séries temporelles », 3e édition, Dunod, Paris, P90

[9] **DERGAOUI. R (2016);** op cit p8-9

[10] سمير مصطفى شعراوي مرجع سابق. ص140.

[11] R.**Bourbonnais .R Terraza. M (2010)** OP.cit, p153.

الفصل الثالث : نماذج التمهيد الأسي للتنبؤ بالسلاسل الزمنية

تمهيد:

يحتاج الإنسان على الدوام إلى التنبؤ بأحداث المستقبل وذلك لأن خبرته بالماضي أكدت له على أن المعرفة المبكرة بالمستقبل يمكن أن توفر له فرصة أفضل للاستعداد لهذه الأحداث المستقبلية، لهذا نجد أن المجتمعات في الماضي حافلة بالأساليب التي تعتبر اليوم بدون أساس علمي إلا أنها كانت تلبي حاجة مهمة من حاجات الإنسان في الاطلاع على المستقبل والاستعداد له، ولكن مع التطور وتقدم خبرة الإنسان واستخدامه للأساليب الكمية المتقدمة أصبح التنبؤ أداة فعالة أكثر علمية ودقة في توقع الأحداث المستقبلية مما ساعد على زيادة استعداد الأفراد وكذلك الشركات للتغيرات المتوقعة في المجالات المختلفة ومنها التغيرات في السوق وحجم ونمط الطلب على المنتجات.

وتعتمد جميع طرق التنبؤ للسلاسل الزمنية على استخدام بيانات عن الماضي للتعرف على نمط التغيرات التي حدثت، واستخدام ذلك في التنبؤ بالمستقبل.

سنناقش طريقة التمهيد الأسي التي تعطي وزنا أكبر للتغيرات التي حدثت في الماضي القريب عن تلك التغيرات التي حدثت في الماضي البعيد.

كما أنه قد تم التطرق إلى التنبؤ وتقدير الاتجاه العام للسلسلة باستخدام نماذج الانحدار والمتوسطات المتحركة في الفصل الأول، لذلك سنركز في هذا الفصل على أهم نماذج التمهيد الأسي، وقبل ذلك سنقدم تعريفا للتنبؤ و ذكر أهم تقنيات التنبؤ باستخدام المتوسطات المتحركة.

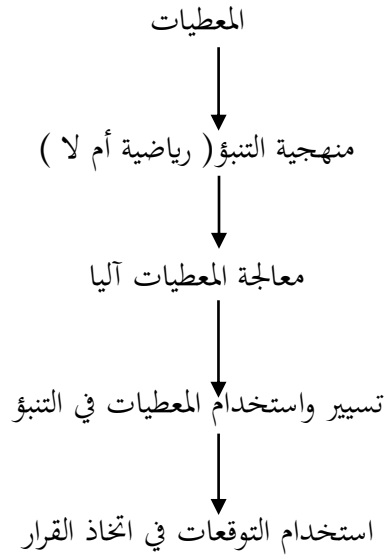
1.3 مفهوم التنبؤ:

يعرف التنبؤ على أنه" التخطيط ووضع الافتراضات حول أحداث المستقبل باستخدام تقنيات خاصة عبر فترات زمنية مختلفة وبالتالي فهو العملية التي يعتمد عليه المديرون أو متخذو القرارات في تطوير الافتراضات حول أوضاع المستقبل.

ويرتكز التنبؤ على تحديد تطور ظاهرة ما في فترات مستقبلية، حيث يفترض الواقع أن تكون لدينا مشاهدات متعلقة بالزمن، وجملة من الفرضيات تقودنا إلى نمذجة الظاهرة المدروسة، وبعد ذلك نقوم باعتماد هذا النموذج في الجزء غير المشاهد من الظاهرة.

وتتطلب عملية التنبؤ إدخال عدد معتبر من المعطيات الدقيقة والكافية تنطلق من فترة أساس من أجل تحديد النموذج الأمثل. وهي بناء نظام لتوقع سلسلة من العمليات تتم كما في الشكل التالي:

(Regis Bourbonnais, 1982, p09)[1]



2.3 التنبؤ باستخدام نماذج المتوسطات المتحركة

تميز تطبيق نماذج الانحدار على السلاسل الزمنية التي يكون فيها اتجاه عام، بينما هذا النوع من النماذج يتلاءم والسلاسل الزمنية التي تتميز بالاستقرار والعشوائية، أي أنها تتذبذب حول وسط ثابت معين، وبالتالي فإنها خالية من مركبة الاتجاه العام والفصلية في مرحلة أولية.

وفيما يلي سنتطرق إلى أهم تقنيات التنبؤ باستخدام المتوسطات المتحركة والأكثر استعمالا.

1.2.3 تقنية الأوساط المتحركة البسيطة:

تستعمل هذه الطريقة للقيام بتنبؤات على المدى القصير، وتعتمد على حساب المتوسط لمجموعة قيم المشاهدة، وأخذ هذا المعدل كتنبؤ للمرحلة القادمة.

والصيغة المستعملة في الحساب هي:[2]

$$\tilde{y}_{t+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_{t-i} \qquad \text{.....(1.3)}$$

$$= \frac{y_t + y_{t+1} + \ldots y_{t-n+1}}{n}$$

حيث:

$\tilde{y}_{t+1}$: هو التنبؤ للفترة الأولى

y_t : القيمة المشاهدة في الفترة t.

n: عدد المشاهدات.

هذه التقنية تعطي أوزانا متساوية للمشاهدات المستخدمة في حساب المتوسط . إضافة إلى غياب طريقة تقدير مناسبة، ومنه غياب وسائل إحصائية ملائمة للحكم على قوة النموذج الإحصائية والتنبؤية، ومنه فهذا

النموذج ينتقد على أساس أنه يعتبر أن y_t في المستقبل ماهي إلا المتوسط الحسابي لقيمه السابقة فقط، لهذا كان من الضروري تعديله ليأخذ بعين الاعتبار هذا الانتقاد ويعطي وزنا أكبر لتأثير قيم y_t الحالية عن سابقتها وهكذا تراجعيا إلى نقطة بداية السلسلة، إضافة إلى أن النتيجة تتوقف بشكل أساسي على قيمة n ، ولهذا يقترح أخذها في حالة معطيات فصلية مساوية لأربعة (n=4)، بينما في المعطيات الشهرية تساوي 12 وفي الحالات الأخرى يتم اختيارها بطريقة ما.(مولود حشمان، 1998، ص64).[3]

2.2.3 تقنية الأوساط المتحركة المرجحة:

عكس الطريقة السابقة والتي تعطي نفس الوزن للمتغير المراد تمهيده في مختلف الفترات الزمنية، فإن هذه الطريقة تعطي أوزنا مختلفة لقيم المشاهدات التي عددها n مع إعطاء وزن أكبر للقيم أو المشاهدات الحديثة: أي أنها تخصص الوزن الأكبر للقيم الأخيرة عن سابقتها بشكل متناقص، ونعني بهذا أن تأثير y_{t-1} يكون أكبر من تأثير y_{t-s} حيث $S>1$. كما أنها تتخلص من إشكالية n.

ويكتب هذا النموذج رياضيا في الشكل التالي:[4]

$$\tilde{y}_{t+1} = k_0 y_t + k_1 y_{t-1} + ... + k_{n-1} y_{t-(n-1)}$$

$$\tilde{y}_{t+1} = \sum_{i=0}^{n-1} k_i y_{t-i} \qquad .....(2.3)$$

حيث: $k_0, k_1, ..., k_{n-1}$: معاملات الترجيح، و يشترط أن يكون مجموعها يساوي الواحد:

$$\sum_{i=0}^{n-1} k_i = 1$$

3.2.3 تقنية الأوساط المتحركة المضاعفة:

تستعمل هذه الطريقة لمعالجة السلاسل الزمنية من الشكل:

$$X_t = a + (bxt) + \varepsilon_t$$

أي أن هناك اتجاه عام في السلسلة إضافة إلى المركبة العشوائية.

وتعتمد هذه الطريقة على حساب الأوساط المتحركة البسيطة كمرحلة أولى، ثم القيام بحساب الأوساط المتحركة البسيطة انطلاقا من القيم المحصل عليها في المرحلة الأولى.

ويعرف المتوسط المتحرك المضاعف على أساس n بالعلاقة التالية:

$$MM_t = \frac{M_t + M_{t-1} + M_{t-2} + ... + M_{t-n+1}}{n} \qquad .....(3.3)$$

$$M_t = \frac{y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + ... + y_{t-n+1}}{n}$$

وعلاقة التنبؤ للفترة $t+1$ تعطى كما يلي:

$$\hat{a}_t = 2M_t - MM_t \qquad .....(4.3)$$

$$\hat{b}_t = \frac{2}{n-1}(M_t - MM_t) \quad .....(5.3)$$

$$\tilde{y}_{t+h} = \hat{a}_t + (\hat{b}_t + h) \quad .....(6.3)$$

لقد استحدثت هذه التقنية من أجل إعطاء نفس الأوزان لجميع المشاهدات التي تدخل في حساب الوسط الحسابي.

إلا أنها تبقى تعاني من مشكل آخر هو تطلبها تخزين عدد كبير من المشاهدات الفعلية لكل فترة من الفتراتn التي تدخل في حساب الوسط الحسابي، وهذا ما قد يكون مكلفا أو غير متاح.

ولتجاوز هذه النقائص استحدثت تقنيات التمهيد الأسي التي لا تتطلب تخزين عدد كبير من المشاهدات.

3.3 مفهوم التمهيد الأسي:

يعد موضوع التمهيد الأسي للتنبؤ بالسلاسل الزمنية من التقنيات الإحصائية والاستدلالية المهمة التي تعالج التشويش أو الأخطاء العشوائية، وهو نوع من أنواع التقدير الذي أثبت نجاحه من خلال دراسة الحالات التي تعتمد أو تتغير مع الزمن. ويعتبر العالم *Holt C.C* في عام *(1957)* أول من وضع هذا الأسلوب، إذ يعد من الأساليب الجيدة في التنبؤ بالسلاسل الزمنية. وقد تطورت هذه الطرائق وتعددت وأصبحت بأشكال عدة لذا وجب اختيار الطريقة الأكثر ملاءمة.

يعرف مصطلح التمهيد *Smoothing* بأنه عملية صقل أو تنعيم البيانات، ويقصد به محاولة تقليل التغايرات في قيم السلسلة حول خط المنحنى الذي يمثل النمط العام للسلسلة كما أن الأسي *exponential* يشير إلى نوع التعبير الذي بواسطته سنحدد الأوزان المختلفة.

ويعتمد التمهيد الأسي على حساب ما يعرف باسم المتوسط المتحرك *Moving Average* كوسيلة تمهيد، وهو عبارة عن سلسلة من المتوسطات الحسابية لقيم متتالية من السلسلة تتحرك على طول زمن السلسلة لتشكل سلسلة جديدة.

يتم استخدام تقنية التمهيد الأسي في حالة السلاسل التي تتأثر بالاتجاه العشوائي. نحن نفترض أن هذا النوع من المركبات يحدث عندما لا يمكن نمذجة تطوره وفق شكل دالي.

والتمهيد يجمع بين جميع التقنيات التجريبية التي لديها الخصائص المشتركة لإعطاء وزن أكبر للقيم الأخيرة للسلسلة وتسمى هذه الأساليب أيضا بالتصفية، لأنه هي عملية رياضية تحويل X_t (مدخلات) إلى سلسلة أخرى جديدة y_t (مخرجات).

في طرق التمهيد الأسي غير الموسمية يتم بناء نقطة الانطلاقة للسلسلة الزمنية على النحو التالي:

$$x_t = f_t^{(k)} + \varepsilon_t \quad .....(7.3)$$

حيث:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$
$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t$$
$$E(\varepsilon_t \varepsilon_j) = 0 \quad \forall t, \forall j, \forall t \neq j$$

$f_t^{(k)}$ دالة كثير حدود من الدرجة k، وبالتالي ترتبط المعلمات بالزمن.

تختلف طرق التمهيد الأسي عن بعضها البعض حسب درجة كثير الحدود $f_t^{(k)}$ ، وعادة الدرجات المستخدمة كثيرا هي: $k=0, k=1$

- إذا كان $k=0$ فإن:

$$x_t = a_t + \varepsilon_t \quad .....(8.3)$$

حيث: $a_t = a$ ثابت.

إن طريقة التمهيد الأسي المناسبة لهذا النوع من النماذج هي طريقة التمهيد الأسي البسيط، وهي قابلة للاستعمال في حالة السلاسل الزمنية التي تسلك مسارا عشوائيا حول وسط حسابي ثابت، بمعنى أنها لا تحوي لا مركبة اتجاه عام ولا تقلبا فصليا.[5]

- إذا كان $k = 1$ فإن:

$$x_t = a_t + b_t t + \varepsilon_t \quad .....(9.3)$$
$$f_t^{(1)} = a_t + b_t t$$

حيث: $a_t = a$ و $b_t = b$

الطريقة المستخدمة في هذه الحالة هي التمهيد الأسي المضاعف (*DES*).

وعندما يكون k غير ذلك، تسمى الطريقة بطريقة التمهيد الأسي العام *(DEG)*

4.3 نموذج التمهيد الأسي البسيط *Simple Exponential Smoothing Model* .

التمهيد الأسي البسيط طريقة للتوقع تعتمد على استخدام متوسط متحرك مرجح، و يكون الأساس في تحديد الأوزان هو الأس، حيث يعطى الوزن الأكبر لأحدث مشاهدة ثم تتناقص الأوزان أسيا.

لنفترض أن y_t قيمة السلسلة عند الزمن t. حيث يمكن أن ينظر إليها على أنها نتيجة لمجموعة خطية لا نهائية من القيم السابقة، وزن (أو تأثير) الماضي في الوقت الحاضر يتناقص مع أقدميته. وبالتالي يمكننا كتابة التركيبة الخطية وفقًا لما يلي:

$$z_{t-1} = b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + b_3 y_{t-3} + \ldots \quad ; b_1 > b_2 > \ldots > b_k > \ldots \quad .....(10.3)$$

يمثل z_{t-1} القيمة الممهدة للسلسلة الزمنية y_t المحسوبة عند*t-1*. عن طريق الافتراض وعندما يتم تقدير المعلمات، فإنه يمكن أن نعتبر أن هذه القيمة الممهدة تمثل القيمة المتوقعة لـ y_t المحسوبة عند *t-1* من أجل t. أي:

$$z_{t-1} = y_{t-1,i}^{p} = \hat{y}_t \quad .....(11.3)$$

المشكلة إذن هي في كيفية تحديد المعاملات b_k وفقًا لفرضية التمهيد. لهذا نفترض أن التركيبة الخطية عبارة عن نموذج هندسي ممركز (نموذج كويك *(modèle de Koyck)*).

- هي هندسية لأن أوزان التركيبة الخطية تتناقص أضعافا مضاعفة.
- يتم تحويلها إلى طبيعية حيث يجب أن يكون مجموع الأوزان يساوي 1.

بما أن الأوزان (b_k) متناقصة أسيا، فإننا نكتبها وفق الشكل التالي:

$$b_k = b(1-\lambda)^k \quad 0 \le \lambda \le 1 \quad k = 1,2,...; \quad b_k \in R$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b\sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda)^k \qquad .....(12.3)$$

حيث: $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda)^k$ هو مجموع متتالية هندسية أساسها$(1-\lambda)$ الذي هو أقل من واحد، وبالتالي يمكن استنتاج أن:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b\frac{1-\lambda}{\lambda}$$

يمكننا أن نلاحظ أن الأوزان غير مرجحة (غير ممركزة)، أي مجموعها لا يساوي الواحد ولتحويلها إلى مرجحة، نقوم بقسمتها على مجموعها، ولنفترض أن:

$$\omega_k = \frac{b_k}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k} = \lambda(1-\lambda)^{k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k = 1$$

بتعويض قيم الأوزان w_k في نموذج هندسي للمعادلة رقم (3-10) نجد:

$$z_{t-1} = \hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + \lambda(1-\lambda)y_{t-2} + \lambda(1-\lambda)^2 y_{t-3} + ...$$

$$= \lambda\sum_{i=0}^{\infty}(1-\lambda)^i y_{t-1-i}$$

وبالتالي يمكن استنتاج الصيغة التالية.*(R. Bourbouni . M. Terraza, 2010, p54)*:[6]

$$z_{t-1} = \hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + (1-\lambda)[\lambda y_{t-2} + \lambda(1-\lambda)y_{t-3} + ...]$$

ومنه:

$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + (1-\lambda)\hat{y}_{t-1} \qquad .....(13.3)$$

حيث $\hat{y}_t$: تمثل القيمة المتوقعة للسلسلة عند الزمن t، و y_{t-1} تمثل قيمة السلسلة عند الزمن $t-1$، و $\hat{y}_{t-1}$ تمثل القيمة المتوقعة للسلسلة عند $t-1$، و λ يمثل معامل لحساب المتوسط المتحرك الموزون (يعرف باسم ثابت التمهيد لنموذج التمهيد الأسي)، وتتراوح قيمته بين صفر وواحد. القيمة واحد تعني أن التوقع للمستقبل بني على القيمة الأخيرة (y_{t-1}) بمفردها، (أي أن النمط بني فقط على القراءات الأخيرة في

السلسلة). في حين القيمة صفر تعني أن جميع القيم السابقة أعطيت وزناً متساوياً للتوقع لـ $\hat{y}_t$، وهو يعطي أهمية معنوية للمشاهدات البعيدة. [7]

ويتميز نموذج التمهيد الأسي البسيط عن المتوسط المتحرك باشتراك جميع القيم السابقة للسلسلة في التوقع، لأن الجزء الثاني من الطرف الأيمن من المعادلة أعلاه عبارة عن التوقع للقيمة السابقة للسلسلة، والذي بدوره يتكون من حاصل التوقع للقيمة السابقة لها وقيمة السلسلة الفعلية السابقة لها، وهكذا دواليك لبقية قيم السلسلة كما يتضح مما يلي:

$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + (1-\lambda)\hat{y}_{t-1}$$
$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + (1-\lambda)[\lambda y_{t-2} + (1-\lambda)\hat{y}_{t-2}]$$
$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + \lambda(1-\lambda) y_{t-2} + (1-\lambda)^2 \hat{y}_{t-2}$$
$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + \lambda(1-\lambda) y_{t-2} + (1-\lambda)^2[\lambda y_{t-3} + (1-\lambda)\hat{y}_{t-3}]$$
$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + \lambda(1-\lambda) y_{t-2} + \lambda(1-\lambda)^2 y_{t-3} + (1-\lambda)^3 \hat{y}_{t-3}$$
$$\vdots$$
$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + \lambda(1-\lambda) y_{t-2} + \ldots + (1-\lambda)^{t-2} y_1$$

إن صغر قيمة λ مثلها مثل طول الفترة المستخدمة في حساب المتوسط المتحرك، يعني ضمان درجة أكبر من التمهيد، ولكن ربما على حساب دقة التوقع. وعموماً، فاختيار قيمة λ مسألة تخضع للحكم الذاتي (Subjective Choice)، ولذلك كثيراً ما يترك للبرنامج الإحصائي اختيارها على أساس أقل درجة خطأ، من خلال طريقة "بحث الشبكة Grid Search" (Yaffee and McGee, 2000).

ونظرا لأن قيمة أحدث فترة في السلسلة الزمنية يجب أن تتوافر حتى يمكن تحديد توقع للفترة التالية فإن هذه الطريقة يمكن أن تستخدم للتوقع لفترة h بشرط أن تكون قصيرة جدا، حتى لا يفقد التوقع مصداقيته.

ويمكن كتابة النموذج التنبؤي للفترة t +h : [8] *(GOLDFARB. B et PARDOUX. C,(2011), p 125)*

$$\hat{y}_{t+h} = \lambda \hat{y}_t + (1-\lambda)\hat{y}_t$$

ملاحظة3–1: من أجل الانطلاق في عملية التمهيد يمكن اعتبار المستوى المتنبأ به للفترة الثانية على أنه المستوى الفعلي للفترة السابقة لها أي:

$$\hat{y}_2 = y_1$$

وبالرغم من أن طريقة التمهيد الأسي البسيط تمكن من التغلب على مشكلتين مهمتين من مشاكل التوقع الناتج من المتوسط المتحرك، إلا إنها مثلها مثل المتوسط المتحرك، لا تتوقع إلا لقيمة مستقبلية واحدة؛ أي أنها تفترض عدم وجود نمطية في السلسلة، وبالتالي فجميع القيم المستقبلية تساوي القيمة المستقبلية الأولى $(\hat{y}_t = \hat{y}_{t+1} = \hat{y}_{t+2} = ...)$.

ملاحظة3–2: يوجد أسلوب بديل مبسط يتطلب توقع مبدئي، ولكنه لا يستلزم تحديد الأوزان، يكتب هذا الأسلوب وفق المعادلة التالية:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t) \quad .....(14-3)$$

هذا يعني أن القيمة المتوقعة الجديدة $\hat{y}_{t+1}$ هي عبارة عن القيمة المتوقعة الماضية $\hat{y}_t$ زائد α في خطأ التوقع الماضي، من هنا إذا كانت α قريبة من واحد هذا يعني أننا قد منحنا أهمية كبيرة للمشاهدة الفعلية الأخيرة، وبالعكس كلما كانت α أصغر من واحد كلما توزعت الأهمية النسبية على عدد كبير من المشاهدات الفعلية السابقة.

1.3.3 مجال الثقة للتنبؤ باستخدام التمهيد الأسي البسيط.

- **حساب التباين:**

$$\hat{y}_t = \lambda\sum_{i=0}^{\infty}(1-\lambda)^i y_{t-1-i}$$

$$Var(\hat{y}_t) = \lambda^2 Var\left(\sum_{i=0}^{\infty}(1-\lambda)^i y_{t-1-i}\right)$$

مع العلم أن: $y_t = a_t + \varepsilon_t$ ، فإن التباين:

$$.Var(y_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

وكذلك $\forall\, t, t'\ (t \neq t')$: فإن المتغيرتان y_t و $y_{t'}$ مستقلتان. وبالتالي:

$$\begin{aligned} Var(\hat{y}_t) &= \lambda^2 Var(y_t)\left(\sum_{i=0}^{\infty}(1-\lambda)^{2i}\right) \\ &= \lambda^2 Var(y_t)\left(1+(1-\lambda)^2+(1-\lambda)^4+...\right) \\ &= \lambda^2 Var(y_t)\frac{1}{1-(1-\lambda)^2} \\ &= \lambda^2 Var(y_t)\frac{1}{1-1+2\lambda-\lambda^2} \\ &= Var(y_t)\frac{\lambda}{2-\lambda} \qquad .....(15-3) \end{aligned}$$

ومنه:

$$\frac{Var(\hat{y}_t)}{Var(y_t)} = \frac{\lambda}{2-\lambda}$$

في حالة $\lambda = 1$ فإن تباين y_t هو نفسه تباين $\hat{y}_t$

لقد تم إثبات سابقا أن:

$$\frac{Var(\hat{y}_t)}{Var(y_t)} = \frac{\lambda}{2-\lambda}$$

وبالتالي فإن بواقي التنبؤ عند t-1 من أجل t تعطى وفق الصيغة التالية: $e_t = y_t - \hat{y}_t$ ، حيث:

$$Var(e_t) = Var(y_t) + Var(\hat{y}_t)$$

وهذا لأن: y_t و $y_{t'}$ مستقلتان. إذن:

$$\begin{aligned} Var(e_t) &= Var(y_t)\left(1 + \frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \\ &= Var(y_t)\left(\frac{2}{2-\lambda}\right) \\ &= \frac{2\sigma_y^2}{2-\lambda} \qquad .....(16-3) \end{aligned}$$

وبالتالي مجال الثقة عند مستوى ثقة $1-\alpha$ للقيمة المتنبأ بها لـ y_t عند t-1 هو:

$$IC = \hat{y}_t \pm 1.96\sigma_y\sqrt{\frac{2}{2-\lambda}} \quad .....(17-3)$$

مثال3-1: لدينا سلسلة البيانات لـ y_t الممثلة في الجدول التالي:

جدول3-1: بيانات المثال 3-1

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{y_t}$	20	25	30	40	45	35	30	20

المطلوب:

- أحسب القيم التنبؤية لـ y_t باستخدام طريقة التمهيد الأسي البسيط (ثابت التمهيد: $\lambda = 0.3$)

- كون مجال الثقة للتنبؤ عند مستوى ثقة 95% عند الأفق 3.

الحل:

جدول 3-2 التنبؤ باستخدام نموذج التمهيد البسيط

t	y_t	$\hat{y}_t$	e_t
1	*20*	*20,00*	*0,00*
2	*25*	*20,00*	*5,00*
3	*30*	*21,50*	*8,50*
4	*40*	*24,05*	*15,95*
5	*45*	*28,84*	*16,17*
6	*35*	*33,68*	*1,32*
7	*30*	*34,08*	*-4,08*
8	*20*	*32,86*	*-12,86*
9		*29,00*	
10		*29,00*	
11		*29,00*	

قيمة الانطلاق: $\hat{y}_1 = y_1 = 20$

من أجل t=2 (التنبؤ المحسوب عند t=1 من أجل t=2) فإن:

$$\hat{y}_2 = 0.3 \times y_1 + 0.7 \times \hat{y}_1 = 20 = y_1$$

من أجل t=3 فإن: $\hat{y}_3 = 0.3 \times 25 + 0.7 \times 20 = 21.50$

من أجل t=4 فإن: $\hat{y}_4 = 0.3 \times 30 + 0.7 \times 21.5 = 24.05$

من أجل t=5 فإن: $\hat{y}_5 = 0.3 \times 40 + 0.7 \times 24.05 = 28.48$

من أجل t=6 فإن: $\hat{y}_6 = 0.3 \times 45 + 0.7 \times 28.48 = 33.68$

من أجل t=7 فإن: $\hat{y}_7 = 0.3 \times 35 + 0.7 \times 33.68 = 34.08$

من أجل t=8 فإن: $\hat{y}_8 = 0.3 \times 30 + 0.7 \times 34.08 = 32.68$

من أجل t=9 فإن: $\hat{y}_9 = 0.3 \times 20 + 0.7 \times 32.86 = 29$

$$\hat{y}_{10} = \hat{y}_{11} = \hat{y}_9 = 29$$

-مجال الثقة للتنبؤ

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2}{n-1}} = 9.038$$

ومنه:

$$IC = \hat{y}_t \pm 1.96\sigma_y \sqrt{\frac{2}{2-\lambda}}$$
$$IC = 29 \pm 1.96 \times 9.038 \times 1.085$$
$$IC = [9{,}78;\ 48{,}22]$$

4.3 طريقة التمهيد الأسي المضاعف (*DES*) Double Exponential Smoothing

هي طريقة تسمح بمعالجة السلاسل الزمنية التي تحتوي على مركبة الاتجاه العام والمركبة العشوائية، ولها نفس مبدأ المتوسطات المتحركة المضاعفة أي: (**2011**), p125) GOLDFARB. B PARDOUX. C, [9]

بافتراض أننا نود حساب القيمة الممهدة في مجال معين عندما يكون النموذج ذا شكل خطي تحديدي

$$y_t = a + bt$$

ومنه:

$$z_{t-1} = \lambda y_{t-1} + \lambda(1-\lambda) y_{t-2} + \lambda(1-\lambda)^2 y_{t-3} + \ldots$$
$$= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} (1-\lambda)^i \left(a + b(t-1-i)\right)$$
$$= \lambda a \sum_{i=0}^{\infty} (1-\lambda)^i + \lambda bt \sum_{i=0}^{\infty} (1-\lambda)^i - \lambda b \sum_{i=0}^{\infty} (1-\lambda)^i (1+i)$$
$$= \lambda a \frac{1}{\lambda} + \lambda bt \frac{1}{\lambda} - \lambda b \left[1 + 2(1-\lambda) + 3(1-\lambda)^2 + \ldots\right]$$

حيث:

$$1 + 2(1-\lambda) + 3(1-\lambda)^2 + \ldots = \frac{1}{\lambda} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} + \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} + \ldots$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left[1 + (1-\lambda) + (1-\lambda)^2 + \ldots\right]$$
$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

وبالتالي:

$$z_{t-1} = a + bt - b\frac{1}{\lambda} = a + b(t-1+1) - b\frac{1}{\lambda}$$
$$z_{t-1} = a + b(t-1) - b\frac{1-\lambda}{\lambda}$$
$$z_{t-1} = a + b(t-1) - b\bar{\lambda}$$
$$z_{t-1} = y_{t-1} - b\bar{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow y_{t-1} - z_{t-1} = b\bar{\lambda}$$

وهذه النتيجة توضح أن هناك انحراف مقداره $b\bar{\lambda}$ بين القيمة المشاهدة والقيمة الممهدة في مجال معين عندما يكون النموذج ذا شكل خطي.

