REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et L'informatique



MÉMOIRE

Présenté en vue de l'optention du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

OPÉRATIONS SUR LE NOMBRE DE LA DOMINATION BROADCAST

par

BAKHTI Khadidja et MELIANI Karima

présenté, devant le Jury composeé de :

A. BENKACI	Maître Assistant-B	U.Y.F.M, Médéa	Président.
R. LEMDANI	Maître Assistant-A	U.Y.F.M, Médéa	Encadreur.
M. ZAMIME	Maître Conférences-B	U.Y.F.M, Médéa	Examinateur.
M. ZEMIR	Maître Assistant-B	U.Y.F.M, Médéa	Examinateur.

Date de soutenance : 14/06/2017

Résumé

Le but de ce travail est consacré à l'étude du nombre de la domination broadcast. Après donner quelques définitions et notations sur la théorie des graphes et la domination standard, on a résumé les résultats obtenus sur la domination broadcast dont le but de les utiliser à la démonstration de nos résultats obtenus en ce mémoire.

Nous déterminons le nombre de γ_b pour la classe des graphes subdivisés super finis des graphes : complet, cycle, étoile, couronne voisinage et couronne de deux graphes.

MOTS-CLÉS : domination broadcast, subdivisés super finis, couronne voisinage, couronne de deux graphes.

Abstract

The goal of this work is devoted to the study of the number of the broadcast domination . After giving some definitions and notations on the graph theory and the standard domination, one summarized the results obtained on the domination broadcast of which the goal to use them with the demonstration of our results obtained in this memory.

We determine the number of γ_b for the class of the finite super subdivition graphs : complete graphs, cycle, star, corona graph and corona of two graphs.

KEYWORDS : broadcast domination, broadcast domination, corona graph, corona of two graphs.

Résumé en arabe

Remerciements

Nous remercions tout d'abord **ALLAH**, Le Tout Puissant, qui nous a donné la force et le courage afin de parvenir à élaborer ce modeste travail.

Nous voudrons tout d'abord adresser toute notre gratitude à Monsieur ***Lemdani Rachid***, Maître assistant à l'université de Médéa, pour l'intéressant sujet qu'il nous a proposé. Sa disponibilité et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. On lui doit toute notre reconnaissance.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nous remerciements les plus vifs à mon enseignant, Monsieur ***Benkaci Azzedine***, Maître assistant à l'université de Médéa, de l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider le jury et de l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Nous remerciements vont également, Monsieur ***Zamime Mohamed*** Maître de conférences à l'université de Médéa, et à Monsieur ***Zemir Mohamed***, Maître assistant à l'université de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Nous tenons enfin à exprimer notre reconnaissance à tous ceux et toutes celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail, ainsi qu'à toute personne qui fera l'effort de lire ce document.

Table des matières

Résumé i

Abstract ii

Résumé en arabe iii

Remerciements iv

Table des matières vii

Table des figures ix

Introduction générale 10

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes 12

1.1 Introduction 12

1.2 Graphe 12

1.3 Sous-graphe et graphe partiel 13

1.4 Voisinage et degré d'un sommet 14

1.5 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum 14

1.6 Connexité 15

1.7 Distance, l'excentricité, diamètre et rayon 15

1.8 Chaînes et cycles 15

1.9 Graphes particuliers 16

1.9.1 Graphe complet 16

1.9.2 Clique 16

1.9.3 Graphe régulier 16

1.9.4 Graphe complémentaire 16
1.9.5 Graphe biparti et graphe biparti-complet 16
1.9.6 Arbres et forêt 17
1.9.7 Étoile, étoile subdivisée et double étoile 17
1.9.8 Couronne d'un graphe 18
1.10 Quelques invariants d'un graphe 18
1.11 Notions fondamentales sur la domination 19
1.11.1 Historique 19
1.11.2 Domination standard 20
1.12 Conclusion 21

2 Domination broadcast **22**
2.1 Introduction 22
2.2 Définitions et notations 22
2.3 Résultats fondamentaux 26
2.4 Bornes sur $\gamma_b(G)$ 30
2.5 Graphes avec un petit nombre de domination broadcast 32
2.6 Le nombre de domination broadcast de certains graphes 34
2.7 Conclusion 39

3 Détermination du nombre de la domination broadcast de quelques graphes **40**
3.1 Introduction 40
3.2 Domination broadcast d'un Prisme complém-entaire 40
3.2.1 Domination broadcast de $K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$ 40
3.2.2 Domination broadcast de $S_{r,s}\overline{S}_{r,s}$ 41
3.2.3 Domination broadcast de $C_n\overline{C}_n$ 42
3.3 Domination broadcast d'une Couronne voisinage 42
3.3.1 Domination broadcast de $K_{1,n}\bigstar P_p$ 43
3.3.2 Domination broadcast de $K_n\bigstar P_p$ 43
3.3.3 Domination broadcast de $C_n\bigstar P_p$ 44
3.4 Domination broadcast d'une Couronne de deux graphes 45
3.4.1 Domination broadcast de $K_{1,n} \odot P_P$. 45

3.4.2 Domination broadcast de $K_n \odot P_P$ . . . 45
3.4.3 Domination broadcast de $C_n \odot P_P$ . . . 46
3.5 Domination broadcast pour les graphes subdivisés super finis . . . 47
3.5.1 Domination broadcast de $FSSD_m(k_{1,n})$ . . . 47
3.5.2 Domination broadcast de $FSSD_m(S'(K_{1,n}))$ . . . 48
3.5.3 Domination broadcast de $FSSD_m(S_{r,s})$ . . . 49
3.5.4 Domination broadcast de $FSSD_m(S'(S_{r,s}))$ . . . 49
3.5.5 Domination broadcast de $FSSD_m(K_n)$ . . . 50
3.5.6 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n)$ . . . 50
3.5.7 Domination broadcast de $FSSD_m(G_n)$ . . . 52
3.5.8 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n^p)$ . . . 53
3.6 Domination broadcast d'un graphe subdivisés super finis d'un Prisme complémentaire . . . 53
3.6.1 Domination broadcast de $FSSD_m(K_{1,n}\overline{K}_{1,n})$ . . . 53
3.6.2 Domination broadcast de $FSSD_m(S_{r,s}\overline{S}_{r,s})$ . . . 54
3.6.3 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n\overline{C}_n)$ . . . 55
3.7 Domination broadcast d'un graphe subdivisé super fini d'une Couronne voisinage . . . 55
3.7.1 Domination broadcast de $FSSD_m(K_{1,n} \bigstar P_p)$ . . . 55
3.7.2 Domination broadcast de $FSSD_m(K_n \bigstar P_p)$ . . . 56
3.7.3 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$ . . . 57
3.8 Domination broadcast d'un graphe subdivisé super fini d'une couronne de deux graphes . . . 58
3.8.1 Domination broadcast de $FSSD_m(K_{1,n} \odot P_p)$ . . . 58
3.8.2 Domination broadcast de $FSSD_m(K_n \odot P_p)$ . . . 59
3.8.3 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n \odot P_p)$ . . . 59
3.9 Conclusion . . . 60

Conclusion générale **60**

Liste des abréviations **61**

Bibliographie **63**

Table des figures

1.1 Un Graphe simple $G = (V, E)$. 13
1.2 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 16
1.3 Un graphe biparti complet $K_{3,4}$. 17
1.4 Une étoile subdivisée 18
1.5 La couronne d'un cycle C_4. 18

2.1 Un sommet x est un f-voisin de y 23
2.2 Une chaîne P_5 avec $\gamma_b(P_5) = 2$ et $\Gamma_b(P_5) = 4$. 24
2.3 Fonctions γ_b-broadcast et Γ_b-broadcast de $S_{3,3}$. 25
2.4 Un graphe H_4. 27
2.5 Un graphe G_n. 33
2.6 Le graphe $S(K_{1,n})$, $n \geq 3$. 33
2.7 Un graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ 34
2.8 Un graphe K_4, $\gamma_b(Cr(K_n) = 2$. 35
2.9 Un graphe de splitting de $K_{1,n}$. 36
2.10 Splitting d'une double étoile. 36
2.11 Un graphe de Splitting de K_4, $\gamma_b(S^{'}(K_4) = 2$. 36
2.12 Le graphe $S^{'}(P_5)$. 37
2.13 Un graphe de splitting de C_6 37
2.14 Un graphe windmill C_6^4. 38
2.15 Un graphe S_3^n. 38
2.16 Un graphe de Lollipop $LP(6, 2)$. 39

3.1 Graphe $K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$. 41
3.2 Le graph $S_{3,3}\overline{S}_{3,3}$, $\gamma_b(S_{3,3}\overline{S}_{3,3}) = 2$. 41

3.3 Graphe $C_6\overline{C}_6$, $\gamma_b(C_6\overline{C}_6) = 3$. 42
3.4 Un graphe $K_{1,6}\bigstar P_3$, $\gamma_b(K_{1,6}\bigstar P_3) = 2$. 43
3.5 Un graphe $(K_4\bigstar P_3)$, $\gamma_b(K_4\bigstar P_3) = 2$. 43
3.6 Un graphe $C_4\bigstar P_4$, $\gamma_b(C_4\bigstar P_4) = 2$. 45
3.7 Un graphe $K_6 \odot P_4$, $\gamma_b(K_6 \odot P_4) = 2$. 46
3.8 Un graphe $C_5 \odot P_5$, $\gamma_b(C_5 \odot P_5) = 3$. 47
3.9 Un graphe $FSSD_m(k_{1,n})$, $\gamma_b(FSSD_m(k_{1,n})) = 2$. 48
3.10 Un graphe $FSSD_m(S'(K_{1,n}))$, $\gamma_b(FSSD_m(S'(K_{1,n})) = 4$. 48
3.11 Un graphe $FSSD_m(S_{r,s})$, $\gamma_b(FSSD_m(S_{r,s})) = 4$. 49
3.12 Un graphe $FSSD_m(S'(S_{r,s}))$, $\gamma_b(FSSD_mFSSD_m(S'(S_{r,s}) = 4$. 49
3.13 Un graphe $FSSD_m(K_5)$, $\gamma_b(FSSD_m(K_5)) = 3$. 50
3.14 Les graphes $FSSD_1(C_6)$ et $FSSD_m(C_6)$, $m \geq 2$. 52
3.15 Un graphe $FSSD_m(G_n)$, $\gamma_b(FSSD_m(G_n)) = 5$. 52
3.16 Un graphe $FSSD_m(C_3^4)$, $\gamma_b(FSSD_m(C_3^4)) = 3$. 53
3.17 Un graphe $FSSD_m(K_{1,4}\overline{K}_{1,4})$, $\gamma_bFSSD_m(K_{1,4}\overline{K}_{1,4})) = 5$. 54
3.18 Un graphe $FSSD_m(S_{2,2}\overline{S}_{2,2})$, $\gamma_bFSSD_m(S_{2,2}\overline{S}_{2,2}) = 5$. 54
3.19 Un graphe $FSSD_m(C_4\overline{C}_4)$, $\gamma_b(FSSD_m(C_4\overline{C}_4)) = 5$. 55
3.20 Un graphe $FSSD_m(K_{1,3}\bigstar P_2)$, $\gamma_b(FSSD_m(K_{1,3}\bigstar P_2)) = 5$. 56
3.21 Un graphe $FSSD_m(K_3\bigstar P_2)$, $\gamma_b(FSSD_m(K_3\bigstar P_2)) = 5$. 57
3.22 Un graphe $FSSD_m(C_4\bigstar P_2)$, $\gamma_b(FSSD_m(C_4\bigstar P_2)) = 5$. 58
3.23 Un graphe $FSSD_m(K_{1,3} \odot P_2)$, $\gamma_b(FSSD_m(K_{1,3} \odot P_2)) = 5$. 59
3.24 Un graphe $FSSD_m(C_4 \odot P_2)$, $FSSD_m(C_4 \odot P_2) = 7$. 60

Introduction générale

Parmi les problèmes les plus importants et très étudiés en théorie des graphes sont les problèmes de domination dans les graphes, et font l'objet, à ce titre, de nombreuses recherches, au-delà de l'importance théorique liée à leur résolution, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie. La technique de domination est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfait certaines conditions d'optimalité. L'idée générale de domination est de trouver dans un graphe un ensemble dominant de sommets, c-à-d un sous-ensemble D de V tel que tout sommet extérieur à D ait au moins un voisin dans D. On peut imposer aussi le problème de la domination broadcast sur les graphes.

L'idée broadcast dans un graphe a été considéré la première fois en 2001 par *D.J. Erwin* [11]. En utilisant le terme domination de cout. On appelle broadcast sur G toute fonction $f : V \longrightarrow \{0, ..., diam(G)\}$ telle que $f(v) \leq e(v)$, $\forall v \in G$. Un sommet v pour lequel $f(v) > 0$ est un sommet f-dominant ou sommet broadcast et l'ensemble f-dominant est $V_f^+(G) = v \in V : f(v) > 0$, est noté par : V_f^+. Le nombre de broadcast dans un graphe G et $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le nombre $\gamma_b(G) = min\{\sigma(f)\,;\, f$ est une domination broadcast de $G\,\}$ est appelé le nombre de domination broadcast minimum. Le nombre $\Gamma_b(G) = max\{\sigma(f)\,;\, f$ est une domination broadcast de $G\,\}$ est appelé le nombre de domination broadcast maximum.

Dans ce présent travail, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques types de graphes. Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trois chapitres :

Le premier chapitre portera des généralités et définitions fondamentale sur la théorie des graphes. Nous introduisons les définitions fondamentales et les notation de base dans le domaine où les notions d'un sommet, arête, degré d'un sommet, voisinage, la distance entre deux sommets, l'excentricité d'un sommet, diamètre et rayon d'un graphe, ... sont énoncés. Quelques types de graphes particuliers, tels que, les cycles, les chaînes, graphes bipartis, ...sont aussi définis. D'autre part, une partie très intéressante dans la théorie des graphes et la domination. Dans ce sens, des généralités et définitions sur la domination standard sont énoncées.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié la domination broadcast sur les graphes. Les définitions, les notations, ainsi les résultats obtenus par les chercheurs dans [**5, 6, 8, 11, 12, 16**] sont énoncés. Des résultats sur la détermination du nombre de la domination broadcast sur les graphes, obtenu dans [**6**], on peut citer par exemple, les étoiles, graphe complet K_n, graphe biparti complet $K_{p,q}$, couronne d'un graphe complet $Cr(K_n)$, couronne d'un cycle $Cr(C_n)$, graphe splitting de l'étoile double $S'(K_{1,n})$, graphe splitting du graphe complet $S'(K_n)$, graphe de splitting d'une chaîne $S'(P_n)$, graphe splitting d'un cycle $S'(C_n)$, graphe de windmill C_n^m, graphe de swing S_m^n et graphe de la lollipop $LP(n,k)$ sont fournis. Des exemples de figures illustratives de ces graphes sont même insérées.

Au dernier chapitre, on déterminera le nombre de la domination broadcast de plusieurs types de graphes, la couronne voisinage, la couronne de deux graphes, ainsi pour les graphes subdivisés super finis des graphes : complet, cycle, étoile, couronne voisinage et couronne de deux graphes. En ce sens, plusieurs résultats ont été donnés.

