REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Dr. Yahia Farés de MEDEA

جامعة الدكتور يحيى فارس المدية

جامعة الدكتور يحيى فارس

Faculté de Technologie
Département du Génie Mécanique

Projet de fin d'études de Master

DOMAINE : Sciences et Technologie
FILIERE : Génie Mécanique
SPECIALTE : Construction Mécanique

Estimation de la fiabilité d'une turbine à gaz à l'aide de la distribution log-normale

Proposé par : **Dr Mouloud GUEMANA**

Présenté par : **M. Mahdi MEDJBER**
M. Oualid RAHMAOUI

2020/2021

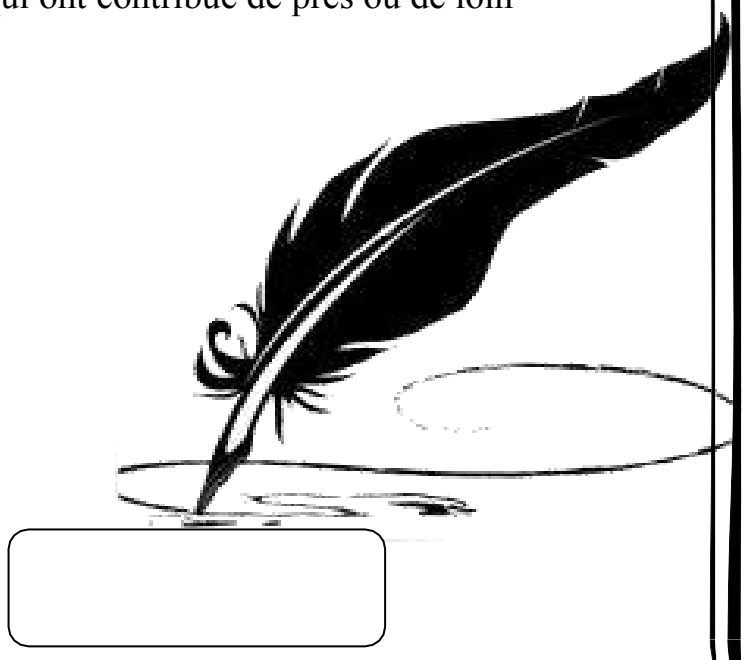
Remerciement

Nos remerciements les plus sincères vont en premier lieu, A notre encadreur Mr. GUEMANA Mouloud pour ses conseils lucide set pertinents, sa patience et son précieux suivi tout au long de la réalisation de ce travail. Sa disponibilité, ses qualités pédagogiques et humaines et ses compétences nous ont apporté un encadrement déterminant dans toutes les phases de cetravail.

Nous remercions chacun des membres du jury d'avoir consacré une partie de leur temps a la lecture de ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont porté ace travail.

Nos remerciements s'étendent à tous nos enseignements et les membres des départements de génie mécaniques de l'université de MEDEA

Ainsi qu'à tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

Mes chers mère et mon père, pour leurs soutient moral et financier et d'être la lumière de ma vie, qui m'ont toujours encouragé pour terminer mes études, en leur espérant une longue vie et que Dieu les gardes.

A mes sœurs, qui me stimulent. À tous mes proches collèges, Sans exception.

*A toutes la famille ****RAHMAOUI*** ** et* ***DAOUD*****sans exception. A tous ceux qui sont proches de mon cœur et que je n'ai pas cité le nom.*

Mes enseignants du primaire, jusqu'à l'université,

À toute personnes qui m'ont encouragé ou aidé au long de mes études et à tous ceux



RAHMAOUI

Je dédie ce modeste travail à

Mes très chers mère et mon père , pour leurs soutient moral et financier et d'être la lumière de ma vie, qui m'ont toujours encouragé pour terminer mes études, en leur espérant une longue vie et que Dieu les gardes.

A mes sœurs, qui me stimulent. À tous mes proches collèges, Sans exception.

*A toutes la famille ****Medjber*** ** et* ***Aziri*****sans exception. A tous ceux qui sont proches de mon cœur et que je n'ai pas cité le nom.*

Mes enseignants du primaire, jusqu'à l'université,

À toute personnes qui m'ont encouragé ou aidé au long de mes études et à tous ceux



MEDJBER

Résumés

ملخص:

حاليًا، توفر منطقة الموثوقية مجموعة قوية من الأدوات لتحسين العمليات لعمليات المعدات الصناعية. ومع ذلك، تعتمد موثوقية العمليات الصناعية على تطوير أدوات تسمح بتقدير عملية التدهور في هذه الأنظمة وتحليل توافرها. ضمن هذا الإطار، يقع عمل هذه الأطروحة في نطاق الاستكشاف نهج الموثوقية المطبقة على التوربينات الغازية واقتراح أدوات جديدة للنمذجة في أحسن الأحوال موثوقية نظام التوربينات الغازية، من أجل زيادة سلامتها واستنتاج المستقبل القرارات التي تؤثر على حالة تشغيل هذه المعدات الصناعية. مصلحة النهج المقترح في هذه الأطروحة، كان العمل هو إنشاء نموذج قوي من الموثوقية، والأكثر كفاءة توربينات الغاز وضمان ربحيتها. في الواقع الصناعي، تحليل وتقييم تم تصميم موثوقية توربينات الغاز لمنع الأعطال غير المتوقعة والأضرار التي تلحق بها من أجل زيادة توافرها والسماح لها بالحصول على إنتاجية جيدة.

Abstract

Currently, the reliability field provides a set of robust tools to optimize the operations of industrial equipment operations. However, the reliability of industrial processes is based on the development of tools for the estimation of the degradation process in these systems by the analysis of their availability. It is in this context that fits the work of this thesis to develop and explore the reliability approaches applied to gas turbines and propose new distributions to model the degradation in gas turbine system, to increase their safety and to infer future decisions affecting the operating state of the industrial equipment. The interest of the approach proposed in this thesis was developed a robust model of reliability, as efficient as possible for gas turbines and ensure their profitability. In industrial reality, analysis and evaluation of gas turbine reliability approaches is designed to avoid failures and damage, in order to increase their availability and allow him to have a good productivity.

Résumé

Actuellement, le domaine de fiabilité fournit un ensemble d'outils solides pour optimiser les opérations d'exploitations des équipements industriels. Cependant, la fiabilité des processus industriels est basée sur le développement d'outils permettant l'estimation du processus de dégradation dans ces systèmes et l'analyse de leurs disponibilités. C'est dans ce cadre, que s'inscrit les travaux de cette thèse pour l'élaboration l'exploration des approches de fiabilité appliquées a des turbines a gaz et de proposer des nouvelles outils pour modéliser au mieux la fiabilité de système de turbine a gaz, afin d'augmenter leurs sureté et pour déduire les futures décisions, affectant l'état de fonctionnement de cet équipement industriel. L'intérêt de l'approche propose dans ce travail de thèse a été d'établir un modèle robuste de fiabilité, le plus performant possible pour les turbines à gaz et de garantir leurs rentabilités. En réalité industrielle, l'analyse et l'évaluation des approches de fiabilité des turbines a gaz est conçus pour éviter les défaillances et les endommagements imprévues de ces systèmes, dans le but d'augmenter leurs disponibilités et de leurs permettre d'avoir une bonne productivité.

Mots clés : Fiabilité, Disponibilité, Pétrole et gaz, modélisation de la fiabilité, Weibull, Turbine à gaz.

Table des Matières

REMERCIEMENT

DEDICACES

RESUMES

TABLE DES MATIERES

LISTE DE FIGURES

LISTE DE TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I

MODELES STATISTIQUES

I.1 INTRODUCTION 18

I.1.1 Définitions générales [1] 18

I.2 VARIABLES QUANTITATIVES(OU NUMERIQUES) 19

I.3 VARIABLES QUALITATIVES 19

I.4 VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES 20

I.4.1 Loi de Poisson 20

I.4.2 Loi uniforme 20

I.4.2.1 Définition analytique 21

I.4.3 Loi de Bernoulli de paramètre p 21

I.4.4 Lois géométrique, de Pascal, binomiale négative 21

I.4.5 Loi multinomiale 22

I.4.5.1 Description 22

I.4.5.2 Définition analytique 22

I.5 VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES 23
I.5.1 Loi uniforme sur [0, a] *23*
I.5.2 Loi exponentielle de paramètre λ *24*
I.5.3 La loi log-normale *24*
I.5.4 loi de Cauchy *25*
I.5.5 Loi de Weibull *25*
I.6 REGRESSION LINEAIRE 26
I.6.1 Estimation *27*
I.6.2 Test de l'utilité des régresseurs *29*
I.7 TESTS DE L'HYPOTHESE 30
I.7.1 Procédure de test *31*
I.7.2 Cas Gaussien *32*
I.7.3 Tests d'hypothèses simples *34*
I.7.4 Tests du X^2 ..... *36*
I.8 CONCLUSION 37

CHAPITRE II

FIABILITE DES EQUIPEMENTS MECANIQUES PAR MODELE DE WEIBULL

II.1 INTRODUCTION 39
II.2 CONCEPTS DE LA FIABILITE 39
II.2.1 Définitions *39*
II.2.1.1 Taux de défaillance 39
II.2.1.2 Durée de vie 40
II.2.1.3 Fonction de la fiabilité 40
II.2.1.4 Fonction de répartition 41
II.2.1.5 Fonction de densité de probabilité 41
II.2.2 Paramètres de la fiabilité MTBF, MTTR, MTTA *42*
II.2.2.1 Moyenne des temps de bon fonctionnement MUT(Mean Up Time) 42
II.2.2.2 Temps moyen pour réparer MTTR (Mean Time To Repair) 42