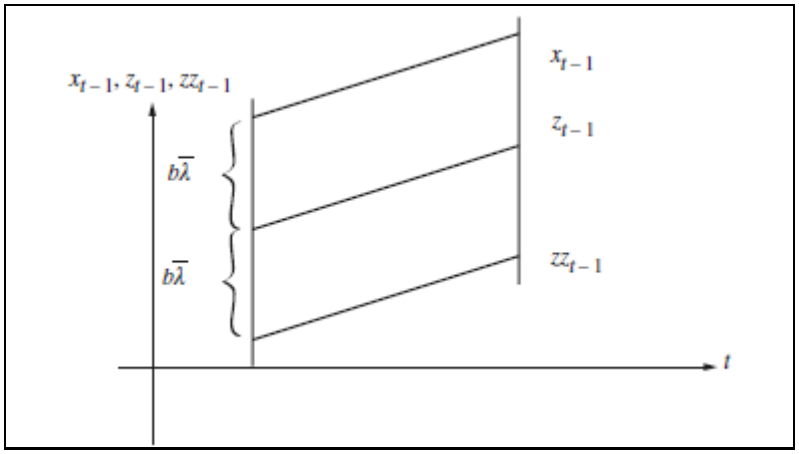
لتكن zz_t القيمة الممهدة لـ z_t ، حيث يمكن كتابة z_{t-1} وفق الشكل التالي:

$$z_{t-1} = \left(a - b\bar{\lambda}\right) + b(t-1)$$

$$zz_{t-1} = \left(a - b\bar{\lambda}\right) + b(t-1) - b\bar{\lambda} = \left(a - 2b\bar{\lambda}\right) + b(t-1) \quad .....(18-3)$$

والشكل الموالي يوضح هذه النتيجة.

الشكل (3–1): الانحراف بين السلسلة الأصلية (الخام) x_{t-1} ، z_{t-1} ***(SES :*** **و** zz_{t-1} ***(DED :*** **10**



Source : Régis Bourbonnais, Michel Terraza , Op cit p61.

وبالتالي يمكن كتابة:

$$y_{t-1} - z_{t-1} = z_{t-1} - zz_{t-1} = b\bar{\lambda}$$

ومنه:

$$y_{t-1} = 2z_{t-1} - zz_{t-1}$$

نعتبر:

$$a_{t-1} = 2z_{t-1} - zz_{t-1} \quad .....(19-3)$$

وكذلك:

$$b_{t-1} = \frac{1}{\lambda}\left(z_{t-1} - zz_{t-1}\right) \quad .....(20-3)$$

وفق هذا الاعتبار، z_{t-1} و zz_{t-1} قيمتان ممهدتان، لذلك تتأثر نتائج العمليات الحسابية في الوقت t –1. وفي ظل هذه الظروف، فإن القيمة التي يعثر عليها بطريقة DES ليست قيمة متوقعة. وهذه الطريقة تمر بمرحلتين، أولا تقدير النموذج حسب نموذج التمهيد الأسي البسيط SES، ثم بعد ذلك تقدير DES وفق الصيغة التالية:

$$z_{t-1} = \hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + (1-\lambda)\hat{y}_{t-1}$$

وبالتالي:

$$zz_{t-1} = \hat{\hat{y}}_t = \lambda z_{t-1} + \lambda(1-\lambda) z_{t-2} + \lambda(1-\lambda)^2 z_{t-3} + ..$$
$$== \lambda z_{t-1} + (1-\lambda) zz_{t-2} = \lambda \hat{y}_t + (1-\lambda)\hat{\hat{y}}_{t-1} \quad .....(21-3)$$

وبالتالي الحالات العامة لطريقة التمهيد الأسي المضاعف هي:

$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + (1-\lambda)\hat{y}_{t-1}$$
$$\hat{\hat{y}}_t = \lambda \hat{y}_t + \lambda(1-\lambda)\hat{\hat{y}}_{t-1}$$
$$a_t == 2\hat{y}_t - \hat{\hat{y}}_t$$
$$b_t == \frac{1}{\bar{\lambda}}\left(\hat{y}_t - \hat{\hat{y}}_t\right), \bar{\lambda} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$
$$y^p_{t-1,t} = a_t + b_t, (t = 2,...,n+1)$$
$$y^p_{n,n+h} = a_{n+1} + b_{n+1} \times h, (h = 2,3,...)$$

ومنه فإن التنبؤ من خلال طريقة التمهيد الأسي المضاعف *DES* هو خط مستقيم يحتوي على أصله ومنحدر على آخر القيم الموجودة في a_t و b_t. وبالتالي يمكننا استقراء هذا الخط إلى الأفق h، ولكن يجب أن يكون هذا الأفق المتوقع محدودًا لأن جودة التوقعات تتدهور بسرعة مع الزيادة في h.

مثال 3–2: نعتبر القيم المشاهدة للسلسلة y_t الممثلة في الجدول التالي:

جدول 3–3: بيانات المثال3–2

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	12	16	22	30	40	40	50	50

المطلوب:

– أحسب القيم التنبؤية لـ y_t باستخدام طريقة التمهيد الأسي المضاعف (DES) (ثابت التمهيد: $\lambda = 0.5$)

الحل:

جدول3–4: التنبؤ باستخدام نموذج التمهيد الأسي المضاعف

t	y_t	$\hat{y}_t$	$\hat{\hat{y}}_t$	a_t	b_t	$y^p_{t-1,t}$	e_t
1	12	12,00	12,00				
2	16	12,00	12,00	12,00	0,00	12,00	4,00
3	22	14,00	13,00	15,00	1,00	16,00	6,00
4	30	18,00	15,50	20,50	2,50	23,00	7,00
5	40	24,00	19,75	28,25	4,25	32,50	7,50
6	40	32,00	25,88	38,13	6,13	44,25	-4,25
7	50	36,00	30,94	41,06	5,06	46,13	3,88
8	50	43,00	36,97	49,03	6,03	55,06	-5,06
9		46,50	41,73	51,27	4,77	56,03	
10						60,80	
11						65,56	
12						70,33	

قيمة الانطلاق:

$$\hat{y}_1 = y_1 = 12$$
$$\hat{y}_2 = 0.5y_1 + 0.5\hat{y}_1 = 0.5\times 12 + 0.5\times 12 = 12$$

ومنه يمكن إيجاد جميع القيم الممهدة كالتالي:

$$\hat{y}_3 = 0.5y_2 + 0.5\hat{y}_2 = 0.5\times 16 + 0.5\times 12 = 14$$
$$\vdots$$
$$\hat{y}_9 = 0.5y_8 + 0.5\hat{y}_8 = 0.5\times 50 + 0.5\times 43 = 46.50$$
$$\hat{\hat{y}}_1 = \hat{y}_1 = y_1 = 12$$
$$\hat{\hat{y}}_2 = 0.5\hat{y}_2 + 0.5\hat{\hat{y}}_1 = 0.5\times 12 + 0.5\times 12 = 12$$
$$\hat{\hat{y}}_3 = 0.5\hat{y}_3 + 0.5\hat{\hat{y}}_2 = 0.5\times 14 + 0.5\times 12 = 13$$
$$\vdots$$
$$\hat{\hat{y}}_9 = 0.5\hat{y}_9 + 0.5\hat{\hat{y}}_8 = 0.5\times 46.50 + 0.5\times 36.97 = 41.73$$
$$\overline{\lambda} = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{1-0.5}{0.5} = 1$$
$$a_t == 2\hat{y}_t - \hat{\hat{y}}_t$$
$$b_t == \frac{1}{\lambda}\left(\hat{y}_t - \hat{\hat{y}}_t\right),\ \overline{\lambda} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$
$$y^p_{8,9} = a_9 + b_9 = 51.27 + 4.77 = 56.03$$
$$y^p_{8,10} = a_9 + b_9\times 2 = 51.27 + 4.77\times 2 = 60.80$$
$$y^p_{8,11} = a_9 + b_9\times 3 = 51.27 + 4.77\times 3 = 65.564$$
$$y^p_{8,12} = a_9 + b_9\times 4 = 51.27 + 4.77\times 3 = 70.33$$

5.3 التنبؤ بطريقة هولت *(Holt Forecasting Method)*

يلجأ إلى هذه الطريقة في نفس الظروف التي تستعمل فيها التقنية السابقة (طريقة براون)، وهذا طبعا لا يعني أنها تعطي نفس النتائج. وتتكون هذه الطريقة من معادلتين وكذا ثابتي تمهيد أحدهما خاص بالعشوائية (a) والآخر بالاتجاه العام (b). حيث يتم تطبيق تمهيدين منفصلين: (مولود حشمان، 1998، ص75)[11]

- تمهيد المتوسط a بمعامل تمهيد α، حيث $\alpha \in [0;1]$
- تمهيد الاتجاه b بمعامل تمهيد β ، حيث: $\beta \in [0;1]$

يمكن إثبات وجود علاقة بين معامل تمهيد براون ومعاملي هولت، أي: إذا كان $\alpha = \alpha^B\left(2-\alpha^B\right)$ و $\beta = \alpha^B/\left(2-\alpha^B\right)$. حيث α^B معامل التمهيد الأسي المضاعف لبراون، فإن نموذج هولت يعادل تمهيد براون الأسي المضاعف.

صياغة طريقة هولت:

تمهيد المتوسط:

$$a_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \quad \text{.....} \quad (22-3)$$

تمهيد الاتجاه:

$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \quad .....(23-3)$$

التنبؤ المحسوب عند الزمن t من أجل الأفق h هو:

$$\hat{y}_{t+h} = a_t + hb_t \quad .....(24-3)$$

مع:

y_t : القيمة المشاهدة للسلسلة عند t

a_t : المتوسط الممهد للسلسلة عند t

b_t : الاتجاه المقدر عند t.

- **قيمة الانطلاق (لما $t = 1$)**

– قيمة الانطلاق للمتوسط الممهد: $a_1 = y_1$

– قيمة الانطلاق للاتجاه: $b_1 = 0$.

تستخدم هذه الطريقة عند ظهور اتجاه عام في السلسلة الزمنية حيث تتبع السلسلة خطا مستقيماً صاعدا أو النمط الأسي كون السلسلة تتبع خطا صاعدا منحنيا إلى الأعلى، عندئذ يتأثر التوقع المستقبلي للنمطين الخطي والأسي بثابت النمط β.

إن التمهيد بطريقة هولت يشابه من حيث المبدأ تمهيد براون غير أنه لا يستخدم معادلة التمهيد الضربي، حيث يتم عوضا عن هذه المعادلة تمهيد قيم النزعة مباشرة وأن هذا الإجراء يعطي عملية التنبؤ مرونة أكبر وذلك لأنه يمهد النزعة بواسطة معلمة أخرى غير المعلمة التي يتم استخدامها مع السلسلة الرئيسية. فيتم إيجاد التنبؤ باستخدام نموذجين إحدهما يعالج المستوى (level) والآخر يعالج الاتجاه *(Trend)* بمعلمتين *(β,α)* والتي تقع قيمهما ضمن (0.1,0.2,…….,0.9).

6.3 التنبؤ بطريقة هولت وينترز: *Holt-Winters Forecasting Method* (1960)

هذه الطريقة تناسب البيانات الموسمية موضوع الدراسة بسبب ظهور النمطية الموسمية ذات الاتجاه العام فيها. وهي تطوير لطريقة هولت التي وسعت لتضم ثلاث معادلات. ولهذه الطريقة نوعين من التحليلات (النماذج): (مناهل دانيال عبد الأحد ندوى سالم يونس، 2002، ص151)[12]

أولاً: النموذج الموسمي الجدائي*(Model Seasonality Multiplicative)*

ثانياً: النموذج الموسمي التجميعي*(Model Seasonality Additive)*

أولاً: النموذج الموسمي الجدائي لطريقة *Holt- Winters*

في هذه الحالة تكتب السلسلة الزمنية وفق الشكل التالي:

$$y_t = (a_t + b_t t)S_t + \varepsilon_t \quad .....(25-3)$$

إن التنبؤ بطريقة ونترز الضربي يعتمد على ثلاث معادلات لكل معادلة ثابت تمهيدي:

1. تمهيد المتوسط (تمهيد البيانات كليا):

$$a_t = \alpha(y_t / S_{t-p}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \quad .....(26-3)$$

نستخدم S_{t-p} بدلا من S_t لأنها ليست معلومة بعد.

2. تمهيد الاتجاه بأخذ الفروق $(a_t - a_{t-1})$ لتعديل الاتجاه في السلسلة:

$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \quad .....(27-3)$$

3. تمهيد الموسمية:

$$S_t = \gamma(y_t / a_t) + (1-\gamma)S_{t-p} \quad .....(30-3)$$

مع:

α: ثابت التمهيد اللاموسمي $\alpha \in [0;1]$

β ثابت تمهيد الاتجاه $\beta \in [0;1]$

γ: ثابت تمهيد الموسمية $\gamma \in [0;1]$

a_t :تمهيد المتوسط (التمهيد الغير موسمي للسلسلة للفترة t)

bt تمهيد الاتجاه للفترة t.

S_t المركبة الموسمية عند t

P: الدورة

وبالتالي التنبؤ عند الأفق h يعطى وفق الصيغة التالية:

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t)S_{t-p+h} \quad ; 1 \le h \le p$$

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t)S_{t-2p+h} \quad ; p+1 \le h \le 2p \quad .....(31-3)$$

حيث: $\hat{y}_{t+h} = y^p_{i,i+h}$

لدى المعاملات الفصلية الخاصية التالية: $\sum_{i=1}^{p} S_i = p$

ثانياً: النموذج الموسمي التجميعي *(Model Seasonality Additive)*

تكون معادلة التنبؤ بالصيغة التالية:

$$y_t = a_t + b_t t + S_t + \varepsilon_t$$

إن التنبؤ بطريقة ونترز التجميعي يعتمد على ثلاث معادلات لكل معادلة ثابت تمهيدي:

1. تمهيد المتوسط (تمهيد البيانات كليا):

$$a_t = \alpha(y_t - S_{t-p}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \quad .....(32-3)$$

2. تمهيد الاتجاه بأخذ الفروق:

$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \quad .....(33-3)$$

3. تمهيد الموسمية:

$$S_t = \gamma(y_t - a_t) + (1-\gamma)S_{t-p} \quad .....(34-3)$$

يجب الاحتفاظ بالمؤشرات الفصلية لاستعمالها في عملية التنبؤ المستقبلي ووفق ذلك تكون معادلة التنبؤ عند الأفق h وفق الصيغة التالية:

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S_{t-p+h} \quad ; 1 \le h \le p$$
$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S_{t-2p+h} \quad ; p+1 \le h \le 2p \quad .....(35-3)$$

في هذه الحالة لدى المعاملات الفصلية الخاصية التالية: $\sum_{i=1}^{p} S_i = 0$

أما إذا كان مجموع المعاملات الموسمية في هذه الحالة يتم حساب المعاملات الموسمية المعدلة وفق الصيغة التالية:

$$S_t^* = S_t - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_i}{p} \quad .....(36-3)$$

وبالتالي:

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S^*_{t-p+h} \quad .....(37-3)$$

لأهمية هذه الطريقة مع صعوبة تطبيقها يدويا، نود توضيح بعض الأمور منها:

1. وضع كل القيم الابتدائية مساوية للصفر، وهذا يكون مقبولا في حالة توفر كمية معتبرة من المشاهدات.
2. حساب القيم الابتدائية: تبدأ عملية التمهيد من الفترة p+1 لذلك وجب توفير القيم الابتدائية.(مولود حشمان، 1998، ص103) [13]

- **إيجاد القيم الابتدائية لمعلمات التمهيد:**

جميع طرق التمهيد الأسي تحتاج إلى إيجاد القيم الابتدائية للمركبات فمثلا المعاملات الفصلية للسنة الأولى تقدر بواسطة القيمة المشاهدة عند $t(y_i)$ مقسومة على $\bar{y}$ متوسط الدورة p للسنة الأولى:

$$S_t = y_t / \bar{y}$$

حيث: $t = 1,2,..., p$

S: تمثل طول الموسمية

a_p تمثل القيمة الابتدائية لمركبة المستوى وتساوي المتوسط الملاحظ لأول سنة: $a_p = \bar{y}$

القيمة الابتدائية للاتجاه (Trend) معدومة عند p : $b_p = 0$

القيمة الابتدائية للاتجاه (Trend) هي متوسط الفروق للفترتين بين أول وk متوسطات السنة.

توجد تقنية أخرى لحساب القيم الابتدائية مقترحة من طرف Montgormery و Johnson وهي المفضلة إلا أنها نوعا ما معقدة، وتقوم على حساب المتوسطات الحسابية لأول k فترة: $y_1, y_2, ..., y_k$ ثم حساب: [14](R. Bourbounis, M.Terraza, 2010,p76) .

$$b_0 = \frac{\bar{y}_k - \bar{y}_1}{(k-1)p} \quad ; a_0 = \bar{y}_1 - \frac{p}{2} b_0$$

وبالتالي:

$$s_{j-p} = \frac{pR_j}{\sum_{j=1}^{p} R_j} \quad ; R_j = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} \frac{y_{(t-1)p+j}}{\bar{y}_t - \left(\frac{p+1}{2} - j\right) b_0} \quad .....(38-3)$$

مثال3–3: باستخدام النموذج التجميعي لنموذج هولت وينترز حيث:

$$\alpha = 0.4,\ \beta = 0.1,\ \gamma = 0.3$$

- أحسب القيم التنبؤية عند أفق 5 فصول لمعطيات الجدول التالي:

جدول3–5 معطيات المثال 3–3

التاريخ	الفصل الأول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصل الرابع
السنة1	*1248*	*1392*	*1057*	*3159*
السنة2	*891*	*1065*	*1118*	*2934*
السنة 3	*1138*	*1456*	*1224*	*3090*

الحل: إيجاد القيم الابتدائية لمعلمات التمهيد: $(p=4)$

- المتوسط للسنة الأولى هو $\bar{y}_1$ ، ومنه القيمة الابتدائية a_p هي: $a_p = a_4 = \bar{y}_1 = 1714$
- القيمة الابتدائية للاتجاه: $b_p = b_4 = 0$
- القيم الابتدائية الأربع للمركبة الفصلية:

$$S_t = y_t - 1714 \quad , \quad t = 1,2,3,4$$
$$S_1 = y_1 - 1714 = -466,\ S_2 = y_2 - 1714 = -322,$$
$$S_3 = y_3 - 1714 = -657,\ S_4 = y_4 - 1714 = 1445,$$

لدينا: $\alpha = 0.4, \beta = 0.1, \gamma = 0.3$

- من أجل $t=5$

$$a_t = \alpha(y_t - S_{t-p}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$
$$a_5 = \alpha(y_5 - S_1) + (1-\alpha)(a_4 + b_4)$$
$$a_5 = 0.4 \times (891 - (-466)) + (0.6) \times (1714 + (0)) = 1571.2$$
$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$
$$b_5 = \beta(a_5 - a_4) + (1-\beta)b_4 = 0.1 \times (1571.2 - 1714) + 0.9 \times (0) = -14,28$$
$$S_t = \gamma(y_t - a_t) + (1-\gamma)S_{t-p}$$
$$S_5 = \gamma(y_5 - a_5) + (1-\gamma)S_1 = 0.3 \times (891 - 1571.2) + 0.7 \times (-466) = -530,26$$
$$S_t^* = S_t - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_i}{p}$$
$$S_5^* = S_5 - \frac{\sum_{i=5}^{8} S_i}{4} = -530,26 - \frac{-56.3}{4} = -516,19$$

- من أجل $t=6$

$$a_t = \alpha(y_t - S_{t-p}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$
$$a_6 = \alpha(y_6 - S_2) + (1-\alpha)(a_5 + b_5)$$
$$a_6 = 0.4 \times (1065 - (-322)) + (0.6) \times (1571.2 + (-14.28)) = 1488,95$$
$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$
$$b_6 = \beta(a_6 - a_5) + (1-\beta)b_5 = 0.1 \times (1488,95 - 1571.2) + 0.9 \times (-14.28) = -21,08$$
$$S_t = \gamma(y_t - a_t) + (1-\gamma)S_{t-p}$$
$$S_6 = \gamma(y_6 - a_6) + (1-\gamma)S_2 = 0.3 \times (1065 - 1488,95) + 0.7 \times (-322) = -352,59$$
$$S_t^* = S_t - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_i}{p}$$
$$S_6^* = S_6 - \frac{\sum_{i=5}^{8} S_i}{4} = -352.59 - \frac{-56.3}{4} = -338,51$$

- من أجل $t=7$

$$a_t = \alpha(y_t - S_{t-p}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$
$$a_7 = \alpha(y_7 - S_3) + (1-\alpha)(a_6 + b_6)$$
$$a_7 = 0.4 \times (1118 - (-657)) + (0.6)(1488.95 + (-21.08)) = 1590.73$$
$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$
$$b_7 = \beta(a_7 - a_6) + (1-\beta)b_6 = 0.1(1590.73 - 1488.95) + 0.9 \times (-21.08) = -8.79$$
$$S_t = \gamma(y_t - a_t) + (1-\gamma)S_{t-p}$$
$$S_7 = \gamma(y_7 - a_7) + (1-\gamma)S_3 = 0.3(1118 - 1590.73) + 0.7(-657) = -601.72$$
$$S_t^* = S_t - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_i}{p}$$
$$S_7^* = S_7 - \frac{\sum_{i=5}^{8} S_i}{4} = -601.72 - \frac{-56.3}{4} = -587.64$$

جدول رقم3–6: التنبؤ باستخدام طريقة هولت وينترز

	y_t	a_t	b_t	s_t	$\overline{S}$	$s*$	$\hat{y}_t$	e_t
1	1248			-466		-466		
2	1392			-322	0	-322		
3	1057			-657		-657		
4	3159	1714	0	1445		1445		
5	891	1571,2	-14,28	-530,26		-516,19	1248,00	
6	1065	1488,95	-21,08	-352,59		-338,51	1234,92	
7	1118	1590,73	-8,79	-601,72	-14,072783	-587,64	810,88	
8	2934	1544,76	-12,51	1428,27		1442,34	3026,93	
9	1138	1581,03	-7,63	-504,09		-512,67	1001,99	
10	1456	1661,84	1,21	-308,56	8,58347116	-317,15	1220,81	
11	1224	1722,49	7,16	-570,75		-579,33	1061,34	
12	3090	1696,85	3,88	1417,74		1409,15	3157,92	
							1188,05	
							1387,46	
							1129,15	
							3121,51	
							1203,56	

- وبالتالي: عند $t=4$ فإن:

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S^*_{t-p+h}$$
$$\hat{y}_{4+1} = (a_4 + 1 \times b_4) + S_1^*$$
$$\hat{y}_5 = (1714 + (0)) + (-466) = 1248,00$$

- عند $t=5$ فإن:

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S^*_{t-p+h}$$
$$\hat{y}_{5+1} = (a_5 + 1 \times b_5) + S^*_2$$
$$\hat{y}_6 = (1571.2 + (-14.28)) + (-322) = 1234{,}92$$

- لما: $t=6$ فإن:

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S^*_{t-p+h}$$
$$\hat{y}_{6+1} = (a_6 + 1 \times b_6) + S^*_{6-4+1}$$
$$\hat{y}_7 = (1488.95 + (-21.08)) + (-657) = 810.88$$

- لما t=7

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S^*_{t-p+h}$$
$$\hat{y}_8 = (a_7 + 1 \times b_7) + S^*_{7-4+1}$$
$$\hat{y}_8 = (1590{,}73 + (-8{,}79)) + 1445 = 3026{,}93$$

- وبالتالي التنبؤ بداية من $t=12$ يعطى وفق الصيغة التالية:

$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S^*_{t-p+h} \quad 1 \le h \le p$$
$$\hat{y}_{13} = (1696.85 + 1 \times 3.88) + (-512.67) = 1188.058$$
$$\hat{y}_{14} = (1696.85 + 2 \times 3.88) + (-317.15) = 1387.46$$
$$\hat{y}_{15} = (1696.85 + 3 \times 3.88) + (-579.33) = 1129.15$$
$$\hat{y}_{16} = (1696.85 + 4 \times 3.88) + 1409.15 = 3121.51$$
$$\hat{y}_{t+h} = (a_t + hb_t) + S_{t-2p+h} \quad ; \; p+1 \le h \le 2p$$
$$\hat{y}_{17} = (1696.85 + 5 \times 3.88) + (-512.67) = 1203.56$$

7.3 تقييم نماذج التنبؤ

إن عملية تقييم نماذج التنبؤ يقصد من ورائها تقييم مدى مناسبة النموذج للنمط الذي تسير عليه بيانات السلسلة؛ أو مدى دقة النموذج في التنبؤ بقيم السلسلة الحالية والمستقبلية. وثمة عدد من مقاييس مدى مناسبة النموذج تعتمد جميعها على درجة الخطأ، وهي الفرق بين القيمة الفعلية للسلسلة عند زمن معين وقيمة السلسلة التي يتوقعها النموذج في ذلك الزمن (Yaffee and McGee, 2000).

من المقاييس التي قد تستخدم للتقييم "متوسط القيم المطلقة للخطأ Mean Absolute Error"؛ فإذا كانت e تمثل الخطأ و T تمثل عدد المشاهدات في السلسلة، فإن متوسط القيم المطلقة للخطأ (MAE) يمكن التعبير عنه بالصيغة الرياضية التالية:

$$MAE = \sum_{t=1}^{T} \frac{|e_t|}{T} \quad .....(39-3)$$

وبذلك، فلحساب متوسط القيم المطلقة للخطأ، يجب أولاً تحويل القيم السالبة إلى موجبة (حساب القيم المطلقة)، ثم تجمع قيم الخطأ المصاحبة للأزمنة المختلفة وتقسم على عدد المشاهدات؛ اعتماد القيم المطلقة بدلاً من القيم المجردة جاء لتلافي كون القيم السالبة تلغي الموجبة. ولكن يعاب عليه أنه لا يمكن من مقارنة نموذجين في سلسلتين مختلفتين؛ بمعنى أنه يتأثر بقيم السلسلة، ولا يمكن استخدامه كمقياس عام.

ومن مقاييس الخطأ التي تعمل على تلافي مشكلة كون القيم السالبة تلغي الموجبة "مجموع مربعات الخطأ Sum of Squared Errors (SSE)"؛ وهو عبارة عن مجموع حواصل ضرب كل قيمة خطأ بنفسها، كما توضح الصيغة الرياضية التالية:

$$SSE = \sum_{t=1}^{T} e_t^2 \quad .....(40-3)$$

و يعاب عليه أنه يضخم درجة الخطأ من خلال التربيع، علاوة على أنه يعاني من مشكلة متوسط القيم المطلقة للخطأ والمتمثلة في عدم إمكانية مقارنة النماذج عبر سلاسل مختلفة.

والمقياس الذي يتلافى مشكلة كون القيم السالبة للخطأ تلغي القيم الموجبة، ولا يضخم الخطأ من خلال التربيع كما يحدث في مجموع مربعات الخطأ، وكذلك يمكن من مقارنة النماذج عبر السلاسل المختلفة، يطلق عليه اسم "متوسط القيم المطلقة لنسب الخطأ Mean Absolute Percentage Error (MAPE)"، كما توضحه الصيغة التالية:

$$MAPE = \sum_{t=1}^{T} \frac{|e_t|}{x_t} \Big/ T \quad .....(41-3)$$

أي أن حساب متوسط القيم المطلقة لنسب الخطأ يتم من خلال قسمة القيم المطلقة للخطأ في الأزمنة المختلفة على قراءات السلسلة المقابلة لها، ثم جمع نتائج القسمة للأزمنة المختلفة وقسمة الحاصل على عدد الأزمنة T.

8.3 تمارين الفصل الثالث:

التمرين رقم01:

لدينا السلسلة Y_t التالية الممثلة لسعر البرانت في أحد الأسواق الدولية من 07.1993- 12.1994 و: $\alpha=0.95$

t	Y_t
juil-93	*16,76*
août-93	*16,71*
sept-93	*16,03*
oct-93	*16,53*
nov-93	*15,1*
déc-93	*13,54*
janv-94	*17,61*
févr-94	*18,52*
mars-94	*18,01*
avr-94	*20,17*
mai-94	*21,58*
juin-94	*21,77*
juil-94	*22,27*
août-94	*24,08*
sept-94	*20,59*
oct-94	*20,73*
nov-94	*20,87*
déc-94	*19,25*

المطلوب: باستخدام نموذج التمهيد الأسي أحسب القيم التنبؤية عند أفق 6.