Enfin, nous terminons ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

1.1 Introduction

Dans les mathématiques la théorie des graphes est l'étude des graphiques, qui sont les structures mathématiques employées pour modeler par paires des relations entre les objets. Un graphique dans ce contexte se compose des sommets, des nœuds, ou des points qui sont reliés par des bords, des arcs, ou des lignes. Un graphique peut être non dirigé, signifiant qu'il n'y a aucune distinction entre les deux sommets liés à chaque bord, ou ses bords peuvent être dirigés d'un sommet à l'autre.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire, ensuite nous rappelons quelques paramètres de domination que nous avons étudie.

1.2 Graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est le couple constitué de deux ensemble finis V et E, où $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est l'ensemble des **sommets**, et $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est un ensemble de paires d'élément de V appelées **arête**. Le cardinal de V est appelé l'**ordre** de G, noté par $|V|$ et le cardinal de E est appelé la **taille** de G, noté par $|E|$.

Un graphe est dit **trivial** s'il ne possède qu'un seul sommet et aucune arête.

Si $e = uv$ est une arête du graphe, on dit que u et v sont les **extrémités** de e. On dira dans ce cas que u et v sont **adjacents** ou **voisins** et que e est**incidente** à u et v.

Un graphe est dit **simple** si tout couple de ses sommets est relié par au plus une arête et que toute arête de $E(G)$ a ses extrémités distinctes.

Un **graphe non orienté** n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une arête.

Exemple 1.1 *Un graphe* $G = (V, E)$*, où* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ *et* $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_6, v_5v_6\}$*. Ce graphe est représenté dans la figure* (1.1)

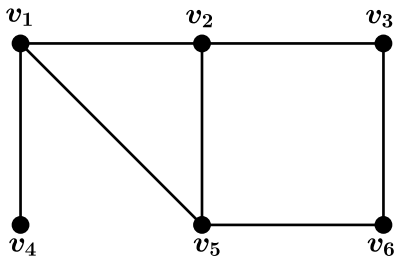


FIGURE 1.1: Un Graphe simple $G = (V, E)$.

1.3 Sous-graphe et graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle **sous-graphe** de G, un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous-graphe induit par A, noté $G[A]$ ou simplement $< A >$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Étant donné un graphe G', on dit que G est sans G' si G' n'est pas un des sous-graphes induits de G.

Un **graphe partiel** de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(H) \subset E(G)$.

1.4 Voisinage et degré d'un sommet

Soit $G = (V, E)$ un graphe, Pour un sommet $v \in V$, le **voisinage ouvert** de v est définit par l'ensemble suivant : $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ et **le voisinage fermé** de v défini par l'ensemble : $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Soit S un sous-ensemble de V : L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ est appelé voisinage ouvert de S, et l'ensemble $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ est son voisinage fermé. Par exemple dans la figure **(1.1)** : $N_G(v_2) = \{v_1, v_3, v_5\}$ et $N_G[v_2] = \{v_1, v_3, v_5, v_2\}$.

Le **degré d'un sommet** v d'un graphe G noté $d_G(v)$, est le nombre de sommets voisins. Pour un graphe simple d'ordre n, le degré d'un sommet est un entier compris entre 0 et $n-1$. Un sommet de degré 0 est dit **sommet isolé** : il n'est relié à aucun autre sommet. Un sommet de degré égal à 1 est dit sommet **pendant** ou **feuille**. On définit par $\Delta_G = max\{d_G(v) : v \in V_G\}$ et $\delta(G) = min\{d_G(v) : v \in V_G\}$. le **degré maximum** et **minimum** dans G respectivement.

Exemple 1.2 *Pour le graphe illustré dans la figure* **(1.1)** *:* $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$.

1.5 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

Un sous ensemble S de V est dit **minimal** par rapport à une propriété P s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subset S$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété P. Un sous ensemble S de V est dit **maximal** par rapport à une propriété P s'il n'existe pas un sous ensemble S' tel que $S \subset S'$ et le sous graphe induit par S' vérifie la propriété P.

Un sous ensemble S de V est dit **minimum** ou de taille minimale par rapport à une propriété P s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété P et $|S'| < |S|$. Un sous ensemble S de V est dit **maximum** ou de taille maximale par rapport à une propriété P s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété P et $|S'| > |S|$.

1.6 Connexité

Un graphe G est dit **connexe** si toute paire de ses sommets est reliée par une chaîne. Si le graphe G est non connexe, une composante connexe est un sous-graphe maximal connexe.

1.7 Distance, l'excentricité, diamètre et rayon

Soient u et v deux sommets d'un graphe G. La **distance** entre deux sommets u et v, notée $d(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne reliant u et v.

L'excentricité d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est : $e(v) = max\{d(v, u) : u \in V\}$.

Le **diamètre** et le **rayon** de G sont définis comme suit : $diam(G) = max\{e(v) : v \in V\}$ et $rad(G) = min\{e(v) : v \in V\}$.

Un **sommet central** de G est un sommet v dont l'excentricité est égal au rayon et au diamètre de G : $e(v) = rad(G) = diam(G)$.

1.8 Chaînes et cycles

Une **chaîne** dans $G = (V, E)$, est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités. On dira que la chaîne relie le premier sommet de la suite au dernier sommet. En plus, on dira que la chaîne a pour longueur le nombre d'arêtes de la chaîne. Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

Exemple 1.3 *Considérons le graphe G de la figure* **(1.1)**, *la chaîne $P_3 = (v_1, v_2, v_3)$ est élémentaire d'ordre 3 et de longueur 2 et un cycle $C_4 = (v_2, v_3, v_6, v_5, v_2)$ de longueur 4.*

1.9 Graphes particuliers

1.9.1 Graphe complet

Dans un graphe complet, toutes les paires des sommets sont adjacentes. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n et chaque sommet est de degré $n-1$.

1.9.2 Clique

Une **clique** dans un graphe $G = (V, E)$, est un sous-graphe complet. Une clique de taille p est notée par K_p. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

1.9.3 Graphe régulier

Un graphe G est dit régulier si tous ses sommets ont le même degré. De plus, G est dit k-régulier si tous les sommets de G sont de degré k. Ainsi, un graphe complet k_n est un graphe $(n-1)$-régulier

1.9.4 Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire d'un graphe simple G, noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est appartient à $\overline{E}$ si elle n'appartient pas à E. Voir la figure **(1.2)**.

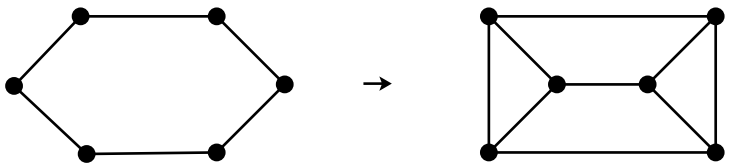


FIGURE 1.2: Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

1.9.5 Graphe biparti et graphe biparti-complet

Un graphe est dit **biparti** si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent

aucune arête. Ainsi un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles de longueurs impairs.

Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti tel que pour toute paire de sommets $v \in V_1$ et $u \in V_2$, $vu \in E$. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

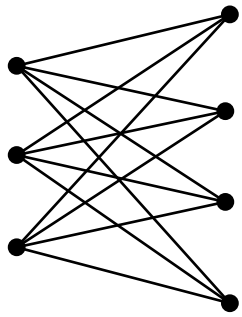


FIGURE 1.3: Un graphe biparti complet $K_{3,4}$.

1.9.6 Arbres et forêt

On appelle **arbre**, et on note par T, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1, dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support. La hauteur $h(T)$ de l'arbre T est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille. En particulier, les chaînes élémentaires et les étoiles sont des arbres.

Un arbre est dit **arbre complet** si toutes ses feuilles sur le même hauteur.

Une forêt : Tout graphe sans cycles est une forêt, ainsi toutes les composants connexes d'une forêt sont des arbres.

1.9.7 Étoile, étoile subdivisée et double étoile

Un cas spécial d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = n$ est appelé une **étoile** et noté $K_{1,n}$. le sommet V_1 de est appelé **centre** ou **sommet central** de l'étoile.

L'opération de **subdivision** d'une arête uv d'un graphe G introduit un nouveau sommet ω tel que $E(G \cup \{\omega\}) = E(G) - \{uv\} \cup \{u\omega, \omega v\}$. On appelle **étoile**

subdivisée ou **araignée saine** $K^*_{1,k}$ l'étoile dans laquelle toutes les arêtes sont subdivisées.

Une **double étoile** $S_{r,s}$ est le graphe formé par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ avec une arête reliant les deux centres.

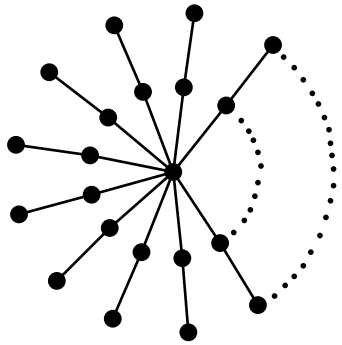


FIGURE 1.4: Une étoile subdivisée

1.9.8 Couronne d'un graphe

La **Couronne** $G = H \circ K_1$ d'un graphe H est le graphe obtenu d'une copie de H et pour tout sommet v de $V(H)$, on relie un sommet pendant. Il est évident que l'ordre de G est égal à $2n$ si celui de H est n.

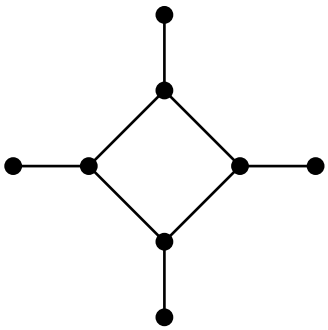


FIGURE 1.5: La couronne d'un cycle C_4.

1.10 Quelques invariants d'un graphe

Les graphes G et H sont dits **isomorphes** s'il existe une application bijective $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ telle que pour toute paire de sommets x, y de G, l'arête $xy \in$

$E(G)$ si et seulement si l'arête $f(x)f(y) \in E(H)$. Si deux graphes sont isomorphes, alors ils partagent de nombreuses propriétés qui sont appelées invariants (des deux graphes). En d'autres termes, un invariant d'un graphe est une propriété préservée par isomorphisme comme le nombre de ses sommets et le nombre de ses arêtes.

Un **stable** dans un graphe $G = (V, E)$, appelé aussi, **ensemble indépendant**, est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal minimum (respectivement, maximum) d'un stable maximal de G, noté $i(G)$ (respectivement, $\alpha(G)$), est appelé le nombre de domination stable (respectivement, le nombre de stabilité) de G.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un couplage M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. On note par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G. Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x.

Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé couplage parfait dans G, sinon, x est dit insaturé par M.

1.11 Notions fondamentales sur la domination

1.11.1 Historique

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants a commencé dans les années soixante, le sujet a trouvé son origine en 1862 dans les jeux d'échecs quand De *Jaenisch* [9] étudié le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur un échiquier $n \times n$ de sorte que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles, tout en sachant que les règles du jeu des échecs permet à une reine de se déplacer à travers les cases horizontalement, verticalement ou diagonalement. Pour un échiquier 8×8, cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier. Dans ce cas, le problème est appelé "le problème des cinq reines" qui est à l'origine de l'étude mathématique de la domination.

En 1892, *Ball* [2] a traité la question de De *Jaenish* en considérant d'autres conditions supplémentaires. En 1964, les frères Yaglom [27] étudièrent les problèmes

posés par De *Jainish* et *Ball*. L'appellation "coefficient de stabilité externe" fut introduite par *Berge* [3] pour définir le nombre de domination et en 1962, *Ore* [19] fut le premier à employer les termes "ensemble dominant" et "nombre de domination" qu'il noté $d(G)$.

L'étude moderne de la domination est débuté après l'apparition de l'article de *Cockayne* et *Hedetniemi* [8] en 1977. Les auteurs de [8] ont été les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination.

1.11.2 Domination standard

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit un sous ensemble $S \subseteq V$. On dit que S est un **dominant** de G, si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S.

Le nombre de **domination inférieure**, noté par $\gamma(G)$ et le nombre de **domination supérieur**, noté par $\Gamma(G)$ sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un ensemble dominant minimal sur G. Un ensemble dominant minimal de G de cardinal minimum est appelé γ-ensemble, et un ensemble dominant minimal de G de cardinal maximum est appelé Γ-ensemble.

Exemple 1.4 *Le nombre de domination inférieur (respectivement supérieur) du graphe illustré dans la figure* **(1.1)** *est* $\gamma(G) = 2$ *(respectivement* $\Gamma(G) = 3$*). L'ensemble* $S_1 = \{v_1, v_6\}$ *est un* γ*-ensemble et l'ensemble* $S_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ *est un* Γ*-ensemble.*

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples :

- Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si $N[S] = V$.
- Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si quel que soit $x \in V \setminus S : N(x) \cap S = \varnothing$.
- Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si quel que soit $x \in V \setminus S : N(x) \cap S \geq 1$.

Théorème 1.1 [19]

Un ensemble S *est un dominant minimal si et seulement si, chaque somme* $u \in S$ *vérifié l'une des conditions suivante :*

1. *u est un sommet isolé dans S*
2. *Il existe un sommet $v \in V - S$ tel que $N(v) \cap S = \{u\}$.*

Théorème 1.2 [19] *Tout graphe connexe $G = (V, E)$ d'ordre au moins deux, possède un ensemble dominant S dont l'ensemble $V - S$ est aussi un ensemble dominant.*

1.12 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques notions fondamentale sur la théorie des graphes, et nous avons défini quelques types de graphes particuliers et on a donné des exemples sur les invariants des graphes qui l'on besoin dans les autres chapitres.

Chapitre 2

Domination broadcast

2.1 Introduction

Après l'introduction générale des notions de fonctions broadcast et de nombre de broadcast domination, nous introduisons quelques invariants de broadcasts et les relations qui les relient donnés par les chercheurs dans [3, 6, 10]. Ensuite, on rappelera quelques résultats existants sur le nombre de la domination broadcast (γ_b) pour les graphes complet, cycle et étoile, ainsi pour les graphes : couronne d'un cycle, couronne d'un graphe complet, Splitting d'un cycle, Windmill, Swing et graphe de Lollipop et d'autres résultats fondamentaux sur γ_b. Le problème de détermination du nombre γ_b pour quelque graphe est $\mathcal{NP}$-complet.

2.2 Définitions et notations

Soit $G = (V, E)$ un graphe non trivial connexe.

Définition 2.1 *Soit G un graphe. On appelle broadcast sur G toute fonction $f : V \to \{0, ..., diam(G)\}$ tel que $f(v) \leq e(v)$, $\forall v \in G$. Un sommet v pour lequel $f(v) > 0$ est un sommet f-dominant ou sommet broadcast et l'ensemble f-dominant est noté V_f^+, $V_f^+(G) = \{v \in V : f(v) > 0\}$.*

Remarque 2.1 *Un sommet f-dominant v, f-domine chaque sommet u avec $d(u, v) \leq f(v)$; et les sommets dans $V \setminus V_f^+$ ne f-domminent aucun sommet de G. Si $u \in V_f^+$,*

$v \in V$ *et* $d(u,v) \leq f(u)$. *On dit que le sommet* v *peut atteindre un broadcast à partir de* u. *L'ensemble des sommets que* v *peut atteindre est noté par* $H(v) = \{u \in V_f^+ : d(u,v) \leq f(u)\}$.

Définition 2.2 *Un broadcast dominant sur* G *est un broadcast* f *dont lequel chaque sommet est* f*-dominé par un certain sommet dans* V_f^+, *autrement dit : un broadcast* f *est un dominant si pour tout* $v \in V$, $\mid H(v) \mid \geq 1$.