II.2.2.3 Taux de réparation μ 42
II.2.2.4 La moyenne des temps de fonctionnement ou moyenne de temps entre pannes MTBF (Mean Time Between Failures) 43
II.2.2.5 La relation entre MUT, MTBF et MTTR 43
II.2.2.5.1 Pour le matériel réparable.....43
II.2.2.5.2 Pour le matériel non réparable 44
II.2.2.6 Spécificité de la fiabilité en mécanique 44
II.2.2.7 Les différentes phases du cycle de vie d'un produit.....44
II.2.2.7.1 Taux de défaillance pour des composants électroniques.....45
II.2.2.7.2 Taux de défaillance pour des composants mécaniques.....46
II.2.2.8 Principales lois de probabilité utilisées en fiabilité.....47
II.3 LA LOI DE WEIBULL.....48
II.3.1 Introduction.....48
II.3.2 La loi de Weibull.....48
II.3.3 Fonction de fiabilité R (t).....49
II.3.4 Domaine d'application.....50
II.3.5 Papier de Weibull.....50
II.3.5.1.1 Echelles utilisées sur le papier de Weibull 51
II.4 CONCLUSION.....55

CHAPITRE III

DESCRIPTION D'UNE TURBINE A GAZ

III.1 INTRODUCTION.....58
III.1.1 Définition d'une turbine 58
III.2 DIFFERENTS TYPES DES TURBINES 59
III.2.1 Définition de turbine à vapeur 59
III.2.2 Définition de Turbine hydraulique:.....59
III.2.3 Définition de L'éolienne :.....59
III.3 TURBINES A GAZ 60

III.3.1 Historique des turbines à gaz *60*
III.3.2 Définition d'une turbine à gaz *61*
III.4 DOMAINES D'APPLICATION : 62
III.5 LES ELEMENTS D'UNE TURBINE A GAZ 62
III.5.1 Section compresseur *63*
III.5.2 Section combustion *63*
III.5.3 Section turbine 112443 ..... *64*
III.6 DIFFERENTS TYPES DE TURBINE A GAZ 64
III.6.1 Turbine à une ligne d'arbre *64*
III.6.2 Turbine à deux lignes d'arbre *65*
III.7 CLASSIFICATION DES TURBINES A GAZ (THERMOBYNAMIC TURBIN A GAZ) 65
III.7.1 D'après le mode de construction *66*
III.7.2 D'après le mode de travail: *67*
III.8 PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT D'UNE TURBINE A GAZ 68
III.9 D'APRES LE MODE DE FONCTIONNEMENT THERMODYNAMIQUE 69
III.10 PAR LE MODE DE FONCTIONNEMENT THERMODYNAMIQUE 70
III.11 DOMAINES D'UTILISATIONS DES TURBINES A GAZ 71
III.11.1 Aéronautique *71*
III.11.1.1 Turbocompresseur 71
III.11.1.2 Turbine à gaz d'avion 72
III.11.1.3 Moteur de turbopropulseur 72
III.11.1.4 Moteur de turbojet 73
III.11.1.5 Moteur d'avion nucléaire 73
III.11.2 Turbine à gaz pour des véhicules *74*
III.11.2.1 Automobiles 74
III.11.2.2 Locomotives ferroviaires 74
III.11.2.3 Suralimentation par les gaz d'échappement 74
III.11.3 Turbine à gaz pour la production d'énergie électrique *74*
III.11.4 Centrale nucléaire *75*

III.11.5 Utilisation des turbines à gaz dans les stations de réinjection dans un gisement de pétrole et de gaz *76*
III.12 AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES TURBINES A GAZ 76
III.12.1 Avantage des turbines à gaz *76*
III.12.2 Inconvénients des turbines à gaz *77*
III.13 CONCLUSION 77

CHAPITRE IV

ESTIMATION DE LA FIABILITE D'UNE TURBINE A GAZ A L'AIDE DE LA DISTRIBUTION LOG-NORMALE

IV.1 INTRODUCTION 79
IV.2 CALCUL LES PARAMETRES DE LOG NORMAL 79
IV.2.1 Modalisation de la fiabilité *79*
IV.2.2 Modélisation de la fiabilité des turbines à gaz *80*
IV.2.3 Calcul les paramètres de Weibull *84*
IV.3 RESULTATS 86
IV.3.1 Test (Kolmogorov Smirnov) *86*
IV.3.2 Exploitation les paramètres de WEIBULL *87*
IV.3.2.1 Le MTBF 87
IV.3.2.2 La densité de probabilité en fonction de MTBF : 87
IV.3.2.3 La fonction de répartition en fonction de MTBF : 87
IV.3.2.4 La fiabilité en fonction de MTBF 87
IV.3.2.5 e taux de défaillance en fonction de MTBF 87
IV.3.3 Calcul du temps souhaitable pour une intervention systématique *87*
IV.3.4 Étude de modèle de Wei bull *88*
IV.3.4.1 La fonction de la densité de probabilité 88
IV.3.4.2 Courbe de la densité de la probabilité f(t) 88
IV.3.4.3 Fonction de répartition F(t) 89
IV.3.4.4 La fiabilité 89

IV.3.4.5 Le taux de défaillance 90
IV.3.4.5.1 Analyse de la courbe 91
IV.4 COMPARAISON DE LA DISTRIBUTION LOG NORMAL AVEC LA DISTRIBUTION DE WIEBULL 91
IV.4.1 Comparaison des courbes 91
IV.4.2 Comparaisons de paramètres 92
IV.5 CONCLUSION 93

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Liste de figures

Figure I.5-1 23
Figure I.5-2 23
Figure I.5-3 densité de la loi log-normale 24
Figure I.5-4 27
Figure I.7-1 Test de deux hypothèses simples. 34
Figure II.2-1 Courbe en baignoire 41
Figure II.2-2 Courbes paramétriques de la fiabilité 42
Figure II.2-3 Chronogramme de la relation entre MUT,MTBF et MTTR pour un matériel réparable 44
Figure II.2-4 Chronogramme de MTTR pour un matériel non réparable 44
Figure II.2-5 Courbe en baignoire pour les composants électroniques 45
Figure II.2-6 La courbe du taux de défaillance en mécanique 49
Figure II.3-1 49
Figure II.3-2 Courbes théoriques de Weibull 50
Figure II.3-3 Papier de Weibull 52
Figure II.3-4 Recherche de gamma 52
Figure II.3-5 Papier de Weibull 52
Figure II.3-6 Recherche de bêta 52
Figure II.3-7 Fiabilité 53
Figure II.3-8 Fonction de répartition 54
Figure II.3-9 Taux de défaillance 54
Figure II.3-10 Les courbes de f(t) 55
Figure III.2-1 Différents types des turbines 59
Figure III.5-1 Les éléments d'une turbine à gaz 62
Figure III.6-1 Schéma d'une turbine à un seul arbre. 64
Figure III.6-2 Schéma d'une turbine à deux arbres 64
Figure III.7-1 classification des turbines à gaz 66
Figure III.7-2 Schéma d'une turbine à gaz mono-arbre. 66
Figure III.7-3 Schéma d'une turbine à gaz bi-arbre. 67
Figure III.7-4 Schéma d'une turbine à action et à réaction. 68

Figure III.8-1 Variation de la pression et de la température dans les différentes sections de la machine (Condition ISO).[15] 69
Figure III.10-1 Représentation du cycle ouvert et cycle fermé 70
Figure III.10-1 Représentation du cycle de régénération 71
Figure III.11-2 Les composants principaux d'un turboréacteur. [8] 72
Figure III.11-3 Avion nucléaire [8] 73
Figure III.11-4 Production d'électricité par turbine à gaz- cycle simple [7]. 75
Figure III.11-5 Centrale nucléaire de turbine à gaz à circuit fermé [10] 75
Figure III.11-6 Réinjection des gaz résiduels [10] 76
Figure IV.2-1 Tracé des probabilité des logarithmes des temps de défaillance 81
Figure IV.2-2 Densité Log-Normal des données de fiabilité de la turbine 83
Figure IV.2-3 Cumule de distribution Log-Normale 83
Figure IV.2-4 Rite hasard de distribution log-normal 84
Figure IV.3-1 Densité des données de distribution de wiebull 88
Figure IV.3-2 Courbe fonction de la fiabilité 89
Figure IV.3-3 Courbe fonction du taux de défaillance 90
Figure IV.4-1 courbe fonction de répartition de log normal et wiebull 91
Figure IV.3-4 La densité de log normal et wiebull 91
Figure IV.4-2 Rite du hasard de log normal et wiebull 92

Liste de Tableaux

Tableau I.4-1 21
Tableau I.4-2 22
Tableau IV.2-1 Données de défaillance d'une turbine à gaz 81
Tableau IV.2-2 Résultats des paramètres estimés 82
Tableau IV.2-3 calcul la Fonction de réparation réelle 85
Tableau IV.3-1 Test de Kolmogorov-Smirnov 86
Tableau IV.3-2 Calcul la fonction de la densité de probabilité 88
Tableau IV.3-3 Calcul la Fonction de répartition F(t) 89
Tableau IV.3-4 Calcul de la fiabilité 89
Tableau IV.3-5 Calcul le taux de défaillance 90
Tableau IV.4-1 Comparaison des paramètres de log normal avec wiebull 92

Introduction générale

La turbine à gaz à connu ces dernières années un développement considérable dans de nombreuses applications industrielles, et en particulier dans le domaine du transport du pétrole, où conçue avec deux lignes d'arbres et accouplée à une pompe centrifuge, elle offre une grande souplesse d'exploitation. L'évolution de la machine et son succès ont été conditionnés par l'amélioration des performances technique des turbines.

La maintenance des biens de production repose en grande partie sur l'état des mécanismes nécessaires au fonctionnement, personne n'ignore l'importance d'un entretien régulier pour la disponibilité des machines, mais lorsqu'il s'agit d'assurer la sécurité des biens, des personnes et de l'environnement, l'entretien s'avère notoirement insuffisant et nécessite des approches plus fines développées dans les stratégies de maintenance.

La maintenance optimale des machines tournantes en fonctionnement a une importance vitale pour assurer une production permanente et augmenter la durée de vie de ces machines.