التمرين رقم02: لدينا المعطيات التالية والمطلوب تمهيد السلسلة باستخدام المتوسطات المتحركة (n=4)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
yt	10	20	24	32	40	42	50	52	54	56

التمرين رقم03: لتكن لدينا البيانات الفصلية التالية:

	الفصل1	الفصل2	الفصل3	الفصل4
السنة1	*14*	*20*	*44*	*21*
السنة2	*10*	*19*	*64*	*32*
السنة3	*12*	*12*	*68*	*29*
السنة 4	*7*	*18*	*60*	*36*
السنة5	*6*	*11*	*64*	*50*

المطلوب:

- حدد النموذج الملائم للسلسلة
- الكشف عن المركبة الفصلية
- باستخدام نموذج هولت وينترز أحسب القيم التنبؤية عند أفق 4 فصول، حيث:

$$\alpha = 0.89,\ \beta = 0.38,\ \gamma = 0.9$$

9.3 مراجع وإحالات الفصل الثالث:

[1] R. Bourbonnais, pratique de la prévision à court terme, (paris:dunod, 1982), p09

[2] Makridakis, S. Wheel Wright, Méthodes de Prévision pour La gestion, Les Edition d'organisations, Paris, France, 1983p70.

[3] مولود حشمان، نماذج وتقيات التنبؤ على المدى القصير، ديوان المطبوعات الجامعية، ط4، الجزائر، 1998، ص64

[4] R. Lewandawski, **la prévision à court terme**, (Paris: Dunod, 1979), pp48-49.

[5] مولود حشمان، مرجع سابق ص71

[6] R. Bourbonnais Michel Terraza**, « Analyse des séries temporelles »** Applications à l'économie et à la gestion , 3e édition , Paris 2010, p54

[7]Julien JACQUES « Introduction aux séries temporelles » cours, http://eric.univ-lyon2.fr/~jjacques , P12.

[8] GOLDFARB. B et PARDOUX. C, (**2011**) « I**ntroduction à La Méthode Statistique Manuel Et Exercices Corrigés** » 6éme Édition, Paris, p 125.

[9] GOLDFARB. B et PARDOUX. C, (2011),OP CIT p 125.

[10] R. Bourbonnais M. Terraza 2010, op.cit p61

[11] مولود حشمان مرجع سابق 1998ص75

[12] مناهل دانيال عبد الأحد ندوى سالم يونس **التنبؤ بكمية المبيعات للمنتج الطبي بواسطة طريقة التمهيد الأسي الثلاثي**، قسم الرياضيات / كلية التربية جامعة الموصل، مجلة التربية والعلم - المجلد 25 ، العدد 4 ، السنة 2002، ص151

[13] مولود حشمان، مرجع سابق، 1998 ص103

[14] R .Bourbonnais, M. Terraza , 2010,op cit : p76

الفصل الرابع:
نماذج السلاسل الزمنية العشوائية

تمهيد

النموذج العشوائي للسلاسل الزمنية يمكن اعتباره بمثابة آلية قادرة على انتاج السلسلة المتاحة. وهذه الآلية قادرة على توليد مجموعة لانهائية من السلاسل الزمنية الأخرى على نفس الفترة الزمنية محل الدراسة. كل سلسلة من هذه السلاسل تختلف عن الأخرى من حيث القيم، ولكنها جميعا تخضع لنفس القواعد والآلية الاحتمالية. وبذلك يلعب النموذج دور المجتمع في الإحصاء، وتلعب السلسلة محل الدراسة دور العينة مع الأخذ بالاعتبار أنها عينة عشوائية لكن مفرداتها غير مستقلة، ولذلك خصصنا هذا الفصل لدراسة أهم نماذج السلاسل الزمنية العشوائية.

وتعرف هذه النماذج في الأوساط العلمية بالنماذج الخطية أو عمليات *ARMA* وهي العمليات التي تبناها بوكس وجينكينز لكي تكون أساسا لتقديم أسلوبهما إلى فكر السلاسل الزمنية.

4-1 عمليات الانحدار الذاتي: *Autoregressive Processes*

إن كثيرا من الظواهر السكانية والاقتصادية والبيئية والهندسية وغيرها يمكن تمثيلها كالآتي:

$$X_t = u + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad .....(1-4)$$

ويقال للعمليات التي يمكن إخضاع نظامها للنموذج رقم (1-3) لعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة p

تعريف4-1: نسمي عملية عشوائية مستقرة $(X_t, t \in Z)$ بعملية الانحدار الذاتي من الرتبة p ونرمز لها بالرمز AR(p) إذا حققت العلاقة التالية:

$$X_t = u + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad \forall t \in Z.....(2-4)$$

حيث $\phi_p \neq 0$ و $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ شوشرة بيضاء بتباين σ^2.

ملاحظة: إذا كان $X_t \to AR(p)$ ، فإن:

$$. E(X_t) = \frac{u}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i}$$

البرهان:

$$X_t = \mu + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + ... + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$
$$E(X_t) = \mu + \varphi_1 E(X_{t-1}) + \varphi_2 E(X_{t-2}) + ... + \varphi_p E(X_{t-p}) + E(\varepsilon_t)$$
$$E(X_t) = \mu + \varphi_1 E(X_t) + \varphi_2 E(X_t) + ... + \varphi_p E(X_t)$$
$$1 - (\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_p) E(X_t) = \mu$$
$$E(X_t) = \frac{\mu}{1 - (\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_p)} == \frac{\mu}{1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i}$$

- **كتابة النموذج على شكل MA(∞):**

$$\phi(\mathrm{B})X_t = \mu + \varepsilon_t \quad , \quad \phi(\mathrm{B}) = 1 - \varphi_1 \mathrm{B} - \varphi_2 \mathrm{B}^2 - \ldots - \varphi_p \mathrm{B}^p$$

كذلك: $|z_i| \le 1 \Rightarrow \phi(z) \neq 0$.

لنفترض أن: $|\lambda_i| = \frac{1}{|z_i|} < 1 \quad ; \phi(z) = \prod_1^p (1 - \lambda_i z_i)$ ،

وبالتالي فإن $\phi(\mathrm{B})$ قابلة للانعكاس، حيث:

$$\phi(\mathrm{B})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathrm{B}^j = \psi(\mathrm{B}), \quad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j < \infty, \quad \psi_0 = 1$$

$$X_t = \psi(\mathrm{B})\mu + \psi(\mathrm{B})\varepsilon_t$$

$$= \psi(1)\mu + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathrm{B}^j \right) \varepsilon_t$$

$$= E(X_t) + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

$$\phi(1)^{-1} \mu = E(X_t)$$

تعريف (2–4): ليكن $X_t \sim AR(p)$، و ϕ كثير الحدود الذي يحقق ما يلي:

$$\phi(\mathrm{B})X_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$|z_i| \le 0 \Rightarrow \phi(z) \neq 0$$

نسمي المعادلة $\phi(\mathrm{B})X_t = \mu + \varepsilon_t$ بالمعادلة القانونية للعملية $(X_t)_{t \epsilon Z}$.

1.1.4 عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى

تأخذ النماذج التي تعكس نظام هذه العمليات شكل معادلة انحدار السلسلة الزمنية X_t على السلسلة الزمنية X_{t-1} بالإضافة للشوشرة البيضاء ε_t، أي أنه يمكن كتابة نموذج الانحدار الذاتي AR(1) من الرتبة الأولى على الشكل التالي:

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots (3-4)$$

حيث $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ شوشرة بيضاء بتباين σ^2، و φ مقدار ثابت يمثل معلمة النموذج الرئيسية، وعمليات $AR(1)$ تحقق دائما شروط الانعكاس .

– شروط الاستقرار

يمكن التعبير عن المشاهدات الماضية $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$ في صورة الاضطرابات الماضية من العلاقة التالية:

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_{t-1} = \varphi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$
$$X_{t-2} = \varphi X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$X_{t-k} = \varphi X_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k}$$

بالتعويض عن X_{t-1} في المعادلة

$$X_t = \varphi[\varphi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}] + \varepsilon_t$$
$$X_t = \varphi^2 X_{t-2} + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_t = \varphi^2[\varphi X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}] + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_t = \varphi^3 X_{t-3} + \varphi^2\varepsilon_{t-2} + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_t = \varphi^4 X_{t-4} + \varphi^3\varepsilon_{t-2} + \varphi^2\varepsilon_{t-2} + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_t = \varphi^k X_{t-k} + \varphi^{k-1}\varepsilon_{t-k+1} + \ldots + \varphi^2\varepsilon_{t-2} + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_t = \varphi^k X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \varphi^j \varepsilon_{t-j}$$

إذا كانت: $|\phi| < 1$ و $k \to \infty$ فإنه يمكن كتابة نموذج AR(1) على الشكل:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \varepsilon_{t-j} \; ; |\phi| < 1$$

وبالتالي:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \;, \quad \psi_j = \phi^j, j = 1,2,\ldots \quad , |\phi| < 1$$

ومنه فإن عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى ***AR(1)*** تكون مستقرة إذا كان $|\phi| < 1$، أما إذا كان العكس ($|\phi| \geq 1$) فهي غير مستقرة، لأن الحد الأول لا يتلاشى ($\varphi^k X_{t-k}$) وبالتالي لا يمكن التعبير عن نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى ***AR(1)*** باستخدام الشوشرة البيضاء.

- **دالة قرين *Green function***

عادة ما يطلق على ψ_j التي تعطى للشوشرة البيضاء ε_{t-j} بدالة قرين وهي تلعب دورا مهما في وصف الذاكرة الديناميكية بنماذج السلاسل الزمنية بصفة عامة ونماذج الانحدار الذاتي بصفة خاصة، فهذه الدالة توضح كيفية تؤثر الظاهرة X_t بالاضطرابات $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$

ففي نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى مثلا إذا كانت $\phi = 0.8$، فإن الوزن الذي يعطى للمتغير ε_{t-4} يساوي 0.41، وهي قيمة كبيرة نسبيا. أي أن النظام مازال يتذكر ويتأثر بالاضطراب الذي حدث منذ أربع وحدات زمنية، أما إذا كانت $\phi = 0.2$، فإن الوزن الذي يعطى للمتغير ε_{t-4} يساوي 0.0016، أي أن النظام تقريبا نسي الاضطراب الذي حدث منذ أربع وحدات زمنية. وتحدد دالة قرين ψ_j السرعة التي يعود بها النظام إلى وضع التوازن.

بصفة عامة يمكن القول أن النظام يعود بعد عدد كاف من الوحدات الزمنية لحالة التوازن إذا كانت $|\phi|<1$، ويقال عن العمليات أو الأنظمة العشوائية أنها مستقرة إذا وفقط إذا كان: $\lim_{j\to\infty}\psi_j=0$، وبالتالي فإن عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى تكون مستقرة إذا وفقط إذا كان: $|\phi|<1$. (سمير مصطفى شعراوي، 2005 ص177)[1]

في الواقع يمكن التعبير عن شرط الاستقرار لعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى بشكل أكثر عمومية بفحص الدالة المميزة $\phi(B)=1-\phi B$، فإذا كانت $|\phi|<1$ فإن جذر المعادلة المميزة $\phi(B)=0$ لابد أن يكون خارج دائرة الوحدة، أي $|z|>1$ وهذا هو شرط استقرار نموذج AR(1).

-الخصائص الإحصائية لعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى بافتراض الاستقرار $|\phi|<1$

1. دالة الارتباط الذاتي:

أ. التوقع

$$X_t=\varphi X_{t-1}+\varepsilon_t \quad ;\varepsilon_t\to BB(0,\sigma^2)$$
$$E(X_t)=\varphi E(X_{t-1})+E(\varepsilon_t)$$

وحيث أن العملية مستقرة فإن:

$$E(X_t)=E(X_{t-1})$$

وبالتالي:

$$(1-\phi)E(X_t)=0$$
$$\Rightarrow E(X_t)=0$$

ب. التباين:

$$Var(X_t)=\phi^2 Var(X_{t-1})+Var(\varepsilon_t)$$

وحيث أن العملية مستقرة فإن: $Var(X_t)=Var(X_{t-1})$

$$(1-\phi^2)Var(X_t)=\sigma^2$$
$$Var(X_t)=\frac{\sigma^2}{(1-\phi^2)}$$
$$\gamma(0)=\frac{\sigma^2}{(1-\phi^2)};\quad |\phi|<1$$

ج. دالة التغاير الذاتي: $\gamma(h)=Cov(X_t,X_{t-h})$

لما h=0:

$$\gamma(0)=Cov(X_t,X_t)=Var(X_t)=\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

لما h=1:

$$\gamma(1)=Cov(X_t,X_{t-1})=E(X_tX_{t-1})-E(X_t)E(X_{t-1})$$
$$=E(X_tX_{t-1})=E(\phi X_{t-1}+\varepsilon_t)X_{t-1}$$
$$==\phi\gamma(0)$$

لما *h=2*:

$$\gamma(2)=Cov(X_t,X_{t-2})=E(X_tX_{t-2})$$
$$=E(\phi X_{t-1}+\varepsilon_t)X_{t-2}$$
$$=\phi\gamma(1)$$
$$=\phi^2\gamma(0)$$

وبصورة عامة:

$$\gamma(h)=\phi\gamma(h-1)\quad ;h\geq 1$$
$$=\phi^h\gamma(0)\quad h\geq 1$$

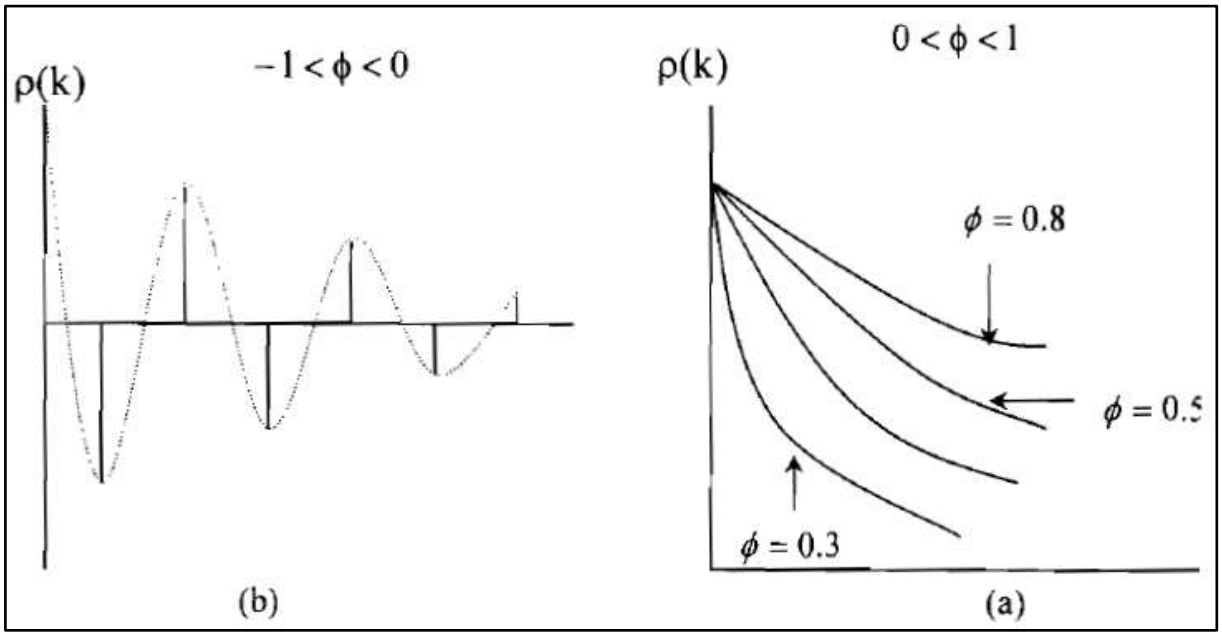
ومن ثم فإن دالة الارتباط الذاتي:

$$\rho(h)=\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}\quad ;h\geq 1$$
$$=\frac{\phi^h\gamma(0)}{\gamma(0)}\quad ;h\geq 1$$
$$=\phi^h\quad ;h\geq 1\quad ,|\phi|<1$$

وهذا يعني أن السلسلة تتذكر كل شيء في الماضي، أي أن لها ذاكرة لانهائية(طويلة)، وبكونها تتناقص بشكل أسي بزيادة الفجوة الزمنية h. ومنه فإن: $\lim_{h\to\infty}\rho(h)=0$

ويمكن تمثيل دالة الارتباط الذاتي في الشكل 4-1 كما يلي:(سمير مصطفى شعراوي 2005، ص181)[2]

شكل 4-1 : دالة الارتباط الذاتي لنموذج *AR(1)*



مثال4–1: إذا كانت $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية انحدار ذاتي من الرتبة الأولى، حيث $\phi = 0.4$. أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسمها. وعلق عليها.

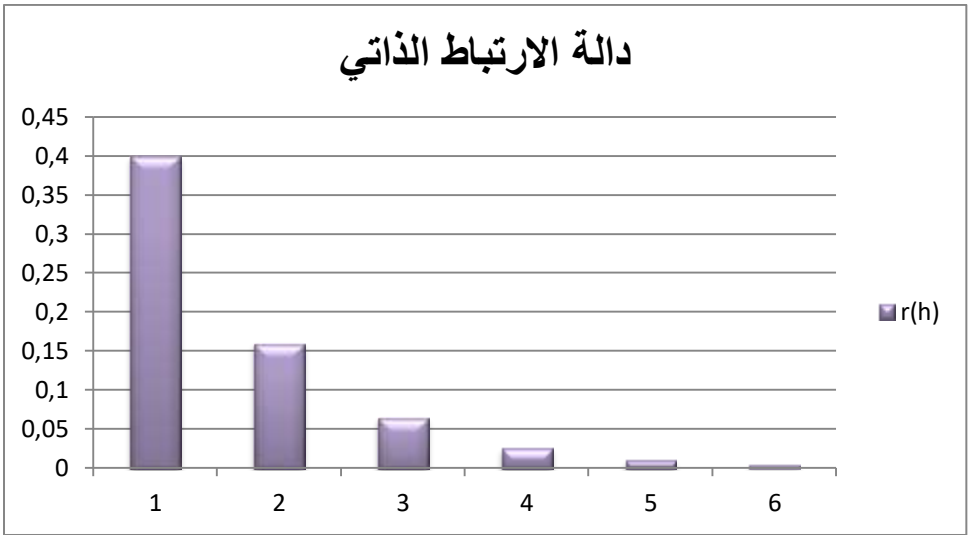
الحل:

$$\rho(h) = \phi^h \quad , h \geq 1$$

ومنه دالة الارتباط الذاتي للعملية$(X_t,\ t\epsilon Z)$ ، حيث $\phi = 0.4$. تكون كما يلي:

h	*r(h)*
1	*0,4*
2	*0,16*
3	*0,064*
4	*0,0256*
5	*0,01024*
6	*0,004096*

شكل 4–2 دالة الارتباط الذاتي للمثال 4–1



يلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي في الشكل أعلاه تتناقص بشكل أسي (أو هندسي) بسرعة إلى قيم قريبة من الصفر ولكنها لا تنقطع مباشرة، وهذا التناقص دليل على استقرارية هذه السلسلة.

مثال4–2: إذا كانت $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية انحدار ذاتي من الرتبة الأولى، حيث $\phi = -0.6$. أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسمها. وعلق عليها.

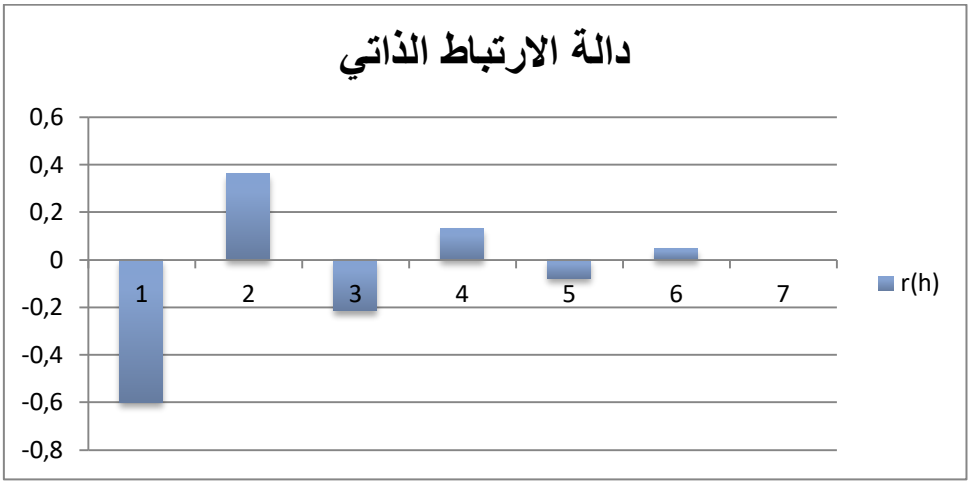
الحل:

$$\rho(h) = \phi^h \quad , h \geq 1$$

وبالتالي دالة الارتباط الذاتي للعملية $(X_t,\ t\epsilon Z)$ هي:

h	r(h)
1	-0,6
2	0,36
3	-0,216
4	0,1296
5	-0,07776
6	0,046656

شكل 4-3: دالة الارتباط الذاتي للمثال 4-2



يلاحظ من الشكل أعلاه أن الدالة ρ(h) تقترب من الصفر بسرعة بصورة ترددية بين الموجب والسالب في شكل موجات تحاكي الجيب.

-دالة الارتباط الذاتي الجزئي: أوضحنا سابقا أنه يمكن إيجاد دالة الارتباط الذاتي الجزئي عن طريق نظام يوول والكر وفق الصيغة التالية:

$$\phi_{kk} = \frac{\left|P_K^*\right|}{\left|P_k\right|}, \quad k = 2,3,...$$

$$P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \phi \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \phi\rho(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \cdots & \phi\rho(k-1) \end{pmatrix} \quad k \in \mathrm{N}$$

بأخذ ϕ عامل مشترك من العمود الأخير نجد أن العمودان الأول والأخير متشابهان تماما وبالتالي فإن قيمة هذا المحدد تساوي الصفر لأي قيمة k=2,3,… وبالتالي فإن:

$$\phi_{kk} = 0, \quad k = 2,3,... .$$

وبالتعريف وجدنا: $\phi_{11} = \rho(1)$

ومن ثم فإن:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho(1) & ; \quad k=1 \\ 0 & ; k=2,3,.. \end{cases}$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1) تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية الأولى.

2.1.4 عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية

يقال أن $(X_t, t\epsilon Z)$ عملية انحدار ذاتي من الرتبة الثانية إذا أمكن التعبير عنها في الصورة التالية:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad t = 0,\pm1,\pm2,... \quad ; \varepsilon_t \to \mathrm{BB}(0,\sigma^2) .....(4-4)$$

حيث أن ε_t شوشرة بيضاء بتوقع صفر وتباين σ^2

ϕ_1, ϕ_2. ثابتان يمثلان معلمتا النموذج. (Michel Prenat, C. Keribin, R. Rossigno,2011, p57)[3]

يمكن كتابة النموذج كما يلي:

$$X_t = \phi_1 \mathrm{B} X_t + \phi_2 \mathrm{B}^2 X_t + \varepsilon_t$$
$$(1 - \phi_1 \mathrm{B} - \phi_2 \mathrm{B}^2) X_t = \varepsilon_t$$
$$\phi(\mathrm{B}) X_t = \varepsilon_t$$

بافتراض وجود $\phi^{-1}(\mathrm{B})$ يمكن كتابة: $X_t = \phi^{-1}(\mathrm{B})\varepsilon_t$

حيث ينظر للمتتابعة $\phi^{-1}(\mathrm{B})$ كمرشح يربط بين ε_t والعملية X_t

ويتوقف استقرار هذه العمليات على خصائص المرشح $\phi^{-1}(\mathrm{B})$، ومن ثم يجب وضع بعض القيود على المعلمتين ϕ_1, ϕ_2 أو حول المرشح $\phi^{-1}(\mathrm{B})$ لضمان الإستقرارية.

- **دالة قرين وشروط الاستقرارية:**

يمكن كتابة نموذج AR(2) على الصورة:

$$(1 - \phi_1 \mathrm{B} - \phi_2 \mathrm{B}^2) X_t = \varepsilon_t$$

لنفترض أن: G_1, G_2 هما جذرا المعادلة: $\mathrm{B}^2 - \phi_1 \mathrm{B} - \phi_2 = 0$

توجد علاقة جبرية بسيطة وهامة بين جذري هذه المعادلة وجذري حلول المعادلة: $1 - \phi_1 \mathrm{B} - \phi_2 \mathrm{B}^2 = 0$ اللذان هما: G_1^{-1}, G_2^{-1}. وبالتالي فإن:

$$1 - \phi_1 \mathrm{B} - \phi_2 \mathrm{B}^2 = (1 - G_1 \mathrm{B})(1 - G_2 \mathrm{B})$$
$$G_1 = \frac{1}{2}\left[\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}\right]$$
$$G_1 = \frac{1}{2}\left[\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}\right]$$

ومنه يمكن كتابة:

$$X_t = (1 - G_1 \mathrm{B})^{-1}(1 - G_2 \mathrm{B})^{-1}\varepsilon_t$$

وذلك بافتراض وجود : $(1-G_1\mathrm{B})^{-1}, (1-G_2\mathrm{B})^{-1}$

باستخدام الكسور الجزئية:

$$X_t = \left[\frac{G_1}{(G_1-G_2)(1-G_1\mathrm{B})} + \frac{G_2}{(G_2-G_1)(1-G_2\mathrm{B})}\right]\varepsilon_t$$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{G_1^{j+1}}{(G_1-G_2)} + \frac{G_2^{j+1}}{(G_2-G_1)}\right]\varepsilon_{t-j}$$

وبالتالي فإن دالة قرين هي:

$$\psi_j = \frac{G_1^{j+1}}{(G_1-G_2)} + \frac{G_2^{j+1}}{(G_2-G_1)} \quad ; G_1 \neq G_2$$

إذا كان المقدار $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$ فإن الجذرين حقيقيين، وبالتالي فإن G_1, G_2 تكون فرق أو مجموع دالتين أسيتين، أما إذا كان المقدار $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ فإن الجذرين يكونان مركبان *Complex* وفي هذه الحالة يمكن إثبات أن ψ_j تمثل موجات من دوال الجيب .

وبالتالي نستطيع القول أن عمليات *AR(2)* تكون مستقرة إذا كان $|G_1|<1, |G_2|<1$، أي أن الشروط الضرورية لاستقرارية عمليات *AR(2)* هي أن جذري المعادلة $\phi(\mathrm{B})=0$ يجب أن يقعا خارج دائرة الوحدة.

مثال4–3: ليكن نموذج *AR(2)* كالتالي:

$$X_t = 0.5X_{t-1} + -0.2X_{t-2} + \varepsilon_t \qquad ; \varepsilon_t \to \mathrm{BB}(0,\sigma^2)$$

- أحسب دالة جرين واختبر استقرارية هذه العملية

الحل:

$$G_1 = \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1+4(-0.2)}\right] = 0.724$$

$$G_1 = \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1+4(-0.2)}\right] = 0.276$$

$$\psi_j = \frac{(0.724)^{j+1}}{(0.724-0.276)} - \frac{(0.276)^{j+1}}{(0.724-0.276)}$$

$$\psi_j = \frac{(0.724)^{j+1}}{(0.448)} - \frac{(0.276)^{j+1}}{(0.448)}$$

$$\lim_{j\to\infty}\psi_j \to 0$$

وبالتالي فإن العملية مستقرة.

مثال4–4: ليكن نموذج *AR(2)* كالتالي:

$$X_t = 0.8X_{t-1} - 0.15X_{t-2} + \varepsilon_t \qquad ; \varepsilon_t \to \mathrm{BB}(0,\sigma^2)$$

- أحسب دالة جرين واختبر استقرارية هذه العملية

الحل:

$$G_1 = \frac{1}{2}\left[0.8 + \sqrt{0.64 - 0.6}\right] = 0.5$$

$$G_1 = \frac{1}{2}\left[0.8 - \sqrt{0.64 - 0.6}\right] = 0.3$$

$$\psi_j = \frac{(0.5)^{j+1}}{(0.2)} - \frac{(0.3)^{j+1}}{0.2}$$

$$\lim_{j\to\infty} \psi_j \to 0$$

وبالتالي فإن العملية مستقرة.