Remarque 2.2 *S'il existe un sommet* v *avec* $f(v) = diam(G)$, *alors* f *est un broadcast dominant.*

Définition 2.3 *Pour un broadcast* f, *un sommet* u *qui est* f*-dominé par un sommet* v *est un* f*-voisin de* v. *Le* f*-voisinage de* v, *noté par* $N_f[v]$ *est l'ensemble des* f*-voisins de* v. *Si* $S \subseteq V_f^+$, *alors* $N_f[S] = \cup_{v \in S} N_f[v]$ *est le* f*-voisinage de* S. *Le* f*-voisinage de* f *est* $N_f[V_f^+]$.

Remarque 2.3 u *est un voisin de* v *si et seulement si* v *est un voisin de* u, *mais, il est possible que* u *soit un* f*-voisin de* v *sans que* v *le soit pour* u.

Exemple 2.1 $f(x) = f(w) = 0$ *et* $f(y) = f(z) = 1$. *La figure* **(2.1)** *montre qu'un sommet* x *est un* f*-voisin de* y *mais le sommet* y *n'est pas* f*-voisin de* x.

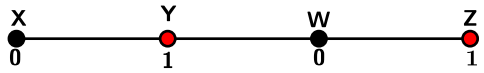


FIGURE 2.1: Un sommet x est un f-voisin de y

Définition 2.4 *Un sommet* u *est un* f*-voisin privé de* v *si* u *est* f*-dominé seulement par* v. *Pour un sommet* $v \in V_f^+$, *le* f*-voisinage privé* $pn_f[v]$ *est l'ensemble des* f*-voisins privés de* v. *Si* $u \in pn_f[v]$, *alors on dit que* v *est son* f*-voisin privé propre. Pour* $S \subseteq V_f^+$, *on définit l'ensemble des* f*-voisins privés de* S *par :* $pn_f[S] = N_f[S] \setminus N_f[V_f^+ \setminus S]$.

Définition 2.5 *Un broadcast* f *d'un certain type (domination ou autre) est dit minimal (resp. maximal) s'il n'existe pas un broadcast* $g \neq f$, *tel que pour tout sommet* $u \in V$, $g(u) < f(u)$ $(resp. g(u) > f(u))$.

Définition 2.6 *Soit f un broadcast sur un graphe G et $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le nombre de domination broadcast $\gamma_b(G)$ est la valeur minimum de $\sigma(f)$ sur tous les dominations broadcasts f sur G pour lequel $\sigma(f) = \gamma_b(G)$. Le nombre de domination broadcast supérieur $\Gamma_b(G)$ est égal au coût maximum d'un domination broadcast minimal sur G.*

Exemple 2.2 *Pour la chîne P_5, le nombre de domination broadcast minimum est $\gamma_b(P_5) = 2$ et le nombre de domination broadcast supérieur est $\Gamma_b(P_5) = 4$.*

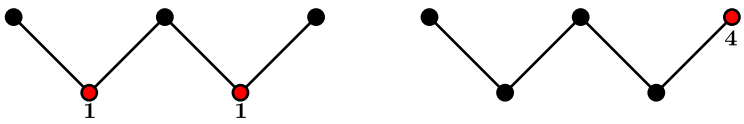


FIGURE 2.2: Une chaîne P_5 avec $\gamma_b(P_5) = 2$ et $\Gamma_b(P_5) = 4$.

Exemple 2.3 *Pour illustrer ces concepts, considérons le graphe double étoile $S_{3,3}$ sur la figure* **(2.3)**. *Les figures* **(2.3(2))**, **(2.3(3))** *et* **(2.3(4))** *illustrent trois fonctions broadcasts dominantes f, g et h, où l'ensemble f-dominant est $V_f^+ = \{a\}$. L'ensemble g-dominant est $V_g^+ = \{b, c, d, e\}$ et l'ensemble h-dominant est $V_h^+ = \{c, d, e, k, l, m\}$. Le sommet $\{a\}$ est f-domine b, c, d, e, k, l, m et son f-voisinage $N_f[a] = \{a, b, c, d, e, k, l, m\}$, mais a ne g-domine aucun sommets. Aussi, $|H_f(x)| = 1$, pour tout sommet $x \in c, b, d, e, k, l, m$. La fonction f, a $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v) = 2$ alors que $\sigma(g) = \sum_{v \in V} g(v) = 4$ et $\sigma(h) = \sum_{v \in V} h(v) = 6$. En fait, il n'est pas difficile de voir que $\gamma_b(S_{3,3}) = 2$ et f est un γ_b-broadcast, et $\Gamma_b(S_{3,3}) = 6$ et donc h est un Γ_b-broadcast.*

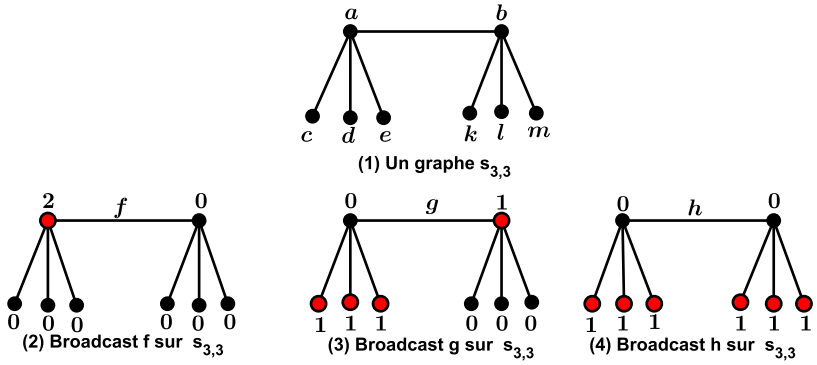


FIGURE 2.3: Fonctions γ_b-broadcast et Γ_b-broadcast de $S_{3,3}$.

Une caractérisation de la minimalité d'un broadcast dominant peut être formulée en termes de f-voisins privés des sommets f-dominants.

Théorème 2.1 [12] *Soit f un broaacast domination sur un graphe G. Alors, f est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaisantes :*

1. *Chaque sommet v vérifiant $f(v) \geq 2$. Il existe un f-voisinage privé u de v qui est à distance $f(v)$ de v.*
2. *Chaque sommet v vérifiant $f(v) = 1$ a un f-voisinage privé dans $N[v]$.*

Lemme 2.1 [11] *Soit f une domination broadcast sur un graphe G, $u, v \in V_f^+$ telle que $u \neq v$. Et soit u_p, v_p être f-voisin de (respectivement) u et v. Pour chaque pair de sommets x, y du graphe G, si x entre liée u et u_p et y entre liée v et v_p, alors $x \neq y$*

Théorème 2.2 [10] *Si G est un graphe de taille m, alors $\Gamma_b(G) \leq m$ avec l'égalité si et seulement si G est une étoile ou une chaîne non triviale.*

Soit $G(V, E)$ un graphe connexe non triviale et $f_s : V \longrightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$.

Remarque 2.4

1. *La fonction caractéristique f_s d'un ensemble dominant minimal S dans un graphe G est une fonction broadcast dominante minimale et donc $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$.*

2. *Soit* $u \in V$, *et soit* $f_u : V \longrightarrow \{0, ..., diam(G)\}$ *la fonction définie par :*

$$f_u(v) = \begin{cases} e(u) & si\ u = v \\ 0 & si\ \ non \end{cases}$$

La fonction broadcast f_u est dominate minimale, puisque chaque sommet est f-dominé par u. Si u est un sommet centre de G c'est-à-dire $e(u) = rad(G)$, alors on dira que la fonction broadcast f_u est une fonction broadcast radiale, et si $e(u) = diam(G)$, alors on dira que la fonction broadcast f_u est une fonction broadcast diamétrale.

Proposition 2.2 [11] *Si* f *est un broadcast dominant minimal sur un graphe connexe* G *et* $|V_f^+| \geq 2$, *alors pour chaque sommet* v, $f(v) < e(v)$.

De la remarque **(2.4)**, *on a le résultat suivant :*

Observation 2.1 [10] *Pour tout graphe* G,

$$\gamma_b(G) \leq min\{\gamma(G), rad(G)\} \leq max\{\Gamma_b(G), diam(G)\} \leq \Gamma_b(G).$$

Proposition 2.3 [12] *Soit* G_1 *un graphe connexe. Pour tout graphe* G_2 *quelconque et tout graphe* G_2, $G = G_1 \odot G_2$ *est radial.*

2.3 Résultats fondamentaux

Pour tout graphe G et tout entier k avec $1 \leq k \leq rad(G)$, le nombre de k-distance, noté $\gamma_k(G)$, est la plus petite cardinalité d'un ensemble de sommets S de G tel que tout sommet de G est à distance au plus k d'au moins un sommet de S.

Proposition 2.4 [12] *Pour tout graphe* G,

$$\gamma_b(G) \leq min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G)\}.$$

Proposition 2.5 [12] *Pour tout graphe connexe* G,

$$\gamma_b(G) \leq min\{rad(G), \gamma(G)\}$$

Remarque 2.5 *Notons que le résultat de la proposition* **(2.5)** *produit une meilleure borne pour* $\gamma_b(G)$ *que celle de l'observation* **(2.1)**, *car si* $k = 1$ *(resp.* $k = rad(G)$*), on obtient* $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$ *(resp.* $\gamma_b(G) \leq rad(G)$*).*

Soit $T = S(K_{1,s})$ le graphe subdivisé de l'étoile $K_{1,s}$ où $s \geq 2$. Puisque aucun sommet ne domine T, alors $\gamma_b(T) \geq 2$, et puisque un broadcast radial domine T, alors $\gamma_b(T) \leq rad(T) = 2$.

Ainsi, on peut atteindre l'inégalité : $\gamma_b(G) \leq min\{\gamma(G), rad(G)\}$. Par ailleurs, il est prouvé dans [12], que la différence entre $min\{\gamma(G), rad(G)\}$ et $\gamma_b(G)$ et entre $\Gamma_b(G)$ et $max\{\Gamma_b(G), diam(G)\}$ peut être trés grande.

Définition 2.7 *Pour un entier positif* k, *soit* H_k *le graphe obtenu en joignant un sommet pendant de* $S(K_{1,2+k})$ *à un sommet pendant de la chaîne* P_{2k}.

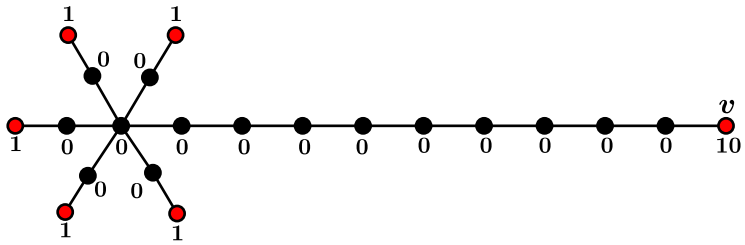


FIGURE 2.4: Un graphe H_4.

Alors $\Gamma_b(H_k) = 2k + 3$ et $diam(H_k) = 2k + 4$. Donc $max\{\Gamma_b(H_k), diam(H_k)\} = 2k + 4$.

Soit v l'extrémité de P_{2k} qui est l'extrimité de H_k. Soit le broadcast $f(v) = 2k+1$, $f(x) = 1$ pour tout extrémité x de H_k distinct de v et $f(x) = 0$ pour tout sommet x de H_k. Alors f est une fonction broadcast dominante minimale sur H_k de coût $3k + 3$ et $\Gamma_b(H_k) \geq 3k + 3$, et on a le résultat suivant :

Observation 2.2 [10] *Pour tout entier positif* k,

$$\Gamma_b(H_k) - max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} \geq k - 1.$$

Par ailleurs, la différence entre $min\{t\gamma_t(G) : 1 \leq t \leq rad(G)\}$ et $\gamma_b(G)$ peut être très grande, par le théorème suivant :

Théorème 2.3 [12] *Pour tout entier positif k,*

$$min\{t\gamma_t(H_k) : 1 \leq t \leq rad(H_k)\} - \gamma_b(H_k) \geq \frac{2k}{15} - 1.$$

Les graphes G vérifiant $\gamma_b = rad(G)$ sont fondamentaux pour l'étude des γ_b-broadcast. Les trois propositions suivantes, dont deux sont des caractérisations de ces graphes, le montrent :

Proposition 2.6 [12] *Soit f un γ_b-broadcast sur G. Alors $V_f^+ = \{v\}$ si et seulement si*

$$f(v) = e(v) = rad(G)$$

Le sous-graphe induit par le f-voisinage de tout sommet f-broadcast est d'une part radial et d'autre part vaut la valeur de ce sommet.

Proposition 2.7 [12] *Soit G un graphe connexe et f une domination broadcast minimum sur G. Si $v \in V_f^+$, alors*

$$f(v) = \gamma_b(\langle N_f[v]\rangle) = rad(\langle N_f[v]\rangle).$$

Une des caractérisations des graphes radiaux est définie dans la proposition ci-dessous.

Proposition 2.8 [12] *Soit G un graphe connexe. Alors $\gamma_b(G) = rad(G)$ si et seulement si*

$$min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G)\} = rad(G).$$

En général, il n'y a aucune relation entre le nombre de domination broadcast d'un graphe et le nombre de domination broadcast de ses sous-graphes, même si le sous-graphe est induit. Plusieurs exemples des graphes G et H existent pour que $H \subseteq G$ et $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H)$. Tel que ce n'est toujours le cas, en effet, considérons un graphe G d'ordre $n \geq 4$ et de degré maximum au plus $n-2$. Puisque aucun sommet de G n'est adjacent à tous les sommets du graphe G, alors $\gamma_b(G) \geq 2$. Soit H le graphe obtenu a partir de G en joignant un nouveau sommet à tous les sommets de G, alors $\gamma_b(H) = 1$. Donc dans ce cas, $G \subseteq H$, bien que $\gamma_b(G) > \gamma_b(H)$. Cependant, le théorème suivant montre que cette relation n'est pas vraie en général :

Théorème 2.4 [12] *Si H est le graphe subdivisé d'un graphe G, alors $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H)$.*

Soit G un graphe. Pour tous entiers $k \geq 0$, on appelle graphe k-subdivisé du graphe G le graphe obtenu à partir de G en insérant k sommets sur chaque arête de G. Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$, on note par $S_{k,t}$ le graphe k-subdivisé du graphe t-étoile $K_{1,t}$. Le centre de $S_{k,t}$ est l'unique sommet c de $S_{k,t}$ d'excentricité $e(c) = rad(S_{k,t}) = k + 1$. Un graphe G est γ_b-radial si $\gamma_b(G) = rad(G)$. En 2001, *Erwin* [11] a montré que le graphe est γ_b-radial pour $k \geq 0$ et $t \geq 5$ puis a conjecturé que le résultat reste vrai pour $t \in \{3, 4\}$.
En 2009, *R. Sahbi* [20] a répondu à la conjecture de *D. Erwin* [14].

Théorème 2.5 [4] *Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$, $\gamma_b(S_{k,t}) = rad(S_{k,t}) = k + 1$.*

Pour tous entiers $k \geq 1$ et $t \geq 2$, on appelle arbre t-aire complet de profondeur k le graphe $A_{k,t}$ défini comme suit :

1. $A_{1,t}$ est le graphe biparti complet $K_{1,t}$.
2. Pour $k \geq 2$, $A_{k,t}$ est obtenu à partir de t copies disjointes de $A_{k-1,t}$ et d'un sommet relié par une arête à l'unique sommet de degré t de chacune des t copies de $A_{k-1,t}$.

R. Sahbi a prouvé la γ_b-radialité de tous les arbres t-aires complets :

Théorème 2.6 [20] *Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 5$, $\gamma_b(A_{k,t}) = rad(A_{k,t}) = k$.*

Soit G un graphe γ_b-radial et soit H un sous graphe de G tels que $rad(H) = rad(G)$. Si H est γ_b-radial, on dit que H est un sous graphe γ_b-radial.