Il est utilisé dans l'analyse de fiabilité générale pour les composants électroniques et mécaniques simples. Plusieurs d'autres distributions sont utilisées dans le domaine de la fiabilité, telles que la distribution gamma et Log-normale distribution et autres approches Dans cet article, nous nous intéressons à la modélisation de la fiabilité d'une turbine à gaz utilisant la distribution Log-Normale, qui se réfère, en général, à la fiabilité générale Analyse.

Le but de ce travail est d'estimer la fiabilité d'une turbine a gaz a l'aide de la distribution log normal

Notre mémoire est structurée en quatre chapitres, suivis d'une conclusion générale.

- Dans le premier chapitre on a présenté des concepts sur le modèles statistiques
- le deuxième chapitre on a présenté la fiabilité des équipements mécanique par modèle de Weibull
- Le troisième chapitre on a présenté la description d'une turbine a gaz

- Enfin, le quantième chapitre on a déterminer estimation de la fiabilité d'une turbine à gaz par un modèle de log-normal et wiebull.

Chapitre I

Modèles statistiques

I.1 Introduction

Les méthodes statistiques sont aujourd'hui utilisées dans presque tous les secteurs de l'activité humaine et font partie des connaissances de base de l'ingénieur, du gestionnaire, de l'économiste, du biologiste, de l'informaticien ... Parmi les innombrables applications citons dans le domaine industriel: la fiabilité des matériels, le contrôle de qualité, l'analyse des résultats de mesure et leur planification, la prévision, et dans le domaine de l'économie et des sciences de l'homme: les modèles économétriques, les sondages, les enquêtes d'opinion, les études quantitatives de marché, etc.

Nous allons tenter de préciser dans les paragraphes suivants les notions fondamentales de la statistique et les rapports qu'elle entretient avec la théorie des probabilités ainsi que ce qu'on entend par démarche statistique. [1]

I.1.1 Définitions générales [1]

Faire de la statistique suppose que l'on étudie un ensemble d'objets équivalents sur lesquels on observe des caractéristiques appelées « variables ».

Ainsi en contrôle de fabrication on prélèvera un ensemble de pièces dans une production homogène et on mesurera leur poids, leur diamètre. En marketing on étudiera les clients d .une entreprise en les décrivant par leurs caractéristiques sociodémographiques et leurs achats passés.

La notion fondamentale en statistique est celle de groupe ou d'ensemble d'objets équivalents que l'on appelle **population**. Ce terme hérité des premières applications de la statistique à la démographie est employé pour désigner toute collection d'objets à étudier ayant des propriétés communes. Ces objets sont appelés des individus ou unités statistiques.

La statistique traite des propriétés des populations ou de sous-populations plus que de celles d'individus particuliers:

Généralement la population à étudier est trop vaste pour pouvoir être observée exhaustivement : c'est évidemment le cas lorsque la population est infinie : par exemple l'ensemble de toutes les pièces métalliques que pourrait sortir une machine dans des conditions de fabrication déterminées, mais c'est aussi le cas lorsque les observations sont coûteuses (contrôle destructif entre autres).

L'élude de LOUS les individus d'une population finie s'appelle un recensement. Lorsque l'on n'observe qu'une de la population on parle de sondage, la partie étudiée s'appellent **I ‘échantillon**.

Chaque individu d'une population est décrit par un ensemble de caractéristiques appelées variables ou caractères. Ces variables peuvent être classées selon leur nature: [1]

I.2 Variables quantitatives(ou numériques)

Par exemple taille, poids, volume, s'expriment par des nombres réels sur lesquels les opérations arithmétiques courantes (somme, moyenne, ...) ont un sens. Certaines peuvent être **discrètes** (nombre fini ou dénombrable de valeurs) : nombre de défauts d'une pièce, de véhicules passant en une heure à un péage, etc. ou **continues** si toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$; sont acceptables. [1]

I.3 Variables qualitatives

S’exprimant par l'appartenance à une **catégorie** ou **modalité** d'un ensemble fini. Certaines sont purement **nominales:** par exemple type de traitement thermique subi par un alliage, catégorie socioprofessionnelle d'un actif (ouvrier, cadre, employé ...), d'autres sont **ordinales** lorsque l'ensemble des catégories est muni d'un ordre total; par exemple: très résistant, assez résistant, peu résistant. [1]

Le concept clé en statistique est la variabilité qui signifie que des individus en apparence semblables peuvent prendre des valeurs différentes : ainsi un processus industriel de fabrication ne fournît jamais des caractéristiques parfaitement constantes.

L'analyse statistique est pour l'essentiel une étude de la variabilité: on peut en tenir compte pour prévoir de façon probabiliste le comportement d'individus non encore observés, chercher à la réduire ou « l'expliquer» à l'aide de variables extérieures, ou chercher à l'augmenter dans le but de distinguer le mieux possible les individus entre eux.

I.4 Variables aléatoires discrètes

Définition

On appelle variable aléatoire discrète une application $X : \Omega \to F$ ou F est un ensemble dénombrable. Pour $x \in F$, on note de façon concise $\{X = x\}$ l'événement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$. La famille des nombres $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in F}$ s'appelle la loi de X. **Remarque .**

— En toute rigueur, pour pouvoir considérer $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in F}$, il faut imposer dans la définition que $\forall x \in F, \{X = x\} \in A$.

— En général l'ensemble F est égal $\acute{a}$ $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\acute{a}$ une partie de $\mathbb{Z}$.

— Notons que $(\{X = x\})_{x\in F}$ est une famille dénombrable d'´ev´enements deux `a deux disjoints t.q. S $x\in F$ $\{X = x\} = \Omega$. Donc par la propriété de σ-additivité, [2]

$$\sum_{x\in F} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in F}\{X = x\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

I.4.1 Loi de Poisson

Cette loi est une approximation de la loi binomiale quand *np* est petit et n grand (en pratique, $n \geq 50$ et $np \leq 10$). Une v.a. X de loi de Poisson de paramètre λ, notée P(λ), vérifie

$$\forall k \in N, P[X = k] = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{\lambda!}$$

L'espérance et la variance de X sont égales a λ. On utilise la loi de Poisson pour modéliser le nombre de tâches qui arrivent `a un serveur informatique pendant une minute, le nombre de globules rouges dans un ml de sang, le nombre d'accidents du travail dans une entreprise pendant un an... Dans le cas de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, le paramètre de la loi de Poisson est $\lambda = np$. [3]

I.4.2 Loi uniforme

Mis $\grave{a}$ part le prestige d$\hat{u}$ $\grave{a}$ son nom, la loi uniforme est la loi de l'absence d'information. Supposons qu'une v.a. X prenne les valeurs 1,2,...,n, mais que nous n'ayons aucune idée de la loi de probabilité de X ; dans ce cas, après justification, on peut affecter $\grave{a}$chaque valeur le même poids : *1/n*. [3]

Et $\forall k = 1, ..., n, P[X = k] = \frac{1}{n}$

I.4.2.1 Définition analytique

Le schéma d'échantillonnage peut être résumé dans le tableau suivant :

Tableau I.4-1

État	Probabilité	Tirage
"succès"	P	*x*
"échec"	1-P	*m-x*
Total	1	*m*

La probabilité s'écrit :

$$P(X = x) = c_m^x P^x (1-P)^{m-x}$$

On montre facilement que [4]

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

I.4.3 Loi de Bernoulli de paramètre *p*

C'est la loi d'une variable X ne pouvant prendre que les deux valeurs l ou 0 avec les Probabilités pet 1-p ;

X est la fonction indicatrice d'un événement A de probabilité p : [1]

$$E(X) = p$$

Comme $X^2 = X$, $E(X^2) = p$, d'où:

$$V(X) = p(1- p)$$

I.4.4 Lois géométrique, de Pascal, binomiale négative

La loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître l'événement de probabilité p :

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1} \qquad x = 1,2, \ldots, \infty$$

En posant q = 1- p, on trouve aisément:

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad V(X) = \frac{q}{p^2} \qquad \gamma_1 = \frac{2-p}{q} \qquad \gamma_2 = 9 + \frac{p^2}{q}$$

La **loi de Pascal** d'ordre Il est la loi du nombre d'essais nécessaires pour observer Il fois *n* un événement A de probabilité p. L'expérience devant se terminer par A, on a:

$P(X=x) = pC_{x-1}^{n-1} p^{n-1} q^{(x-1)(n-1)} = p\, C_{x-1}^{n-1} p^n q^{x-n}$ *pour x = Il, Tl + 1, .. , ∞*

Cette loi est la somme de *n* lois géométriques indépendantes (apparition de A pour la premières fois, puis pour la deuxième fois, etc.), on a:

$E(X) = \frac{n}{p}$ $V(X) = \frac{nq}{p^2}$ $\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{nq}}$ $\gamma_2 = 3 + \frac{p^2 + 6p}{nq}$

La **loi binomiale négative** est la loi de $Y = X - n$:

$P(Y = y) = C_{n+y-1}^{n-1} p^n q^y$

Son nom vient du fait suivant: en posant $Q = 1/p$, $P = (1- p)/p$, on a:

$P(Y = y) = C_{n+y-1}^{n-1} p^n Q^{-n-y}$

Terme général du développement de $(Q - P)^{-n}$ d'où:

$E(X) = Np$ $V(y) = nPQ$ $\gamma_1 = \frac{P-Q}{\sqrt{nPQ}}$ $\gamma_2 = 3 + \frac{1 + 6PQ}{nPQ}$

que ron comparera aux moments de la binomiale B(n, p) [1]

I.4.5 Loi multinomiale

I.4.5.1 Description

La loi multinomiale, ou loi polynomiale, est une généralisation de la loi binomiale, où l (l > 2) issues peuvent survenir lors d'une épreuve.