في الواقع يمكن التعبير عن شرط استقرار نموذج *AR(2)* في صورة ثلاث شروط أخرى بدلالة المعلمتين ϕ_2, ϕ_1 مباشرة، وهي:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$
$$|\phi_2| < 1$$

مثال4–5: إذا كان $X_t = 0.7X_{t-1} + -0.2X_{t-2} + \varepsilon_t \qquad ; \varepsilon_t \to \mathrm{BB}(0,\sigma^2)$

هل السلسلة X_t مستقرة؟

الحل:

$$\phi_1 + \phi_2 = -0.2 + 0.7 = 0.5 < 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 = -0.2 - 0.07 = 0.9 < 1$$
$$|\phi_2| = 0.2 < 1$$

الشروط الثلاث محققة وبالتالي فإن هذه السلسلة مستقرة

في بعض الحالات قد ينصب الاهتمام على معرفة بعض الأوزان الأولى ψ_j بدلالة المعلمتين ϕ_2, ϕ_1 مباشرة من العلاقة بين $\phi(\mathrm{B})$ و $\psi(\mathrm{B})$ كما يلي:

$$\phi(\mathrm{B})\psi(\mathrm{B}) = 1$$
$$\left(1 - \phi_1\mathrm{B} - \phi\,\mathrm{B}^2\right)\left(1 + \psi_1\mathrm{B} + \psi\,\mathrm{B}^2 + \ldots\right) = 1$$

بمساواة معاملات B^j في الطرفين نجد:

$$\psi_1 - \phi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$$
$$\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$$

وبصفة عامة يمكن إثبات أن: .

$$\psi_1 - \phi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$$
$$\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} \quad , \; j \geq 3$$

ومن ثم فإن العمليات AR(2) تكون مستقرة. إذا كانت الأوزان ψ_j تتقارب وكان:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

– دالة الارتباط الذاتي:

أ. التوقع

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad ; \varepsilon_t \to \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$$
$$E(X_t) = \phi_1 E(X_{t-1}) + \phi_2 E(X_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

وحيث أن العملية مستقرة فإن: $E(X_t) = E(X_{t-1}) = E(X_{t-2})$

وبالتالي:

$$(1 - \phi_1 - \phi_2) E(X_t) = 0 \Rightarrow E(X_t) = 0 \quad , \phi_1 + \phi_2 < 1$$

ب. التباين:

$$Var(X_t) = \gamma(0) = \mathrm{cov}(X_t, X_t)$$
$$\gamma(0) = \mathrm{cov}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t, X_t) = \phi_1 \mathrm{cov}(X_{t-1}, X_t) + \phi_2 \mathrm{cov}(X_{t-2}, X_t) + \sigma^2$$
$$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \sigma^2$$

ج. دالة التغاير الذاتي: $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h})$

لما h=0:

$$\gamma(0) = Cov(X_t, X_t) = Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

لما h>0:

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) - E(X_t) E(X_{t-h})$$
$$= E(X_t X_{t-h}) = E[(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t) X_{t-h}]$$
$$= \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2) \quad , \quad h \geq 1$$

يلاحظ أن التباين يعتمد على مجهولان هما $\gamma(1), \gamma(2)$، ولكي نحصل على التباين مباشرة بدلالة المعلمتين ϕ_1, ϕ_2 يجب الحصول على معادلتين أخريتين في $\gamma(1), \gamma(2)$ ونحصل على هاتين المعادلتين بوضع h=1 ثم h=2 في المعادلة التراجعية لنظام يوول والكر نحصل على:

$$\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1)$$
$$\gamma(2) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(0)$$

باستخدام هاتان المعادلتان مع معادلة التباين نجد:

$$\gamma(0)=\frac{\sigma^2(1-\phi_2)}{(1+\phi_2)\left[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2\right]}$$

$$\gamma(1)=\frac{\phi_1\gamma(0)}{(1-\phi_2)}$$

$$\gamma(2)=\gamma(0)\left[\phi_2+\frac{\phi_1^2}{(1-\phi_2)}\right]$$

إن دالة الارتباط الذاتي هي:

$$\rho(1)=\frac{\phi_1}{(1-\phi_2)};\quad |\phi_2|<1$$

$$\rho(2)=\phi_2+\frac{\phi_1^2}{(1-\phi_2)}$$

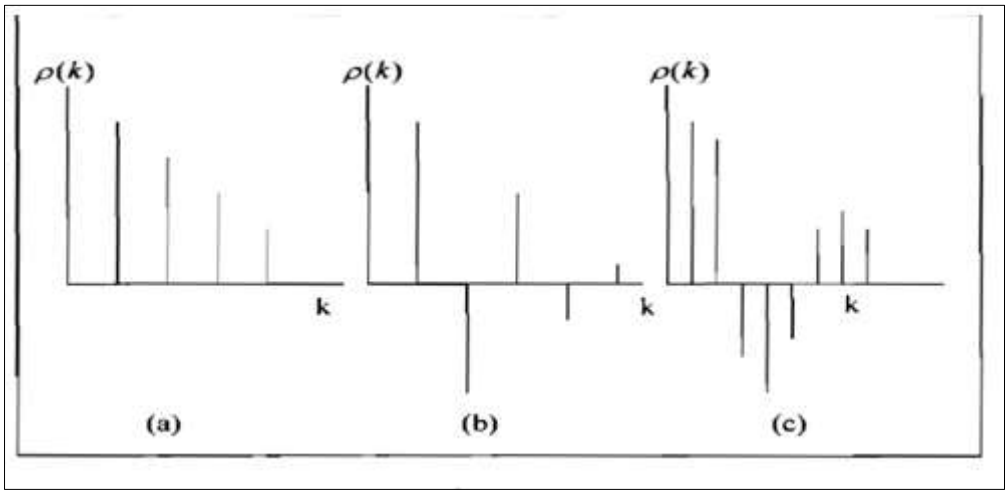
وبصورة عامة فإن:

$$\rho(h)=\phi_1\rho(h-1)+\phi_2\rho(h-2)\quad ,\quad h\geq 3$$

سلوك دالة الارتباط الذاتي لعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية يشبه إلى حد كبير سلوك دالة الارتباط الذاتي في نماذج AR(1) فهي تتناقص في صورة أسية أو تقترب تدريجيا من الصفر في شكل دالتين أسيتين أو في شكل ترددي بين الموجب والسالب.

والجدير بالذكر أنه عندما تقترب دالة الارتباط الذاتي في نماذج AR(2) تدريجيا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب فإن هذه الموجات تكون أكثر صراحة إذا ما قورنت بنفس الحالة في نماذج AR(1)، لأننا في هذه الحالة قد نحصل على قيمتين موجبتين أو سالبتين متتاليتين، أما في حالة AR(1) فإن التناقض عادة ما يحدث بشكل متردد (متبادل في الاشارات). أنظر الشكل4-4 (سمير مصطفى شعراوي، 2005 ص 198) [4]

شكل 4-4 دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(2)



-دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

$$\phi_{11}=\rho(1)=\frac{\phi_1}{1-\phi_2};\quad |\phi_2|<1$$

حيث أن:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

ويعني هذا أن:

$$\phi_{22} = \phi_2$$
$$\phi_{kk} = 0 \quad ; \quad k \geq 3$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2} & ; k = 1 \\ \phi_2 \quad ; \quad k = 2 \\ 0 \quad ; \quad k = 3,4,.. \end{cases}$$

ومعنى هذا أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج AR(2) تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية الثانية. ولذلك فإن هذه الدالة هامة جدا للتمييز بين نماذج AR(1) ونماذج AR(2).

2.4 عمليات المتوسطات المتحركة *Moving Average Processes*

لقد قام الباحث *Stutzky* (1937) بدراسة نماذج المتوسطات $MA(q)$ ووضع الصيغة العامة لهذا النموذج من الرتبة (q) وأصبح يعرف باختصار $MA(q)$ حيث يتم التعبير عن المتغير التابع y_t كدالة في قيم حدّود الخطأ العشوائي السابقة كما هو موضح في النموذج التالي:

$$X_t = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}, \quad \forall t \in Z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5-4)$$

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

حيث أن ε_t شوشرة بيضاء بتوقع صفر وتباين σ^2.

[5](Michel Prenat, C. Keribin, R. Rossigno,2011, p59)

ويرمز لهذه العمليات بالرمز $MA(q)$ ، ونكتب $X_t \sim MA(q)$، وتسمى الثوابت: $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ بمعلمات النموذج. وهذه العمليات دائما مستقرة بغض النظر عن قيم المعلمات $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$

1.2.4 عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى: يقال أن $(X_t, t \epsilon Z)$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الأولى إذا أمكن التعبير عنها في الصورة التالية:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad ; \varepsilon_t \to BB(0, \sigma^2) \quad \ldots\ldots\ldots (6-4)$$

حيث أن ε_t شوشرة بيضاء بتوقع صفر وتباين σ^2.

يمكن كتابة النموذج كما يلي:

$$X_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$$
$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

ويسمى كثير الحدود أو المرشح الخطي $\theta(B)$ بمؤثر المتوسطات المتحركة والمسؤول عن ربط العملية X_t كمخرجات *outputs* بالعملية ε_t كمدخلات *inputs* . وهذا المرشح هو دالة أو كثير حدود في المؤثر B والذي يعامل عند دراسة خصائص هذا النموذج وغيره من النماذج كأي كمية جبرية كما سنرى.

دالة الارتباط الذاتي:

ب. التوقع

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t) - \theta E(\varepsilon_{t-1}) = 0$$

ب. التباين:

$$Var(X_t) = \gamma(0) = \text{cov}(X_t, X_t)$$
$$\gamma(0) = v(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = Var(\varepsilon_t) + \theta^2 Var(\varepsilon_{t-1})$$
$$= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 = (1+\theta^2)\sigma^2$$

ح. دالة التغاير الذاتي: $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h})$

لما h=0 :

$$\gamma(0) = Cov(X_t, X_t) = Var(X_t) = (1+\theta^2)\sigma^2$$

لما h=1:

$$\gamma(1) = Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2})$$
$$= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) - \theta Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) - \theta Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta^2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})$$
$$= -\theta\sigma^2$$

لما h=2:

$$\gamma(2) = Cov(X_t, X_{t-2}) = Cov(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-3})$$
$$= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) - \theta Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-3}) - \theta Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) + \theta^2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-3})$$
$$= 0$$

كحالة عامة: لما h>1:

$$\gamma(h) = 0$$

وبالتالي:

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & h = 0 \\ -\theta\sigma^2 & h = \pm 1 \\ 0 & h = \pm 2, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

يلاحظ أن التوقع والتباين والتغاير لهذه العمليات لا يعتمد على الزمن t كما هو متوقع، لأن هذه العمليات مستقرة بغض النظر عن قيمة المعلمة θ. وبقسمة دالة التغاير الذاتي على التباين نحصل على دالة الارتباط الذاتي على الصورة:

$$\rho(h)=\begin{cases} \dfrac{-\theta}{(1+\theta^2)} & h=\pm1 \\ 0 & h=\pm2,\pm3,... \end{cases}$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي لنماذج المتوسطات المتحركة تنعدم مباشرة بعد الفجوة الزمنية الأولى. ولذلك يقال أن لهذه العمليات ذاكرة مقدارها الوحدة، بمعنى أن المشاهدات التي تبعد عن بعضها البعض وحدة زمنية واحدة تكون مرتبطة، والمشاهدات التي تبعد عن بعضها البعض أكثر من وحدة زمنية لا تكون مرتبطة. وعندما تكون قيمة θ سالبة فإن قيمة $\rho(1)$ تكون موجبة وبالتالي فإن القيم الكبيرة للسلسلة تميل أن تتبعها قيما كبيرة والقيم الصغيرة للسلسلة تميل أن تتبعها قيما صغيرة، وتكون العملية $(X_t,\ t\epsilon Z)$ في هذه الحالة أكثر تمهيدا من عملية الاضطرابات الهادئة ε_t وتزيد درجة تمهيد هذه العمليات كلما اقتربت قيمة θ من -1، ويحدث العكس إذا كانت θ موجبة.

-دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

اشتقاق الصورة العامة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج MA(1) أصعب كثيرا من اشتقاق دالة الارتباط الذاتي لهذه النماذج ويحتاج إلى دراية بحل معادلات الفروق من الرتبة الثانية. والنظرية الآتية تعطي الصورة العامة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج MA(1).

نظرية4-1: إذا كانت $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى فإن:

$$\varphi_{kk}=\frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{(1-\theta^{2(k+1)})} \quad \text{.....} \quad (7-3)$$

البرهان:

وجدنا سابقا أن نظام معادلات يوول والكر لإيجاد دالة الارتباط الذاتي الجزئي هو:

$$\rho(j)=\phi_{k1}\rho(j-1)+\phi_{k2}\rho(j-2)+...+\phi_{kk}\rho(j-k)$$

وقد أثبتنا في نماذج MA(1) أن:

$$\rho(1)=\frac{-\theta}{1+\theta^2} \quad ; \quad \rho(k)=0\,;\,k>1$$

ومن ثم فإن:

$$\rho_{kk}=\frac{|P_K^*|}{|P_k|}$$

حيث:

$$|P_k| = \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(1) & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \rho(1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho(1) & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

وبفك هذا المحدد عن طريق العمود الأول نجد أن:

$$|P_k| = |P_{k-1}| - \rho(1)|P_{k-2}| \quad \text{.....(1)}$$

المعادلة (1) معادلة فروق متجانسة من الرتبة الثانية حلها العام هو:

$$|P_k| = A\lambda_1^K - B\lambda_2^K \quad \text{.....(2)}$$

حيث: λ_1, λ_2 هما جذرا المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 - \lambda + \rho^2(1) = 0 \quad \text{.....(3)}$$

القيمتان A وb ثابتان يمكن تحديدهما بواسطة أي شرطين ابتدائيين.

بحل المعادلة رقم (3) نجد الجذرين:

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+\theta^2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\theta^2}{1+\theta^2} \quad \text{.....(4)}$$

بتعويض (4) في المعادلة (2) نجد:

$$|P_k| = A\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)^k + B\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right)^k \quad \text{.....(5)}$$

لدينا الشرطان الابتدائيان:

$$|P_1| = 1 \quad , \quad |P_2| = 1 - \rho^2(1) = 1 - \frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2} \quad \text{.....(6)}$$

بالتعويض من (6) في (5) نجد:

$$1=\left(\frac{A}{1+\theta^2}\right)+B\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right) \quad \text{.....(7)}$$

$$1-\frac{\theta^2}{\left(1+\theta^2\right)^2}=A\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)^2+B\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right)^2 \quad \text{.....(8)}$$

بحل المعادلتين (7) و (8) نصل إلى:

$$A=\frac{\theta^2}{1-\theta^2} \quad , \quad B=-\frac{\theta^2}{1-\theta^2} \quad \text{.....(9)}$$

بالتعويض عن A وB من (9) وفي (5) نصل إلى:

$$\left|P_k\right|=\left(\frac{1}{1-\theta^2}\right)\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)^k-\left(\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\right)\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right)^k$$

وفي النهاية نصل إلى:

$$\left|P_k\right|=\frac{1}{\left(1-\theta^2\right)\left(1+\theta^2\right)^k}\left[1-\theta^{2(k+1)}\right] \quad \text{.....(10)}$$

وبطريقة مشابهة يمكن إيجاد $\left|P_K^*\right|$ كما يلي

$$\left|P_k^*\right|=\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & 0 & \cdots & 0 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(1) & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho(1) & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \rho(1)=\frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

وبفك هذا المحدد عن طريق العمود الأول نجد أن:

$$\left|P_k^*\right| = \rho(1)\begin{vmatrix} \rho(1) & 0 & \cdots & \vdots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \rho(1) & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho(1) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left|P_k^*\right| = (-1)^2 \rho^2(1)\begin{vmatrix} 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \rho(1) \\ \rho(1) & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \rho(1) & 0 \end{vmatrix}$$

وبتكرار هذه العملية نصل إلى:

$$\left|P_k^*\right| = (-1)^{k-1}\rho^2(1) = -\frac{\theta^k}{(1+\theta^2)^k} \quad .....(11)$$

بقسمة (11) على (10) نجد:

$$\varphi_{kk} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{(1-\theta^{2(k+1)})} \quad \theta<1 \quad .....(12)$$

من النظرية السابقة نجد أن:

$$|\varphi_{kk}| < |\theta^k|$$

ويعني هذا أن القيمة المطلقة لدالة الارتباط الذاتي لعمليات *MA(1)* تتناقص بشكل أسي.

ويلاحظ أن φ_{kk} تكون سالبة إذا كان $\rho(1)<0$ أي إذا كان $\theta>0$، وتأخذ إشارات تبادلية إذا كان $\rho(1)>0$ أي إذا كان $\theta>0$. (سمير مصطفى شعراوي 2005، ص 205)[6]

مثال4–5: إذا كانت $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى بمعلمة $\theta = 0.5$. أوجد دالة الارتباط الذاتي الجزئي لهذه العملية ومثلها بيانيا. وبين أنه يوجد دالة أسية تحد القيمة المطلقة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي.

الحل:

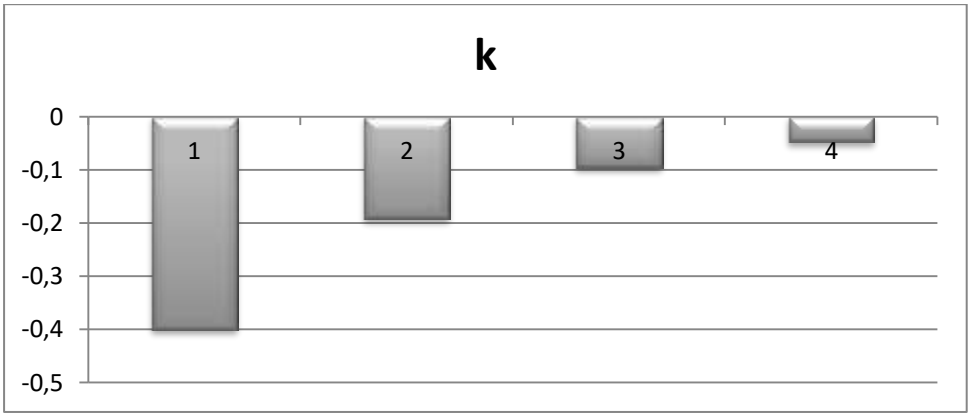
$$\varphi_{kk} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{(1-\theta^{2(k+1)})};\quad k=1,2,...$$

$$\varphi_{11} = \frac{-0.5^1(1-0.5^2)}{(1-0.5^{2(1+1)})} = \frac{-0.375}{0.9375} = 0.4,\quad \varphi_{22} = -0.191,\quad \varphi_{33} = -0.094,\quad \varphi_{44} = -0.0469$$

باعتبار الدالة الأسية: $-\theta^k = -(0.5)^k$

k	1	2	3	4
ϕ_{kk}	-0.4	-0.191	-0.094	-0.0469
$-\theta^k$	-0.5	-0.25	-0.125	-0.0625
$\lvert\phi_{kk}\rvert$	0.4	0.191	0.094	0.0469
$\lvert\theta^k\rvert$	0.5	0.25	0.125	0.0625

شكل 4-5 دالة الارتباط الذاتي للنموذج MA(1)



-الانعكاس: لتوضيح مفهوم الانعكاس سوف نعيد كتابة النموذج MA(1) على الصورة $X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ حيث ε_{t-1} عبارة عن متغير مفسر، حيث يلاحظ أن هذا النموذج خطي في المعلمة θ، ولو ركزنا ودققنا في النموذج لوجدنا أنه غير خطي لأن المتغير المفسر ε_{t-1} غير ملاحظ وهو يعتمد على المعلمة θ. ويمكن كتابة نموذجنا السابق كما يلي:

$$\varepsilon_t = X_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

ومنه فإن:

$$\varepsilon_{t-1} = X_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}$$
$$\varepsilon_{t-2} = X_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\varepsilon_{t-k} = X_{t-k} + \theta\varepsilon_{t-k-1}$$

بالتعويض عن ε_{t-1} نجد:

$$\varepsilon_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-2}$$

ثم بالتعويض عن ε_{t-2} نحصل على:

$$\varepsilon_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \theta^3 \varepsilon_{t-3}$$

وبتكرار هذه العملية k مرة نجد:

$$\varepsilon_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \theta^3 X_{t-3} + ... + \theta^k X_{t-k} + \theta^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}$$

إذا كانت قيمة $|\theta| < 1$ وسمحنا بتكرار هذه العملية عدد كبير من المرات لأي بالسماح لعدد المرات k أن يؤول إلى ∞ (أي $k \to \infty$) فإن الحد الأخير في المعادلة أعلاه يؤول إلى الصفر ومن ثم فإنه يمكن كتابة النماذج *MA(1)* في هذه الحالة على الصورة.

$$\varepsilon_t = X_t + \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j X_{t-j} \quad .....(8-4)$$

وبالتالي فإن:

$$X_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j X_{t-j}$$

وبمقارنة هذه الصورة بالصيغة المنعكسة

$$X_t = \varepsilon_t + \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + ...$$

نجد أن:

$$\pi_1 = -\theta^j \quad , i = 1,2,... \quad ; \quad |\theta| < 1$$

أما إذا كانت قيمة $|\theta| \geq 1$ فإن الحد الأخير في المعادلة:

$$\varepsilon_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \theta^3 X_{t-3} + ... + \theta^k X_{t-k} + \theta^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}$$

لا يتلاشى وبالتالي لا يمكن التعبير عن نماذج MA(1) باستخدام صيغة الانعكاس، وبالتالي تكون نماذج MA(1) قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا كان: $|\theta| < 1$.

ويمكن التعبير عن شرط الانعكاس في نماذج MA(1) بشكل آخر أكثر عمومية وذلك باستخدام كثير الحدود أو مرشح المتوسطات المتحركة $\theta(B) = 1 - \theta B$ فإذا كانت $|\theta| < 1$ فإن جذر المعادلة $\theta(B) = 0$ لابد أن يكون خارج دائرة الوحدة. أي أن: $|z| > 1$ هو شرط الانعكاس لنماذج MA(1).

-شروط انعكاس نماذج MA(q)

إذا كانت $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية المتوسطات المتحركة من الرتبة q. فإنه يمكن كتابة نموذج MA(q) على الصورة التالية:

$$X_t = \theta(\mathrm{B})\varepsilon_t \quad ; \quad \theta(\mathrm{B}) = 1 - \theta_1 \mathrm{B} - \theta_2 \mathrm{B}^2 - \ldots - \theta_q \mathrm{B}^q$$

$\theta(B)$ كثير حدود من الدرجة q. (*M.David j-c Michoud , Paris1989,p54*) [7]

وبالتالي وتحت شروط معينة يمكن كتابة هذا النموذج على الصورة التالية:

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(\mathrm{B})X_t$$

وبصفة عامة فإن $\theta^{-1}(\mathrm{B})$ كثير حدود من الدرجة ما لانهاية، ومنه يمكن أن نكتب:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$$

إذا كانت $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ ، أي إذا كانت المعاملات ... , π_1, π_2 تتقارب بشكل مطلق.

هذا الشرط يتحقق إذا كانت كل جذور المعادلة $\theta(B)=0$ تقع خارج دائرة الوحدة .

-أهمية الانعكاس:

الانعكاس صفة خاصة بالنماذج ومستقل تماما من حيث المفهوم والأهمية عن الإستقرارية وله أهميات عديدة نذكر منها:

1. يضمن انعكاس النموذج أن تتأثر قيمة X_t بعد فترة معينة بالمشاهدات القريبة أكثر من تأثرها بالمشاهدات البعيدة، أي أن تأثير ماضي السلسلة على قيمتها الحالية يتناسب عكسيا مع عمر المشاهدة.

ففي حالة *MA(1)* فإن الشرط $|\theta| < 1$ وهو الضروري لتحقيق الانعكاس يضمن أن تأثير المشاهدات الماضية على القيمة الحالية للسلسلة يتناقص كلما كانت المشاهدات بعيدة عن X_t . وفي نموذج *MA(1)* نجد أن تأثير المشاهدات يتناقص بشكل أسي.

2. يضمن الانعكاس وجود نموذج وحيد *unique* بمعلمات محددة يناظر دالة الارتباط الذاتي. مثلا في نموذج *MA(1)* وجدنا أن:

$$\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

وهذا يعني أن:

$$\theta^2 \rho(1) + \theta + \rho(1) = 0$$

$$\theta^2 + \frac{\theta}{\rho(1)} + 1 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية للمعلمة θ لها جذران حاصل ضربهما يساوي الواحد الصحيح، ومن ثم إذا كان θ_0 أحد هذين الجذرين فإن $\frac{1}{\theta_0}$ يكون الجذر الثاني ويعني هذا أنه يوجد نموذجان مختلفان في المعلمة θ لهما نفس دالة الارتباط الذاتي، أحدهما فقط يحقق شرط الانعكاس.

3. انعكاس النموذج يمكن أحيانا من استخدام نموذج MA(1) ذو رتبة صغيرة كبديل لنموذج يعتمد على عدد كبير من المشاهدات السابقة $X_{t-1}, X_{t-2}, ..$ ، وبالتالي يساعد على الحصول على ما يعرف بالنموذج الشحيح *Parsimonious model* أي النموذج الذي يحتوي أقل عدد ممكن من المعالم.

4. النماذج المنعكسة تعطي تنبؤات أكثر كفاءة من النماذج غير المنعكسة.

مثال4–6: إذا كانت $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى. حيث: $\theta = 0.6$

1. أوجد دالة الارتباط الذاتي.
2. أثبت أنه يوجد قيمة أخرى للمعلمة θ تحقق هذه الدالة (دالة الارتباط الذاتي)
3. ماهي القيمة التي تحقق شرط الانعكاس ؟

الحل:

. 1

$$\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2} \quad ; \rho(k) = 0\ ,\ k > 1$$

إذا كانت $\theta = 0.6$ فإن:

$$\rho(1) = \frac{-0.6}{1+0.36} = -0.44118 \quad ; \rho(k) = 0\ ,\ k > 1$$

والآن نأخذ: $\theta = \frac{1}{0.6} = 1.667$ وبالتالي فإن:

$$\rho(1) = \frac{-1.66667}{3.777778} = -0.44118 \quad ; \rho(k) = 0\ ,\ k > 1$$

ومنه يمكن القول أن هناك نموذجان يعطيان نفس دالة الارتباط الذاتي التالية:

$$\rho(k) = \begin{cases} -0.44118 & k = 1 \\ 0 & k = 2\ ,3\ ,4,.... \end{cases}$$

النموذج الأول هو الذي يحقق شرط الانعكاس ($\theta = 0.6$) لأن: $|\theta| = 0.6 < 1$

مثال4–7: إذا كانت $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية المتوسطات المتحركة من الرتبة الاولى. وكان $\rho(1) = 0.4$.

- أوجد قيمة المعلمة θ

الحل:

$$\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2} = 0.4$$
$$0.4\theta^2 + \theta + 0.4 = 0$$
$$\theta^2 + 2.5\theta + 1 = 0$$
$$\left(\theta + \frac{1}{2}\right)(\theta + 2) = 0$$

وبالتالي فإن:

$$\theta = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \theta = -2$$

القيمة $\theta = -\frac{1}{2}$ هي التي تحق شرط الانعكاس.

2.2.4 عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية: يقال أن $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الثانية إذا أمكن التعبير عنها في الصورة التالية:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} \quad ; \quad t = 0,\pm1,\pm2,... \quad ; \varepsilon_t \to \mathrm{BB}(0,\sigma^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (9-4)$$

حيث أن ε_t شوشرة بيضاء بتوقع صفر وتباين σ^2 .

يمكن كتابة النموذج (4-9) كما يلي:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \mathrm{B}\varepsilon_t - \theta_2 \mathrm{B}^2\varepsilon_t$$
$$X_t = (1 - \theta_1\mathrm{B} - \theta_2\mathrm{B}^2)\theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$$
$$X_t = \theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$$

حيث $\theta(\mathrm{B})$ كثير الحدود من الدرجة 2.

–دالة الارتباط الذاتي:

أ. التوقع

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) = 0$$

ب. التباين:

$$Var(X_t)=\gamma(0)=\text{cov}(X_t,X_t)$$
$$\gamma(0)=v(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2})=Var(\varepsilon_t)+\theta_1^2Var(\varepsilon_{t-1})+\theta_2^2Var(\varepsilon_{t-2})$$
$$=\sigma^2+\theta_1^2\sigma^2+\theta_2^2\sigma^2=(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma^2$$

ج. دالة التغاير الذاتي: $\gamma(h)=Cov(X_t,X_{t-h})$

لما h=0: $\gamma(0)=Cov(X_t,X_t)=Var(X_t)=(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma^2$

لما h=1:

$$\gamma(1)=Cov(X_t,X_{t-1})=Cov(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-1}-\theta_1\varepsilon_{t-2}-\theta_2\varepsilon_{t-3})$$
$$=Cov(-\theta_1\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-1})+Cov(-\theta_2\varepsilon_{t-2},-\theta_1\varepsilon_{t-2})$$
$$=-\theta_1\sigma^2+\theta_1\theta_2\sigma^2$$
$$=(-\theta_1+\theta_1\theta_2)\sigma^2$$

لما h=2:

$$\gamma(2)=Cov(X_t,X_{t-2})=Cov(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-2}-\theta_1\varepsilon_{t-3}-\theta_2\varepsilon_{t-4})$$
$$=Cov(-\theta_2\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-2})$$
$$=-\theta_2\sigma^2$$

وبالتالي:

$$\gamma(h)=0 \quad ; \quad h>2$$

ومنه فإن دالة الارتباط الذاتي تكون وفق الشكل التالي:

$$\rho(h)=\begin{cases}\dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & h=\pm1\\ \dfrac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & h=\pm2\\ 0 & h=\pm3,\pm4,...\end{cases}$$

نلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي لنماذج *MA(2)* تنعدم مباشرة بعد الفجوة الزمنية الثانية.

-دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

نظرا لصعوبة حساب دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج *MA(2)*. فسوف لن نتعرض لها وإنما سنكتفي بالتطرق لذكر خصائص هذه الدالة. ويمكن القول أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج *MA(2)* يحدها مجموع دالتين أسيتين تتلاشيان تدريجيا إلى الصفر إذا كان جذرا المعادلة $\theta(B)=0$ حقيقيين ويحدها موجات تحاكي دالة الجيب تتلاشى تدريجيا إلى الصفر إذا كان هذان الجذران مركبين.

-شروط الانعكاس:

نقول عن النموذج MA(2) أنه قابل للانعكاس إذا كان جذرا المعادلة: $\theta(B)=0$ يقعان خارج دائرة الوحدة حيث: $\theta(B)=1-\theta_1B-\theta_2B^2$

لنفرض أن G_1^{-1}, G_2^{-1} هما جذرا المعادلة السابقة، ومنه:

$$1-\theta_1 B-\theta_2 B^2=(1-G_1 B)(1-G_2 B)=0$$

وتتحقق شروط الانعكاس إذا كان: $\left|G_1^{-1}\right|>1, \left|G_2^{-1}\right|>1$

مثال4–8: إذا كانت $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية، حيث $\theta_1=0.7, \theta_2=0.1$.

- أوجد دالة الارتباط الذاتي.

الحل:

$$\rho(h)=\begin{cases}\dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\dfrac{-0.7(1.1)}{0.5}=-0.513 & h=\pm1\\ \dfrac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\dfrac{0.1}{1.5}=0.067 & h=\pm2\\ 0 & h=\pm3,\pm4,...\end{cases}$$

لدينا:

$$1-\theta_1 B-\theta_2 B^2=0\Rightarrow 1-0.7B-0.1B^2=0$$

$$\left(1-\frac{1}{2}B\right)\left(1-\frac{1}{5}B\right)=0\Rightarrow G_1^{-1}=2,\ G_1^{-1}=5$$

ومنه العملية $(X_t,\ t\epsilon Z)$ قابلة للانعكاس.

الدالة المميزة هي:

$$(1-2B)(1-5B)=0$$

$$1-7B+10B^2=0$$

أي أن:

$$\theta_1=7,\quad \theta_2=-10$$

ومنه فإن دالة الارتباط الذاتي التي تناظر هاتان القيمتان هي:

$$\rho(1)=\frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\frac{-7(11)}{150}=-0.513$$

$$\rho(2)=\frac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\frac{10}{150}=0.067$$

$$\rho(h)=0,\qquad h=\pm3,\pm4,...$$

أي أن النموذج أيضا يعطي نفس دالة الارتباط الذاتي.

- نعتبر الحالة: $G_1=2,\quad G_2=\dfrac{1}{5}$

$$\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{B}\right)(1-5\mathrm{B})=0$$

$$1-5.5\mathrm{B}+2.5\mathrm{B}^2=0$$

أي أن $\theta_1=5.5,\quad \theta_2=-2.5$ ومنه فإن دالة الارتباط الذاتي التي تناظر هاتان القيمتان هي:

$$\rho(1)=\frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\frac{-5.5(3.5)}{1+5.5^2+2.5^2}=-0.513$$

$$\rho(2)=\frac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\frac{2.5}{1+5.5^2+2.5^2}=0.067$$

$$\rho(h)=0\,,\qquad h=\pm3,\pm4,...$$

أي أن النموذج كسابقه أيضا يعطي نفس دالة الارتباط الذاتي.

- نعتبر الحالة: $G_1=\frac{1}{2},\quad G_2=5$

$$(1-2\mathrm{B})\left(1-\frac{1}{5}\mathrm{B}\right)=0$$

$$1-2.2\mathrm{B}+0.4\mathrm{B}^2=0$$

أي أن:

$$\theta_1=2.2,\quad \theta_2=-0.4$$

ومنه فإن دالة الارتباط الذاتي التي تناظر هاتان القيمتان هي:

$$\rho(1)=\frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\frac{-2.2(1.4)}{1+2.2^2+0.4^2}=-0.513$$

$$\rho(2)=\frac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\frac{0.4}{1+2.2^2+0.4^2}=0.067$$

$$\rho(h)=0\,,\qquad h=\pm3,\pm4,...$$

ومنه النموذج كذلك يعطي نفس دالة الارتباط الذاتي.

3.2.4 عمليات المتوسطات المتحركة العامة: يقال أن $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة q إذا أمكن التعبير عنها في الصورة التالية:

$$X_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}-...-\theta_q\varepsilon_{t-q}\ ;t=0,\pm1,\pm2,...\ \ ;\varepsilon_t\to \mathrm{BB}(0,\sigma^2).....(10-4)$$

حيث أن ε_t شوشرة بيضاء بتوقع صفر وتباين σ^2

-دالة الارتباط الذاتي:

من أجل $h>0$ فإن دالة التغاير الذاتي يمكن حسابها كما يلي:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E(X_t X_{t-h}) \\ &= E\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-q}\right)\left(\varepsilon_{t-h} - \theta_1\varepsilon_{t-h-1} - \theta_2\varepsilon_{t-h-2} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-h-q}\right)\right] \\ &= E\left[\varepsilon_t\varepsilon_{t-h} - \theta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-h-1} - ... - \theta_q\varepsilon_t\varepsilon_{t-q} - \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h} + \theta_1^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-1} + ... + \theta_1\theta_q\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-q} - .... \right. \\ &\left. - \theta_1\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-h} + \theta_1\theta_q\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-h-1} + ... + \theta_q^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-q}\right]\end{aligned}$$

مع العلم أن:

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h}) = 0 \quad h > q$$
$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h}) = \sigma_\varepsilon^2 \quad h \le q$$

من أجل $h=0$:

$$\gamma(0) = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2\right)\sigma^2$$

من أجل $0 < h \le q$:

$$\gamma(h) = \left(-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + +\theta_2\theta_{h+2} + ... + +\theta_{q-h}\theta_q\right)\sigma_\varepsilon^2$$

من أجل $h>q$:

$$\gamma(h) = 0$$

وبالتالي يمكن استنتاج دالة الارتباط الذاتي التالية:

$$\rho(h) = \begin{cases} \dfrac{-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + +\theta_2\theta_{h+2} + ... + +\theta_{q-h}\theta_q}{\left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2\right)} & ; si\ 0 < h \le q \\ 0 \quad ; \quad h > q \end{cases}$$

3.4 عمليات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة *ARMA*:

في بعض الظواهر لا يمكن التعبير عن السلسلة الزمنية بصيغة الانحدار الذاتي $AR(p)$ فقط أو بصيغة المتوسطات المتحركة $MA(q)$ فقط وإنما يمكن التعبير عنها بواسطة نموذج يدمج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة وهو نموذج مركب يحتوي على خصائص الانحدار الذاتي وخصائص المتوسطات المتحركة.

وفي هذا النموذج يعبر عن القيمة الحالية للسلسلة X_t بدلالة القيمة السابقة لسلسلة الزمنية $\mathbf{X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-p}}$ والقيمة الحالية للأخطاء ε_t والقيمة السابقة للأخطاء $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, ..., \varepsilon_{t-p}$، يرمز لها بالرمز ARMA، حيث أن (p) تمثل رتبة الانحدار الذاتي و (q) تمثل رتبة المتوسطات المتحركة، ويستفاد من هذه النماذج المختلفة في تخفيض عدد المعلمات اللازمة لبناء نموذج لسلسلة ما، مما يؤدي إلى سهولة تقدير هذه المعلمات وكذلك استخدام كل البيانات المتاحة بصورة أمثل وكفاءة اكبر.

تعريف(3-4): يقال أن $(X_t,\ t\epsilon Z)$ عبارة عملية انحدار ذاتي ومتوسطات متحركة واختصارا $ARMA(p,q)$ إذا أمكن التعبير عنها في الصورة التالية:

$$X_t = \varepsilon_t + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad .....(11-4)$$
$$t = 0,\pm1,\pm2,... \quad ; \varepsilon_t \to \mathrm{BB}(0,\sigma^2)$$

حيث أن ε_t شوشرة بيضاء بتوقع صفر وتباين σ^2.

يمكن كتابة النموذج كما يلي:

$$X_t = \varepsilon_t + \phi_1 \mathrm{B} X_t + \phi_2 \mathrm{B}^2 X_t + ... + \phi_p \mathrm{B}^p X_t - \theta_1 \mathrm{B}\varepsilon_t + \theta_2 \mathrm{B}^2 \varepsilon_t - ... - \theta_q \mathrm{B}^q \varepsilon_t$$
$$X_t - \phi_1 \mathrm{B} X_t - \phi_2 \mathrm{B}^2 X_t - ... - \phi_p \mathrm{B}^p X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \mathrm{B}\varepsilon_t + \theta_2 \mathrm{B}^2 \varepsilon_t - ... - \theta_q \mathrm{B}^q \varepsilon_t$$
$$\phi(\mathrm{B}) X_t = \theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$$

حيث $\phi(\mathrm{B})$ كثير الحدود من الدرجة p و $\theta(\mathrm{B})$ كثير الحدود من الدرجة q.

ويمكن اعتبار نماذج $ARMA(p,q)$ عتبارها كنماذج انحدار ذاتي من الرتبة p إذا تمت كتابتها على الصورة التالية:

$$X_t = \theta(\mathrm{B})\phi^{-1}(\mathrm{B})\varepsilon_t \quad .....(12-4)$$

وذلك بافتراض وجود $\phi^{-1}(\mathrm{B})$

وعمليات $ARMA(p,q)$ تكون مستقرة إذا كانت جذور المعادلة $\phi(\mathrm{B})=0$ كلها بالقيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح. وإذا توفر شرط الاستقرار فإنه يمكن التعبير عنها في شكل عمليات المتوسطات المتحركة ذات رتبة مالا نهاية كما يلي:

$$X_t = \psi(\mathrm{B})\varepsilon_t \quad ; \quad \psi(\mathrm{B}) = \frac{\theta(\mathrm{B})}{\phi(\mathrm{B})} \quad .....(13-4)$$

ونقول عن عمليات $ARMA(p,q)$ أنها قابلة للانعكاس إذا كانت جذور المعادلة $\theta(\mathrm{B})=0$ كلها بالقيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح. وإذا توفر شرط الانعكاس فإنه يمكن التعبير عنها في شكل عمليات انحدار ذاتي ذات رتبة مالا نهائية كما يلي:

$$\pi(\mathrm{B}) X_t = \varepsilon_t \quad ; \quad \pi(\mathrm{B}) = \frac{\phi(\mathrm{B})}{\theta(\mathrm{B})} \quad .....(14-4)$$

وبمساواة المعاملات B^j في طرفي المعادلتين (4-13) و (4-14) على الترتيب يمكن إيجاد ψ_j, π_i.

1.3.4 نموذج ARMA(1,1)

تعريف 3–4: نقول عن $(X_t, t\epsilon Z)$ أنها عبارة عملية $ARMA(1,1)$ إذا أمكن التعبير عنها في الصورة التالية:

$$X_t = \varepsilon_t + \phi X_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1} \quad t = 0,\pm1,\pm2,... \quad ; \varepsilon_t \to \mathrm{BB}(0,\sigma^2) \quad .....(15-4)$$

حيث أن ε_t شوشرة بيضاء بتوقع صفر وتباين σ^2.

يمكن كتابة النموذج كما يلي:

$$X_t = \varepsilon_t + \phi \mathrm{B} X_t + -\theta \mathrm{B}\varepsilon_t$$
$$X_t - \phi \mathrm{B} X_t = \varepsilon_t - \theta \mathrm{B}\varepsilon_t$$
$$(1-\phi \mathrm{B}) X_t = (1-\theta \mathrm{B})\varepsilon_t$$
$$\phi(\mathrm{B}) X_t = \theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$$

حيث $\phi(\mathrm{B})$ كثير الحدود من الدرجة p و $\theta(\mathrm{B})$ كثير الحدود من الدرجة q.

ونقول عن العملية $ARMA(p,q)$ أنها مستقرة إذا كان جذر المعادلة $\phi(\mathrm{B})=0$ بالقيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح. أي $|\phi|<1$

وبالتالي فإنه يمكن التعبير عنها في شكل عمليات المتوسطات المتحركة ذات رتبة مالا نهاية كما يلي:

$$\psi(\mathrm{B})=\frac{\theta(\mathrm{B})}{\phi(\mathrm{B})}=\frac{(1-\theta\mathrm{B})}{(1-\phi\mathrm{B})}$$

ومنه فإن:

$$(1-\phi\mathrm{B})(1+\psi_1\mathrm{B}+\psi_2\mathrm{B}^2+...)=(1-\theta\mathrm{B})$$

وبمساواة المعاملات B^j نجد:

$$\psi_1=\phi-\theta$$
$$\psi_2=\phi\psi_1=\phi(\phi-\theta)$$

وبالتالي كحالة عامة نجد:

$$\psi_j=\phi^{j-1}(\phi-\theta)\quad ;j=1,2,...$$

وتكون نماذج $ARMA(1,1)$ قابلة للانعكاس إذا كان جذر المعادلة $\theta(\mathrm{B})=0$ بالقيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح. وبالتالي فإنه يمكن التعبير عنها في شكل عمليات انحدار ذاتي ذات رتبة مالا نهائية كما يلي:

$$\pi(\mathrm{B})=\frac{\phi(\mathrm{B})}{\theta(\mathrm{B})}$$
$$(1-\theta\mathrm{B})(1-\pi_1\mathrm{B}+\pi_2\mathrm{B}^2+...)=(1-\phi\mathrm{B})$$

وبمساواة المعاملات B^j نجد:

$$\pi_1=\phi-\theta$$
$$\psi_2=\theta\pi_1=\theta(\phi-\theta)$$

وبصفة عامة:

$$\pi_i=\theta^{i-1}(\phi-\theta)\quad ;i=1,2,...$$

وسيتم عرض أهم الخصائص الإحصائية لعمليات $ARMA(1,1)$

-دالة الارتباط الذاتي:

أ. التوقع

$$E(X_t)=E(\varepsilon_t)+\phi E(X_{t-1})-\theta E(\varepsilon_{t-1})$$
$$E(X_t)=\phi E(X_{t-1})$$
$$E(X_t)=0\quad ;|\phi|<1$$

ب. التباين:

$$\gamma(0)=Var(X_t)=Var(\varepsilon_t+\phi X_{t-1}-\theta\varepsilon_{t-1})$$
$$\gamma(0)=Var(\varepsilon_t)+Var(\phi X_{t-1})+Var(-\theta\varepsilon_{t-1})+2\,\mathrm{cov}(\phi X_{t-1},-\theta\varepsilon_{t-1})$$
$$\gamma(0)=\sigma^2+\phi^2Var(X_{t-1})+\theta^2Var(\varepsilon_{t-1})-2\phi\theta\,\mathrm{cov}(X_{t-1},\varepsilon_{t-1})$$
$$\gamma(0)=\sigma^2+\phi^2\gamma(0)+\theta^2\sigma^2-2\phi\theta\sigma^2$$
$$(1-\phi^2)\gamma(0)=\sigma^2+\theta^2\sigma^2-2\phi\theta\sigma^2$$
$$\gamma(0)=\frac{(1+\theta^2-2\phi\theta)\sigma^2}{(1-\phi^2)}$$

ج. دالة التغاير الذاتي: $\gamma(h)=Cov(X_t,X_{t-h})$

لما h=0: $\gamma(0)=Cov(X_t,X_t)=Var(X_t)=\gamma(0)=\frac{(1+\theta^2-2\phi\theta)\sigma^2}{(1-\phi^2)}$

لما h=1:

$$\gamma(1)=Cov(X_t,X_{t-1})=Cov(\varepsilon_t+\phi X_{t-1}-\theta\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-1}+\phi X_{t-2}-\theta\varepsilon_{t-2})$$
$$=Cov(\phi X_{t-1},\phi X_{t-2})+Cov(\phi X_{t-1},\varepsilon_{t-1})+Cov(-\theta\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-1})+Cov(-\theta\varepsilon_{t-1},\phi X_{t-2})$$
$$=\phi^2\gamma(1)+\phi\sigma^2-\theta\sigma^2-\theta\phi^2\sigma^2+\theta^2\phi\sigma^2$$
$$(1-\phi^2)\gamma(1)=(\phi-\theta-\theta\phi^2+\theta^2\phi)\sigma^2$$
$$(1-\phi^2)\gamma(1)=(1-\theta\phi)(\phi-\theta)\sigma^2$$
$$\gamma(1)=\frac{(1-\theta\phi)(\phi-\theta)\sigma^2}{(1-\phi^2)}$$

مع العلم أن:

$$Cov(-\theta\varepsilon_{t-2},\phi X_{t-1})=-\theta\phi Cov(\varepsilon_{t-2},X_{t-1})=-\theta\phi E(\varepsilon_{t-2}X_{t-1})$$
$$=-\theta\phi E(\varepsilon_{t-2}X_{t-1})$$
$$=-\theta\phi E[\varepsilon_{t-2}(\varepsilon_{t-1}+\phi X_{t-2}-\theta\varepsilon_{t-2})]=-\theta\phi E\varepsilon_{t-2}(\phi\varepsilon_{t-2}X_{t-2}-\theta\varepsilon_{t-2}^2)=-\theta\phi^2\sigma^2+\theta^2\phi\sigma^2$$

لما h=2:

$$\gamma(2)=Cov(X_t,X_{t-2})=Cov(\varepsilon_t+\phi X_{t-1}-\theta\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2}+\phi X_{t-3}-\theta\varepsilon_{t-3})$$
$$=Cov(\phi X_{t-1},\phi X_{t-3})$$
$$=\phi\gamma(1)$$

وبالتالي:

$$\gamma(h)=\phi\gamma(h-1)\quad;\quad h\geq 2$$

ومنه فإن دالة الارتباط الذاتي تعطى كما يلي:

$$\rho(h)=\begin{cases}\dfrac{\gamma(1)}{\gamma(0)}=\dfrac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta} & h=\pm1\\ \phi\rho(1) & h=\pm2\\ \vdots & \\ \phi\rho(h-1) & ;\quad h\geq 2\end{cases}$$

مثال4–9: إذا كان: $X_t=\varepsilon_t+0.5X_{t-1}+0.9\varepsilon_{t-1}$

- أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسمها ووضح الفرق بينها وبين دالة الارتباط الذاتي في حالة AR(1)

الحل:

$$\phi=0.5\quad;\theta=-0.9$$

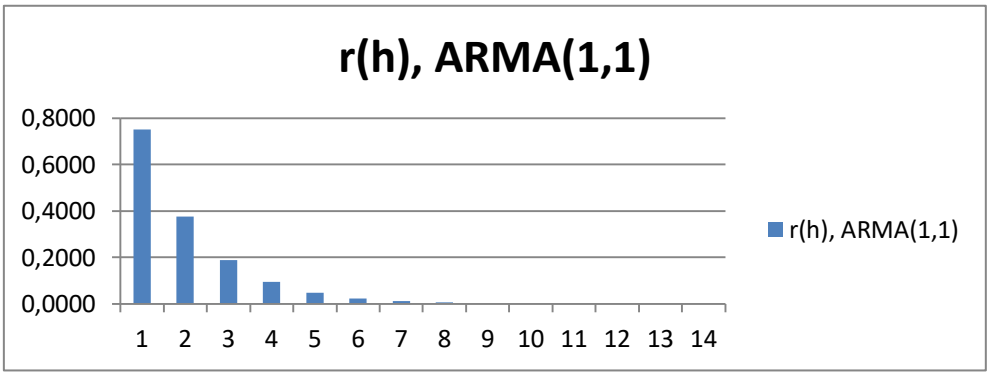
$$\rho(1)=\frac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta}=\frac{(1+0.45)(0.5+0.9)}{1+0.9^2+2(0.5)(0.9)}=\frac{2.03}{2.71}=0.75$$

$$\rho(2)=\phi\rho(1)=(0.5)0.75=0.375$$

$$\rho(3)=\phi\rho(2)=(0.5)0.375=0.1875$$

h	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
ρ(h)	*0,7500*	*0,3750*	*0,1875*	*0,0938*	*0,0469*	*0,0234*	*0,0117*

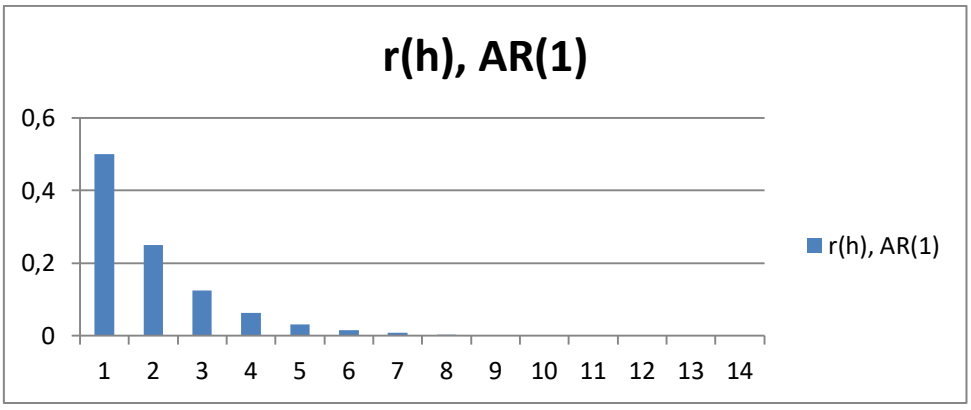
شكل 4–6 دالة الارتباط الذاتي لنموذج *ARMA*(1,1)



أما في حالة *AR(1)* فإن دالة الارتباط الذاتي لما: $\phi=0.5$

h	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
r(h), AR(1)	*0,5*	*0,25*	*0,125*	*0,0625*	*0,03125*	*0,015625*	*0,0078125*

شكل 3-8 دالة الارتباط الذاتي لنموذج $AR(1)$



تتناقص دالة الارتباط الذاتي لنموذج *ARMA(1,1)* بشكل أسي مباشرة بعد الفجوة الزمنية الأولى، أي بدءا من $\rho(1)$ في حين تتناقص دالة الارتباط الذاتي لنموذج *AR(1)* بشكل أسي بدءا من $\rho(0)$ ، ويلاحظ أن كل معاملات الارتباط الذاتي موجبة لأن ϕ موجبة وأكبر من θ.

-دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج *ARMA(1,1)*:

بعد الفجوة الزمنية الأولى فإن دالة الارتباط الذاتي الجزئي تسلك سلوكا مشابها لدالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج *MA(1)*. فإذا كانت $\theta > 0$ فإن ϕ_{kk} بعد الفجوة الأولى يحدها دالة أسية تبدأ في التناقص برتابة بدءا من ϕ_{11} بإشارة تحدد بواسطة اشارة $(\phi - \theta)$، أما إذا كانت $\theta < 0$ فإن الدالة ϕ_{kk} بعد الفجوة الأولى يحدها دالة أسية تقترب تدريجيا من الصفر بدءا من الفجوة الزمنية الأولى بإشارة تحدد بواسطة اشارة $(\phi - \theta)$

4.4 نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية *ARIMA*

تعد نماذج *ARIMA* أكثر نماذج السلاسل الزمنية استخداما إذ أنه بالإمكان اشتقاق جميع النماذج منها سواء الانحدار الذاتي أو المتوسطات المتحركة أو المختلطة وتتكون هذه النماذج من ثلاثة أجزاء، يمثل الجزء الأول منها نموذج الانحدار الذاتي $AR(p)$ الذي يستخدم عادة في عمليات التنبؤ للسلسلة الزمنية أما الجزء الآخر فيمثل نموذج المتوسطات المتحركة $MA(q)$ ويمثل الجزء الثالث (d) الفروق التي تتطلبها السلسلة من أجل أن تكون مستقرة.

وعندما تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة يجب أولا تحويلها إلى سلسلة زمنية مستقرة قبل بناء النموذج الرياضي وذلك بأخذ الفروق (d) واستخدام أحد التحويلات.[8] (عطية عبد القادر محمد عبد القادر، 2005، ص640.)

وعدد الفروق المطلوب لتحويل السلسلة غير المستقرة إلى سلسلة مستقرة تسمى بدرجة التكامل حيث يتحول نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة المتكامل $ARIMA(p,d,q)$ إلى نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة $ARMA(p,q)$ (أبو ذر يوسف علي احمد وأخرون، ص221-222)[9].

تعريف4-5: نقول عن $(X_t,\ t\epsilon Z)$ أنها عبارة عملية انحدار ذاتي ومتوسطات متحركة تكاملية- والتي يرمز لها بـ $ARIMA(p,d,q)$ إذا أمكن التعبير عنها في الصورة التالية:

$$\phi(\mathrm{B})\Delta^d X_t = \theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$$
$$\phi(\mathrm{B})(1-\mathrm{B})^d X_t = \theta(\mathrm{B})\varepsilon_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(16-3)$$

حيث أن ε_t شوشرة بيضاء بتوقع صفر وتباين σ^2.

$\phi(\mathrm{B})$ كثير الحدود من الدرجة p و $\theta(\mathrm{B})$ كثير الحدود من الدرجة q.

تمثل (p) رتبة الانحدار الذاتي، (d): عدد الفروق (التكامل) و (q) تمثل رتبة المتوسطات المتحركة.

ونكتب اختصارا $X_t \rightarrow ARIMA(p,d,q)$

ليكن: $Y_t = (1-\mathrm{B})^d X_t$

وبالتالي نكتب: $\phi(\mathrm{B})Y_t = \theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$

أي أن: $Y_t \rightarrow ARMA(p,q)$

مثال4-10: أكتب النموذج $ARIMA(1,1,1)$ في الشكل النهائي له

الحل:

$$\phi(\mathrm{B})(1-\mathrm{B})X_t = \theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$$
$$(1-\phi\mathrm{B})(1-\mathrm{B})X_t = (1-\theta\mathrm{B})\varepsilon_t$$

بوضع: $Y_t = (1-\mathrm{B})X_t$

نتحصل على:

$$(1-\phi\mathrm{B})Y_t = (1-\theta\mathrm{B})\varepsilon_t$$
$$Y_t = \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

بالتعويض: $Y_t = X_t - X_{t-1}$ نتحصل على:

$$X_t - X_{t-1} = \phi(X_{t-1} - X_{t-2}) - \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_t = (1+\phi)X_{t-1} - \phi X_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث نلاحظ أن السلسلة $(X_t)_{t\in Z}$ في هذه الصورة الأخيرة تبدو وكأنها عملية $ARMA(2,1)$ ، وهذا صحيح، إلا أنها بهذا الشكل هي غير مستقرة، وقد تم تحويلها باستخدام الفروق إلى سلسلة جديدة مستقرة تتبع نموذج $ARMA(1,1)$.

مثال4–10: عبر عن أن عمليات السير العشوائي (بدون مشتقة) كعنصر من عناصر نماذج $ARIMA(1,1,1)$

الحل:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$$

بوضع: $Y_t = X_t - X_{t-1}$ نتحصل على: $Y_t = \varepsilon_t$

وبالتالي: $Y_t \to ARMA(0,0)$ و: $X_t \to ARMA(0,1,0)$

إذا كتبت العملية $(X_t)_{t\in Z}$ وفق الصيغة:

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

فإنها تحتوي على d جذر وحدة حقيقي. وبالتالي نقول عنها أنها متكاملة من الدرجة d، ونكتب: $X_t \to I(1)$

إذا كانت العملية الناتجة (المخرجات) $(Y_t)_{t\in Z}$ عبارة عن نموذج $ARMA(p,q)$ فإن عملية المدخلات $(X_t)_{t\in Z}$ تمثل نموذج $ARIMA(p,d,q)$. ونكتب: $Y_t \to I(0)$

إن عملية: $ARIMA(0, 1, 0) : (1 - B)x_t = \varepsilon_t \Longleftrightarrow x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$ تعتبر بين عمليات $ARIMA$ الغير مستقرة. والتي نسميها عملية السير العشوائي *(R. Bourbonnais M.terraza,2010, p199)*[10]

5.4 النماذج الموسمية المختلطة: *SARIMA*

نظرا لوجود المركبة الفصلية في السلاسل الزمنية، الشيء الذي يؤدي إلى ارتفاع كل من p و q، وبالتالي يصعب تقديرها. من أجل ذلك وضع كل من بوكس وجينكز نماذج $ARIMA$ الفصلية، والتي تسمح للإحصائي للعمل مباشرة بالسلاسل الخامة وتجنبه كذلك تقدير المعامل الفصلي والنموذج $ARIMA$ انفصاليا.