R. Sahbi a déterminé le sous graphe de $S_{k,3}$, $\gamma_b(S_{k,3})$-radial et minimal (au sens de la suppréssion d'arêtes).

Théorème 2.7 [20] *Soit $k \geq 3$ un entier et $S'_{k,3}$ le sous-graphe de $S_{k,3}$ à 3 sommet pendants v_1, v_2, v_3 tels que $d(c, v_1) = k + 1$, $d(c, v_2) = k$ et $d(c, v_3) = k - 1$. Alors $S'_{k,3}$ est $\gamma_b(S_{k,3})$-radial.*

A la même période, *Herke* et *Mynhardt* publient un article qui caractérise les arbres radiaux [15, 16]

Soit P une chaîne d'un arbre diamétrale T, c'est-à-dire, P est de longueur maximale. Un ensemble M des arêtes de P est un ensemble P-**partition** si les extrémités de chaque arête dans M sont de degré 2 dans T.

Le problème de caractérisation des arbres radiaux a été posé par *Dunbar*, *Erwin*, *Haynes* et *Hedetniemi* dans [10] mais résolu par *Herke* et *Mynhardt*.

Théorème 2.8 [15, 16] *Un arbre T est radial si et seulement si T n'admet pas d'ensemble P-partition non vide.*

Un γ_b-broadcast f est un γ_b-broadcast **très efficace** si et seulement si f est un γ_b-broadcast avec un nombre minimum de sommets broadcast. On déduit directement un résultat du théorème **(2.5)**

Corollaire 2.9 [15, 16]

1. *Soit f un γ_b-broadcast **très efficace** d'un arbre T à r sommets broadcasts. Alors $\gamma_b(T) = rad(T) - \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$.*
2. *Pour un arbre T, si M un ensemble P-partition de cardinal maximum m. Alors $\gamma_b(T) = rad(T) - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.*

Un arbre est dit chenille si le graphe obtenue en supprimant toutes les feuilles est une chaîne. *Seager* [21] a caractérisé les chenilles avec $\gamma_b = \gamma$. *Cockayne*, *Herke* et *Mynhardt* [10] ont caractèré la classe τ des arbres T, vérifiant $\gamma_b(T) = \gamma(T)$

Théorème 2.9 [7] *Un arbre $T \in \tau$ si et seulement si T a un ensemble-partition maximum M tel que chaque composante T_i de $T \setminus M$ est dans τ.*

Théorème 2.10 [4] *Soit $T = (V, E)$ un arbre et $\tau = (U, F)$ un sous-arbre de T. Alors $\gamma_b(T) \geq \gamma_b(\tau)$ avec l'égalité si, $\gamma_b(\tau) = \gamma_b(T)$.*

2.4 Bornes sur $\gamma_b(G)$

En général, la détermination de la valeur exacte de nombre de domination $\gamma_b(G)$ est un problème $\mathcal{NP}$*-complet* pour un graphe quelconque. Pour cela, les chercheurs

ont essayé d'encadré, ce paramètre par des bornes en fonction de diamètre, le rayon ou l'excentricité du graphe G. Les auteurs de [5] *B. Breasâr* et *S. Spacapan* ont donné le résultat suivant. Il est bien connu que si G, est un graphe connexe, alors $\gamma(G) \geq \lceil \frac{daim(G)+1}{3} \rceil$ de [12]. En fait, la même borne inférieure reste valable pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 2.11 [12] *Pour tout graphe connexe G, $\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{daim(G)+1}{3} \rceil$.*

En 2004, *Ore* [19] a prouvé que le nombre de domination broadcast d'un graphe sans sommets isolés est au plus la moitié de son ordre.

Une borne inférieure en terme de rayon est démontrée par *Breasar* et *Spacapan* pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 2.12 [5] *Si G est un graphe connexe, alors $\gamma_b(G) \geq \left\lceil \frac{2rad(G)}{3} \right\rceil$.*

Pour tout graphe connexe G d'ordre n, $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ est une borne supérieure de son nombre de broadcast domination.

Théorème 2.13 [17] *Pour tout graphe connexe G d'ordre n, $\gamma_b(G) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.*

Il existe d'autres bornes dépendent du rayon, pour un γ_b-broadcast.

Lemme 2.10 [11] *Soit G un graphe et f un γ_b-broadcast sur G, et $M = max\{f(x) : x \in V_f^+\}$. Alors $rad(G) \leq 2\gamma_b(G) + |V_f^+| - M - 1$.*

Preuve. Soit $u \in V_f^+$ et v un sommet excentrique de u. Considérer $u - v$ un géodésique P. Le sommet u f-domine $f(u)+1$ de P, et comme dans la preuve du théorème **(2.11)** chaque f-domination de sommet x indépendamment de u f-domine tout au plus $2f(x)+1$ sommets de P. Puisque chaque sommet de P est f-domine, il suit cela $e(u)+1 \leq f(u)+1+\sum_{x \in Vf^+ - \{u\}} [2f(u)+1] = 2\gamma_b(G) - f(u) + \left|V_f^+\right|$. Puisque cela vaut pour n'importe quel sommet dans l'ensemble f-dominant broadcast, le résultat suit. ■

Du lemme **(2.11)**, nous obtenons immédiatement le résultat suivant :

Théorème 2.14 [11] *Soit un graphe et f un γ_b-broadcast sur G. Alors*

$$\gamma_b(G) \geq \left\lceil \frac{rad(G) + M + 1 - |V_f^+|}{2} \right\rceil .$$

La limite supérieure sur $rad(G)$ fourni par lemme **(2.11)**, est atteinte pour chaque graphe G pour lequel $\gamma_b(G) = rad(G)$.

2.5 Graphes avec un petit nombre de domination broadcast

Il est bien établi que pour un graphe connexe non trivial G, $\gamma(G) = 1$ si et seulement si $rad(G) = 1$. Les graphes de nombre de domination broadcast égale à 1 admettent une caractérisation identique.

Proposition 2.11 [12] *Soit G un graphe connexe non trivial. Alors $\gamma_b(G) = 1$ si et seulement si $rad(G) = 1$.*

Les graphes avec un nombre de domination broadcast égale à 2 si caractérisent presque aussi simple que celle pour les graphes du nombre de domination broadcast égale à 1.

Théorème 2.15 [12] *Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 2$ si et seulement si*

$$min\{rad(G), \gamma(G)\} = 2$$

Preuve. Clairement si $\gamma(G) = 2$ ou $rad(G) = 2$, puis la proposition **(2.4)** et la proposition **(2.11)** impliquent que $\gamma_b(G) = 2$. Supposons alors que $\gamma_b(G) = 2$ et $rad(G) \neq 2$. Par proposition **(2.11)**, $rad(G) \geq 3$. Soit f une domination broadcast minimum de G. Puisque $\gamma_b(G) < rad(G)$, aucun sommet f-domine $V(G)$. Par conséquent $V_f^+ = \{u, v\}$ pour une certaine paire u, v de sommets de G et $f(u) = f(v) = 1$. En conséquence, $\{u, v\}$ est un ensemble de domination de G et d'après la Proposition **(2.11)**, $\gamma(G) = 2$. ■

1. Une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) < rad(G)$. Il suffit de considérer les graphes G_n obtenus en insérant 2 sommets sur chaque arête de multigraphe à 2 sommets reliés par n arêtes, $n \geq 1$, pour lesquels on a $\gamma_b(G_n) = \gamma(G_n) = 2$ et $rad(G_n) = 3$.

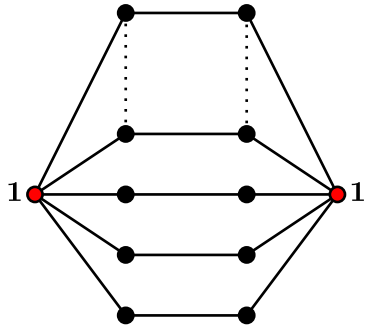


FIGURE 2.5: Un graphe G_n.

2. Une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = rad(G) < \gamma(G)$. Il suffit de considérer les graphes $S(K_{1,n})$, $n \geq 3$, pour lesquels on a $\gamma_b(S(K_{1,n})) = rad(S(K_{1,n})) = 2$ et $\gamma(S(K_{1,n})) = n$.

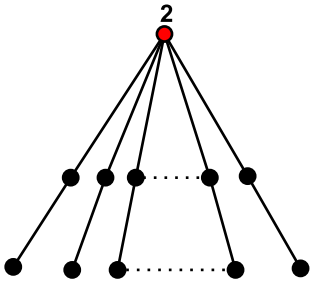


FIGURE 2.6: Le graphe $S(K_{1,n})$, $n \geq 3$.

3. Une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) = rad(G)$. Il suffit de considérer les graphes multipartis complets $K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}$, $t \geq 2$ et $n_i \in N$, $n_i \geq 2$ pour tout i, $1 \leq i \leq t$, pour lesquels on a $\gamma_b(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}) = \gamma(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}) = rad(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}) = 2$. Une autre conséquence du théorème **(2.11)** on a :

Proposition 2.12 [12] *Si G un graphe connexe et $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 3$, alors $\gamma_b(G) = 3$.*

En regroupant les différents résultats précédemment cités, on obtient :

Proposition 2.13 [12] *Soit G un graphe. Si $min\{rad(G), \gamma(G)\} = k$, où $1 \leq k \leq 3$, alors $\gamma_b(G) = k$.*

Le résultat de la propositon **(2.11)**, ne peut être étendu au cas $k = 4$. En effet, *D. Erwin* considéra le graphe G obtenu en joignant une extrémité de $S(K_{1,4})$ à une extrémité de P_3. Voir la figure **(2.7)** et il montra que $\gamma_b(G) = 3$ et $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4$.

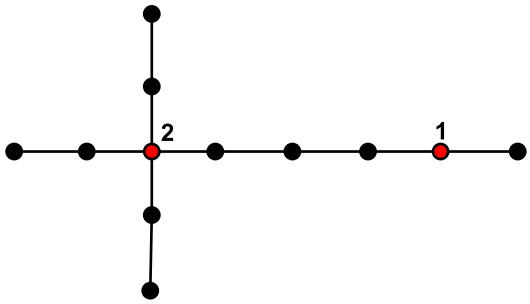


FIGURE 2.7: Un graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$

Lemme 2.14 [11] *Soit G un graphe connexe et f une fonction de domination de coût minimum sur G. Si $\gamma(G) < rad(G)$, alors*

1. $\gamma_b(G) < rad(G)$.
2. $|V_f^+| \geq 2$
3. $max\{f(v) : v \in V_f^+\} \leq rad(G) - 2$.

2.6 Le nombre de domination broadcast de certains graphes

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats importants qui seront utiles au dernier chapitre. *D.J. Erwin.* [11, 12] ont déterminé la valeur exacte de γ_b pour les graphes suivant : chaînes P_n, cycles C_n, et les autres résultat de quelques types des graphes dans [6]

Théorème 2.16 [12] *Pour chaque nombre entier positive* n, $\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Théorème 2.17 [11] *Pour tout entier* $n \geq 3$, $\gamma_b(C_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Proposition 2.15 [6] *Pour les étoiles* $K_{1,n}$, $\gamma_b(K_{1,n}) = 1$.

Proposition 2.16 [6] *Pour le graphe complet* K_n *avec* $n > 2$, $\gamma_b(K_n) = 1$.

Proposition 2.17 [6] *Pour le graphe biparti complet* $K_{p,q}$, $\gamma_b(K_{p,q}) = 2$; $p, q \geq 2$.

Proposition 2.18 [6] *Pour un graphe* K_n, $\gamma_b(Cr(K_n)) = 2$. $\gamma_b(Cr(K_1)) = 1$.

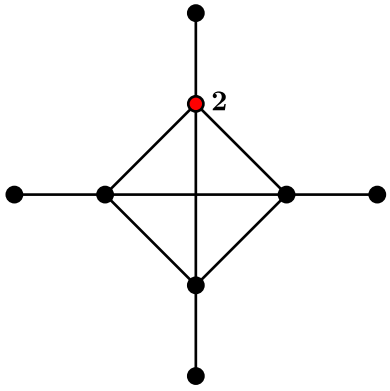


FIGURE 2.8: Un graphe K_4, $\gamma_b(Cr(K_n) = 2$.

Théorème 2.18 [6] *Pour un cycle* C_n, $\gamma_b(Cr(C_n)) = rad(Cr(C_n)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Définition 2.8 [25] *Pour un graphe* G, *le graphe de splitting* $S^{'}$ *de* G *est obtenu en ajoutant un nouveau sommet* $v^{'}$ *correspondant à chaque sommet* v *de* G, *tel que* $N(v) = N(v^{'})$.

Proposition 2.19 [6] *Pour tout graphe* $S^{'}(K_{1,n})$, $\gamma_b(S^{'}(K_{1,n})) = 2$.

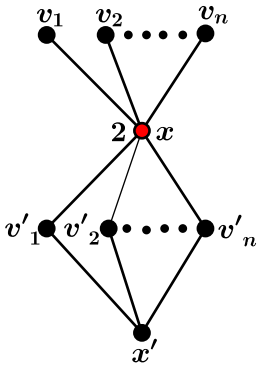


FIGURE 2.9: Un graphe de splitting de $K_{1,n}$.

Proposition 2.20 [6] *Pour le graphe* $S'(S_{r,s})$, $\gamma_b(S'(S_{r,s})) = 2$.

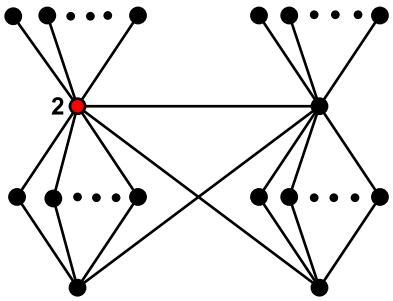


FIGURE 2.10: Splitting d'une double étoile.

Proposition 2.21 [6] *Pour* K_n, $\gamma_b(S'(K_n)) = 2$.

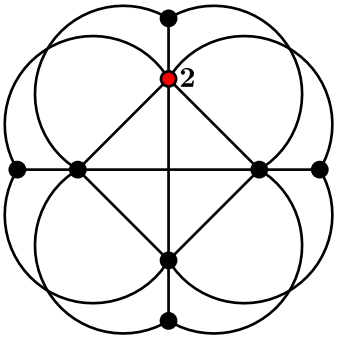


FIGURE 2.11: Un graphe de Splitting de K_4, $\gamma_b(S'(K_4) = 2$.

Théorème 2.19 [6] *Pour tout* $n \geq 3$, $\gamma_b(S'(P_n)) = \lceil \frac{n-\lceil \frac{5}{2} \rceil}{2} \rceil$. $\gamma_b(S'(P_2)) = 2$.

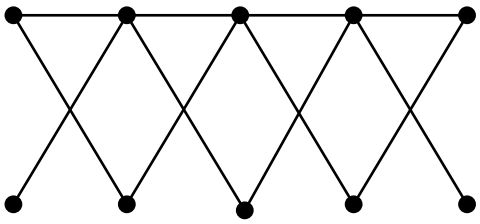


FIGURE 2.12: Le graphe $S'(P_5)$.