I.4.5.2 Définition analytique

Tableau I.4-2

État	Probabilité	Tirage
A_1	p_1	x_1
...	...	...
A_k	p_k	x_k
...	...	...
A_l	p_l	x_l
Total	1	m

Nous avons l états possibles E_k, k = 1, . . . , l. La probabilité d'apparition de l'état **k** est $\mathbf{p_k}$. Le schéma d'échantillonnage peut être résumé dans le tableau suivant :

La distribution est dénie par :

$P(X = \rightarrow x) = P[X = (x1, \ldots, xl)] = \frac{m!}{x1! \cdots xl!} p_1^{x1} \ldots p_l^{xl}$

Contrairement aux autres situations étudiées dans ce support, la variable aléatoire est un vecteur. [4]

$E(X_k) = mp_k$ $V(X_k) = mp_k(1 - p_k)$

$COV(X_k, X_j) = -mp_kp_j$, $k \neq j$

I.5 Variables aléatoires continues

Les lois continues sont caractérisées à l'aide des fonctions de densité. Théoriquement, une v.a. continue doit pouvoir prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné. C'est pour cela d'ailleurs que la probabilité ponctuelle est par définition nulle.

En réalité, dans certains cas, la distinction loi discrète - loi continue est essentiellement formelle. Il est possible d'approximer certaines lois discrètes à l'aide de lois continues. [4]

I.5.1 Loi uniforme sur [0, a]

Sa densité est: f(x) = $\frac{1}{a}$ sur [0, a] ;

f(x) = 0 ailleurs

F(x) = $\frac{x}{a}$ sur [0, a] ;]

F(x) = 0 sur [- ∞, 0] ; F(x) = 1 sur [a, + ∞] (voir fig. 2.13).



Figure I.5-1

Son espérance vaut E(X) =$\frac{a}{2}$ car la densité est symétrique.

Sa variance vaut $V(X) = \int_0^a x^2 \frac{1}{a} dx - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$

La somme de deux lois uniformes n'est pas une loi uniforme. Ainsi, soit X et Y deux variables uniformes sur [0, a] ; leur somme Z, si elles sont indépendantes, est une variable de densité triangulaire (fig. 2.16). [1]

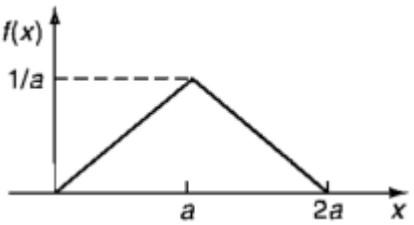


Figure I.5-2

I.5.2 Loi exponentielle de paramètre λ

Sa densité est f(x) = λ exp(- λ X) si $x > 0$.

On trouve sans difficulté: E(X) = 1/ λ V(X) = 1/ λ^2 γ_1 =2 γ_2 =9

En fiabilité, cette loi est très utilisée pour représenter la durée de vie de circuits électroniques. L'espérance 1/ λ est souvent appelée le MTBF (Mean Time Between Failure) et λ le taux de défaillance car h(x) = $\frac{f(x)}{1-F(x)}$ = λ et est constant. [1]

I.5.3 La loi log-normale

C'est la loi d'une variable positive X telle que son logarithme népérien suive une loi de Laplace-Gauss :

ln X ~ LG(m ;$\boldsymbol{\sigma}$)

Sa densité s'obtient par un simple changement de variable et on trouve:

f(x) = $\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}$exp(- $\frac{1}{2}$($\frac{lnx-m}{\sigma}$)^2)

E(X) = exp(m + $\frac{\sigma^2}{2}$) V(X) = (exp(2m + σ^2))(exp σ^2 – 1)

On utilise parfois la loi log-normale à trois paramètres γ, m, σ telle que:

ln (X – γ) ~ LG(m ;$\boldsymbol{\sigma}$) avec X > γ.

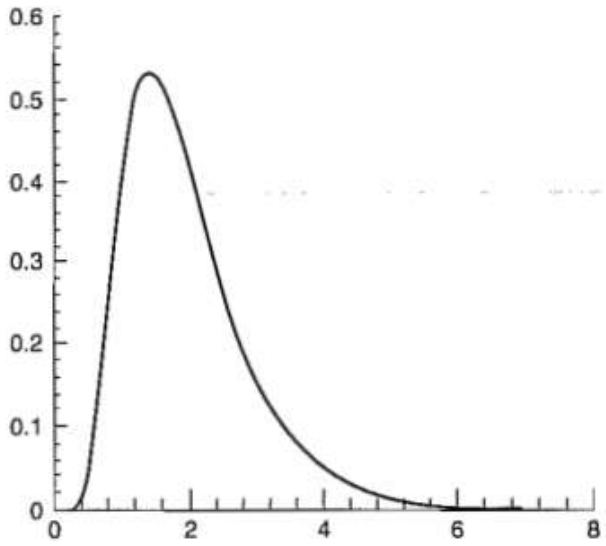


Figure I.5-3 densité de la loi log-normale

La figure représente la densité de la loi log-normale d'espérance 2 et d'écart-type [1](m ≈ 0.58 $\boldsymbol{\sigma}$ ≈ 0.47)

I.5.4 loi de Cauchy

C'est la loi d'une variable X réelle de densité:

$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

Sa fonction de répartition est $F(x) = \frac{1}{\pi}$ arc tg x + $\frac{1}{2}$.

X ne possède aucun moment fini car l'intégrale $\int_R \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ dx diverge.

On montre que la loi de Cauchy est la loi du rapport de deux variables LG(0; 1)

indépendantes. Elle s'identifie à T_1 variable de Student de degré 1 . [1]

I.5.5 Loi de Weibull

Très utilisée en fiabilité, la loi de Weibull à deux paramètres donne la probabilité qu'une durée X de fonctionnement sans défaillance soit supérieure à x par:

$P(X > x) = e^{-(\frac{x}{\beta})^n}$

En d'autres termes, $(\frac{x}{\beta})^{\alpha}$ suit une loi exponentielle.

La densité de X est: $f(x) = \frac{\alpha}{\beta} (\frac{x}{\beta})^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\beta})^n}$

Le paramètre Cl, qui est sans dimension, est appelé paramètre de forme. Selon ses valeurs, la densité de probabilité est plus ou moins dissymétrique. Le paramètre de forme est lié au vieillissement: quand il vaut l, on a une loi exponentielle caractéristique des matériels sans usure ni fatigue. Quand il est plus grand que 1, on est en présence de fatigue: le taux instantané de défaillance Il(x) est alors croissant avec x :

$$h(x)= \frac{\alpha}{\beta} (\frac{x}{\beta})^{\alpha-1}$$

Si Ct est inférieur ù l, on a affaire à un matériel qui se bonifie avec le temps.

Le paramètre β s'exprime dans la même unité que X (jours, heures, nombre de cycles, etc.). C'est un paramètre d'échelle lié à la durée de vie médiane par:

$$\beta= \frac{médiane}{(\ln(2))^{\frac{1}{2}}}$$

Médiane La figure 2.21 donne la densité d'une loi de Weibull avec α =2 et β=1

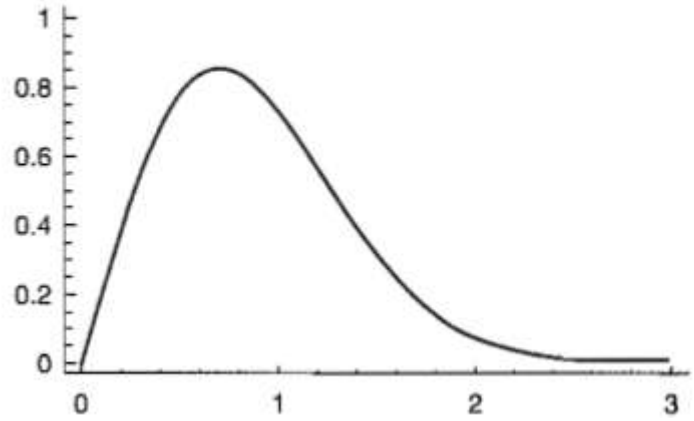


Figure I.5-4

La relation E [$(\frac{X}{\beta})^2$] = r $(1 + \frac{r}{\alpha})$ permet de calculer les moments de X. Dans l'exemple Précédent α = 2 et β = 1, on trouve E(X) = $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et V(X) = $\frac{3\pi}{4}$. [1]

I.6 Régression Linéaire

L'objectif de la régression linéaire est d'´etudier l'effet de certains facteurs explicatifs appelés régisseurs sur un phénomène observé ou sur des résultats expérimentaux. On peut par exemple s'intéresser `a l'influence de l'âge, du poids, de la concentration de bactéries dans le sang sur la durée d'hospitalisation des patients. Pour i ∈ {1, . . . , n}, on note Xi la i-éme observation (durée d'hospitalisation du i-éme patient par exemple) et (r j i)1≤j≤p les p variables explicatives correspondantes (âge, poids et concentration de bactéries du i-eme patient). On suppose que chaque X_i s'´ecrit comme fonction affine des r j i plus un résidu aléatoire :

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, Xi = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j r_i^j + \varepsilon i$

o`u les βj sont des constantes et les résidus εi sont I.I.D. suivant la loi normale $N_1(0, \sigma^2)$ centrée de variance σ^2 . Bien sûr, pour que cette étude puisse être significative, il faut que le nombre n d'observations soit grand devant le nombre p de variables explicatives. En notant X et ε les vecteurs colonnes dont les coordonnées sont respectivement les Xi et les εi , $\gamma = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta p)^*$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & r_1^1 & \ldots & r_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & r_n^1 & \ldots & r_n^p \end{pmatrix}$$

Le modèle se récrit

$$X = M\gamma + \varepsilon$$

Dans la suite, nous supposerons que M est une matrice de rang p + 1, c'est-à-dire de rang égal a son nombre de colonnes. Lorsque ce n'est pas vrai, on peut s'y ramener en supprimant des colonnes qui sont combinaisons linéaires des autres colonnes. Après avoir vu comment estimer le paramètre $\boldsymbol{\theta = (\gamma, \sigma^2)}$ et construire des intervalles de confiance pour ses coordonnées, nous verrons comment tester si le j-eme régresseur r_j est utile i.e. si $\beta_j \neq 0$. [2]