1.5.4 النماذج الفصلية الأصلية:

تقول أن النموذج $\{X_t, t \in Z\}$ بأنه $ARIMA$ فصلي تماما من الدرجة d إذا حقق العلاقة التالية:

$$\Phi(B^s)(1-B^s)^d X_t = \Phi_0 + \theta(B^s)\varepsilon_t$$

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^{1s} - \Phi_2 B^{2s} - \ldots\ldots\ldots \Phi_p B^{ps}.$$

$$\theta(B^s) = 1 - \Phi_1 B^{1s} - \theta_2 B^{2s} - \ldots\ldots\ldots \theta_2 B^{qs}.$$

حيث Φ_0 ثابتة. *(Amarache .R , Meziani .A , Alger 1997, P 3 1)* [11]

2.5.4 النماذج الفصلية المختلطة المضاعفة :

نقول عن النموذج X_t أنه يستجيب للنموذج $ARIMA$ الفصلي المختلط المضاعف من الدرجة (p ,d ,q) إذا حقق العلاقة من الشكل :

$$\Phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \Phi_0 + \theta(B)\theta(B^s)\varepsilon_t$$

ومن الشكل :

$$\Phi(B)\Phi(B^s)W_t = \Phi_0 + \theta(B)\theta(B^s)\varepsilon_t$$

حيث: $W_t = (1-B)^d(1-B^s)^D X_t$

3.5.4. النماذج الفصلية المختلطة غير المضاعفة

ينتج عن معرفة هذه النماذج سلوكات غير منظمة أو غير عادية لدلالتها للارتباط الذاتي البسيط والارتباط الذاتي الجزئي مقارنة مع ما هو النموذج $SARIMA$ المضاعف.

6.4 تمارين الفصل الرابع:

التمرين الأول:

1. ماهو شرط الاستقرار في نماذج الانحدار الذاتي؟
2. ماهو شرط الاستقرار والانعكاس في نماذج $ARMA$ ؟
3. ماهي أهم النماذج الغير مستقرة، وماهي الطرق المناسبة لجعلها مستقرة؟
4. هل النموذج التالي مستقر: $x_t = 1.6x_{t-1} - 0.6x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$

التمرين الثاني: نعتبر المسار العشوائي التالي:

$$X_t = 40 + 0.2X_{t-1} + 0.35x_{t-2} + \varepsilon_t$$

حيث ε_t شوشرة بيضاء بمتوسط0 وتباين يساوي1.

1. أحسب توقع X بافتراض أن المسار مستقر.
2. بين أن المسار مستقر.
3. أعط معادلات يوول والكر للمسار، ثم أحسب التباين،
4. أوجد معاملات الارتباط الذاتي الثلاث الأولى.
5. أحسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئي الثلاث الأولى.

6. باعتبار أنه لدينا العلاقة:

$$\frac{1}{(1-0.7B)(1+0.5B)} = \frac{A_1}{(1-0.7B)} + \frac{A_2}{(1+0.5B)}$$

- أحسب A_1 و A_2. ثم أكتب النموذج Y_t على شكل $MA(\infty)$

التمرين الثالث: ليكن لدينا النموذج التالي:

$$X = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} - 1.6\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2}$$

حيث ε_t شوشرة بيضاء بمتوسط0 وتباين يساوي1.

1. هل المسار X_t مستقر

2. أحسب دالة التغاير الذاتي

التمرين الرابع: ليكن النموذج التالي:

$$X_t = 0.4X_{t-1} - 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث ε_t شوشرة بيضاء تباينها يساوي الواحد.

- ماهو نموذج y_t ـ هل Y_t مستقر؟

التمرين الخامس: ليكن:

$$(1-0.5B)(1-2.5B)(1-B)X_t = (1-0.8B)\varepsilon_t$$

حيث ε_t شوشرة بيضاء تباينها σ^2.

1. ماهو نموذج X_t

2. هل X_t مستقر؟، إن كان لا استنتج النموذج المستقر.

7.4 مراجع وإحالات الفصل الثالث:

[1] سمير مصطفى شعراوي، " مقدمة في التحليل الحيص للسلاسل الزمنية" كلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 2005. ص177

[2] نفس المرجع السابق، ص181

[3] Michel Prenat, C. Keribin, R. Rossigno,(2011) « Series chronologiques Volume 1: cours et exercices » Universit´e Paris-Sud, Année scolaire, P57

[4] *سمير مصطفى شعراوي مرجع سابق ص 198*

[5] Michel Prenat, C. Keribin, R. Rossigno,(2011), p59

[6] *سمير مصطفى شعراوي مرجع السابق مرجع سابق ص209*

[7] M. David j-c Michoud :"la prevision approche empirique d'une méthode statistique",Paris, 1989,p54

[8] *عطية عبد القادر محمد عبد القادر،" الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق"،"ط2 ، الاسكندرية : الدار الجامعية، 2005، ص640.*

[9] *أبو ذر يوسف علي احمد وأخرون، استخدام السلاسل الزمنية للتنبؤ بانتاجية الصمغ العربي في سوق محاصيل الأبيض للفترة (1960-2012)، مجلة البحث العلمي للعلوم والأدب، العدد الخامس عشر، ص221-222.*

[10] R. Bourbonnais M .Terraza , 2010« Analyse des séries temporelles » Applications à l'économie et à la gestion, **3e édition,** Dunod, Paris, , p199

[11] Amarache .R , Meziani .A(1997) , Prévision à court terme , Alger, P 31.

الفصل الخامس:
منهجية بوكس جينكينز

تمهيد:

تعد منهجية بوكس–جنكينز طريقة جد هامة، حيث أنها وضعت خصيصا لمعالجة السلاسل الزمنية المعقدة، وبصفة عامة في الحالات التي يكون فيها النموذج الابتدائي غير مطروح مسبقا. وقد أحدث هذا الأسلوب نقلة نوعية متميزة في مجال تحليل السلاسل الزمنية بحيث أصبح أكثر الطرق انتشارا واستخداما بما يتصف به من مزايا عديدة، تؤدي في النهاية إلى الحصول على نظام نمذجة وتنبؤ موثوق به في معظم السلاسل التي تحدث في مجالات المعرفة المختلفة، ومن ثم فإنه يمكننا القول بأن استخدام هذا الأسلوب يعني التخلص من عيوب الأساليب التقليدية الأخرى التي تستخدم في تحليل السلاسل الزمنية.

منهجية بوكس–جينكينز طورت من قبل بوكس وزميله جينكينز (*Box and Jenkins, 1976*) لتحليل السلاسل الزمنية المستقرة . ولقد خصصنا هذا الفصل لعرض هذه المنهجية والمراحل الأساسية اللازمة لتطبيق هذا الأسلوب في تحليل نماذج السلاسل الزمنية. (*Régis Bourbonnais2015, p263*).[1]

وهي ترتكز على مراحل أساسية يجب المرور عليها قبل إجراء عملية التنبؤ وهي على التوالي:

- مرحلة التعرف
- مرحلة التقدير.
- مرحلة التشخيص
- مرحلة التنبؤ

1.5 التعــرف:

أول مرحلة من مراحل التحليل الحديث للسلاسل الزمنية هي التعرف ***identification*** على النموذج المبدئي الملائم لبيانات السلسلة الزمنية. ويقصد بالتعرف على النموذج اختيار رتب النموذج الثلاث ***(p,d,q)***، وتعد هذه المرحلة من أصعب مراحل التحليل وأهمها، ليس في مجال السلاسل الزمنية فحسب بل في مجال الإحصاء بصفة عامة وأحد أسباب ندرة تطبيق منهجية بوكس جينكينز. بصفة خاصة، حيث تتطلب هذه المرحلة مهارة وخبرة. (*M.Prenat , C. Keribin, R Rossignol, (2010) p81*).[2]

أ. هذه المرحلة هي مرحلة اختيار النموذج المبدئي الملائم وهي تعتمد على الأسس النظرية والعلمية، ومقدرة الباحث على الحكم الشخصي الجيد لمدى تطابق خصائص البيانات (العينة) مع خصائص العملية العشوائية (المجتمع).

ب. ان النموذج الذي تم اختياره يمكن تعديله أو تحسينه أو حتى تنحيته جانبا إذا كانت أحد شروط التنبؤ غير متوفرة في المراحل المتقدمة من الدراسة والتحليل.

ت. قد يختار الباحث أكثر من نموذج، لكنه في النهاية يحتفظ بالنموذج الأفضل القادر على عكس خصائص السلسلة المتاحة من بين هذه النماذج.

1.1.5 تحديد رتبة الفروق:

كيف يمكن تحديد قيمة d الملائمة؟ في الواقع أن أول ما ينظر إليه عادة قبل تحديد قيمة d هو تشتت البيانات على شكل الانتشار أو منحنى السلسلة الزمنية الأصلية. فإذا كان التباين غير ساكن فإنه يجب تسكينه بأخذ اللوغاريتمات للسلسلة الأصلية. وعادة ما تنجح هذه الطريقة في جعل السلسلة مستقرة، ولكن في بعض الحالات قد نحتاج إلى استخدام تحوي آخر مثل الجذر التربيعي أو التكعيبي أو أي تحويل آخر، ولتحديد قيمة d نتبع الخطوات التالية.

I. رسم المنحنى الزمني للسلسلة الأصلية ورسم دالة الارتباط الذاتي للعينة، فإذا كان الرسم لا يوضح أي نوع من عدم الإستقرارية في المتوسط والتباين وكانت دالة الارتباط الذاتي للعينة $r(k)$ تتلاشى أو تتناقص بشكل سريع مع زيادة الفجوة الزمنية فإنه لا يأخذ أي فروق أخرى وتكون $d=0$ ، وننتقل مباشرة إلى تحديد الدرجتينp وq.

II. إذا لوحظ من المنحنى الزمني لسلسلة الفروق z_t أن سلسلة الفروق ما زالت تعاني من عدم سكون خصائصها الأساسية وأن دالة الارتباط الذاتي لهذه السلسلة تتلاشى ببطء فلابد من أخذ الفروق الثانية للسلسلة الأصلية ثم نقوم برسم المنحنى الزمني ودالة الارتباط الذاتي لسلسلة الفروق الثانية w_t، فإذا لوحظ سكون في المنحنى الزمني وتضاؤل سريع في دالة الارتباط الذاتي فإننا نتوقف عن أخذ الفروق وتكون $d=2$ ، و ننتقل مباشرة إلى البحث الفرعي التالي لاختيار قيمتي p وq.

وعادة ما تكون قيمة d صغيرة (صفر أو 1 أو 2) ونود أن نلفت نظر القارئ إلى خطورة أخذ الفروق غير ضرورية، فعلى الرغم من أن فروق أي سلسلة مستقرة يعطي سلسلة مستقرة، إلا أن أخذ فروق غير ضرورية يؤدي إلى نموذج يحتوي على معلمات غير ضرورية، ونمط ارتباط ذاتي أكثر تعقيدا. ويؤدي هذا كذلك إلى كبر تباين السلسلة، ولتوضيح ذلك نفترض أنه لدينا السلسلة التالية:

$$X_t = \varepsilon_t$$

أي ان السلسلة الاصلية هي بالضبط عبارة عن شوشرة بيضاء خالية من المعالم والتي تتميز بأن كل معاملات الارتباط الذاتي لها تساوي الصفر. بأخذ الفروق الأولى لهذه السلسلة.

$$Z_t = X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

ومن ثم فإن النموذج الجديد هو نموذج المتوسطات المتحركة غير قابل للانعكاس من الرتبة الأولى، وهو نموذج أصعب من نموذج الاضطرابات الهادئة ودالة ارتباطه الذاتي هي:

$$\rho(k)=\begin{cases}-0.5 & ;k=1\\ 0 & ;k>1\end{cases}$$

وتباين سلسلة الفروق

$$Var(Z_t)=V(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1})=2\sigma^2$$

أي أن تباين سلسلة الفروق يساوي ضعف تباين السلسلة الأصلية. والجدير بالذكر أن*Tintner (1940)* قد استخدم التغيرات التي تحدث في تباينات الفروق المتتالية لتحديد رتبة الفروق اللازمة لجعل السلسلة مستقرة.

2.1.5 تحديد رتبتي الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة

بعد تحديد رتبة الفروق الضرورية لجعل السلسلة مستقرة يجب تحديد رتبة الجزء الخاص بالانحدار الذاتي p ورتبة الجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة q. وتعتبر كل من دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئي أحد المفاتيح الفعالة في التمييز بين النماذج *AR(p)* والنماذج *MA(q)* والنماذج المختلطة *ARMA(p,q)* وتحديد رتبة كل منها. وقبل الشرح قد يكون من الضروري ذكر الخصائص الأساسية لهاتين الدالتين ونمط كل منها لأهم النماذج التي تنتمي إلى هذه العائلات وتلخيصها في الجدول رقم(5-1) الموالي:

وتسمى هذه الخصائص بالخصائص النظرية للعملية العشوائية، أوما يعرف في علم الاحصاء بخصائص المجتمع وخصائص السلسلة محل الدراسة (العينة) بسبب أخطاء المعاينة. وعلى كل حال إذا كان حجم العينة كبيرا فمن المتوقع أن تعكس دالة الارتباط الذاتي المقدرة *r(k)* الخصائص الأساسية لدالة الارتباط الذاتي النظرية *ρ(k)* بشكل تقريبي.

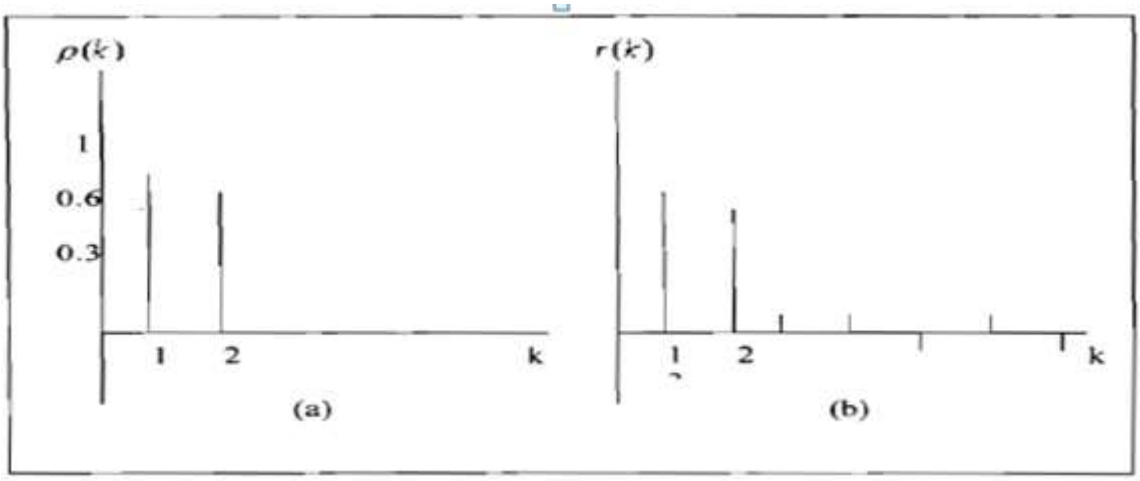
جدول رقم5-1: خصائص دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لنماذج *ARMA*

النموذج	ρ*(k)*	φ_{kk}
AR(1)	تقترب تدريجيا من الصفر بشكل أسي أو بشكل متردد في الاشارة	تنعدم مباشرة بعد الفجوة الزمنية الأولى
AR(2)	تقترب تدريجيا من الصفر بشكل أسي أو بشكل متردد في الاشارة أو موجات الجيب.	تنعدم مباشرة بعد الفجوة الزمنية الثانية
AR(p)	تقترب تدريجيا من الصفر بشكل أسي أو بشكل متردد في الاشارة أو موجات الجيب.	تنعدم مباشرة بعد الفجوة الزمنية p
MA(1)	تنعدم مباشرة بعد الفجوة الزمنية الأولى	يحدها دالة تقترب تدريجيا من الصفر في صورة أسية
MA(2)	تنعدم مباشرة بعد الفجوة الزمنية الثانية	يحدها مجموع دالتين تتلاشيان تدريجيا إلى الصفر في صورة أسية أو موجات تحاكي دالة الجيب
MA(q)	تنعدم مباشرة بعد الفجوة الزمنية q	يحدها توليفة من الدوال تقترب تدريجيا من الصفر في صورة أسية أو موجات تحاكي دالة الجيب
ARMA(p,q)	تقترب تدريجيا من الصفر بعد $q-p$ من الفجوات	يحدها بعد أول $p-q$ من الفجوات توليفة من

الدوال التي تقترب تدريجيا من الصفر في صورة أسية أو موجات تحاكي دالة الجيب	بشكل أسي أو موجات تحاكي دالة الجيب	

وللتوضيح أكثر نفترض أن المعاينة التي تتم من عملية المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية، حيث تتميز دالة الارتباط الذاتي لهذه العمليات بالانقطاع مباشرة بعد الفجوة الزمنية الثانية، العينة التي تنتمي إلى هذه العمليات قد لاتنتج دالة ارتباط ذاتي مقدرة *r(k)* تنقطع تماما بعد الفجوة الزمنية الثانية، ولكنها قد تنتج دالة ارتباط ذاتي مقدرة تشبه الشكل التالي:

شكل 5–1 دالتي الارتباط الذاتي النظرية والمقدرة لنموذج *MA(2)*



ويعني أن العينة المولدة من عمليات *MA(2)* قد تنتج دالة الارتباط ذاتي مقدرة لها قيمتان كبيرتان عند الفجوتين الزمنيتين الأولى والثانية ومعاملات ارتباط ذاتي صغيرة (لا تساوي الصفر بالضبط).

3.1.5 اختبار معنوية معاملات الارتباط الذاتي النظرية:

أن أول عمل يمكن الاستفادة منه هو ماقام به *Bartlett(1946)* ، والذي أعطى تباينات تقريبية لمعاملات الارتباط الذاتي المقدرة من العينات (السلاسل) المولدة من نماذج *MA(q)* وذلك للفجوات الزمنية k>q على الصورة:

$$Var[r(k)] = \frac{1}{n}\left[1 + 2\sum_{j=1}^{q}\rho^2(j)\right] \quad ; \quad k = q+1, q+2, \ldots \ldots\ldots\ldots (1-5)$$

ومنه يمكن الحصول على الأخطاء المعيارية للمقدرات *r(k)* بصورة تقريبية بوضع *r(k)* بدل $\rho(k)$ كما يلي:

$$SE[r(k)] = \sqrt{\frac{1}{n}\left[1 + 2\sum_{j=1}^{q}r^2(j)\right]} \quad ; \quad k = q+1, q+2, \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-5)$$

العمل الثاني الذي يمكن الاستفادة منه هو ما قدمه *Anderson (1942)*، حيث أوضح أنه لحجم العينة المعتدل فإن مقدر العينة المناظر *r(k)* يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي. ومنه فإن:

$$Z = \frac{r(k)}{SE[r(k)]} \rightarrow N(0,1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-5)$$

وذلك بافتراض صحة الفرضية $\rho(k)=0$ [3] .*(R.Bourbonnais,M. Terraza. (2010, P95)*

حيث تصاغ الفرضيتين كما يلي:

$$\begin{matrix} H_0 : \rho(k)=0 \\ H_1 : \rho(k)\neq 0 \end{matrix} \quad k = q+1, q+2,...$$

نرفض فرضية العدم بمستوى معنوية α إذا كان $|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}}$

يجب لفت نظر القارئ أنه ليس من المفضل دائما تثبيت قيمة α عند قيمة معينة لاختبار معاملات الارتباط الذاتي عند كل الفجوات، فقد أفرزت بعض الدراسات الحديثة عن حقيقة هامة وهي أنه من الأفضل عادة استخدام قيمة كبيرة لمستوى المعنوية α عند الفجوات الزمنية الأولى، ثم استخدام قيمة أصغر عند الفجوات التالية.

أما بالنسبة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي، فكيف يمكن اختبار معنويات معاملات الارتباط الذاتي الجزئي؟ وكيف يمكن استخدام هذه الاختبارات في التعرف على نموذج *AR(p)* وتمييز رتبتها؟ للإجابة عن هذين السؤالين نجد أن نفس بحث أندرسون قد أوضح أنه إذا كان حجم العينة معتدلا فإن مقدر معامل الارتباط الذاتي الجزئي يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي. بالاضافة إلى ذلك فقد جاء في بحث *quenouille(1949)* شكل تقريبي للخطأ المعياري لمقدرات معاملات الارتباط الذاتي الجزئي المحسوبة من العينات(السلاسل) المولدة من نموذج *AR(p)* وذلك للفجوات الزمنية $k>p$ على الصورة:

$$SE(\hat{\phi}_{kk}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; k > p \quad .....(4-5)$$

ومن ثم فإن الاحصاءة: $Z = \hat{\phi}_{kk}\sqrt{n}$ تتبع تقريبا التوزيع المعياري بافتراض صحة الفرضية $\phi_{kk}=0$ ، وبالتالي يمكن استخدامه لاختبار الفرضيتين:

$$H_0 : \phi_{kk} = 0 \quad ; \quad H_1 : \phi_{kk} \neq 0 \quad ; k = p+1, p+2,...$$

يتم رفض فرضية العدم بمستوى معنوية α إذا كان $|Z| > z_{\alpha/2}$.

وبناء على ذلك يمكن استخدام هذه الاحصاءة لاختبار انعدام دالة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} بعد الفجوة الزمنية p، وبالتالي إذا كانت هذه المعاملات لاتختلف معنويا عن الصفر، فإنه يمكن قبول الفرضية الصفرية بأن الدالة النظرية ϕ_{kk} تنعدم بعد الفجوة الزمنية p ، وبذلك يتم اختيار الرتبة المناسبة لنماذج *AR(p)*.

السؤال المطروح: كيف يمكن التعرف على الرتبتين p و q إذا كانت كل من دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئي تتناقص ولا تنعدم؟.

في هذه الحالة نماذج *AR(p)* ونماذج *MA(q)* لاتكون ملائمة في هذه الحالة وأنه يجب استخدام أحد النماذج المختلطة *ARMA(p,q)*، حيث: $p \neq 0, q \neq 0$. والتعرف على رتبة النموذج المختلط أكثر تعقيدا

من التعرف على رتبة نماذج *AR(p)* ونماذج *MA(q)*، وهي صعوبة نعتبرها من أحد العيوب الأساسية لهذه المنهجية. ولكن لحسن الحظ أن النموذج *ARMA(1,1)* عادة مايكون ملائما في كثير من التطبيقات التي تتطلب اختيار نموذج مختلط.

مثال5–1: البيانات الآتية توضح دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لسلسلة زمنية طولها 100 مشاهدة. حدد نموذج مبدئي ملائم للسلسلة.

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
r(k)	*0,405*	*-0,073*	*0,08*	*0,11*	*0,092*	*-0,09*	*0,1*	*0,1*	*-0,09*	*0,052*
φ_{kk}	*0,405*	*0,32*	*0,24*	*-0,11*	*0,09*	*-0,02*	*0,01*	*0,03*	*-0,05*	*0,03*

الحل: تبدو دالة الارتباط الذاتي كأنها تنعدم بعد الفجوة الزمنية الأولى، ولذلك سنقوم باختبار معنوية $\rho(1)$ بافتراض أن العملية العشوائية هي عبارة عن شوشرة بيضاء، ومن ثم فإن لكل الفجوات نجد أن:

$$SE[r(k)] = \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = 0.1, \quad k = 1,2,...$$

ولاختبار الفرض:

$$H_0 : \rho(1) = 0, \quad H_1 : \rho(1) \neq 0$$

نستخدم الإحصاءة:

$$|Z| = \frac{r(1)}{SE[r(1)]} = \frac{0.405}{0.1} = 4.05 > 1.96$$

وبالتالي نرفض فرضية العدم ونقول أن $\rho(1)$ معنويا مختلفة عن الصفر.

لكن هل من الممكن اعتبار كل معاملات الارتباط الذاتي الأخرى غير معنوية؟ لذلك يجب حساب الخطأ المعياري بافتراض أن العملية *MA(1)*، أي أن:

$$SE[r(k)] = \sqrt{\frac{1}{n}\left[1 + 2r^2(1)\right]} = \sqrt{\frac{1}{100}\left[1 + 2(0.405)^2\right]} = 0.115 \quad , k > 1$$

$$2SE[r(k)] = 2(0.115) = 0.23 \quad ; k > 1$$

وبفحص معاملات الارتباط المقدرة نجد: $|r(k)| < 0.23$ لكل القيم *k=2,3,...* ومنه دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ تنعدم بعد الفجوة الزمنية الأولى، وبالتالي فإن نموذج *MA(1)* يبدو ملائما لشرح سلوك السلسلة.

مثال5–2: البيانات الآتية توضح دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لسلسلة زمنية طولها 92 مشاهدة. حدد نموذج مبدئي ملائم للسلسلة.

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
r(k)	*0,66*	*0,42*	*0,29*	*0,19*	*0,09*	*-0,01*	*0,01*	*0,02*	*0,01*
φ_{kk}	*0,66*	*0,39*	*0,01*	*0,02*	*-0,01*	*-0,03*	*0,02*	*0,01*	*0,01*

الحل: تبدو دالة الارتباط الذاتي الجزئي كأنها تنعدم بعد الفجوة الزمنية الثانية، ولذلك يجب باختبار معنوية φ_{kk}

$$SE\left[\hat{\phi}_{22}\right]=\sqrt{\frac{1}{n}}=\sqrt{\frac{1}{100}}=0.104,\quad k=1,2,...$$

ولاختبار الفرض:

$$H_0:\phi_{22}=0,\quad H_1:\phi_{22}\neq 0$$

نستخدم الإحصاءة:

$$|Z|=\frac{\hat{\phi}_{22}}{SE\left[\hat{\phi}_{22}\right]}=\frac{0.39}{0.104}=3.7>1.96$$

وبالتالي نرفض فرضية العدم ونقول أن ϕ_{22} معنويا مختلفة عن الصفر. ومنه لايمكن أن تكون العملية التي ولدت البيانات هي عملية *AR(1)*.

بافتراض أن العملية العشوائية هي *AR(2)*، فإن الخطأ المعياري لكل الفجوات $k>2$ يكون:

$$SE\left[\hat{\phi}_{kk}\right]=\sqrt{\frac{1}{n}}=0.104, k>2$$

$$2SE\left[\hat{\phi}_{kk}\right]=0.208\quad ; k>2$$

وبفحص معاملات الارتباط المقدرة نجد $\left|\hat{\phi}_{kk}\right|<0.208$ لكل القيم $k=3,4,...$، ومنه دالة الارتباط الذاتي الجزئي تنعدم بعد الفجوة الزمنية الثانية، وبالتالي فإن نموذج *AR(2)* يبدو ملائما لشرح سلوك السلسلة، خاصة وأن دالة الارتباط الذاتي تبدو وكأنها متناقصة بشكل أسي.

ويلاحظ هنا أنه في حالة النماذج *AR(p)* لايختلف الخطأ المعياري باختلاف رتبة النموذج ولذلك يمكن اختبار معنوية جميع معاملات الارتباط الذاتي بمقارنة معاملات الارتباط المقدرة بضعف الخطأ المعياري مباشرة.

مثال5–3: البيانات الآتية توضح دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لعدد حوادث المرور الشهري التي وقعت في إحدى المدن.

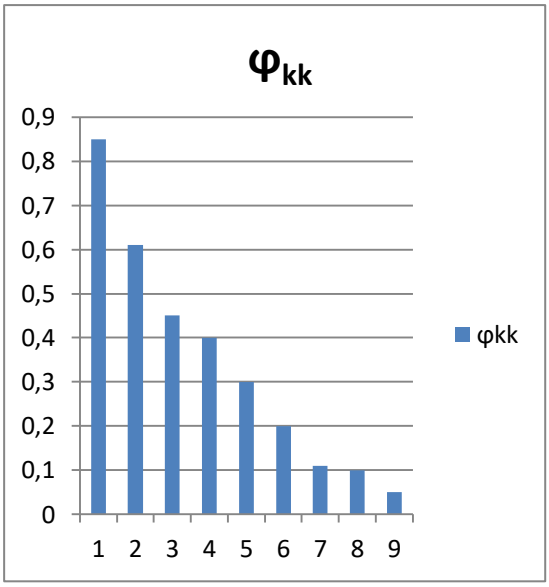
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r(k)$	0,85	0,45	0,28	0,15	0,1	0,06	0,03	0,02	0,01
ϕ_{kk}	0,85	0,61	0,45	0,4	0,3	0,2	0,11	0,1	0,05

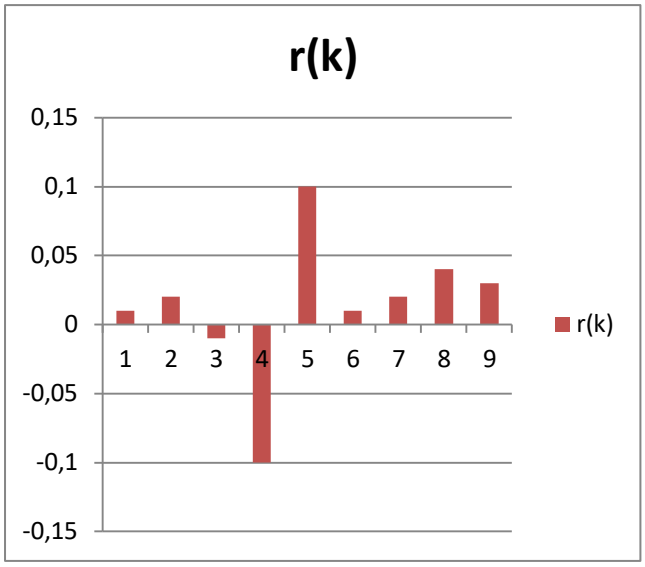
- حدد نموذج مبدئي ملائم لشرح سلوك السلسلة إذا علمت ان طول السلسلة هو 400 شهر.