Théorème 2.20 [6] *Pour un graphe splitting* S' *de* C_n, $\gamma_b(S'(C_n)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

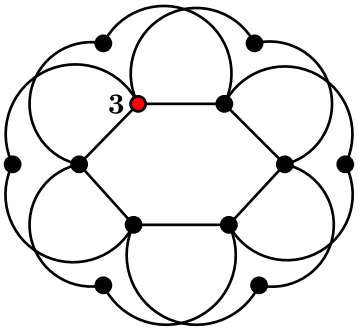


FIGURE 2.13: Un graphe de splitting de C_6

Définition 2.9 [13] *Un graphe windmill* C_n^p *est la famille de graphes constitués de* m *copies de* C_n *avec un sommet en commun. Voir la figure* **(2.14)**

Théorème 2.21 [6] *Pour un graphe* C_n^p, $\gamma_b(C_n^p) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

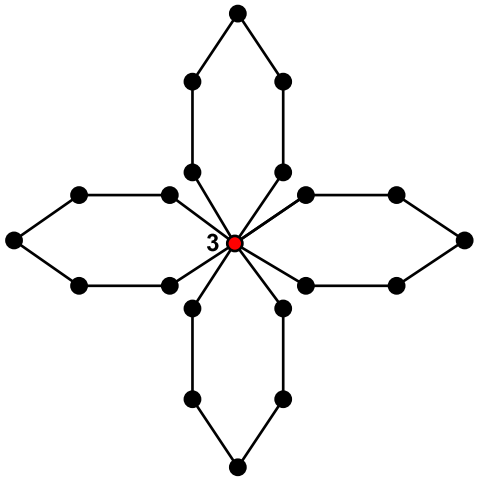


FIGURE 2.14: Un graphe windmill C_6^4.

Définition 2.10 [18] *Le graphe obtenu en prenant m copies de cycles de C_n et un sommet de chaque C_n joint à un sommet commun v, est appelé un graphe swing, noté S_m^n.*

Théorème 2.22 [6] *Pour un graphe S_m^n, $\gamma_b(S_m^n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.*

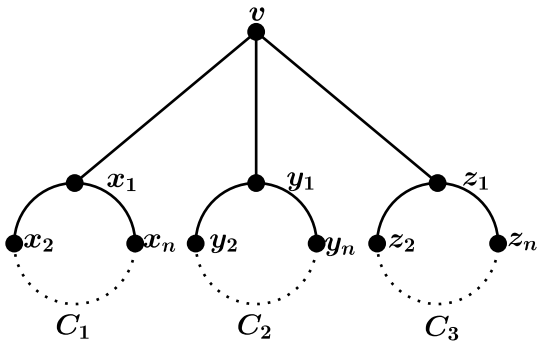


FIGURE 2.15: Un graphe S_3^n.

Définition 2.11 [24] *Un graphe de la lollipop $LP(n,k)$ est obtenu à partir d'un graphe complet K_n et une chaîne P_{n-k+1}, en se confondant l'un des sommets d'extrémité de P_{n-k+1} à un sommet de K_n. Voir la figure* **(2.16)**.

Théorème 2.23 [6] *Pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 0$, $\gamma_b(LP(n,k)) = \left\lceil \frac{n-k+2}{3} \right\rceil$*

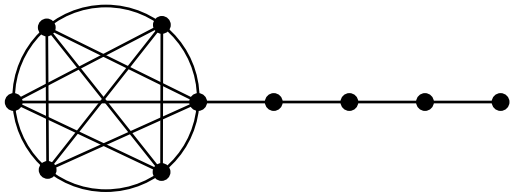


FIGURE 2.16: Un graphe de Lollipop $LP(6, 2)$.

2.7 Conclusion

Nous avons présenter plusieurs résultats existants sur la détermination du nombre de la domination broadcas. Ces résultats ainsi leurs démonstrations nous permettent de simplifier nos résultats obtenus dans le chapitre suivant.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la position du problème et sa formulation mathématique, et nous avons donné quelques définitions,théorème et proposition.

Chapitre 3

Détermination du nombre de la domination broadcast de quelques graphes

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'essentiel de notre travail. En ce sens, on va déterminer le nombre de la domination broadcast de plusieurs types de graphes à savoir le Prisme complémentaire, Couronne voisinage et couronne de deux graphes, ainsi les graphes subdivisés super finis des graphes précédents.

3.2 Domination broadcast d'un Prisme complémentaire

Définition 3.1 *Soit G un graphe et $\overline{G}$ son complémentaire de G. Le* ***prisme complémentaire*** *$G\overline{G}$ de G est le graphe formé par l'union disjointe de G et de $\overline{G}$ en ajoutant les arêtes d'un couplage parfait entre les sommets correspondants de G et de $\overline{G}$.*

3.2.1 Domination broadcast de $K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$

Proposition 3.1 *Pour $n \geq 2$, $\gamma_b(K_{1,n}\overline{K}_{1,n}) = 2$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $(K_{1,n}\overline{K}_{1,n})$. On a $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 2$. D'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(K_{1,n}\overline{K}_{1,n}) = 2$. ∎

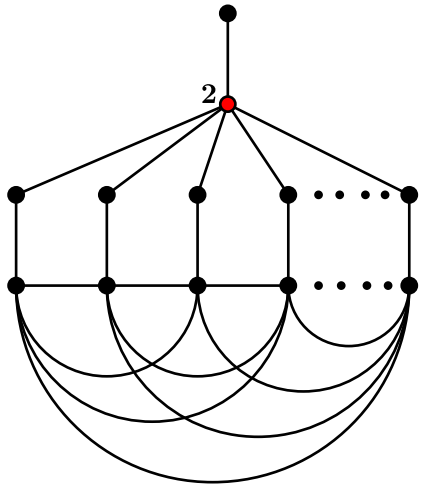


FIGURE 3.1: Graphe $K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$.

3.2.2 Domination broadcast de $S_{r,s}\overline{S}_{r,s}$

Proposition 3.2 *Pour $s \geq 2$, $r \geq 2$, $\gamma_b(S_{r,s}\overline{S}_{r,s}) = 2$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $(S_{r,s}\overline{S}_{r,s})$. On a $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 2$. D'après la Proposition **(2.13)**, $\gamma_b(G) = 2$. ∎

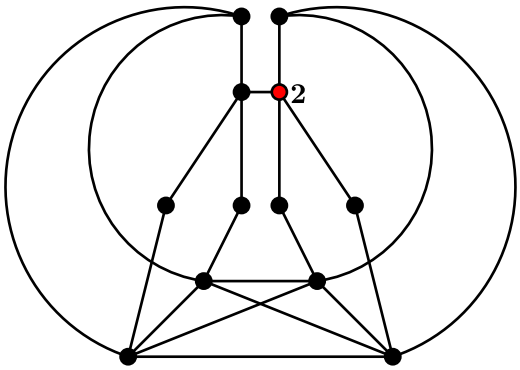


FIGURE 3.2: Le graph $S_{3,3}\overline{S}_{3,3}$, $\gamma_b(S_{3,3}\overline{S}_{3,3}) = 2$.

3.2.3 Domination broadcast de $C_n\overline{C}_n$

Proposition 3.3 *Pour $n \geq 3$,*

$$\gamma_b(C_n\overline{C}_n) = \begin{cases} 2 & si \;\; 3 \leq n \leq 5 \\ 3 & si \;\; n \geq 6 \end{cases}$$

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $(C_n\overline{C}_n)$. Le nombre $\gamma_b(G)$ est déterminé pour les 2 cas suivants :

Cas 1 : Si $n = 3$, alors $G \simeq Cr(C_3)$. D'après la Théorème **(2.18)**, $\gamma_b(Cr(C_3)) = 2$. D'où $\gamma_b(G) = \gamma_b(Cr(C_3)) = 2$. Si $4 \leq n \leq 5$, alors $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 2$. D'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(G) = 2$.

Cas 2 : Si $n \geq 6$, alors $\gamma(G) \geq 3$ et $rad(G) = 3$. D'après la Proposition **(2.12)**, $\gamma_b(G) = 3$. ■

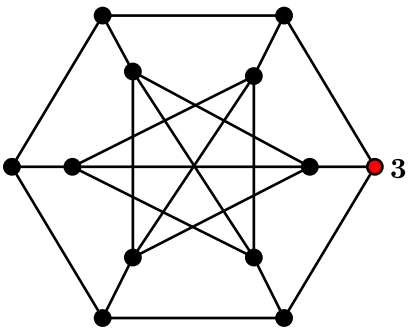


FIGURE 3.3: Graphe $C_6\overline{C}_6$, $\gamma_b(C_6\overline{C}_6) = 3$.

3.3 Domination broadcast d'une Couronne voisinage

Définition 3.2 [1] *Soient G_1, G_2 deux graphes à n_1, n_2 sommets et m_1, m_2 arêtes respectivement. Alors la* ***Couronne voisinage*** *$G_1 \bigstar G_2$ est le graphe obtenu en faisant correspondance chaque sommet v_i, $1 \leq i \leq n_1$ de G_1 par une copie de G_2 tel que, chaque sommet de G_2 est relie aux voisins de v_i. La Couronne voisinage $G_1 \bigstar G_2$ de G_1 et G_2 a $n_1 + n_1n_2$ sommets et $n_1(2n_2 + 1) + n_1n_2$ arêtes. Si $G_2 = K_1$, alors $G_1 \bigstar G_2$ est le graphe Splitting $S'(G_1)$.*

3.3.1 Domination broadcast de $K_{1,n}\bigstar P_p$

Proposition 3.4 *Pour $n \geq 2$, $P \geq 2$, $\gamma_b(K_{1,n}\bigstar P_p) = 2$.*

Preuve. On a $min\{rad(K_{1,n}\bigstar P_{_P}), \gamma(K_{1,n}\bigstar P_{_P})\} = rad(K_{1,n}\bigstar P_{_P}) = 2$. D'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(K_{1,n}\bigstar P_P) = 2$. ■

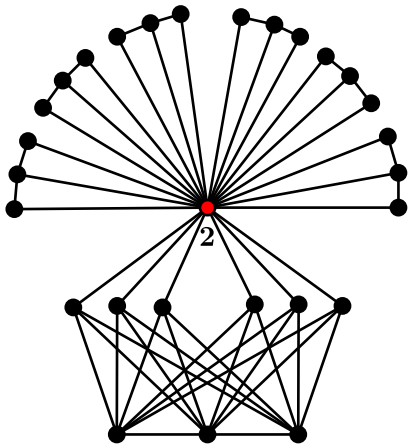


FIGURE 3.4: Un graphe $K_{1,6}\bigstar P_3$, $\gamma_b(K_{1,6}\bigstar P_3) = 2$.

3.3.2 Domination broadcast de $K_n\bigstar P_p$

Proposition 3.5 *Pour tout $n \geq 3$ et $P \geq 2$, $\gamma_b(K_n\bigstar P_{_P}) = 2$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $(K_n\bigstar P_{_P})$. On a $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 2$. D'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(K_n\bigstar P_P) = 2$. ■

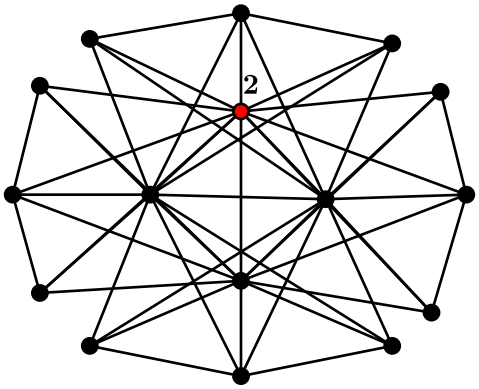


FIGURE 3.5: Un graphe $(K_4\bigstar P_3)$, $\gamma_b(K_4\bigstar P_3) = 2$.

3.3.3 Domination broadcast de $C_n \bigstar P_p$

Théorème 3.1 *Pour $n \geq 3$, $P \geq 3$,*

$$\gamma_b(C_n \bigstar P_p) = \begin{cases} 2 & si\ n = 3 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & si\ \ n \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $(C_n \bigstar P_{_P})$. Premièrement, si $n = 3$, alors $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 2$ et d'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(G) = 2$. Si $4 \leq n \leq 5$, alors $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 2$ et d'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(G) = 2$. Si $6 \leq n \leq 7$, alors $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 3$ et d'après la Proposition **(2.12)**, $\gamma_b(G) = 3$.

Donc on a pour

$$\begin{aligned} n = 3 \qquad & \Rightarrow \gamma_b(G) = 2 \\ 4 + 2 \times 0 \ \leq \ & n \leq 4 + 2 \times 0 + 1 \Rightarrow \gamma_b(G) = 2 \\ 4 + 2 \times 1 \ \leq \ & n \leq 4 + 2 \times 1 + 1 \Rightarrow \gamma_b(G) = 3 \\ 4 + 2k \ \leq \ & n \leq 4 + 2k + 1 \Rightarrow \gamma_b(G) = k + 2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 4 + 2 \times k \ \leq \ & n \leq 2 + 2 \times k + 1 \Leftrightarrow \frac{4 + 2k}{2} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{2 + 2k + 1}{2} \\ \Leftrightarrow \ & k + 1 \leq \frac{n}{2} \leq k + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \ & \lfloor k + 1 \rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor k + \frac{3}{2} \right\rfloor \\ \Leftrightarrow \ & k + 2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq k + 2 \end{aligned}$$

Donc $\gamma_b(C_n \bigstar P_{_P}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = k + 2$. Il ne reste qu'à démontrer par récurrence que $\gamma_b(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pour tout $4 + 2k \leq n \leq 4 + 2k + 1$, $(k \in \mathbb{N})$...(*).

Si $4 + 2k \leq n \leq 4 + 2k + 1$, alors $\begin{cases} \gamma_b(C_{4+2k} \bigstar P_{_P}) = \left\lfloor \frac{4+2k}{2} \right\rfloor = k + 2 \\ \gamma_b(C_{4+2k+1} \bigstar P_{_P}) = \left\lfloor \frac{4+2k+1}{2} \right\rfloor = k + 2 \end{cases}$

Montrons que (*) est vrai pour $k + 1$.

Si $n = 4 + 2(k + 1)$, alors $\gamma_b(C_{4+2(k+1)} \bigstar P_{_P}) = \left\lfloor \frac{4+2(k+1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6+2k}{2} \right\rfloor = k + 2$.

Si $n = 4 + 2(k + 1) + 1$, alors $\gamma_b(C_{4+2(k+1)+1} \bigstar P_{_P}) = \left\lfloor \frac{4+2(k+1)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+7}{2} \right\rfloor = k + 2$.

D'où (*) est vrai pour $k + 1$ et pour $n \geq 3$, $P \geq 3$, $\gamma_b(C_n \bigstar P_{_P}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. ∎

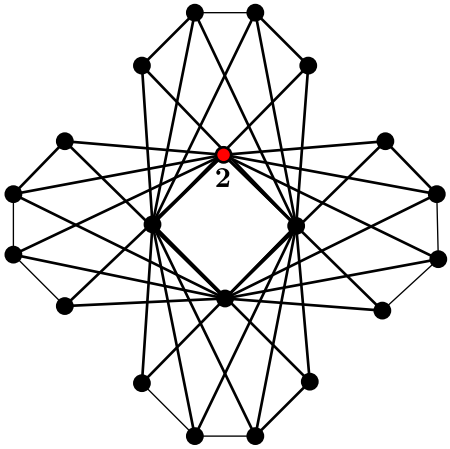


FIGURE 3.6: Un graphe $C_4 \bigstar P_4$, $\gamma_b(C_4 \bigstar P_4) = 2$.