I.6.1 Estimation

La densité du vecteur ε est $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$. On en déduit par translation que la vraisemblance et la log-vraisemblance du modèle sont

$$p_n(x,(\gamma,\sigma^2)) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-(M\gamma)_i)^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{|x-M\gamma|^2}{2\sigma^2}}$$

$$l_n(x,(\gamma,\sigma^2)) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{|x-M\gamma|^2}{2\sigma^2}.$$

À $\sigma^2 > 0$ fixé, la log-vraisemblance est maximale pour $\gamma \in R^p$ qui minimise $J(\gamma) = |x - M\gamma|^2 = |x|^2 - 2(M*x).\gamma + (M*M\gamma).\gamma$ Le point de l'image $\mathbf{E = \{Mu, u \in R^{p+1}\}}$ de R^{p+1} par M `a distance minimale de x est la projection orthogonale x_E de x sur E. On en d´eduit que J atteint son minimum pour γ tel que $M\gamma = x_E$, équation qui admet une unique solution puisque M est de rang p + 1. On a

$$\boldsymbol{\nabla\gamma J}(\gamma) = -2\boldsymbol{M} * \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{M} * \boldsymbol{M}\gamma$$

et la condition d'optimalité du premier ordre s'´ecrit donc $M*M\gamma = M*x$. Comme la matrice $M*M \in R^{(p+1)\times(p+1)}$ est de rang p + 1, elle est inversible et on conclut qu'`a σ^2 fixé la log-vraisemblance est maximale pour $\gamma = (M*M)^{-1}M*x$ et vaut alors $f(\sigma^2)$ o*ù* $f(\lambda) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\lambda) - \frac{|x - xE|^2}{2\lambda}$ avec $x_E = M(M*M)^{-1}M*x$.

Comme la d´étrivée $f'(\lambda) = \frac{n}{2\lambda} ln(\lambda) (\frac{|x - xE|^2}{2\lambda} - 1)$ est positive sur $]0, \frac{|x - xE|^2}{n}$ et négative sur $[\frac{|x - xE|^2}{n}, +\infty[$, la fonction f atteint son maximum en $\frac{|x - xE|^2}{n}$. On conclut donc que la log- vraisemblance est maximale en $((M*M)^{-1}M*x, \frac{|x - xE|^2}{n})$. Ainsi l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance de (γ, σ^2) est $((M*M)^{-1}M*X, \frac{|x - xE|^2}{n}$ o*ù* $\mathbf{X_E = M(M*M)^{-1}M*X}$.

Remarque 3.1.1. Nous venons de voir que l'EMV $(M*M)^{-1}M*X$ de γ est le point $u \in R^{p+1}$ qui minimise $|X - Mu|^2$, c'est-`a-dire la solution au sens des moindres carrés de l'´equation X = Mu. Ainsi, $(M*M)^{-1}M*X$ conserve une interprétation naturelle même lorsque l'on ne suppose pas que les résidus εi sont aléatoires. L'intérêt de l'hypothèse que nous avons faite sur les résidus est ailleurs : elle va nous permettre de construire des intervalles de confiance et des tests d'hypothèses.

Proposition 3.1.2. Le vecteur aléatoire $\hat{\gamma}= (M*M)^{-1}M*X$ est un estimateur sans biais de γ.Plus précisément,$\hat{\gamma} \sim Np+1(\gamma, \sigma^2 (M*M)^{-1})$ et ce vecteur est indépendant de la variable aléatoire $\frac{|X- XE|^2}{\sigma^2} \sim \chi 2\ (n - (p + 1))$.

On déduit de cette proposition que $\frac{|X- XE|^2}{n}$ est un estimateur biais´e de σ^2 indépendant de ˆγ. On lui préférera l'estimateur sans biais $\frac{|X- XE|^2}{n-(p+1)}$.

Démonstration : D'apres (9.1), $\hat{\gamma} = (M*M)^{-1}M* (M\gamma + \varepsilon) = \gamma + (M*M)^{-1} M*\varepsilon$ o`u $\varepsilon \sim Nn(0, \sigma^2 I_n)$. Comme

$(M*M)^{-1}M* (M*M)^{-1}M* * = (M*M)^{-1}M* M(M*M)^{-1} = (M*M)^{-1}$, on en d´eduit que $\hat{\gamma} \sim N_{p+1}(\gamma, \sigma 2\ (M*M)^{-1}$

Comme $M_\gamma \in E$, $X_E = M_\gamma + \varepsilon_E$ o`u $\varepsilon_E$ désigne la projection orthogonale de ε sur E. Donc $\frac{|X- XE|^2}{\sigma^2} = |\frac{\varepsilon-\varepsilon_E}{\sigma}|^2$ o`u $\frac{\varepsilon-\varepsilon_E}{\sigma}$ est la projection orthogonale du vecteur aléatoire $\frac{\varepsilon}{\sigma} \sim N_n(0, I_n)$ sur l'orthogonal de E. Notons que comme M est de rang p + 1, E est de dimension p + 1 et son orthogonal de dimension n − (p + 1). On déduit alors du théorème de Cochrane 6.2.3 que la variable aléatoire $\frac{|X- XE|^2}{\sigma^2}$ suit la loi $\chi 2\ (n - (p + 1))$ et est indépendante de ε_E. Comme $M\hat{\gamma} = X_E$, on a $M\hat{\gamma} = M\gamma + \varepsilon_E$. Après multiplication de cette égalité par $(M*M)^{-1}M*$, on obtient que $\hat{\gamma}= \gamma + (M*M)^{-1}M* \varepsilon_E$ d'o`u l'on conclut que $\hat{\gamma}$ est indépendant de $\frac{|X- XE|^2}{\sigma^2}$.

A l'aide de la proposition on peut construire des intervalle ` s de confiance pour les coefficients β_j . En effet pour $k \in \{1, \ldots, p + 1\}$, la variable aléatoire $\frac{\gamma_k-\gamma_k}{\sigma\sqrt{(M*M)^{-1}_{kk}}} \sim N1(0, 1)$ est indépendante de $\frac{|X- XE|^2}{\sigma^2} \sim \chi 2\ (n - (p + 1))$. Donc

$$\frac{\gamma_k-\gamma_k}{\sigma\sqrt{(M*M)^{-1}_{kk}|X- XE|^2/(n-(p+1))}} \sim t(n-(p+1)).$$

Si $t_{n-(p+1),r}$ désigne le quantile d'ordre r de la loi de Student $t(n - (p + 1))$, on en déduit

$$\left[\hat{\gamma}_k - t_{n-(p+1),1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{(M^*M)^{-1}_{kk}|X-X_E|^2}{n-(p+1)}}, \hat{\gamma}_k + t_{n-(p+1),1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{(M^*M)^{-1}_{kk}|X-X_E|^2}{n-(p+1)}}\right]$$

est un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour β_{k-1}. [2]

I.6.2 Test de l'utilité des régresseurs

On souhaite tester l'utilité de p−q régresseurs ou q ∈ {0, . . . , p−1}. Quitte `a permuter les régresseurs, nous supposerons que ce sont les p − q derniers. Ainsi, l'objectif est de tester l'hypothèse nulle $H_0 = \{\beta_j = 0, q+1 \leq j \leq p\}$ contre l'hypothèse alternative $H_1 = \{\exists j \in \{q+1, \ldots, p\} : \beta j \neq 0\}$. Sous H0, pour i ∈ {1, . . . , n}, $Xi = \beta_0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j r_i^j + \varepsilon i$ et on a $X = M_0\tilde{\gamma} + \varepsilon$ o`u $\tilde{\gamma} = (\beta 0, \ldots, \beta q) *$ et

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & r_1^1 & \ldots & r_1^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & r_n^1 & \ldots & r_n^q \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de M forment une famille libre, la matrice M_0 est de rang q+1. L'ensemble $H = \{M_0u, u \in R^{q+1}\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension q+1 de E.

Pour tout vecteur υ de R^n, on note $\upsilon_H = M_0(M_0* M_0)^{-1}M_0* \upsilon$ la projection orthogonale de υ sur H.

Les vecteurs aléatoires $\varepsilon-\varepsilon_E$ et $\varepsilon_E-\varepsilon_H$ sont respectivement les projections orthogonales de ε sur l'orthogonal de E de dimension n − (p + 1) et sur l'orthogonal de H dans E de dimension p −q. On déduit alors du théorème de Cochrane 6.2.3 que $|\varepsilon - \varepsilon_E|/\sigma^2$ et $|\varepsilon_E - \varepsilon_H|^2/\sigma^2$ sont des variables aléatoires indépendantes respectivement distribuées suivant les lois du χ 2 `a n − (p + 1) degrés de liberté et `a p − q degrés de liberté. Sous H_0, $X_E = M_0\tilde{\gamma} + \varepsilon E$ et $XH = M_0\tilde{\gamma} + \varepsilon_H$ ce qui entraîne que $X - X_E = \varepsilon - \varepsilon_E$ et $X_E - X_H = \varepsilon E - \varepsilon_H$. En conséquence, le rapport $F = \frac{|X_E - X_H|^2/(p-q)}{|X-X_E|^2/(n-(p+1))}$ suit la loi de Fisher $F_{p-q,n-(p+1)}$.

Sous H_1, $X_E = M\gamma + \varepsilon_E$ et $X_H = (M\gamma)H + \varepsilon_H$ ce qui entraîne que $X - X_E = \varepsilon - \varepsilon E$ et $X_E - X_H = M\gamma - (M\gamma)H + \varepsilon_E - \varepsilon_H$. Le numérateur et le dénominateur du rapport $F = \frac{|X_E - X_H|^2/(p-q)}{|X-X_E|^2/(n-(p+1))}$ restent indépendants avec le dénominateur de loi inchangée. Mais comme $(M\gamma)H \neq M\gamma$, le numérateur et donc le rapport va avoir tendance `a prendre des valeurs plus grandes que sous $H_0$ (voir la remarque 9.2.1 qui suit). On choisit donc comme région critique $W = \{F \geq F_{p-q,n-(p+1),1-\alpha}\}$ o`u $F_{p-q,n-(p+1),r}$ désigne le quantile d'ordre r de la loi

de Fisher $F_{p-q,n-(p+1)}$ .La p-valeur du test est P(Z ≥ F obs) o`u Z ∼ $F_{p-q,n-(p+1)}$ et F^{obs} désigne la statistique de test observée.