الحل:

نلاحظ أن كلا الدالتين تتناقصان ولا تنعدمان بعد فجوة قصيرة (1 أو 2). ومنه قد يبدو أن النموذج المختلط هو الأفضل في تمثيل السلسلة. ولذا من الأحسن رسم الدالتين بيانيا.

شكل 5-2 دالتي الارتباط الذاتي اوالجزئي للمثال4-3





تتناقص دالة الارتباط الذاتي بشكل أسي مشابه لدالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(1) بدءا من r(1) وليس r(0)، وهذا يعني أن النموذج ARMA(1,1) قد يكون مناسبا لتمثيل سلسلة الحوادث. ويؤيد هذا الاختيار نمط $\hat{\phi}_{kk}$ والذي يبدو وكأنه مشابه لنمط ϕ_{kk} لنماذج MA(1) أي يحده دالة أسية.

2.5 التقدير *Estimation*

بعد الانتهاء من مرحلة التعرف على النموذج المبدئي الملائم للبيانات المتاحة يجب تقدير معالم هذا النموذج باستخدام إحدى الطرق المعروفة في نظرية الاحصاء وأهمها طريقتي الربعات الصغرى و طريقة المعقولية العظمى.

1.2.5 تقدير معلمة نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1)

بافتراض استقرار نموذج AR(1) ، وبافتراض لدينا سلسلة زمنية مكونة من المشاهدات $y_1,y_2,\ldots,y_n$ حيث يمكن كتابة النموذج على الصورة:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad , t = 1,2,...n \; ; |\phi| < 1 \quad .....(5-5)$$

والمشكلة التي نحن بصددها هي تقدير المعلمة ϕ باستخدام البيانات المتاحة $y_1,y_2,\ldots,y_n$.

أ. تقدير المربعات الصغرى الشرطي

يوجد تشابه الكبير بين النموذج *AR(1)* ونموذج الانحدار الخطي البسيط حيث يلعب المتغير العشوائي Y_t دور المتغير التابع ويلعب المتغير Y_{t-1} دور المتغير المفسر(المستقل) بينما يلعب ε_t دور الاخطاء الحقيقية. وحيث أن النموذج *AR(1)* خطي في المعلمة ϕ فإنه يمكن تطبيق القواعد والاحكام الخاصة بنموذج الانحدار البسيط واضعين في الاعتبار أن مقدر المربعات الصغرى للمعلمة ϕ قد لا يحقق الصفات المثالية التي نعرفها عن مقدرات المربعات الصغرى العادية وذلك نظرا لأن المتغير المفسر هنا Y_t هو متغير عشوائي بينما

تفترض دراسة نموذج الانحدار البسيط التقليدية عدم عشوائية هذا المتغير. ولحسن الحظ–و على الرغم من هذا الاختلاف –فقد اثبت *Mann-Wald* (1943) أن الخصائص الأساسية لتباين مقدر المربعات الصغرى للمعلمة ϕ تظل صحيحة تقاربيا أي عندما يؤول طول السلسلة (حجم العينة) n الى ∞.

وثمة مشكلة أخرى تنفرد بها نماذج الانحدار الذاتي وهي مشكلة القيم الابتدائية. وتتلخص هذه المشكلة في حالة نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى في أنه لا يمكن حساب الخطأ الأول ε_1 من مشاهدات السلسلة المتاحة $Y_1, Y_2, ..., Y_2$

نظرا لأن الخطأ ε_1 يعتمد على القيمة Y_0 غير الملاحظة. ولكن بالطبع يمكن حساب جميع الأخطاء الأخرى: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_n$ باستخدام بيانات السلسلة المتاحة. ولكن إذا كان طول السلسلة كبيرا فإن تأثير ε_1 سيكون صغيرا ومن ثم يمكن افتراض أنه يساوي الصفر، وبذلك يكون مجموع مربعات الأخطاء الشرطي:

$$S(\phi/\varepsilon_1 = 0) = \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 \quad .....(6-5)$$

تقريب ملائم لمجموع مربعات الأخطاء الكلي $\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2$. بالتعويض من المعادلة (5-5) في المعادلة (6-5) يمكن كتابة مجموع مربعات الأخطاء الشرطي كما يلي:

$$S(\phi/\varepsilon_1 = 0) = \sum_{t=2}^{n} (Y_t - \phi Y_{t-1})^2 \quad .....(7-5)$$

نقوم باشتقاق المعادلة أعلاه والمساواة بالصفر لإيجاد مقدر المربعات الصغرى:

$$-2\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}\left(Y_t - \hat{\phi} Y_{t-1}\right) = 0 \Rightarrow \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}^2} \quad .....(8-5)$$

ويسمى المقدر بمقدر المربعات الصغرى الشرطي ويرمز له عادة بالرمز $\hat{\phi}_c$.

ب. تقدير الإمكان الأعظم الشرطي:

كما هو معروف في الإحصاء فإن تقدير الإمكان الأعظم يستلزم افتراض توزيع احتمالي معين للأخطاء أو الاضطرابات ε_t، فإذا افترضنا أنها تتبع التوزيع الطبيعي، عندئذ يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $\varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$ على الصورة التالية:

$$f(\varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2} \quad .....(9-5)$$

إذا افترضنا أن المتغير الابتدائي: Y_1 يضل ثابتا عند القيمة y_1 فإنه يمكن تحويل المتغيرات $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n)$ إلى المتغيرات $(Y_2, Y_3, ..., Y_n)$.

$$\varepsilon_2 = y_2 - \phi y_1$$
$$\varepsilon_3 = y_3 - \phi y_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\varepsilon_n = y_n - \phi y_{n-1}$$

وبالتالي يكون جاكوبيان التحويلات: $|J| = \left|\frac{\partial(\varepsilon)}{\partial(y)}\right| = 1$

ومن ثم فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطي للمتغيرات $(y_2, y_3, ..., y_n)$ مع العلم أن $Y_1 = y_1$ هي:

$$g(y_2, y_3, ..., y_n / Y_1 = y_1) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2} \quad .....(10-5)$$

إذا كان طول السلسلة n كبيرا فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطية $(4.2.6)$ تكون تقريب جيد لدالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $(Y_2, Y_3, ..., Y_n)$. ومن ثم يمكن استخدام $(4.2.6)$ كتقريب ملائم لدالة المعقولية العظمى *exact* للمعلمتين σ^2, ϕ كما يلي:

$$L^*(\phi, \sigma^2 / y_2, y_3, ..., y_n) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2} \quad .....(11-5)$$

باستخدام اللوغاريتم نجد:

$$Ln(L) = -(n-1)\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2$$
$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial \phi} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}(y_t - \phi y_{t-1})$$

بمساواة المشتقة بالصفر نجد مقدر المعقولية العظمى الشرطي وفق الصورة التالية:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2} \quad .....(12-5)$$

ولكي يكون هذا هو مقدر المعقولية العظمى لابد أ تكون المشتقة الثانية سالبة:

$$\frac{\partial^2 Ln(L)}{\partial \phi^2} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2 < 0 \quad .....(13-5)$$

نلاحظ أن مقدر المعقولية العظمى هو نفس مقدر طريقة المربعات الصغرى.

- **تقدير تباين الشوشرة البيضاء**

عادة ما يكون تباين الشوشرة البيضاء غير معلوم، وفي هذه الحالة هو يعتبر معلمة كذلك في دالة المعقولية العظمى، ويكون على الصورة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \hat{\phi} y_{t-1}\right)^2 \quad .....(14-5)$$

مثال5–5: إذا كانت العملية y_t تتبع نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الأولى ، قدر ϕ و σ^2 باستخدام البيانات التالية: y_t : 2,3,2,2,1

الحل:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2} = \frac{y_2 y_1 + y_3 y_2 + y_4 y_3 + y_5 y_4}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} = \frac{10}{15} = 0.67$$

يمثل هذا التقدير تقدير المربعات الصغرى الشرطية وهو يساوي تقدير المعقولية العظمى الشرطي.

2.2.5 تقدير معلمات نماذج الانحدار الذاتي العامة

بافتراض استقرار نموذج AR(p) ، وبافتراض لدينا سلسلة زمنية مكونة من المشاهدات $y_1,y_2,\ldots,y_n$ حيث يمكن كتابة النموذج على الصورة:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad , t = 1,2,\ldots n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15-5)$$

والمشكلة التي نحن بصددها هي تقدير المعلمة ϕ باستخدام البيانات المتاحة $y_1,y_2,\ldots,y_n$.

أ. تقدير المربعات الصغرى الشرطية

صورة نماذج *AR(p)* تشبه إلى حد كبير نماذج الانحدار الخطي العام التقليدية حيث يلعب المتغير العشوائي y_t دور المتغير التابع وتلعب المتغيرات $y_{t-1}, y_{t-2},\ldots, y_{t-p}$ دور المتغيرات المفسرة بينما يلعب ε_t دور الاخطاء الحقيقية. ومن ثم يمكن تطبيق الآلية العادية لاشتقاق مقدرات المربعات الصغرى. إلا ان المشكلة التي تواجهنا عند الاشتقاق هي استحالة حساب الأخطاء الابتدائية $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots \varepsilon_p$ لأنها تعتمد على القيم غير المشاهدة، $y_0, y_{-1},\ldots, y_{1-p}$ حيث نجد مثلا:

$$\varepsilon_1 = y_1 - \phi_1 y_0 - \phi_2 y_{-1} - \ldots - \phi_p y_{1-p} \quad , p \geq 1$$

. ولكن إذا كان طول السلسلة كبيرا بالنسبة للرتبة p فإن مجموع مربعات الأخطاء الشرطي:

$$S(\phi_1, \phi_2,\ldots \phi_p / \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_p = 0) = \sum_{t=p+1}^{n} \varepsilon_t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16-5)$$

يكون تقريب ملائم لمجموع مربعات الأخطاء الكلي $\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2$. وبالتالي:

$$S(\phi_1, \phi_2,\ldots \phi_p / \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_p = 0) = \sum_{t=p+1}^{n} \left(y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \ldots - \phi_p y_{t-p}\right)^2 \quad \ldots\ldots (17-5)$$

نقوم باشتقاق المعادلة (17–10) أعلاه بالنسبة للمعلمات $\phi_1, \phi_2,\ldots \phi_p$ والمساواة بالصفر نجد:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_i} = \sum_{t=p+1}^{n} y_{t-i}\left(y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \ldots - \phi_p y_{t-p}\right) = 0 \quad ; i = 1,2,\ldots, p$$

بتحويل نظام المعادلات إلى شكل مصفوفي نجد:

$$(X'X)\hat{\phi} = X'Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(18-5)$$

حيث: X مصفوفة من الرتبة $p\times(n\text{-}p)$ وتأخذ الصورة:

$$X = \begin{pmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_{n-p} \end{pmatrix}$$

و y شعاع عمودي من الرتبة $(n\text{-}p)$

$$y = (y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_n)$$

ومنه فإن مقدرات المربعات الصغرى الشرطية تكون وفق الصورة:

$$\hat{\phi} = (X'X)^{-1}X'Y$$

ب. تقدير الإمكان الأعظم الشرطي:

بافتراض أن تتبع التوزيع الطبيعي، عندئذ يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n$ على الصورة التالية:

$$f(\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^{n-p}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n}\varepsilon_t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(19-5)$$

إذا افترضنا أن المتغير الابتدائي: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ ثابتة دائما عند القيم $y_1, y_2, \ldots, y_p$ فإنه يمكن تحويل المتغيرات $(\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n)$ إلى المتغيرات $(Y_{p+1}, Y_{p+2}, \ldots, Y_n)$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+1} &= y_{p+1} - \phi_1 y_p - \phi_2 y_{p-1} - \ldots - \phi_p y_1 \\ \varepsilon_{p+2} &= y_{p+2} - \phi_1 y_{p+1} - \phi_2 y_p - \ldots - \phi_p y_2 \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= y_n - \phi_1 y_{n-1} - \phi_2 y_{n-2} - \ldots - \phi_p y_{n-p} \end{aligned}$$

ومن ثم فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطي للمتغيرات $(Y_{p+1}, Y_{p+2}, \ldots, Y_n)$ عندما تكون: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ ثابتة هي:

$$g\left(y_{p+1}, y_{p+2},..., y_n / Y_1 = y_1, Y_2 = y_2,..., Y_p = y_p\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{n-p}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n}\left(y_t-\phi_1 y_{t-1}-\phi_2 y_{t-2}-...-\phi_p y_{t-p}\right)^2} \quad .....(20-5)$$

إذا كان طول السلسلة n كبيرا فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطية $(5-20)$ تكون تقريب جيد لدالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $(Y_2, Y_3,..., Y_n)$. ومن ثم يمكن استخدام$(5-20)$ كتقريب ملائم لدالة المعقولية العظمى للمعلمات σ^2 , ϕ_1 , ϕ_2 ,...ϕ_p كما يلي:

$$L^*\left(\phi_1, \phi_2,...\phi_p, \sigma^2 / y_2, y_3,..., y_n\right) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{n-p}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n}\left(y_t-\phi_1 y_{t-1}-\phi_2 y_{t-2}-...-\phi_p y_{t-p}\right)^2} .....(21-5)$$

باستخدام اللوغاريتم نجد:

$$Ln\left(L^*\right) = -(n-p)\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - ... - \phi_p y_{t-p}\right)^2$$

ويعني هذا أن قيم المعلمات $\phi_1, \phi_2,...\phi_p$ التي تجعل دالة المعقولية العظمى هي نفس القيم التي تجعل مجموع مربعات الأخطاء الشرطية $\sum_{t=p+1}^{n}\left(y_t-\phi_1 y_{t-1}-\phi_2 y_{t-2}-...-\phi_p y_{t-p}\right)^2$ أقل ما يمكن.

ومنه فإن مقدرات المعقولية العظمى للمعلمات $\phi_1, \phi_2,...\phi_p$ تساوي مقدرات طريقة المربعات الصغرى الشرطية.

مثال5–6 : إذا كانت العملية y_t تتبع نموذج $AR(2)$ ، أحسب تقديري المربعات الصغرى لمعلمتي هذا النموذج.

y_t : 2, 1, 2, 3, 2

الحل:

$$X = \begin{pmatrix} y_3 & y_1 \\ y_4 & y_2 \\ y_5 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; X'X = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X'y = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi} = \left(X'X\right)^{-1} X'y = \begin{pmatrix} 0.62 \\ 0.54 \end{pmatrix}$$

- **تقدير تباين الشوشرة البيضاء:**

إذا كان تباين الشوشرة البيضاء غير معلوم، فإن يتم تقديره باستخدام طريقة المعقولية العظمى، ويكون على الصورة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\phi}_2 y_{t-2} - \ldots - \hat{\phi}_p y_{t-p}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22-5)$$

أما بالنسبة لطرق تقدير معالم المتوسطات المتحركة والمختلطة فهي معقدة لأنها غير خطية والحد العشوائي غير منظور وبالتالي فهي تتطلب طرق تقدير تكر رية، وعليه يكون أسلوب التقدير غير خطي.

3.5 التشخيص:

تعرف هذه النوعية من الدراسة بتشخيص النموذج المبدئي والذي يمكن النظر إليه كنوع من التوازن بين الفرضيات النظرية ومخرجات العملية التطبيقية لمرحلة التقدير. وفي هذه المرحلة يتم الاطمئنان على ملائمة النموذج المبدئي وبالتالي إمكانية استخدامها في التنبؤ، أو يتم فيها تعديل النموذج بناءا على الاختبارت والفحوص التي تجرى في هذه المرحلة.

1.3.5 اختبار دالة الارتباط الذاتي للسلسلة:

في هذه المرحلة ننتقل إلى دراسة وتحليل بواقي التقدير مع دالة الارتباط الذاتي للبواقي. بحيث يجب أن تقع معاملات الارتباط الذاتي الكلية لهذه البواقي داخل مجال الثقة المعبر عنه بيانيا بخطين متوازيين $\left[-\frac{t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \frac{t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right]$ (شيخي مُحَمَّد , ، 2012, ص258).[4]

- **إحصاءة بوكس بييرس المعدل:**

فحص كل معالم الارتباط الذاتي للبواقي على حدى يعتبر مؤشرا مناسبا وضروريا لدراسة ملاءمة النموذج وفروضه، وأهمها عشوائية المتغيرات ε_t. ولكن لا يمكن الاكتفاء بهذا النوع من الفحوص لسببين.

– السبب الأول وهو وجود بعض الصعوبات عند الفجوات الزمنية الصغيرة والتي قد تؤدي خطئا إلى اعتبار معامل الارتباط ذاتي نظري عند فجوة زمنية صغيرة لا يختلف معنويا عن الصفر وهو في حقيقة الأمر يختلف معنويا عن الصفر إذا استخدم التباين الأصلي بدلا من التباين التقريبي $\frac{1}{n}$.

– السبب الثاني أنه قد يوجد بعض النتوءات خاصة عند الفجوات الزمنية الكبيرة ويظل النموذج ملائما حيث أن عشوائية المتغيرات ε_t لا تمنع من وجود بعض معاملات الارتباط الذاتي الكبيرة في العينة والتي يمكن بناءا عليها قبول اختلاف معاملات الارتباط الذاتي النظرية المناظرة عن الصفر لأن البواقي تضل وكأنها عينة مرصودة من العملية العشوائية ε_t.

ولهذا كان من الضروري فحص ملاءمة النموذج بفلسفة مختلفة، فبدلا من فحص كل معامل ارتباط ذاتي $r_{\hat{\varepsilon}}(j)$ على حدى يمكن فحص فئة معينة من هذه المعاملات بشكل جماعي.

لنفترض أننا نرمز لأول k معاملات ارتباط ذاتي بالرموز $r_{\hat{\varepsilon}}(1), r_{\hat{\varepsilon}}(2),..., r_{\hat{\varepsilon}}(k)$ والمحسوبة من توفيق عملية *ARMA(p,q)* لبيانات السلسلة y_t، وبالتاي فإن إحصائية بوكس وبيرس تعطى وفق الصورة التالية: [5] *(G.E.P.Box, David A , 1970),p 1517).*

$$Q = n\sum_{j=1}^{k} r_{\hat{\varepsilon}}^2(j) \quad .....(23-5)$$

حيث Q هي دالة لمجموع مربعات معاملات الارتباط الذاتي $r_{\hat{\varepsilon}}(j)$ لـ *FAC* و عدد المشاهدات n ، تتبع تقاربيا توزيع χ^2 بدرجات حرية *k-(p+q)*.

وهي تسمح بالتحقق من الفرضية التالية :

$$\begin{cases} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_k = 0 \\ H_0 : \exists \rho_i \neq 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., k$$

إذا كانت بعض معاملات الارتباط الذاتي ليست قريبة بالقدر الكافي من الصفر فإن قيمة Q تكون كبيرة. وبالتالي لانرفض ملائمة النموذج أو عشوائية الأخطاء إذا كانت قيمة Q المحسوبة أقل من القيمة الجدولية لـ χ_α^2 وتعرف χ_α^2 كما يلي:

$$P\left[\chi^2_{(k-p-q)} > \chi^2_\alpha\right] = \alpha \quad .....(24-5)$$

حيث يمثل α مستوى المعنوية. واختيار k تحكمي (من الأحسن عند اختيار k أن يكون قريبا من ثلث عدد المشاهدات)، وثقل قوة هذا الاختبار بزيادة هذه القيمة. وتعمل الإحصاءة Q بشكل جيد إذا كان طول السلسلة كبيرا أو معقولا، إلا أن تقريبه بواسطة χ^2 ليس جيدا إذا كان حجم العينة صغيرا. وقد قدم *Ljung-Box* تعديلا لهذه الإحصاءة على الصورة: [6] *(G.Ljung,G.Box, (1978), p 298)*

$$Q^* = n(n+2)\sum_{j=1}^{k} \frac{r_{\hat{\varepsilon}}^2(j)}{(n-j)} \quad .....(25-5)$$

ويعتمد هذا التقريب عن أن التباين $\frac{(n-j)}{n(n+2)}$ يكون تقريبا أقرب لتباين $r_{\hat{\varepsilon}}(j)$ من القيمة $\frac{1}{n}$ خاصة في حالة العينات الصغيرة.

مثال5–6: الجدول التالي يبين معاملات الارتباط الذاتي للبواقي الناتجة من توفيق نموذج *ARMA(1,1)* لبيانات سلسلة طولها 100 *مشاهدة*.

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
r(k)	*0,03*	*0,04*	*-0,3*	*-0,1*	*0,01*	*-0,03*	*0,02*	*-0,05*	*0,3*	*0,1*	*0,08*	*-0,1*

- اختبر معنوية اختلاف كل معامل ارتباط نظري مناظر لكل فجوة زمنية عن الصفر
- اختبر ملائمة النموذج باستخدام الإحصاءة بوكس بيرس.

- اختبر ملائمة النموذج باستخدام إحصاءة ***ljung-Box***

الحل:

$$SE[r(k)] = \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = 0.1, \quad k = 1,2,...$$
$$2SE[r(k)] = 2(0.1) = 0.2$$

وبالتالي فإن كل من $\rho(3)$ و $\rho(9)$ يختلف معنويا عن الصفر عند مستوى معنوية *5%*

.2

$$Q = 100\left[(0.03)^2 + (0.04)^2 + (-0.3)^2 + ... + (-0.1)^2\right] = 22.28$$
$$\chi^2_{10,\ 0.05} = 18.3$$

نجد: $Q > \chi^2_{10,\ 0.05} = 18.3$، إذن يمكن القول أن هناك شك في ملائمة النموذج.

.3

$$Q^* = 100(102)\left[\frac{(0.03)^2}{99} + \frac{(0.04)^2}{98} + \frac{(-0.3)^2}{97} + ... + \frac{(-0.1)^2}{88}\right] = 24.33$$
$$\chi^2_{10,\ 0.05} = 18.3$$

وبالتالي: $Q^* > \chi^2_{10,\ 0.05} = 18.3$، إذن يمكن القول أن هناك شك في ملائمة النموذج.

مثال5–7: الجدول التالي يبين أول 10 معاملات ارتباط ذاتي للبواقي الناتجة من توفيق نموذج *ARIMA(0,2,1)* لبيانات سلسلة طولها *123* مشاهدة.

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
r(k)	*0,01*	*0,02*	*-0,01*	*-0,1*	*0,1*	*0,01*	*0,02*	*0,04*	*0,03*	*0,1*

- اختبر ملائمة النموذج باستخدام الإحصاءة بوكس بيرس.

الحل:

نفقد مشاهدتين عند أخذ الفروق من الدرجة الثانية للسلسلة الاصلية، ومنه فإن عدد المشاهدات المعدلة هي: $n^* = 123 - 2 = 121$

وبالتالي:

$$Q = 121\left[(0.01)^2 + (0.02)^2 + (-0.01)^2 + ... + (0.1)^2\right] = 4.0656$$
$$\chi^2_{9\ 0.05} = 16.9$$

نلاحظ أن: $Q < \chi^2_{9,\,0.05} = 16.9$، وبالتالي لا يوجد نمط غير عشوائي مما يدل على ملائمة النموذج المستخدم.

2.3.5 اختبار معنوية معلمات النموذج

إذا اعتبرنا أن مقدرات نموذج $ARIMA(p,d,q)$ تتوزع توزيعا طبيعيا، فان :

$$\left|\frac{\hat{\phi}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_j}}\right| \sim t_{n-p-q,\frac{\alpha}{2}} \quad i = 1,2,\ldots,p$$

$$\left|\frac{\hat{\theta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_j}}\right| \sim t_{n-p-q,\frac{\alpha}{2}} \quad i = 1,2,\ldots,q$$

وهذا المعيار خاص بعملية اختيار المعلمات ϕ_i و θ_j :

$$\begin{cases} H_1 : \phi_i \neq 0 \\ H_1 : \phi_i \neq 0 \end{cases} \quad ,i = 1,2,\ldots,p$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta_j = 0 \\ H_1 : \theta_j \neq 0 \end{cases} \quad , j = 0, i = 1,2,\ldots,q$$

نختبر فرضية العدم، حيث نقبل H_0 بمستوى معنوية α إذا كانت:

$$\left|\frac{\hat{\phi}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_j}}\right| \leq t_{n-p-q,\frac{\alpha}{2}}$$

ففي هذه الحالة، ليس للمعلمة $\phi_i : i = 1,2,\ldots p$ معنوية إحصائية أي تساوي معنويا الصفر ونرفض H_0 بمستوى معنوية α أما إذا كانت:

$$\left|\frac{\hat{\phi}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_i}}\right| \succ t_{n-p-q,\frac{\alpha}{2}}$$

أي للمعلمة ϕ_j معنوية إحصائية أي تختلف معنويا عن الصفر. نفس الشيء بالنسبة لاختبار معنوية أي معلمة $\theta_j = 1,2,\ldots,q$

3.3.5 معايير التفضيل بين النماذج المرشحة :

قد يحدث أحيانا في بعض الحالات أن يكون هناك مجموعة من النماذج غير المرفوضة بواسطة الأدوات الإحصائية السابقة الذكر، أي نموذج نختار في هذه الحالة ؟ للقيام بعملية المفاضلة بينما نستعمل المعايير التالية:

- **معيار *Akaike***

يعد الأكثر استعمالا، ويعطي بالعلاقة التالية :

$$AIC(p,q) = \hat{\sigma}^2 . \exp\left\{2\left(\frac{p+q}{T}\right)\right\} \quad .....(26-5)$$

حيث تباين البواقي المحسوب بطريقة المعقولية العظمى أي بقسمة مجموع مربعات البواقي على عدد المشاهدات فقط كما ان المقدار (p+q) هنا يشير إلى عدد معلمات النموذج المقدر وليس مجموع درجتي النموذج، كما يمكن كتابة هذا المعيار في شكل لوغارتمي كما يلي:

$$AIC(p+q) = \ln(\hat{\sigma}^2) + 2\left(\frac{p+q}{T}\right).....(27-5)$$

وبسبب إعطائه وزنا أكبر للنماذج المستعملة لأكبر عدد من المشاهدات فقد عدل وفق الصيغة التالية:

$$NAIC(p,q) = \frac{AIC(p,q)}{T} .....(28-5)$$

وهنا يكون الاختيار على أساس أصغر قيمة للمعيار أي نفضل النموذج الذي يحقق اصغر *AIC* أو *NAIC*

– معيار *Schwarz*

رغبة في تحقيق خصائص تقاربية، اقترح التعديل التالي:

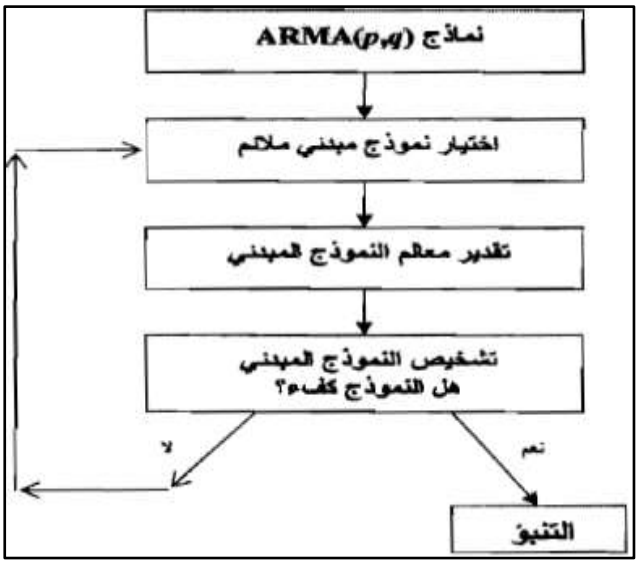
$$BIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \left(\frac{p+q}{T}\right).\ln T \quad .....(29-5)$$

حيث يتم اختيار النموذج إذن على أساس أصغر قيمة لهذا المعيار.

4.5 التنبؤ

التنبؤ هو المرحلة الأخيرة من مراحل منهجية بوكس جينكينز وهو الهدف من تحليل السلاسل الزمنية. ولا يمكن الانتقال إلى هذه المرحلة إلا بعد أن يجتاز النموذج المبدئي كافة الفحوص والاختبارات التشخيصية كما هو موضح في الشكل 5–1 أدناه: (سمير مصطفى شعراوي، 2005. ص 331) [7]

شكل 5–1 مراحل منهجية بوكس– جينكينز



وكما هو واضح أن اختيار النموذج المبدئي وتقدير معالمه وتشخيصه عملية متكررة *iterative*، بمعنى أنها تعاد وتكرر إلى أن نحصل على النموذج النهائي الذي يعطي تنبؤات موثوقة.