3.4 Domination broadcast d'une Couronne de deux graphes

Définition 3.3 [23] *La* ***Couronne de deux graphes*** G_1 *et* G_2 *est le graphe* $G = G_1 \odot G_2$ *formé par une copie de* G_1 *et* $|V(G_1)|$ *copies de* G_2*, où le* i^{eme} *sommet de* G_1 *est adjacent à tous les sommets de la* i^{eme} *copies de* G_2*.*

3.4.1 Domination broadcast de $K_{1,n} \odot P_P$.

Proposition 3.6 *Pour tout* $n \geq 2$*,* $P \geq 2$*,* $\gamma_b(K_{1,n} \odot P_P) = 2$*.*

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $(K_{1,n} \odot P_P)$. On a $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G)) = 2$. D'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(K_{1,n} \odot P_P) = 2$. ■

3.4.2 Domination broadcast de $K_n \odot P_P$

Proposition 3.7 *Pour* $n \geq 3$*,* $P \geq 2$*,* $\gamma_b(K_n \odot P_P) = 2$

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $(K_n \odot P_P)$. Puisque $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 2$, d'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(K_n \odot P_P) = 2$. ■

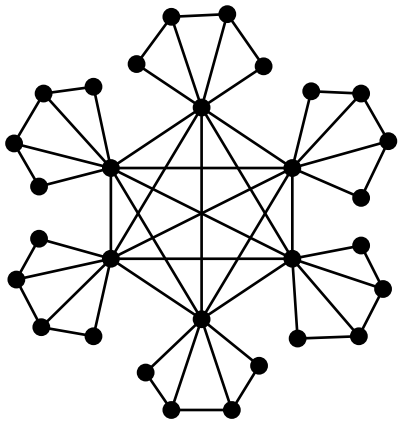


FIGURE 3.7: Un graphe $K_6 \odot P_4$, $\gamma_b(K_6 \odot P_4) = 2$.

3.4.3 Domination broadcast de $C_n \odot P_P$

Théorème 3.2 *Pour $n \geq 3$, $P \geq 2$, $\gamma_b(C_n \odot P_P) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $(C_n \odot P_P)$. Premièrement, si $n = 3$, alors $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 2$ et d'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(G) = 2$. Si $4 \leq n \leq 5$, alors $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 3$ et d'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(G) = 2$. Si $6 \leq n \leq 7$, $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 3$ et d'après la Proposition **(2.12)**, $\gamma_b(G) = 3$.

Donc on a pour

$$\begin{aligned} 2 + 2 \times 1 &\leq n \leq 2 + 2 \times 1 + 1 \Rightarrow \gamma_b(G) = 3 \\ 2 + 2 \times 2 &\leq n \leq 2 + 2 \times 1 + 2 \Rightarrow \gamma_b(G) = 4 \\ &\vdots \\ 2 + 2k &\leq n \leq 2 + 2k + 1 \Rightarrow \gamma_b(G) = k + 2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 + 2 \times k &\leq n \leq 2 + 2 \times k + 1 \Leftrightarrow \frac{2 + 2k}{2} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{2 + 2k + 1}{2} \\ &\Leftrightarrow k + 1 \leq \frac{n}{2} \leq k + \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \lfloor k + 1 \rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor k + \frac{3}{2} \right\rfloor \\ &\Leftrightarrow k + 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq k + 1 \\ &\Leftrightarrow k + 2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq k + 2 \end{aligned}$$

Donc $\gamma_b(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = k + 2$. Il ne reste qu'à démontrer par récurrence que $\gamma_b(S_m^n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ pour tout n, $2 + 2k \leq n \leq 2 + 2k + 1$, $(k \in \mathbb{N})$...(*).

Si $2 + 2k \leq n \leq 2 + 2k + 1$, alors $\begin{cases} \gamma_b(C_{2+2k} \odot P_P) = \lfloor \frac{2+2k}{2} \rfloor + 1 = k + 2 \\ \gamma_b(C_{2+2k+1} \odot P_P) = \lfloor \frac{2+2k+1}{2} \rfloor + 1 = k + 2 \end{cases}$

Montrons que (*) est vrai pour $k + 1$.

Si $n = 2+2(k+1)$, alors $\gamma_b(C_{2+2(k+1)} \odot P_P) = \left\lfloor \frac{2+2(k+1)}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor \frac{4+2k}{2} \rfloor + 1 = k+3$. Si $n = 2+2(k+1)+1$, alors $\gamma_b(C_{n=2+2(k+1)+1} \odot P_P) = \left\lfloor \frac{2+2(k+1)+1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor \frac{2k+5}{2} \rfloor + 1 = k+3$. La propriété est vrai a l'ordre $k+1$. Par conséquence $\gamma_b(C_n \odot P_P) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, et le Théorème est démontré. ■

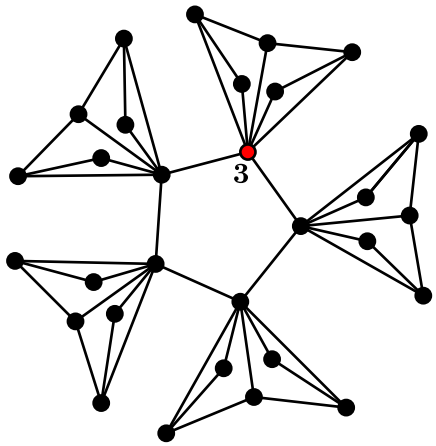


FIGURE 3.8: Un graphe $C_5 \odot P_5$, $\gamma_b(C_5 \odot P_5) = 3$.

3.5 Domination broadcast pour les graphes subdivisés super finis

Définition 3.4 [26] *Soit G un graphe à n sommets et t arêtes. Le graphe obtenu en remplaçant chaque arête de G par un graphe biparti complet $K_{2,m}$ (m est fini) est appelé* ***graphe de subdivision super fini*** *de G, noté $FSSD_m(G)$.*

Remarque 3.1 *Pour $m = 1$, le graphe $FSSD_m(G)$ est également le graphe $S(G)$.*

3.5.1 Domination broadcast de $FSSD_m(k_{1,n})$

Proposition 3.8 *Soit $K_{1,n}$ une étoile à $n+1$ sommets. Alors $\gamma_b(FSSD_m(k_{1,n})) = 2$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $FSSD_m(k_{1,n})$. On a $min\{rad(G), \gamma(G)\} = min\{2, n\} = 2$. D'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(FSSD_m(k_{1,n})) = 2$. ∎

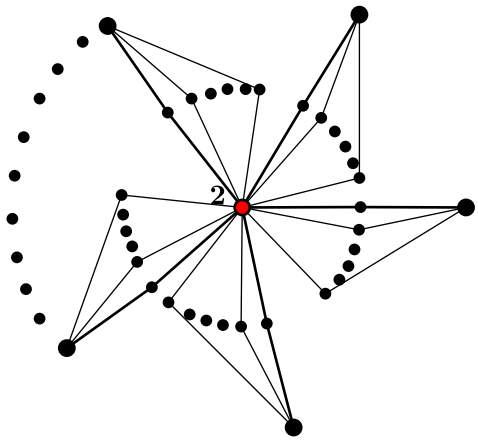


FIGURE 3.9: Un graphe $FSSD_m(k_{1,n})$, $\gamma_b(FSSD_m(k_{1,n})) = 2$.

3.5.2 Domination broadcast de $FSSD_m(S^{'}(K_{1,n}))$

Proposition 3.9 *Pour $n \geq 2$, $\gamma_b(FSSD_m(S^{'}(K_{1,n})) = 4$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(S^{'}(K_{1,n}))$. Soit f un γ_b-broadcast sur G. Soit v un sommet de $K_{1,n}$ tel que $e(v) = rad(G) = 4 = f(v)$. D'après la Proposition **(2.9)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 4$. ∎

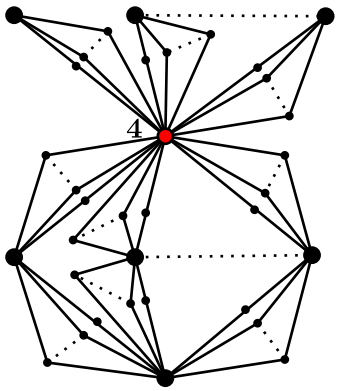


FIGURE 3.10: Un graphe $FSSD_m(S^{'}(K_{1,n}))$, $\gamma_b(FSSD_m(S^{'}(K_{1,n})) = 4$.

3.5.3 Domination broadcast de $FSSD_m(S_{r,s})$

Proposition 3.10 *Pour $r \geq 2$, et $s \geq 2$, $\gamma_b(FSSD_m(S_{r,s})) = 4$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(S_{r,s})$. Soit f un γ_b-broadcast sur G. Soit v un sommet de K_n tel que $e(v) = rad(G) = 4 = f(v)$ D'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 4$. ∎

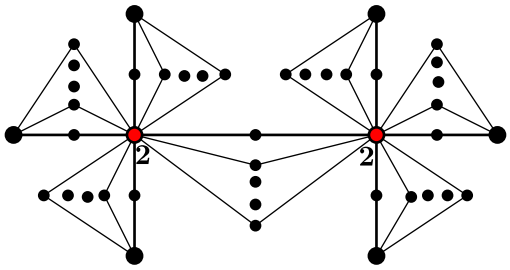


FIGURE 3.11: Un graphe $FSSD_m(S_{r,s})$, $\gamma_b(FSSD_m(S_{r,s})) = 4$.

3.5.4 Domination broadcast de $FSSD_m(S'(S_{r,s}))$

Proposition 3.11 *Pour tout $r \geq 2$, et $s \geq 2$, $\gamma_b(FSSD_mFSSD_m(S'(S_{r,s}) = 4$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(S'(S_{r,s})$. Soit f un γ_b-broadcast sur G. Soit v un sommet de $S_{r,s}$ tel que $e(v) = rad(G) = 4 = f(v)$, d'après la Proposition **(2.9)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 4$. ∎

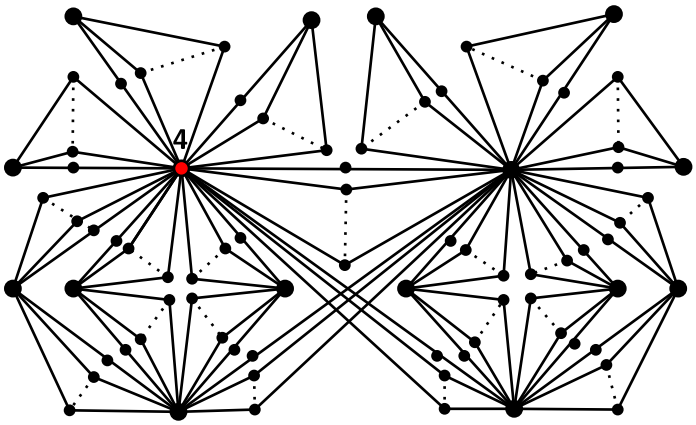


FIGURE 3.12: Un graphe $FSSD_m(S'(S_{r,s}))$, $\gamma_b(FSSD_mFSSD_m(S'(S_{r,s}) = 4$.

3.5.5 Domination broadcast de $FSSD_m(K_n)$

Proposition 3.12 *Pour $n \geq 3$, $m \geq 1$,*

$$\gamma_b(FSSD_m(K_n)) = \begin{cases} 2 & si\ n = 3\ et\ m = 1 \\ 3 & si\ n \geq 3\ et\ m \geq 1 \end{cases}$$

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $FSSD_m(K_n)$. Premièrement, si $n = 3$ et $m = 1$, alors le graphe $FSSD_1(K_3)$ est également le graphe $S(G)$. Donc $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 2$. D'après le Théorème **(2.15)**, $\gamma_b(FSSD_1(K_3)) = 2$. Si $n \geq 3$ et $m \geq 1$, alors $min\{rad(G), \gamma(G)\} = rad(G) = 3$. D'après la Proposition **(2.12)**, $\gamma_b(FSSD_m($ $K_n)) = 3$. ■

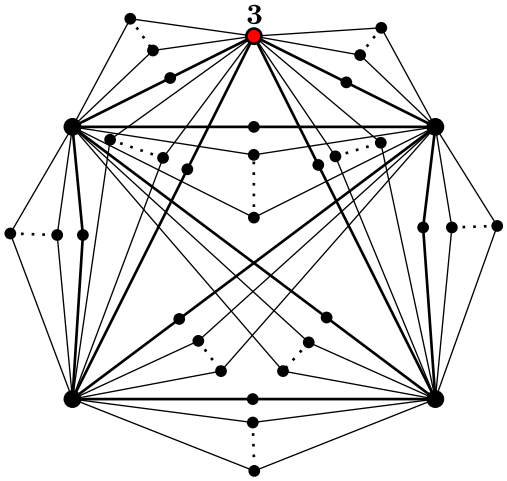


FIGURE 3.13: Un graphe $FSSD_m(K_5)$, $\gamma_b(FSSD_m(K_5)) = 3$.

3.5.6 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n)$

Théorème 3.3 *Pour tous $n \geq 3$, $m \geq 1$,*

$$\gamma_b(FSSD_m(C_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{2n}{3} \rceil & si\ m = 1 \\ \lceil \frac{3n}{4} \rceil & si\ m \geq 2 \end{cases}$$

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $FSSD_m(C_n)$. Si $m = 1$, alors d'après le Théorème **(2.17)**, $\gamma_b(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ et puisque le graphe $FSSD_1(C_n)$ est isomorphe à C_{2n}, $\gamma_b(G) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil = \gamma_b(C_{2n})$. Si $m \geq 2$, alors on démontre par récurrence sur n que

$\gamma_b(G) = \lceil \frac{3n}{4} \rceil$. On distingue trois cas :

Cas 1 :

$$\begin{aligned} 4k+3 &\leq n \leq 4k+4 \Rightarrow \gamma_b(G) = 3(k+1), k \geq 0 \\ 3\times 4k + 3\times 3 &\leq 3n \leq 3\times 4k + 3\times 4 \\ &\Leftrightarrow 12k+9 \leq 3n \leq 12k+12 \\ &\Leftrightarrow 3k + \frac{9}{4} \leq \frac{3n}{4} \leq 3k+3 \\ &\Leftrightarrow \left\lceil 3k+\frac{9}{4} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil \leq \lceil 3k+3 \rceil \\ &\Leftrightarrow 3k+3 \leq \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil \leq 3k+3. \end{aligned}$$

Donc $\gamma_b(G) = \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil = 3k+3$, $k \geq 0$. Il ne reste qu'à démontrer par récurrence que $\gamma_b(G) = \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$ pour tout n, $4k+3 \leq n \leq 4k+4$, $(k \in \mathbb{N})$...(*).

Si $4k+3 \leq n \leq 4k+4$, alors $\begin{cases} \gamma_b(FSSD_m(C_{4k+3})) = \left\lceil \frac{3(4k+3)}{4} \right\rceil = 3k+3 \\ \gamma_b(FSSD_m(C_{4k+4})) = \left\lceil \frac{3(4k+3)}{4} \right\rceil = 3k+3 \end{cases}$

Montrons que (*) est vrai pour $k+1$.

Si $n = 4(k+1)+3$, alors $\gamma_b(C_{4(k+1)+3}) = \left\lceil \frac{3(4(k+1)+3)}{4} \right\rceil = 3(k+1)+3$.

Si $n = 4(k+1)+4$, alors $\gamma_b(C_{4(k+1)+4}) = \left\lceil \frac{3(4(k+1)+4)}{4} \right\rceil = 3(k+1)+3$.