Remarque 3.2.1. On se place sous H_1. Pour vérifier que $|X_E - X_H|^2$ prend des valeurs plus grandes que sous H_0, on se donne e1, . . . , ep−q une base orthonormée de l'orthogonal de H dans E telle que $e_1 = \frac{M_\gamma(M_\gamma)_H}{|M_\gamma(M_\gamma)_H|}$. D'après la preuve du théorème de Cochrane 6.2.3, les variables aléatoires (Gi $= \frac{ei.\varepsilon}{\sigma}$)$_{1\leq i\leq p-q}$ sont I.I.D. suivant la loi $N_1(0, 1)$. En outre, $\varepsilon_E - \varepsilon_H = \sigma \sum_{i=1}^{p-q} G_i e_i$ et $X_E - X_H = \sigma \left(\left(G_1 + \frac{|M\gamma - (M\gamma)_H|}{\sigma} \right) e_1 + \sum_{i=2}^{p-q} G_i e_i \right)$. Donc $|\varepsilon_E - \varepsilon_H|^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p-q} G_i^2$ et $|X_E - X_H|^2 = \sigma^2 \left(\left(G_1 + \frac{|M\gamma - (M\gamma)_H|}{\sigma} \right)^2 + \sum_{i=2}^{p-q} |G_i|^2 \right)$ ne différent que par le premier terme. Comme sous H0, |XE − XH| 2 = |εE − εH| 2 , il suffit de vérifier que pour a = |Mγ−(Mγ)H| σ , (G1 + a) 2 prend des valeurs plus grandes que G_1^2 .Pour x ≥ 0,

$$\mathbb{P}((G_1 + y)^2 \leq x) = \mathbb{P}(-y - \sqrt{x} \leq G_1 \leq -y + \sqrt{x}) = \int_{-y-\sqrt{x}}^{-y+\sqrt{x}} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour $y, x > 0$, comme $(y - \sqrt{x})^2 = y^2 + x - 2y\sqrt{x} < y^2 + x + 2y\sqrt{x} = (y + \sqrt{x})^2$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{P}((G_1 + y)^2 \leq x) = \frac{e^{-\frac{(y+\sqrt{x})^2}{2}} - e^{-\frac{(y-\sqrt{x})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} < 0.$$

Ainsi ∀x > 0, ((G1 + a) 2 > x) = 1 − ℙ ((G1 + a) 2 ≤ x) > 1 − ℙ (G_1^2 ≤ x) = ℙ (G_1^2 > x), ce qui montre bien que (G1 + a) 2 prend des valeurs plus grandes que G_1^2. [2]

I.7 Tests de L'hypothèse

Un exemple

La garantie d'un constructeur pour ses composants électroniques est de 2 ans. Il peut accepter au plus un taux de 10% de pièces tombant en panne pendant cette période, et désire donc s'assurer que ℙ(T ≥ 2) ≥ 0,9, où T est le temps de vie de ces composants, de loi supposée exponentielle de paramètre $1/\theta$. Ceci revient à s'assurer que $\theta \geq$ -2/log(0,9) = $\theta^* \approx 19$. On veut donc déterminer si l'hypothèse $\theta < \theta^*$ est réaliste, auquel cas il sera nécessaire de revoir la chaîne de fabrication.

À partir d'un n-échantillon, on obtient une estimation $\hat{\theta}_n$ de θ . En se basant sur cette estimation, le constructeur doit prendre sa décision : soit accepter le taux de défaillance actuel, soit remplacer la chaîne de fabrication. Supposons qu'un taux de défaillance supérieur à 10%

mette l'entreprise en péril, alors le constructeur acceptera d'investir dans une nouvelle chaîne de fabrication au moindre soupçon que $\theta < \theta^*$. Il convient donc de minimiser le risque de prédire, à partir de l'échantillon, que ? , alors qu'en réalité $\theta < \theta^*$. Ceci introduit une asymétrie entre l'hypothèse $\theta < \theta^*$ et son complémentaire. Dans une telle situation, on appelle l'hypothèse cruciale $\theta < \theta^*$, **l'hypothèse nulle.**

∗ **L'erreur de 1 ère** espèce consiste à rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie.

∗ **L'erreur de 2 nde** espèce consiste à ne pas rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est fausse. Idéalement, on aimerait minimiser ces deux erreurs, mais ceci n'est pas possible, car elles sont antagonistes : diminuer l'une fait augmenter l'autre. L'erreur de première espèce est le risque que le constructeur cherche avant tout à minimiser (elle peut mettre son entreprise en danger). Il se fixe donc une probabilité d'erreur, appelée le seuil, correspondant au risque maximal qu'il est prêt à prendre ; on choisit par exemple = 5%. Supposons qu'il existe z0 tel que

$$\mathbb{P}\,(\hat{\theta}_n \geq z_0) \leq 5\%, \qquad \forall \theta \epsilon\, (0, \theta^*).$$

Dans ce cas, si l'on observe $\hat{\theta}_n \geq z_0$, il ne sera pas raisonnable de supposer que $\theta \epsilon$ (0, θ^*), puisque cela arrive dans seulement 5% des cas. Le fabricant rejettera donc l'hypothèse $\theta < \theta^*$, et aura raison dans 95% des cas. Il estimera donc, avec une confiance de 95%, que le pourcentage de pièces qui tomberont en panne avant deux ans est inférieur à 10%.

En revanche, si l'on trouve $\hat{\theta}_n \geq z_0$, alors il existe un risque que $\theta < \theta^*$. Dans ce cas, le constructeur ne peut pas rejeter l'hypothèse $\theta < \theta^*$, et doit donc décider d'investir dans une nouvelle chaîne de fabrication plus sûre. [5]

I.7.1 Procédure de test

O se place dans le cadre d'un n-échantillon X1 , . . . , Xn de loi P de paramètre $\theta \epsilon\, \Theta$ inconnu. Étant donné $\Theta_0 \subset \Theta$,$\emptyset \neq \Theta_0 \neq \Theta$, il s'agit de déterminer si θ appartient à Θ_0 ou si appartient à son complémentaire $\Theta_1 = \Theta / \Theta_0$. On dit que l'on teste l'hypothèse nulle H_0 : «$\theta \epsilon\, \Theta_0$ » contre l'hypothèse alternative H_1 : «$\theta \epsilon\, \Theta_1$»

Définition Une région de rejet est un événement $D = D(X_1, \ldots X_n)$.

Définition Soit D une région de rejet, H_0 et H_1 deux hypothèses que l'on teste l'une contre l'autre. Une procédure de test consiste à

1. rejeter H_0 si D se produit ,
2. ne pas rejeter H_0 si D ne se produit pas.

Définition On dit que le test est au niveau de risque α, ou niveau de confiance 1- α, si

$$sup_{\theta \epsilon \Theta_0} \ \mathbb{P}_\theta (D) = \alpha$$

Définition On appelle puissance d'un test la valeur

$$inf_{\theta \epsilon \Theta_1} \ \mathbb{P}_\theta (D) = 1-\beta$$

À un niveau de confiance donné 1- α , on cherche donc à maximiser la puissance, ce qui revient à minimiser l'erreur de seconde espèce β . Ce critère permet de comparer des tests.

Définition Une hypothèse H est dite simple si l'ensemble Θ correspondant est réduit à un seul élément, sinon elle est dite composite.

Exemple Supposons que $I = I(X_1, \ldots X_n)$ soit un intervalle de confiance pour au niveau de confiance 1- α . On considère l'hypothèse nulle (simple) H_0 : «$\theta = \theta_0$ » et l'hypothèse alternative (composite) H_1 : « $\theta \neq \theta_0$ ». Alors $D = \{I \not\ni \theta_0\}$ fournit un test de H_0 contre H_1 au niveau de risque , puisque [5]

$$\mathbb{P}_{\theta 0}(I \not\ni \theta_0) = \alpha$$

I.7.2 Cas Gaussien

On considère un n-échantillon de loi N (μ, σ^2).

Test de moyenne à variance connue

Test de «$\mu = \mu_0$ » contre « $\mu \neq \mu_0$». Soit Xn la moyenne empirique (de loi N (μ, σ^2/n). on prend pour région de rejet

$$D = \{|\bar{X}_n - \mu_0| \geq C \}.$$

On veut un niveau de risque de 5%, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_{\mu 0} (|\bar{X}_n - \mu_0| \geq C) = 0{,}05,$$

et donc $C \approx 1{,}96\ \sigma / \sqrt{n}$.

Test de « $\mu \leq \mu_0$» contre « $\mu > \mu_0$». Cette fois, on prend pour région de rejet

$$D = \{ \bar{X}_n > C\}.$$

On veut un niveau de risque de 5%, c'est-à-dire

$$sup_{\ \mu \leq \mu 0} \ \mathbb{P}_\mu (D) = sup_{\ \mu \leq \mu 0} \ \mathbb{P} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z > C-\mu\right) = 0.05 .$$

où Z est normale standard. La borne supérieure est atteinte pour = 0, et on obtient donc C ≈ μ + 1,64 σ /$\sqrt{n}$.