1.4.5 التنبؤ ذو أصغر متوسط مربعات الأخطاء

تتلخص مشكلة التنبؤ في كيفية توظيف النموذج الذي يجتاز كل اختبارات التشخيص والسلسلة التي بين أيدينا $(y_1, y_2, ..., y_n)$ للتنبؤ بالقيم المستقبلية التي لم تحدث بعد وهي القيم $(y_{n+1}, y_{n+2}, ...)$، أي يتم استخدام المشاهدات الحالية والسابقة في التنبؤ بالقيم المستقبلية $y_{n+k}\ ; k = 1,2,..$، حيث k هو أفق التنبؤ *Forecast Horison*. والاستدلال الإحصائي للمتغير $y_{n+k}\ ; k = 1,2,..$ يستدعي معرفة دالة كثافة الاحتمال الشرطي لهذا المتغير مع توفر المعلومات حول $(y_1, y_2, ..., y_n)$، ويفضل البحث عن قيمة واحدة تعكس مركز هذا التوزيع الاحتمالي، لاستخدامها كتنبؤ نقطة وتنبؤ بمجال حول هذه النقطة.

وقد يكون توقع هذا التوزيع أفضل نقطة للتنبؤ، وذلك لأنه يحقق خاصية الحد الأدنى لمتوسط مربعات الأخطاء *mean square errors*. بمعنى أنه إذا كان النموذج صحيحا فإنه لايوجد تنبؤ آخر يعطي متوسط مربعات أصغر. (*سمير مصطفى شعراوي، 2005. ص117*)[8]

تعريف5–1: إذا كان η أي نقطة تنبؤ للمتغير Y_{n+k} عند نقطة الأصل t فإن متوسط مربعات الأخطاء يعرف بأنه:

$$E\left[(Y_{t+k} - \eta)^2 / y_t, y_{t-1}, ...\right] \quad .....(30-5)$$

نرمز للتوقع الشرطي لـ Y_{t+k} بالرمز $\hat{Y}_t(k)$، ويسمى بتنبؤ النقطة أي أن:

$$\hat{Y}_t(k) = E(Y_{t+k} / y_t, y_{t-1}, ...) \quad .....(31-5)$$

مثال5–8: ليكن لدينا النموذج التالي: $Y_t = \varepsilon_t + 0.7y_{t-1}$

- أوجد تنبؤات النقطة عند: $t+1, t+2, t+3$

الحل:

التنبؤ عند *t+1*:

$$y_t = \varepsilon_t + 0.7y_{t-1}$$
$$y_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + 0.7y_t$$
$$\hat{y}_t(1) = E(y_{t+1} / y_t, y_{t-1}, ..)$$
$$= E(\varepsilon_{t+1} + 0.7y_t / y_t, y_{t-1}, ..)$$
$$= 0.7E(y_t / y_t, y_{t-1}, ..) + E(\varepsilon_{t+1} / y_t, y_{t-1}, ..)$$
$$\hat{y}_t(1) = 0.7y_t$$

التنبؤ عند *t+2*:

$$y_t = \varepsilon_t + 0.7y_{t-1}$$
$$y_{t+2} = \varepsilon_{t+2} + 0.7y_{t+1}$$
$$\hat{y}_t(2) = E(y_{t+2} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= E(\varepsilon_{t+2} + 0.7y_{t+1} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= 0.7E(y_{t+1} / y_t, y_{t-1},..) + E(\varepsilon_{t+2} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$\hat{y}_t(2) = 0.7\hat{y}_t(1)$$

التنبؤ عند *t+3*:

$$y_t = \varepsilon_t + 0.7y_{t-1}$$
$$y_{t+3} = \varepsilon_{t+3} + 0.7y_{t+2}$$
$$\hat{y}_t(3) = E(y_{t+3} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= E(\varepsilon_{t+3} + 0.7y_{t+2} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= 0.7E(y_{t+2} / y_t, y_{t-1},..) + E(\varepsilon_{t+3} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$\hat{y}_t(3) = 0.7\hat{y}_t(2)$$

مثال5–9: ليكن لدينا النموذج التالي:

$$(1-0.5B)(1-B)y_t = \varepsilon_t$$

- أوجد تنبؤات النقطة عند: *t+1, t+2*,

الحل:

التنبؤ عند *t+1*:

$$y_t = \varepsilon_t + 0.5y_{t-1} + y_{t-1} - 0.5y_{t-2}$$
$$y_t = \varepsilon_t + 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2}$$
$$y_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + 1.5y_t - 0.5y_{t-1}$$
$$\hat{y}_t(1) = E(y_{t+1} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= E(\varepsilon_{t+1} + 1.5y_t - 0.5y_{t-1} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= 1.5E(y_t / y_t, y_{t-1},..) - 0.5E(y_{t-1} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$\hat{y}_t(1) = 1.5y_t - 0.5y_{t-1}$$

التنبؤ عند *t+2*:

$$y_t = \varepsilon_t + 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2}$$
$$y_{t+2} = \varepsilon_{t+2} + 1.5y_{t+1} - 0.5y_t$$
$$\hat{y}_t(1) = E(y_{t+2} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= E(\varepsilon_{t+2} + 1.5y_{t+1} - 0.5y_t / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= 1.5E(y_{t+1} / y_t, y_{t-1},..) - 0.5E(y_t / y_t, y_{t-1},..)$$
$$\hat{y}_t(1) = 1.5\hat{y}_t(1) - 0.5y_t$$

2.4.5 تقدير الأخطاء والتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية

نعلم أن تنبؤ النقطة للمتغير y_{t+1} هو:

$$\hat{y}_t(1) = E(y_{t+1} / y_t, y_{t-1},....) \quad .....(32-5)$$

لنفترض أنه لدينا النموذج المختلط *ARMA(p,q)* التالي:

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

حيث:

$$y_{t+1} = \varepsilon_t + \phi_1 y_t + ... + \phi_p y_{t+1-p} - \theta_1 \varepsilon_t - \theta_2 \varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{t+1-q}$$
$$\hat{y}_t(1) = E(y_{t+1} / y_t, y_{t-1},...)$$
$$y_t(1) = \varepsilon_t + \phi_1 y_t + ... + \phi_p y_{t+1-p} - \theta_1 \varepsilon_t - \theta_2 \varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{t+1-q}$$

يمثل $\hat{y}_t(1)$ تنبؤ المشاهدة التالية. والقيم $(y_1, y_2, ..., y_n)$ معروفة في السلسلة محل الدراسة.

والسؤال المهم هو كيف نقدر القيم: $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, ..., \varepsilon_{t+1-q}$ ؟

لإيجاد تقديرات لهذه القيم التي هي عبارة عن أخطاء التنبؤ، فمثلا ε_{t-i} هو خطأ في التنبؤ بالقيمة y_{t-i} والمحسوب عند الزمن *(t-i-1)* أي:

$$\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} - y_{t-i-1} \quad , i = 0,1,....$$

ملاحظة: عند حساب تقديرات أخطاء التنبؤ نتعرض لما يسمى بمشكلة القيم الابتدائية. والمثال الآتي يوضح كيفية تقدير هذه القيم وكيفية استخدامها في حساب وتقدير الأخطاء والتنبؤ.

مثال5–10: إذا كان لدينا النموذج التالي: $y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \quad , t = 1,2,...,n$

- أوجد تنبؤات المشاهدة: y_{t+1}

الحل:

$$y_{t+1} = \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t$$
$$\hat{y}_t(1) = E(y_{t+1} / y_t, y_{t-1},..)$$
$$= E(\varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t / y_t, y_{t-1},..) = -\theta\varepsilon_t$$

وبالتالي:

$$\varepsilon_t = y_t - y_{t-1}$$
$$\hat{y}_t(1) = -\theta(y_t - y_{t-1})$$

نبدأ من القيمة الابتدائية للزمن $t=0$

$$\hat{y}_0(1) = E(y_1) - \theta(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) = -\theta\varepsilon_0$$

القيمة ε_0 هي القيمة الابتدائية للمتغير ε_t

$$\hat{y}_0(1) = -\theta\varepsilon_0$$
$$= -\theta(y_1 - y_0(1)) = -\theta y_1 + \theta y_0(1)$$

بالتعويض نجد:

$$\hat{y}_1(1) = -\theta y_1 - \theta^2\varepsilon_0$$
$$\hat{y}_2(1) = -\theta(y_2 - \hat{y}_1(1)) = -\theta y_2 + \theta\hat{y}_1(1)$$
$$= -\theta y_2 + \theta(-\theta y_1 - \theta^2\varepsilon_0)$$
$$= -\theta y_2 - \theta^2 y_1 - \theta^3\varepsilon_0$$

وبالاستمرار في التعويض إلى غاية n نجد:

$$\hat{y}_n(1) = -\theta(y_n - \hat{y}_{n-1}(1))$$
$$= -\theta y_n - \theta^2 y_{n-1} - \theta^3 y_{n-2} - \ldots - \theta^n y_1 - \theta^{n+1}\varepsilon_0$$

وبالتالي فقد تم رصد جميع تنبؤات المشاهدات التالية $\hat{y}_t(1)$ بدلالة قيم السلسلة المتاحة: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ بزيادة حجم العينة n نجد أن تأثير الحد الأخير $\theta^{n+1}\varepsilon_0$ يتضاءل لأن $|\theta| < 1$، ومنه نصل إلى:

$$\hat{y}_n(1) = \theta y_n - \theta^2 y_{n-1} - \theta^3 y_{n-2} - \ldots - \theta^n y_1$$

3.4.5 التنبؤ بمجال:

لا يقتصر الاهتمام على إيجاد تنبؤات النقطة للمشاهدات المستقبلية وإنما يمتد ليشمل بناء فترات تنبؤ لمثل هذه المشاهدات، الهدف منها هو اشتقاق صيغة لتباين الأخطاء وبناء فترات تنبؤ للمشاهدات المستقبلية، حيث يمكن كتابة العملية العشوائية y_t وفق الصورة التالي:

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

ومنه يمكن كتابة y_{t+k} كما يلي:

$$y_{t+k} = \varepsilon_{t+k} + \psi_1\varepsilon_{t+k-1} + \psi_2\varepsilon_{t+k-2} + \ldots$$
$$y_{t+k} = (\varepsilon_{t+k} + \psi_1\varepsilon_{t+k-1} + \ldots + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1}) + (\psi_k\varepsilon_t + \psi_{k+1}\varepsilon_{t-1} + \ldots)$$

بأخذ التوقع الشرطي نجد:

$$\hat{y}_t(k) = E(y_{t+k} / y_t, y_{t-1} + ...) = \psi_k \varepsilon_t + \psi_{k+1}\varepsilon_{t-1} + ...$$
$$y_{t+k} = (\varepsilon_{t+k} + \psi_1\varepsilon_{t+k-1} + ... + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1}) + \hat{y}_t(k)$$
$$y_{t+k} = e_t(k) + \hat{y}_t(k)$$

حيث:

$$e_t(k) = y_{t+k} - \hat{y}_t(k) = \varepsilon_{t+k} + \psi_1\varepsilon_{t+k-1} + ... + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1}$$

حيث $e_t(k)$ يعبر عن خطأ التنبؤ لـ $\hat{y}_t(k)$، ويمكن حساب توقعه وتباينه كما يلي:

$$E[e_t(k)] = E(\varepsilon_{t+k} + \psi_1\varepsilon_{t+k-1} + ... + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1}) = 0$$
$$Var[e_t(k)] = Var(\varepsilon_{t+k} + \psi_1\varepsilon_{t+k-1} + ... + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1})$$
$$= \sigma^2\left[1 + \sum_{j=1}^{k-1}\psi_j^2\right] \qquad .....(33-5)$$

ومن ثم فإن مجال الثقة للمشاهدة y_{t+k} عند مستوى ثقة $(1-\alpha)$ هو:

$$y_t(k) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\left[1 + \sum_{j=1}^{k-1}\psi_j^2\right]} \quad .....(34-5)$$

مثال5–8: ليكن لدينا النموذج التالي:

$$y_t = \varepsilon_t + \phi y_{t-1}$$

أوجد أخطاء التنبؤ للمشاهدات المستقبلية وأوجد تباينها، ثم أوجد مجال الثقة لكل من y_{t+1}, y_{t+2}

الحل:

يمكن كتابة نموذج $AR(1)$ وفق الصيغة التالية:

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + ... \quad ; \psi_j = \phi^j,\ j = 1,2,....$$

وبالتالي خطأ التنبؤ للمشاهدة y_{t+k} هو:

$$e_t(k) = y_{t+k} - \hat{y}_t(k) = \varepsilon_{t+k} + \psi_1\varepsilon_{t+k-1} + ... + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1}$$
$$= \varepsilon_{t+k} + \phi\varepsilon_{t+k-1} + ... + \phi^{k-1}\varepsilon_{t+1}$$

وبصفة خاصة:

$$e_t(1) = \varepsilon_{t+k}$$
$$e_t(2) = \varepsilon_{t+k} + \phi\varepsilon_{t+k-1}$$

تباين أخطاء التنبؤ للمشاهدة y_{t+k} هو:

$$Var[e_t(k)] = Var(\varepsilon_{t+k} + \psi_1\varepsilon_{t+k-1} + ... + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1})$$
$$= \sigma^2\left[1 + \sum_{j=1}^{k-1}\psi_j^2\right]$$
$$= \sigma^2\left[1 + \phi^2 + \phi^4 + ... + \phi^{2(k-1)}\right]$$

وبصفة خاصة:

$$Var[e_t(1)] = \sigma^2$$
$$Var[e_t(2)] = \sigma^2[1+\phi^2]$$

أما تنبؤ النقطة فهو كالتالي:

$$\hat{y}_t(1) = \phi y_t$$
$$\hat{y}_t(2) = \phi\hat{y}_t(1) = \phi^2 y_t$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\hat{y}_t(k) = \phi^k y_t$$

وبالتالي فإن مجال الثقة لكل من y_{t+1}, y_{t+2} عند مستوى ثقة (1-α) هو:

$$y_{t+1} = \hat{\phi} y_t \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}$$
$$y_{t+2} = \hat{\phi}^2 y_t \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}\sqrt{1+\hat{\phi}}$$

5.5 تمارين الفصل الخامس

التمرين الاول:

- ماهي أهم مراحل طريقة بوكس جينكينز؟
- ماهي أهم مزايا و عيوب هذه المنهجية؟
- ماهي الاختبارات الضرورية لاختيار النموذج الملائم في منهجية بوكس جينكينز؟
- ماهو الهدف من الاعتماد على دوال الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي في التحليل؟
- ماهو الفرق بين نموذج *AR(1)* ونموذج الانحدار الخطي البسيط؟

- هل يوجد اختلاف بين دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(1) ودالة الارتباط الذاتي لنموذج ARMA(1,1)؟

- كيف يمكن التعرف على الرتبتين p و q إذا كانت كل من دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئي تتناقص ولا تنعدم؟.

- كيف يمكن اختبار معنويات معاملات الارتباط الذاتي الجزئي؟ وكيف يمكن استخدام هذه الاختبارات في التعرف على نموذج *AR(p)* وتمييز رتبتها؟

التمرين الثاني:

ليكن لدينا النموذج التالي:

$$X = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} - 1.6\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2}$$

حيث ε_t شوشرة بيضاء بمتوسط0 وتباين يساوي1.

1. هل العملية x_t مستقر

2. أحسب دالة التغاير الذاتي

3. أعط القيم التنبؤية لكل من X_{t+1} et X_{t+2}

4. أوجد بواقي التنبؤ عند $t+1$ و$t+2$.

التمرين الثالث:

نعتبر النموذج : ARMA(1,1) التالي:

$$(1-0.5B)X_t = (1-0.8B)\varepsilon_t,$$

حيثε_tشوشرة بيضاء تباينها يساوي σ^2 .

1) أعط القيم التنبؤية لكل من X_{t+1} و X_{t+2}

2) أوجد بواقي التنبؤ عند $t+1$ و$t+2$.

6.5 مراجع وإحالات الفصل الخامس:

[1] ***Régis Bourbonnais, « Économétrie*** *Cours et exercices corrigés »,* ***9e édition, paris 2015,*** *p263*

[2] *M.Prenat , C. Keribin, R Rossignol, (2010) « Séries chronologiques » Volume 1: cours et exercices, Universit´e Paris-Sud, p81*

[3] ***R.Bourbonnais .R Terraza. M (2010)*** *« Analyse des séries temporelles », 3e édition, Dunod, Paris, P95.*

[4] شيخي محمد , طرق الاقتصاد القياسي ,دار مكتبة حامد لنشر و التوزيع , عمان , الطبعة الاولى، دار حامد للنشر والتوزيع، 2012, ص258

[5] *G.E.P.Box,David A.Pierce,"Distribution of Autocorrolation in autoregressive moving average time series models ", journal of the American Statistical Assosiation,(Vol 65,NO32,December 1970),p 1517.*

[6] *G.Ljung,G.Box,"On a Measure of Lack of Fit in Time Series Model", Biometrica, (Vol 65,No 2,1978), p 298.*

[7] سمير مصطفى شعراوي، " مقدمة في التحليل الإحصائي للسلاسل الزمنية" كلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 2005. ص331

[8] نفس المرجع السابق، ص177

المراجع

➢ المراجع باللغة العربية:

1. أبو ذر يوسف علي احمد وأخرون، استخدام السلاسل الزمنية للتنبؤ بإنتاجية الصمغ العربي في سوق محاصيل الأبيض للفترة (1960-2012)، مجلة البحث العلمي للعلوم والأدب، العدد الخامس عشر.

2. أنيس كنجو، "**الإحصاء وطرق تطبيقه في ميادين البحث العلمي**"، الطبعة الثالثة مؤسسة الرسالة- بيروت 1987 .

3. جلال الصياد، عبد الحميد مُحَّد ربيع "**مبادئ الطرق الإحصائية**" الناشر تهامة، ط1، ، م. ع. السعودية، 1983.

4. دومينيك سالفادور، **ملخصات شوم، نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي**، ترجمة الدكتورة سعدية حافظ منتصر، الدار الدولية للنشر والتوزيع جمهورية مصر العربية، 1982.

5. مُحَّد كبيه و ماهر بدوي " **الإحصاء التطبيقي**" منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد ، 2003.

6. عبد الحفيظ مُحَّد فوزي مصطفى، **نظرية التقدير، الاستدلال الإحصائي (1)** ، الناشر مجموعة النيل العربية، القاهرة، سنة 2000. ص271

7. صالح تومي ، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999.

8. مناهل دانيال عبد الأحد ندوى سالم يونس **التنبؤ بكمية المبيعات للمنتج الطبي بواسطة طريقة التمهيد الأسي الثلاثي**، قسم الرياضيات/كلية التربية جامعة الموصل، مجلة التربية والعلم- المجلد 25، العدد 4، السنة 2002، ص151

9. مولود حشمان، نماذج وتقيات التنبؤ على المدى القصير، ديوان المطبوعات الجامعية، ط4، الجزائر، 1998.

10. سمير مصطفى شعراوي، " مقدمة في التحليل الحيص للسلاسل الزمنية" كلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 2005.

11. سعيد هتهات، دراسة اقتصادية وقياسية لظاهرة التضخم في الجزائر، مذكرة ماجستير في العلوم الاقتصادية، جامعة ورقلة 2006.

12. شفيق العتوم، فتحي العاروري، الأساليب الإحصائية، ج1، ط1، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 1995.

13. شيخي مُحَّد , طرق الاقتصاد القياسي ,دار مكتبة حامد لنشر و التوزيع , عمان , الطبعة الأولى , 2012.

14. عطية عبد القادر مُحَّد عبد القادر،" الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق"،"ط2 ، الإسكندرية : الدار الجامعية، 2005.

المراجع باللغة الأجنبية:

1- Amarache .R , Meziani .A (1997) , Prévision à court terme , Alger 1997, P 31

2- ***AOUAD H.S (2011)*** *,« Essai de Modélisation du comportement du taux de change du dinar algérien 1999-2007 par la méthode ARFIMA » Université Abou-Bakr BELKAID –Tlemcen-, Faculté des Sciences Economique, de Gestion et des Sciences Commerciales Mémoire en vue d'obtention du diplôme de Magistère en Sciences Economiques.*

3- Box, G.E.P., David A.Pierce, (1970) "Distribution of Autocorrolation in autoregressive moving average time series models ", journal of the American Statistical Assosiation,(Vol 65,NO32).

4- Bourbonnais. R 2015 « Économétrie Cours et exercices corrigés », 9e édition, paris**.**

5- ***Bourbonnais. R, Terraza. M, 2010 «*** Analyse des séries temporelles » *Applications à l'économie et à la gestion , 3e édition , Paris.*

1- ***Boutahar. M Nouira.L et Marimoutou. V, (2003),*** *« Les méthodes d'estimation du paramètre de mémoire longue : Evidence Numérique ». Greqam, Université de la méditerranée.*

2- ***Brokwell, P.J., Davis, R.A.,(1991).*** *– "Time Series: Theory and Methods", SpringerVerlag.*

3- ***Charpentier.A*** *« Cours de séries temporelles, Théorie et applications ».*

4- ***Daudin, JJ, Duby. C, Robin.S et P. Trécourt. (1996).*** *« Analyse des Séries Chronologiques ». INAPG, Mathématiques.*

5- ***Delignieres. D, (Janvier 2001)*** *« L'analyse des processus stochastiques ». EA 2991 "Sport performance, santé", Université de Montpellier 1.*

6- ***DERGAOUI. R (2016);*** *« Processus de longue mémoire » Faculté des Sciences Exactes Département MI/Mathématiques, Université A. Mira de Béjaia p 32.*

7- Lewandawski, R. (1979), « la prévision à court terme », (Paris: Dunod,).

8- ***Ljung .G, Box.G.(1978)****, "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Model", Biometrica, (Vol 65,No 2).*

Hamilton. J-D (2016). *"Time Séries Analysis". Princeton University Press, 2016*

9- ***Maddala.G.S, (1988)*** *"Introduction to econometrics", Mac Millan publishing company, New York, USA, 1988.*

10- Makridakis, S. Wheel Wright, (**1983**) « Méthodes de Prévision pour La gestion », Les Edition d'organisations, Paris, France.

11- ***Michael F, Frank M, Michel.R, Daniel. H, Maria .M(2006)*** *"A First Course on Time Series Analysis Examples with SAS", Chair of Statistics, University of Wurzburg February 1, 2006, P 65*

12- Michel. T (1994) "Méthode statistique en gestion " ,Dunode ETP. France.

13- ***M. David j-c Michoud****(1989) :"la prevision approche empirique d'une méthode statistique", Paris.*

14- ***Michel Prenat, C. Keribin, R. Rossigno****, 2011« Series chronologiques Volume 1: cours et exercices » Université Paris-Sud,*

15- MONINO. J-L et autres, (2004), "Statistique Descriptive", Dunod, Paris, 2eme édition.

16- ***Nicolau.F (2005-2006),*** *« Séries Chronologiques ». Cour, département STID, université Nice d'Azur.*

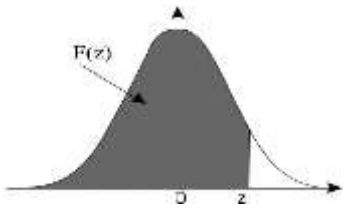
17- ***Perraudin. C, 2004-2005*** *« séries Chronologiques. Quelques éléments du cours », Université Paris 1.*

18- ***Raphael N. Markellos, Terence C. Mills (2008)****,"The Econometric Modelling of Financial Time Series"" Third edition, Cambridge university press.*

الـمـلاحـق

ملحق 1: جدول دالة التوزيع التراكمي للقانون الطبيعي الممركز (المعياري)

(probabilité F(z) de trouver une valeur inférieure à z)



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de z

z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(z)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952
z	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
F(z)	0,999968	0,999979	0,999987	0,999991	0,999995	0,999997	0,999998	0,999999	0,999999	1,000000

1. *La table donne F(z) pour z positif. Pour z négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. Exemple : F(-1,37) = 1 - F(1,37) =1 - 0,9147 = 0,0853.*

ملحق 2: جدول توزيع ستيودنت

Valeurs de T ayant la probabilité p d'être dépassées en valeur absolue

v	P =0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,260	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,96	2,326	2,576

ملحق3: جدول توزيع كيدو

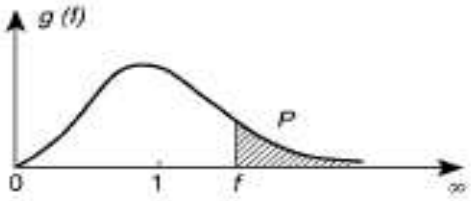
Valeurs de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassées

	P = 0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00004	0,0002	0,001	0,0039	0,0158	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,39	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672

ملحق4: جدول توزيع فيشر

5. TABLE DE LA LOI DE FISHER-SNEDECOR (suite)

Valeurs de F ayant la probabilité P d'être dépassées ($F = s_1^2/s_2^2$)



ν_2	$\nu_1 = 6$		$\nu_1 = 8$		$\nu_1 = 12$		$\nu_1 = 24$		$\nu_1 = \infty$	
	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$
1	234,0	5859	238,9	5981	243,9	6 106	249,0	6 234	254,3	6366
2	19,33	99,33	19,37	99,36	19,41	99,42	19,45	99,46	19,50	99,50
3	8,94	27,91	8,84	27,49	8,74	27,05	8,64	26,60	8,53	26,12
4	6,16	15,21	6,04	14,80	5,91	14,37	5,77	13,93	5,63	13,46
5	4,95	10,67	4,82	10,27	4,68	9,89	4,53	9,47	4,36	9,02
6	4,28	8,47	4,15	8,10	4,00	7,72	3,84	7,31	3,67	6,88
7	3,87	7,19	3,73	6,84	3,57	6,47	3,41	6,07	3,23	5,65
8	3,58	6,37	3,44	6,03	3,28	5,67	3,12	5,28	2,93	4,86
9	3,37	5,80	3,23	5,47	3,07	5,11	2,90	4,73	2,71	4,31
10	3,22	5,39	3,07	5,06	2,91	4,71	2,74	4,33	2,54	3,91
11	3,09	5,07	2,95	4,74	2,79	4,40	2,61	4,02	2,40	3,60
12	3,00	4,82	2,85	4,50	2,69	4,16	2,50	3,78	2,30	3,36
13	2,92	4,62	2,77	4,30	2,60	3,96	2,42	3,59	2,21	3,16
14	2,85	4,46	2,70	4,14	2,53	3,80	2,35	3,43	2,13	3,00
15	2,79	4,32	2,64	4,00	2,48	3,67	2,29	3,29	2,07	2,87
16	2,74	4,20	2,59	3,89	2,42	3,55	2,24	3,18	2,01	2,75
17	2,70	4,10	2,55	3,79	2,38	3,45	2,19	3,08	1,96	2,65
18	2,66	4,01	2,51	3,71	2,34	3,37	2,15	3,00	1,92	2,57
19	2,63	3,94	2,48	3,63	2,31	3,30	2,11	2,92	1,88	2,49
20	2,60	3,87	2,45	3,56	2,28	3,23	2,08	2,86	1,84	2,42
21	2,57	3,81	2,42	3,51	2,25	3,17	2,05	2,80	1,81	2,36
22	2,55	3,76	2,40	3,45	2,23	3,12	2,03	2,75	1,78	2,31
23	2,53	3,71	2,38	3,41	2,20	3,07	2,00	2,70	1,76	2,26
24	2,51	3,67	2,36	3,36	2,18	3,03	1,98	2,66	1,73	2,21
25	2,49	3,63	2,34	3,32	2,16	2,99	1,96	2,62	1,71	2,17
26	2,47	3,59	2,32	3,29	2,15	2,96	1,95	2,58	1,69	2,13
27	2,46	3,56	2,30	3,26	2,13	2,93	1,93	2,55	1,67	2,10
28	2,44	3,53	2,29	3,23	2,12	2,90	1,91	2,52	1,65	2,06
29	2,43	3,50	2,28	3,20	2,10	2,87	1,90	2,49	1,64	2,03
30	2,42	3,47	2,27	3,17	2,09	2,84	1,89	2,47	1,62	2,01
40	2,34	3,29	2,18	2,99	2,00	2,66	1,79	2,29	1,51	1,80
60	2,25	3,12	2,10	2,82	1,92	2,50	1,70	2,12	1,39	1,60
120	2,17	2,96	2,01	2,66	1,83	2,34	1,61	1,95	1,25	1,38
∞	2,09	2,80	1,94	2,51	1,75	2,18	1,52	1,79	1,00	1,00

Nota. — s_1^2 est la plus grande des deux variances estimées, avec ν_1 degrés de liberté.

ملحق5: جدول داربن واتسون DW

6. TABLE DE DURBIN-WATSON
Risque $\alpha = 5\ \%$

n	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,74	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

k est le nombre de variables exogènes (constante exclue).
n est la taille de l'échantillon.