D'ou, la Théorème est vrai a l'ordre $k+1$ et $\gamma_b(G) = \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$ si $4k+3 \leq n \leq 4k+4$

Cas 2 :

Si $n = 4k+5$, alors $\gamma_b(G) = 3k+4$, $k \geq 0$

Si $n = 4k+5$, alors $3n = 3\times 4k + 3\times 5$

et donc $\frac{3n}{4} = 3k + \frac{15}{4}$.

D'où : $\left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil = 3k + \left\lceil \frac{15}{4} \right\rceil = 3k+4$

Par conséquence :$\gamma_b(G) = \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil = 3k+4$ si $n = 4k+5$

Cas 3 :

Si $n = 4k+6$, alors $3n = 3\times 4k + 3\times 18$

$\Rightarrow \frac{3n}{4} = 3k + \frac{18}{4}$

$\Rightarrow \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil = 3k+5$

D'où :$\gamma_b(G) = \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil = 3k + 5$ si $n = 4k + 5, k \geq 0$.

Par conséquence, des cas 1,2 et 3, $\gamma_b(G) = \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$ et le Théorème est démontré. ■

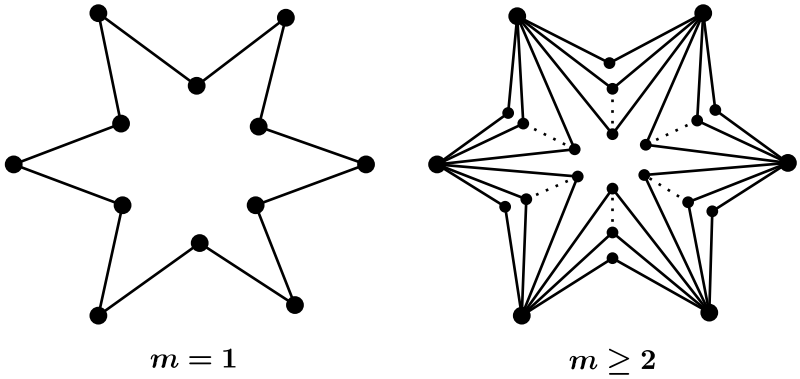


FIGURE 3.14: Les graphes $FSSD_1(C_6)$ et $FSSD_m(C_6)$, $m \geq 2$.

3.5.7 Domination broadcast de $FSSD_m(G_n)$

Proposition 3.13 *Pour $n \geq 1$, $\gamma_b(FSSD_m(G_n)) = 5$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(G_n)$. Soit f un γ_b-broadcast sur G, soit v un sommet de G_n tel que $e(v) = rad(G) = 5 = f(v)$. D'après la Proposition (2.9), $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 5$. ■

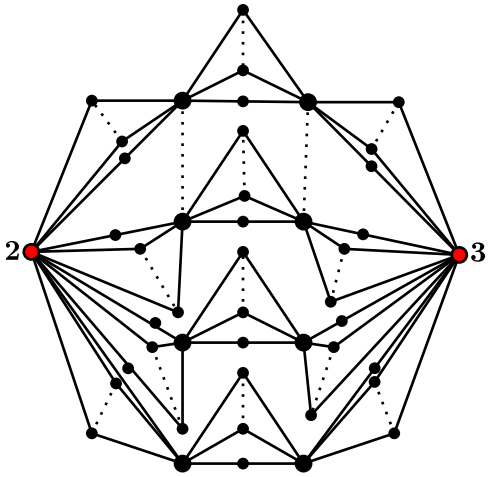


FIGURE 3.15: Un graphe $FSSD_m(G_n)$, $\gamma_b(FSSD_m(G_n)) = 5$.

3.5.8 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n^p)$

Proposition 3.14 *Pour $n \geq 2$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$, $\gamma_b(FSSD_m(C_n^p)) = n$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $FSSD_m(C_n^p)$. Alors d'après le Théorème **(2.21)**, $\gamma_b(C_n^p) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et puisque le graphe $FSSD_m(C_n^p)$ est isomorphe à C_{2n}^p, $\gamma_b(G) = n = \gamma_b(C_{2n}^p)$. ■

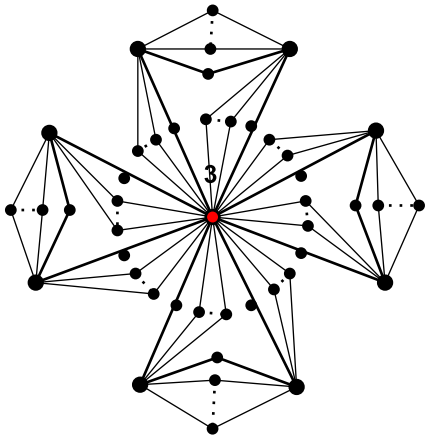


FIGURE 3.16: Un graphe $FSSD_m(C_3^4)$, $\gamma_b(FSSD_m(C_3^4)) = 3$.

3.6 Domination broadcast d'un graphe subdivisés super finis d'un Prisme complémentaire

3.6.1 Domination broadcast de $FSSD_m(K_{1,n}\overline{K}_{1,n})$

Proposition 3.15 *Pour $n \geq 2$, $\gamma_b(FSSD_m(K_{1,n}\overline{K}_{1,n})) = 5$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(K_{1,n}\overline{K}_{1,n})$. Soit f un γ_b-broadcast sur G. Soit v un sommet de $K_{1,n}$ tel que $e(v) = rad(G) = 5 = f(v)$. D'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 5$. ■

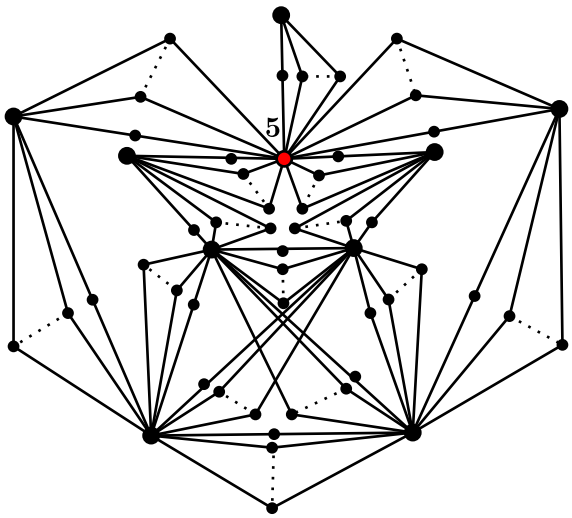


FIGURE 3.17: Un graphe $FSSD_m(K_{1,4}\overline{K}_{1,4})$, $\gamma_b FSSD_m(K_{1,4}\overline{K}_{1,4})) = 5$.

3.6.2 Domination broadcast de $FSSD_m(S_{r,s}\overline{S}_{r,s})$

Proposition 3.16 *Pour $s \geq 2$ et $r \geq 2$, $\gamma_b(FSSD_m(S_{r,s}\overline{S}_{r,s})) = 5$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(S_{r,s}\overline{S}_{r,s})$. Soit f un γ_b-broadcast sur G et soit v un sommet de $S_{r,s}$ tel que $e(v) = rad(G) = 5 = f(v)$, d'après la Proposition (2.6), $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 5$. ■

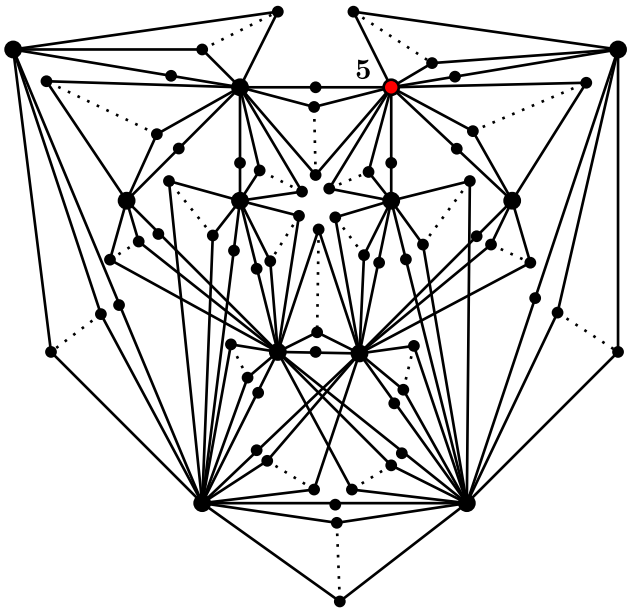


FIGURE 3.18: Un graphe $FSSD_m(S_{2,2}\overline{S}_{2,2})$, $\gamma_b FSSD_m(S_{2,2}\overline{S}_{2,2}) = 5$.

3.6.3 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n\overline{C}_n)$

Proposition 3.17 *Pour $n \geq 3$,*

$$\gamma_b(FSSD_m(C_n\overline{C}_n)) = \begin{cases} 4 & si \quad n = 3 \\ 5 & si \quad n \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. On note par $G(V, E)$ le graphe $FSSD_m(C_n\overline{C}_n)$.

Cas 1 : $n = 3$ et $m \geq 1$. Soit f un γ_b-broadcast sur G et soit v un sommet de G_n tel que $e(v) = rad(G) = 4 = f(v)$. D'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 4$.

Cas 2 : Si $n \geq 4$, alors d'après le Théorème **(2.12)**, $\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{diam(G)+1}{3} \rceil$. Soit $f : V \longrightarrow \{0, 1, ..., diam(G)$ un γ_b sur G et soit v un sommet de G tel que $f(v) = e(v) = 5 = rad(G)$. D'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. D'où $\gamma_b(G) = f(v) = 5$.

■

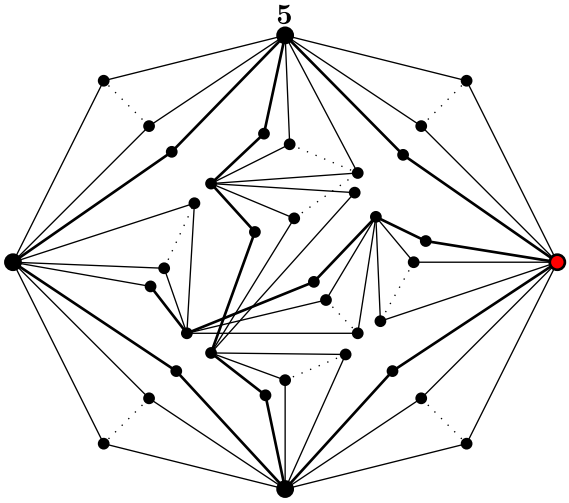


FIGURE 3.19: Un graphe $FSSD_m(C_4\overline{C}_4)$, $\gamma_b(FSSD_m(C_4\overline{C}_4)) = 5$.

3.7 Domination broadcast d'un graphe subdivisé super fini d'une Couronne voisinage

3.7.1 Domination broadcast de $FSSD_m(K_{1,n}\bigstar P_p)$

Proposition 3.18 *Pour tous $n \geq 2$, $p \geq 2$, $m \geq 1$, $\gamma_b(FSSD_m(K_{1,n}\bigstar P_p)) = 5$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(K_{1,n}\bigstar P_p)$. Soit f un γ_b-broadcast sur G et v un sommet de $K_{1,n}$ tel que $e(v) = rad(G) = 5 = f(v)$. D'après la Proposition (2.6), $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 5$. ■

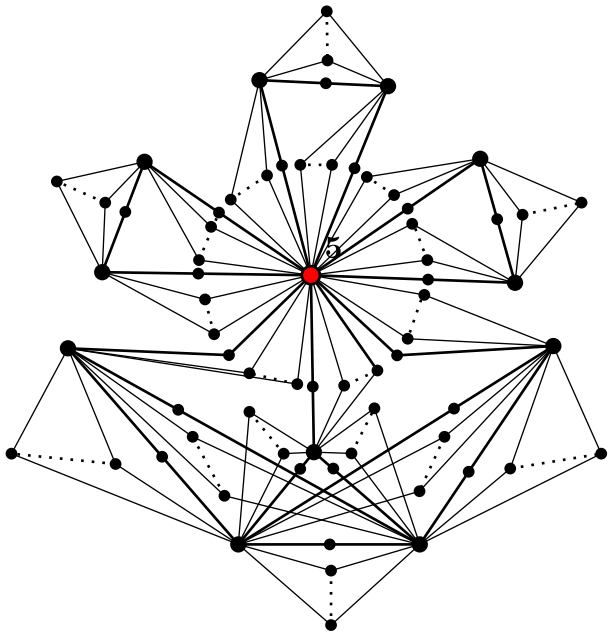


FIGURE 3.20: Un graphe $FSSD_m(K_{1,3}\bigstar P_2)$, $\gamma_b(FSSD_m(K_{1,3}\bigstar P_2)) = 5$.

3.7.2 Domination broadcast de $FSSD_m(K_n\bigstar P_p)$

Proposition 3.19 *Pour tout $n \geq 3$, $p \geq 2$, $m \geq 1$, $\gamma_b(FSSD_m(K_n\bigstar P_p)) = 5$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(K_n\bigstar P_p)$. Soit f un γ_b-broadcast sur G et v un sommet de K_n tel que $e(v) = rad(G) = 5 = f(v)$, d'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 5$. ■

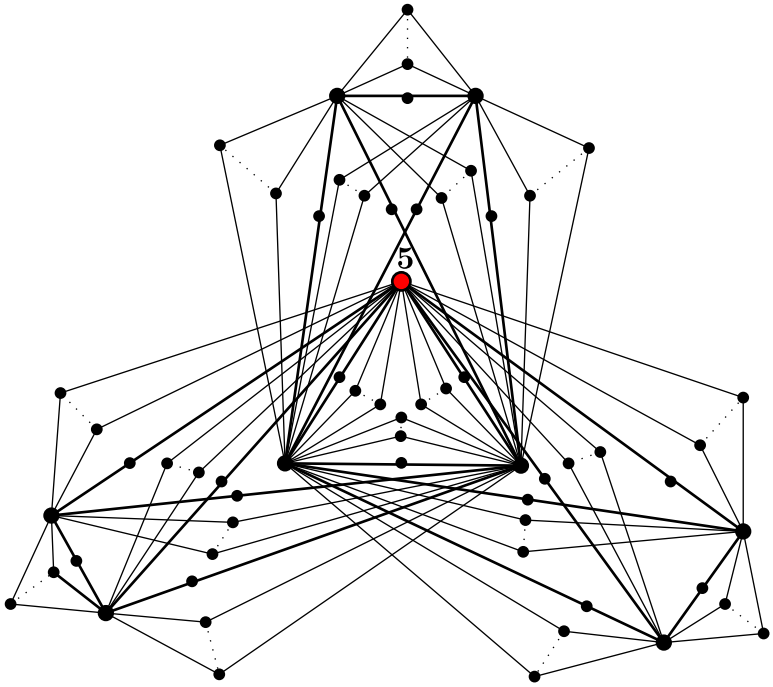


FIGURE 3.21: Un graphe $FSSD_m(K_3 \bigstar P_2)$, $\gamma_b(FSSD_m(K_3 \bigstar P_2)) = 5$.