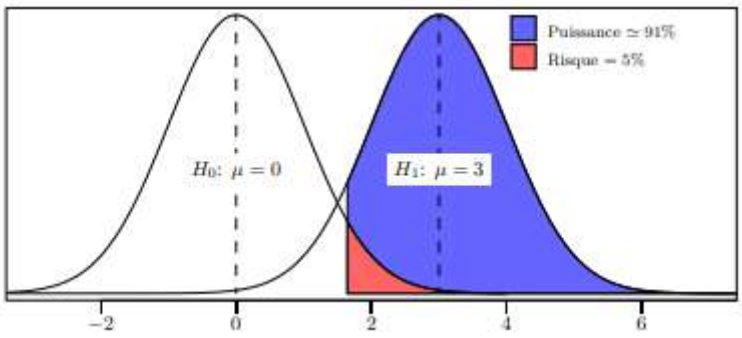


Figure I.7-1 Test de deux hypothèses simples.

Test d'égalité de moyenne de 2 échantillons de variance connue

On considère un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de loi N (μ, σ^2),et un m-échantillon (indépendant du premier) $Y_1, \ldots, Y_m$ de loi N (υ, τ^2), avec σ^2 , τ^2 connus. On veut tester « $\mu = \upsilon$ » contre « $\mu \neq \upsilon$ ».

Ce problème se ramène au précédent : on estime par $\bar{X}_n$ $\bar{Y}_m$, qui est de loi N ($\mu - \upsilon_1 \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\tau^2}{m}$), et on teste « $\mu - \upsilon = 0$ » contre « $\mu - \upsilon \neq 0$ ».

Test de moyenne à variance inconnue

On veut tester « $\mu = \mu_0$» contre « $\mu \neq \mu_0$»,dans le cas où la variance σ^2 n'est pas connue. On considère comme estimateurs la moyenne empirique $\bar{X}_n$ et la variance empirique dé biaisée S^2_n. Un calcul montre que la variable aléatoire

$$T_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{S_n} (\bar{X}_n - \mu)$$

suit la loi de Student à n- 1 degrés de liberté. Prenons n = 20, μ_0 = 0 et un risque α = 5%. On choisit comme région de rejet

$$D=\{\frac{|\bar{X}n-\mu_0|}{S_n} \geq C\},$$

avec C déterminée par la

$$\mathbb{P}_{\mu 0} (D)= \mathbb{P}(|T_{n-1}| \geq C \sqrt{n}) = 0.05 .$$

La loi de Student étant tabulée, on trouve, pour 19 degrés de liberté, C p n ' 2;093 ,et donc

$$D ==\{\frac{|\bar{X}n|}{S_n} \geq \frac{2.093}{\sqrt{20}}\}, \qquad [5]$$

I.7.3 Tests d'hypothèses simples

On considère un n-échantillon de loi $\mathbb{P}_0$. On va tester H_0 : « $\theta = \theta_0$ » contre H1 : « $\theta = \theta_1$ ». Nous allons faire cela à l'aide des fonctions de vraisemblance, c'est-à-dire en comparant $L(\theta_0; x_1, \ldots, x_n)$ et $L(\theta_1; x_1, \ldots, x_n)$. C'est ce qu'on appelle le test de Neyman [1] –Pearson[2]

L'objet central est le rapport de vraisemblance,

$$F(\theta_0, \theta_1; x_1, \ldots, x_n) = \frac{(\theta_1; x1, \ldots, xn)}{(\theta_0; x1, \ldots, xn)}$$

On prend pour région de rejet

$$D = \{R(\theta_0, \theta_1; X_1, \ldots, X_n) > C\}$$

où C est une constante à déterminer en fonction du risque choisi. Pour un test avec un risque de 5%, on fixe C de sorte que $\mathbb{P}_{\theta_0}(D) = 5\%$

Exemple Une personne possède deux pièces : l'une est équilibrée, l'autre donne à « face » une probabilité double de celle de « pile ». Elle choisit une de ces deux pièces, et on effectue 100 lancers. Elle obtient F = 60 « face ». Comment déterminer quelle pièce a été utilisée ? Le modèle est clair : on a un n = 100-échantillon suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, avec $p \in \{1/2 ; 2/3\}$. On désire tester H_0 : « p = 1/2 » contre H_1 : p = 2/3 , qui sont deux hypothèses simples.

La fonction de vraisemblance associée à une réalisation de ces n variables aléatoires de Bernoulli avec f succès est

$p^f (1- pf)^{n-f} = (1 -p)^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^f$. :

Le rapport de vraisemblance est donc donné, dans la situation étudiée ici, par

$$R = \left(\frac{1-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}\right)^n \left(\frac{\frac{2}{3}/(1-\frac{2}{3})}{\frac{1}{2}/(1-\frac{1}{2})}\right)^f \left(\frac{2}{3}\right)^n 2^f.$$

Il s'agit d'une fonction monotone de f, donc prendre une région de rejet de la forme

$$D = \{R > C\}$$

Revient à prendre une région $D' = \{F > C'\}$,

avec C' tel que $\mathbb{P}_{1/2}(F > C') = 10\%$,

Pour un niveau de risque de 10%. On peut à présent déterminer C 0 par simple calcul. Plutôt que d'en déterminer la valeur exacte, nous allons utiliser le théorème central limite afin d'approximer (F 50)=5 par une variable aléatoire $Z \sim N(0, 1)$. On obtient ainsi

$$\mathbb{P}_{1/2}(F > C') \approx \mathbb{P}(Z > (C' - 50)/5).$$

Par conséquent, on trouve que C'≈ 56,4.

Puisque, pour notre échantillon, F = 60, on est conduit à rejeter H_0.

(Remarquons que ce test, de par sa nature, privilégie H_0 par rapport à H_1.)

On peut montrer que lorsque celui-ci est bien défini, aucun test à un niveau de confiance donné n'est plus puissant que le test ci-dessus

Lemme (Lemme de Neyman-Pearson). On considère deux hypothèses simples H_0 : «$\theta = \theta_0$ » contre H_1 : « $\theta=\theta_1$ », et on suppose que les lois P0 et P1 du n-échantillon sous ces deux hypothèses possèdent les densités $f\theta_0$ et $f\theta_1$. Soient $\alpha \in (0; 1)$ et

$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) : \prod_{i=1}^{n} f_{\theta i}(x_i) > C \prod_{i=1}^{n} f_{\theta i}(x_i)\} ;$$

où C est choisie de sorte que $\mathbb{P}\theta_0$ (D) = . Alors, pour toute autre région de rejet B telle que

$\mathbb{P}\theta_0$ (B) = α , on a

$$\mathbb{P}\theta_1 (B) \leq \mathbb{P}\theta_1 (D);$$

Avec l'inégalité stricte si $\mathbb{P}\theta_1$ (D /B) > 0.

Démonstration. Notons $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_n$, et $f(\mathbf{x}) = f(x_1) \cdots f(x_n)$. On a

$$\int_{D \setminus B} f_{\theta_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \alpha - \int_{D \cap B} f_{\theta_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{B \setminus D} f_{\theta_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

D'autre part, puisque $D \setminus B \subseteq D$ et $B \setminus D \subseteq D^c$, on déduit de l'identité précédente que

$$\int_{D \setminus B} f_{\theta_1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq C \int_{D \setminus B} f_{\theta_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = C \int_{B \setminus D} f_{\theta_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \int_{B \setminus D} f_{\theta_1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

(La première inégalité est stricte si $\mathbb{P}_{\theta_1}(D \setminus B) > 0$.) On a donc bien

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(D) = \mathbb{P}_{\theta_1}(D \setminus B) + \mathbb{P}_{\theta_1}(D \cap B) \geq \mathbb{P}_{\theta_1}(B \setminus D) + \mathbb{P}_{\theta_1}(D \cap B) = \mathbb{P}_{\theta_1}(B).$$

Remarque Dans le cas de lois discrètes, un résultat similaire est encore vérifié. Il y a toutefois deux choses à observer : d'une part, il n'est pas toujours possible de trouver C de façon à obtenir un niveau donné, puisque la fonction de répartition fait des sauts ; d'autre part, l'ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{P}\theta_1 (x1)\ \ \mathbb{P}\theta_1 (x_n) = C\ \mathbb{P}\theta_0 (x_1)\ \ \mathbb{P}\theta_0 (x_n)\}$ n'a plus nécessairement probabilité nulle. Une manière de résoudre simultanément ces deux problèmes est d'utiliser la procédure suivante. Soit $R(\theta_0; \theta_1; x_1, \ldots, x_n)$ le rapport de vraisemblance. Alors : si R > C on rejette H_0 ; si R < C, on ne rejette pas H_0 ; si R = C, on rejette H_0 avec probabilité . Ici et C sont choisis de façon à ce que $\mathbb{P}\theta_0$ (D > C) + $\mathbb{P}\theta_0$ (D = C) = α [5]

I.7.4 Tests du X^2

Jusqu'à présent, on a toujours supposé connue la loi de l'échantillon, et le problème se réduisait donc à estimer ses paramètres. C'est ce qu'on appelle faire un test paramétrique. Nous allons à présent considérer une expérience aléatoire dont la loi n'est pas connue. On parle alors de test non paramétrique. [5]

Le test d'adéquation du X^2

Les tests d'adéquation, ou tests d'ajustement, ont pour objet de déterminer à partir d'un échantillon si une variable aléatoire suit ou non une certaine loi. Parmi ces tests, nécessairement non paramétriques, l'un des plus connus et des plus utilisés est le test du X^2 (Khi-deux). Considérons donc une expérience aléatoire dont les résultats peuvent être répartis en k classes, avec les probabilités $p_1, \ldots, p_k$ ($p_1 + \ldots + p_k = 1$). Ayant réalisé n fois cette expérience, on obtient un vecteur aléatoire $(N_n(1), \ldots, N_n(k))$, où $N_n(j) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_{i=j}\}}$ est le nombre d'occurrence de la classe j. Par définition, ce vecteur suit une loi multinomiale de paramètres $(p_1, \ldots, p_k; n)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\,(N_n(1)= n_i, \ldots, N_n(k) = n_k = \frac{n!}{ni!\ldots nk!} p_1^n . \ . \ . \ p_k^n)$$

Soit $q_1, \ldots, q_k \in (0, 1)$ tels que $\sum_{i=1}^{k} q_i = 1$.