3.7.3 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$

Théorème 3.4 *Pour tout $n \geq 2$, $p \geq 2$, $m \geq 1$,*

$$\gamma_b(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) = \begin{cases} 5 & si\ n = 3 \\ n & si\ n\ impair \\ n+1 & si\ n\ pair \end{cases}$$

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$. Premièrment, $n = 3$. Soit f un γ_b-broadcast sur G et v un sommet de C_n. Puisque $e(v) = rad(G) = 5 = f(v)$, d'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 5$. Pour n est pair, soit f un γ_b-broadcast sur G et v un sommet de C_n tel que $e(v) = rad(G) = n+1 = f(v)$, d'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = n+1$. Si n est impair, alors $\gamma_b(G) = n$ car $e(v) = rad(G) = n = f(v)$, tel que v est un sommet de C_n, $V_f^+ = \{v\}$. D'après la Proposition **(2.6)**, $\gamma_b(G) = n + 1$. ■

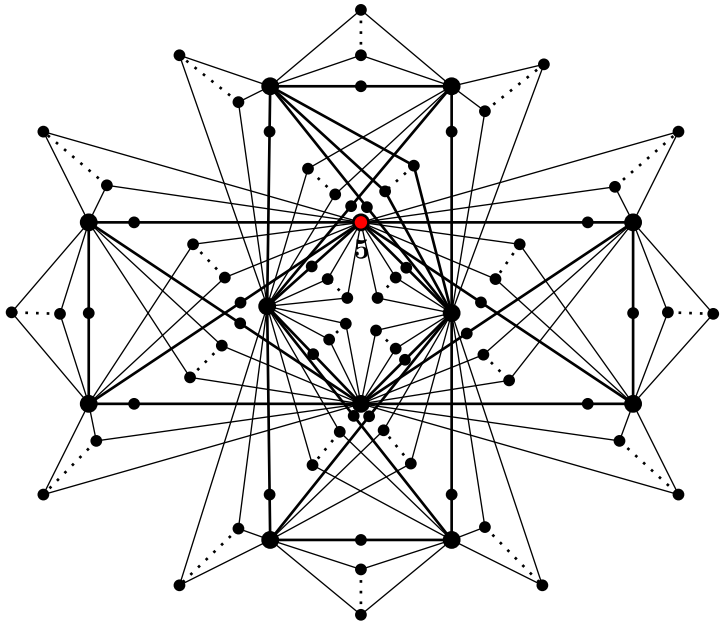


FIGURE 3.22: Un graphe $FSSD_m(C_4 \bigstar P_2)$, $\gamma_b(FSSD_m(C_4 \bigstar P_2)) = 5$.

3.8 Domination broadcast d'un graphe subdivisé super fini d'une couronne de deux graphes

3.8.1 Domination broadcast de $FSSD_m(K_{1,n} \odot P_p)$

Proposition 3.20 *Pour $n \geq 2$, $p \geq 2$, $m \geq 1$, $\gamma_b(FSSD_m(K_{1,n} \odot P_p)) = 5$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(K_{1,n} \odot P_p)$. Soit f un γ_b-broadcast sur G et v un sommet de $K_{1,n}$ tel que $e(v) = rad(G) = 5 = f(v)$. D'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 5$. ∎

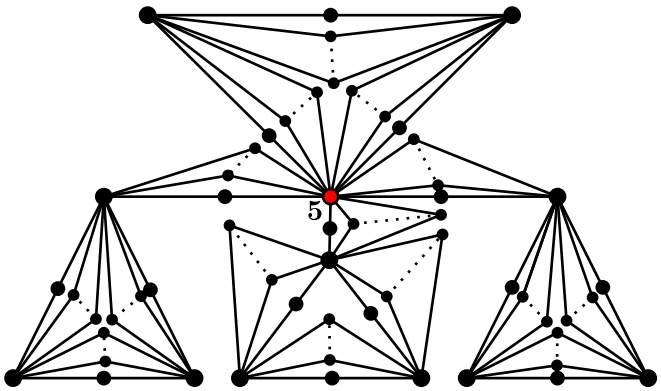


FIGURE 3.23: Un graphe $FSSD_m(K_{1,3} \odot P_2)$, $\gamma_b(FSSD_m(K_{1,3} \odot P_2)) = 5$.

3.8.2 Domination broadcast de $FSSD_m(K_n \odot P_p)$

Proposition 3.21 *Pour $p \geq 2$, $n \geq 3$, $m \geq 1$, $\gamma_b(FSSD_m(K_n \odot P_p)) = 5$.*

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(K_n \odot P_p)$, Soit f un γ_b-broadcast sur G et v un sommet de K_n tel que $e(v) = rad(G) = 5 = f(v)$, d'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par suite $\gamma_b(G) = f(v) = 5$. ■

3.8.3 Domination broadcast de $FSSD_m(C_n \odot P_p)$

Théorème 3.5 *Pour tous $n \geq 3$, $p \geq 2$, $m \geq 1$,*

$$\gamma_b(FSSD_m(C_n \odot P_p)) = \begin{cases} n+3 & si\ n\ pair \\ n+2 & si\ n\ impair \end{cases}$$

Preuve. On note par $G(V, E)$, le graphe $FSSD_m(C_n \odot P_p)$. Premièrement : n est pair. On a $rad(G) = n + 3$. Soit v un sommet de C_n tel que $e(v) = rad(G)$. Soit f un γ_b-broadcast sur G tel que $e(v) = rad(G) = f(v)$ et d'après la Proposition **(2.9)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par conséquence $\gamma_b(G) = f(v) = n + 3$. Deuxièment : n est impair. On a $rad(G) = n + 2$. Soit v un sommet de C_n tel que $e(v) = rad(G)$. Soit f un γ_b-broadcast sur G tel que $e(v) = rad(G) = f(v)$ et d'après la Proposition **(2.6)**, $V_f^+ = \{v\}$. Par conséquence $\gamma_b(G) = f(v) = n + 2$.

■

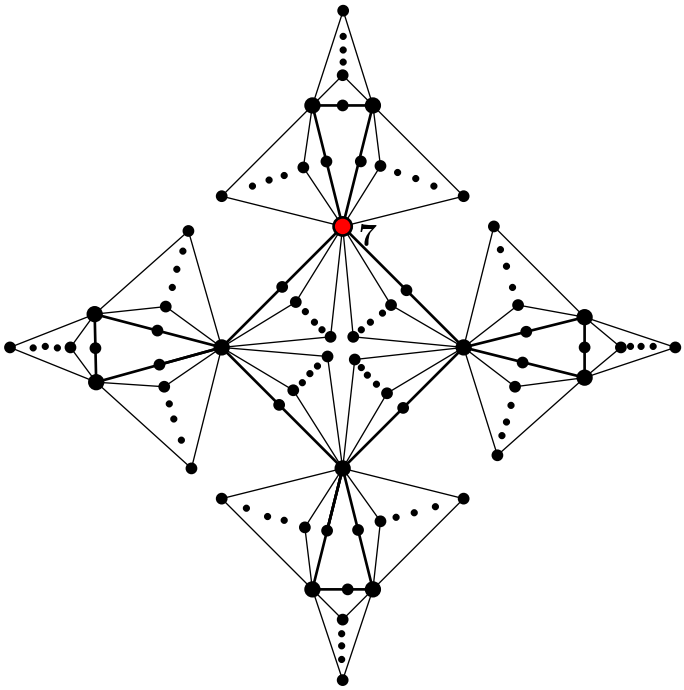


FIGURE 3.24: Un graphe $FSSD_m(C_4 \odot P_2)$, $FSSD_m(C_4 \odot P_2) = 7$.

3.9 Conclusion

On a déterminé le nombre γ_b à plusieurs types de graphes. Dans ce sens, on a utilisé les valeurs exactes obtenues dans ce domaine par les chercheurs à la démonstration de nos résueltats. Nous concluons que les résultats obtenues sont des bon résultats. Dans la plus part des résultats obtenues dans ce chapitre, la méthode de la démonstration par récurrence est la méthode la plus utilisée.

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés au problème de la détermination du nombre de la domination broadcast de quelques types de graphes. Généralement, la détermination de $\gamma_b(G)$ est un problème difficile pour un graphe quelconque

La démarche scientifique adoptée dans ce mémoire, se résume comme suit.
En premier lieu, nous avons présenté quelques nouveaux résultats sur le nombre de la domination broadcast.

Nous avons ensuite abordé la notion de la domination broadcast qui a été introduite par *D. J. Erwin* [12], et nous avons déterminé ce nombre (γ_b) pour quelques types de graphes particulier.

En suite, nous avons déterminé le nombre de la domination broadcast pour les graphes apparus en deuxième chapitre et pour d'autres graphes, en particulier, les graphes subdivisés super finis ($FSSD_m$).

On conclut que la détermination de ce nombre en général n'est pas facile pour certains types de graphes, et que les résultats obtenus en ce mémoire sont des bons résultats.

Comme perspective à notre travail, nous proposons de :

— Trouver d'autres bornes de $\gamma_b(G)$.

— Déterminer le nombre de la domination broadcast du graphe $FSSD_m(P_q \boxtimes P_n)$.

— Déterminer le nombre de subdivision de la coloration broadcast des graphes $FSSD_m(P_q \boxdot P_n)$.

Liste des abréviations

$V(G)$ L'ensemble des sommets du graphe G.

$E(G)$ L'ensemble des arêtes du graphe G.

$|V| = n$ Le cardinal de V ou l'ordre du graphe G (le nombre de sommets).

$|E| = m$ Le cardinal de E ou la taille du graphe G (le nombre d'arêtes).

$G(V, E)$ Le graphe G, composé de l'ensemble des sommets V et de l'ensemble des arêtes E.

$G(V, E)$ Un graphe simple non orienté.

$G^{'}(V^{'}, E^{'})$ Un graphe simple non orienté tel que $V^{'} \subseteq V$ et $E^{'} \subseteq E$.

$d_G(v)$ Le degré d'un sommet v d'un graphe G (nombre de voisins de v).

$d(u, v)$ La distance entre les sommets u et v.

$e(v)$ L'excentricité d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$.

$diam(G)$ Le diamétre d'un graphe G.

$rad(G)$ Le rayon d'un graphe G.

$\delta(G)$ ou δ_G Le degré minimum dans le graphe G.

$\Delta(G)$ ou Δ_G Le degré maximum dans le graphe G.

$\overline{G}(V, \overline{E})$ Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$.

Remarque : $\overline{G} = (V(G), V(G)^2 - E(G))$.

K_n Le graphe complet d'ordre n.

Remarque :$(n2) = ((n(n-1))/2)$ arêtes

K_p Un clique de taille p.

$\omega(G)$ Le cardinal d'une clique maximum de G

$K_{p,q}$ Le graphe biparti-complet avec deux partitions de n et m sommets respectivement.

Remarque : $(p \times q)$ arêtes.

T Un arbres.

$h(T)$ La hauteur de l'arbre T.

$K_{1,n}$ Un étoile.

$K^*_{1,k}$ Une étoile subdivisée.

$S_{r,s}$ Une double étoile.

$G[A]$. Le sous-graphe de G induit par l'ensemble de sommet $A \subseteq V(G)$.

C_n Un cycle de n sommets et de longeur n.

P_n Un chemin de n sommets.

S^n_m Graphe swing.

$S^{'}(G)$ Graphe de splitting d'un graphe G.

C^p_n Graphe windmill.

$LP(n,k)$ Un graphe de la lollipop.

$\alpha(G)$ Le cardinal maximum d'un stable minimal.

$\beta(G)$ La taille d'un couplage maximum dans G.

γ_b Le nombre de domination broadcast inférieure.

$\Gamma(G)$ Le nombre de domination broadcast supérieur.

$G = H \circ K_1$ Couronne d'un graphe H.

$G\overline{G}$ Le prisme complémentaire d'un graphe G.

$G_1 \bigstar G_2$ Couronne voisinage de deux graphes G_1 et G_2.

$G = G_1 \odot G_2$ Couronne de deux graphes G_1 et G_2.

$FSSD_m(G)$ Graphe de subdivision super fini de G.

$\lceil x \rceil$ Partie entière supérieure de x : désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x

$\lfloor x \rfloor$ Partie entière inférieure : désigne le plus petit entier inférieure ou égal à x.

Bibliographie

[1] **St. Aloysius College**, **Edathua**, **Kerala**. The spectrum of neighborhood corona of graphs, Kerala, India, 689573.

[2] **W.W. Ball Rouse**, Mathematical recreation and problem of past and present times, Mac Millan, London, 1892.

[3] **C. Berge**, Graphes et Hypergraphes, Paris Dunod, 1971.

[4] **I. Bouchemakh**, **R. Sahbi**, On a Conjecture of Erwin, LAID3 Laboratory, Faculty of Mathematics, University of Sciences and Technology Houari Boumediene, BP 32, Bab Ezzouar 16111, Algiers, Algeria.

[5] **B.Breasâr** and **S. Spacapan**, Broadcast domination of products of graphs, University of Maribor, Slovenia. March 12, 2006.

[6] **K.CHABANE** et **A.ZAHED**, Sur le nombre de subdivision de la domination Broadcast, Diplôme de Master en Analyse et Modélisation Mathématique, juin 2015.

[7] **E.J. Cockayne**, **S. Herkek**, **C.M. Mynhardt**, Broadcasts and domination in trees, Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria, Discrete Mathematics, 2009.

[8] **E.J. Cockayne** and **S.T. Hedetniemi**, Towards a theory of domination, Networks, 7 : 247-261, 1977.

[9] **S.F. De Jaenisch**, Trait des applications de l'analyse mathématique au jer des Echecs, Petrograd, 1862.

[10] **J.E. Dunbar**, **D.J. Erwin**, **T.W. Haynes**, **S.M. Hedetniemi**, **S.T. Hedete-niemi**, Broadcasts in graphs, Discrete Applied Mathematics, 154 59-75, 2006.

[11] **D.J. Erwin**, Cost Domination in Graphs, Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.

[12] **D.J. Erwin**, Dominating brodcast in graphs, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 42 : 89-105, 2004.

[13] **B. Gayathri**, **M. Duraisamy** and **M.T. Selvi**, Proceedings of the internation al conference on mathematics and computer science, ICMCS, Chennai, India, Volume 1,119-124, 2007.

[14] **T.W. Haynes**, **S.T. Hedetniemi**, **P.J. Slater**, Fundamentals of domination in graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.

[15] **S. Herke**, Dominating broadcast in graphs, Master's dissertation, University of Victoria, 2009.

[16] **S. Herke**, **C.M. Mynhardt**, Radial trees, Discrete Math. 309 :5950-5962, 2009.

[17] **A. Ilic**, On the extremal properties of the average eccentricity, arXiv : 1106-2987, 15 juin 2011.

[18] **S. Koilraj**, **S. K. Ayyaswamy**, Proceedings of the international conference on mathematics and computer science, Chennai, India, Volume 1 ; 79-83, 2007.

[19] **O.Ore**, Theory of graph, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38 (Amer. Math. Soc. Prov-idence, RI), 1962.

[20] **R. Sahbi**, Nombre de broadcast domination dans les arbres. Mémoire de magister, USTHB. 2009.

[21] **S.M. Seager**, Dominating broadcast of caterpillars, Ares Combine. 88 : 307-319, 2008.

[22] **K.W. SOH** and **K.M. KOH**, Broadcast domination in graph products of paths, Australasian journal of combinatorics volume 59(3), 342-351, 2014.

[23] **E. Sopena**, Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs, University of Bordeaux, June 2015.

[24] **O. Togni**, On Packing Colorings of Distance Graphs, arXiv :1011.0971v1 [cs.DM] 3 Nov 2010.

[25] **S.K. Vaidya** and **P. L. Vihol**, Discussion on Some Interesting Topics in Graph Theory, Ph.DThesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[26] **A. William**, **S. Roy**, Packing Chromatic Number of Certain Trees and Cycle Related Graphs Chennai 600034, INDIA.

[27] **A.M. Yaglom** and **A.M. Yaglom**, Challenging mathematical problems with elementary solution, Combinatorial analyses and probability theory, San Franciscov, volume 1, 1964.