On veut tester $H_0 : p_i = q_i$, i = 1, . . . ,k, contre $H_1 : \exists_j : q_j \neq p_j$. q nous donne donc les probabilités de chacune des classes sous l'hypothèse nulle, et on est donc amené à comparer ces dernières avec les fréquences empiriques $N_n(j)/n$. On a ainsi transformé un test non-paramétrique en un test paramétrique portant sur les paramètres d'une loi multinomiale.

Afin de construire notre région de rejet, on introduit la statistique

$$Z_n = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_n(j) - nq_j)^2}{np_j} = n \sum_{j=1}^{k} \frac{(\frac{N_n(j)}{n}_i - np_i)^2}{q_j}$$

Z_n mesure donc les écarts entre les fréquences empiriques et les fréquences théoriques, proprement normalisés. Le test repose sur le résultat suivant, que nous admettrons. **Proposition** Soit $(N_1, \ldots, N_k)$ un vecteur aléatoire suivant une loi multinomiale de paramètres $(p_1, \ldots, p_k, n)$. Alors la variable aléatoire

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

Suite asymptotiquement la loi du X^2 à k -1 degrés de liberté, X^2_{k-1}, dont nous rappelons que la densité est $\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{x}{2}} 1(0,\infty)(X)$

Remarque La raison pour laquelle on a k 1 degrés de liberté et non k est qu'une contrainte lie les N_i : N_1 + + N_k = n.

Ainsi, sous H_0, Z_n suit asymptotiquement une loi X^2_{k-1} .

D'autre part, sous H_1, il existe j ∈ {1, . . . ,k} tel que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{N_n(j)}{n} - q_j\right)^2 = (p_j - q_j)^2$$

Ce qui implique que Zn diverge.

On peut donc prendre une région de rejet de la forme

D = {Z_n> C}, en choisissant C de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_q(Z_n > C) = \mathbb{P}(X^2_{k-1} > C) = \alpha$$

Remarque Il est important de réaliser qu'il s'agit d'une approximation asymptotique. Pour qu'elle soit applicable en pratique, il faut que les effectifs théoriques n_{qj} soient supérieure à 5. [5]

I.8 Conclusion

Répondre à un problème statistique, c'est faire un choix à partir d'un ensemble d'information

Algorithme de modélisation statistique:

- Définir l'ensemble d'information
- Spécifier le modèle statistique (= identifierP^n_θ)
- Construire une statistique pour le paramètre à estimer
- Etude de cette statistique (estimation et distribution)
- Validation / Contrôle
- Prise de décision / Prévision[6]

Chapitre II

Fiabilité des équipements mécaniques par modèle de Weibull

II.1 Introduction

La fiabilité est l'une des composantes essentielles de la qualité d'un produit et elle est retenue en tant que critère fondamental pour leur élaboration.

Elle est prise en considération dès le stade de la conception.

La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation et pour une période de temps déterminés. [7]

II.2 Concepts de la fiabilité

II.2.1 Définitions

La fiabilité caractérise l'aptitude d'un système ou d'un matériel à accomplir une fonction requise dans des conditions données pendant un intervalle de temps donné.[9]

II.2.1.1 Taux de défaillance

Noté λ (t), c'est l'indicateur de la fiabilité. Il représente une proportion de dispositifs survivants à un instant (t).

Sa forme générale est $$\lambda\,(t) = \frac{\text{nombre de défaillances}}{durée\ d'usage} \qquad \text{(II.1)}$$

Le plus fréquemment, il s'exprime en « **panne/heure** ».

Le taux de défaillance suit une courbe en baignoire représenté sur la figure suivante : [9]

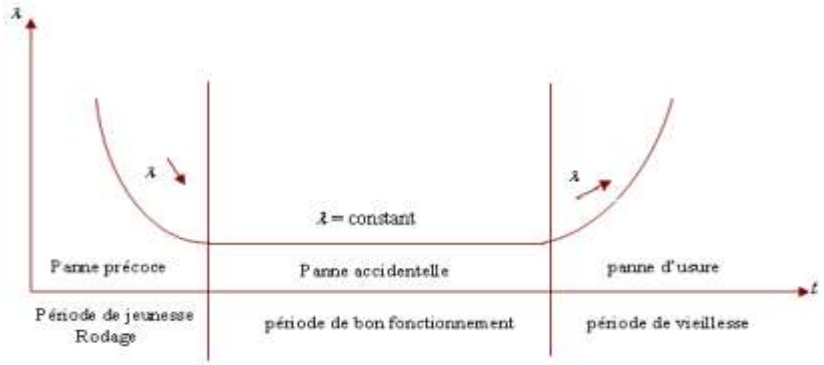


Figure II.2-1 Courbe en baignoire

II.2.1.2 Durée de vie

La durée de vie d'un système est la période qui sépare sa mise en exploitation de l'apparition de sa défaillance. On mesurera la durée de vie de l'équipement par le nombre d'heures durant lesquelles il aura effectivement fonctionné. On suppose alors que l'équipement ne peut occuper que l'un des deux états suivants: en état pour opérer ou hors d'usage.

La durée de vie de l'équipement sera supposée être une variable aléatoire continue notée T dont la loi de probabilité devrait être estimée à travers ses réalisations {ti} i=1, ⋯ n constituant un historique des données des durées de vie.[8]

II.2.1.3 Fonction de la fiabilité

La fiabilité d'un système s'exprime par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation et pour une période de temps déterminée. Nous la désignons, dans ce qui suit par R(t) où t désigne la durée de la mission. La définition de la fiabilité montre bien que son domaine englobe les probabilités, donc les statistiques et les mathématiques.

Exprimé mathématiquement, c'est la probabilité que l'équipement fonctionne sans défaillance (ne tombe pas en panne avant l'instant t) jusqu'à de l'instant t :

$$R(t) = P\{T > t\} \qquad = \int_t^{\infty} f(u)du$$

Où Test une variable aléatoire qui caractérise les durées de vie d'un équipement.

La fonction de survie ou de fiabilité est décroissante en fonction de la variable t. Elle vérifie les propriétés :

$$\lim_{t \to 0} R(T) = 1$$

$$\lim_{t \to \infty} R(T) = 0$$

Il existe deux types de fiabilité :

- la fiabilité intrinsèque, qui est propre à un matériel, selon un environnement donné; elle ne dépend que de la qualité de ce matériel.

- La fiabilité extrinsèque, qui résulte des conditions d'exploitation et de la qualité de la maintenance; elle est relative à l'intervention humaine. [8]

II.2.1.4 Fonction de répartition

La fonction de répartition de l'équipement est la probabilité complémentaire de la fonction de survie R(t) .Cette fonction appelée aussi la fonction cumulative ou fonction de distribution définit la probabilité de défaillance de l'équipement avant l'instant t .(fig2.1 (a)) :

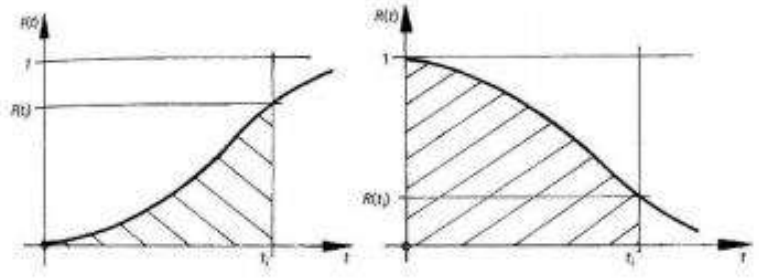
$$F(t) = P\{T \leq t\} = \int_t^{\infty} f(u)du$$

La fonction de répartition F(t) est une fonction croissante et bornée telle que :[8]

$$\lim_{t \to 0} F(T) = 0$$

II.2.1.5 Fonction de densité de probabilité

La fonction f(t) définit la densité de probabilité des durées de vie de l'équipement à un instant donné. C'est une fonction mesurable et de mesure égale à l'unité. La probabilité de défaillance de l'équipement entre [t, t + dt] est approximativement égale au produit f(t)dt : La surface F(t) définie sous la courbe de la figure2.2 représente la probabilité que le système soit en défaillance à l'instant t* ; et la surface R(t), la probabilité que le système soit en opération. Logiquement, avec l'évolution du temps (déplacement de t* vers la droite dans le graphique) la probabilité de défaillance augmente et la fiabilité décroît.



(a) Fonction de Répartition (b) Fonction de Fiabilité

Figure II.2-2 Courbes paramétriques de la fiabilité

Si F(t) est une fonction continue, alors on peut définir une fonction de densité f(t):[8]

$$f(t)= \lim_{dt\to 0} \frac{P(t<T\leq t+dt)}{dt}$$

$$\lim_{dt\to 0} F(t+dt) - \frac{F(t)}{dt}$$

$$f(t)= \frac{dF(t)}{dt}$$

$$= - \frac{dR(t)}{dt}$$

II.2.2 Paramètres de la fiabilité MTBF, MTTR, MTTA

II.2.2.1 Moyenne des temps de bon fonctionnement MUT(Mean Up Time)

C'est le temps moyen jusqu'à défaillance (ou moyenne des temps de bon fonctionnement) est [7]

$$\text{MUT} = \frac{\sum temp\ de\ bon\ fonctionnement}{nombre\ d'intervalles de\ temps\ de\ bon\ fonctionnement} \qquad \text{(II.5)}$$

$$\text{MUT} = \int_0^{+\infty} R(t)dt$$

II.2.2.2 Temps moyen pour réparer MTTR (Mean Time To Repair)

Exprime la moyenne des temps de tâches de réparation. Il est calculé en additionnant les temps actifs de maintenance et les temps annexes de maintenance, le tout divisé par le nombre d'interventions. [7]

$$\text{MTTR} = \frac{temp\ d'arret\ total}{nombre\ d'arrets} \qquad \text{(II.6)}$$

II.2.2.3 Taux de réparation μ

La probabilité de réparation d'un composant est en fonction du temps écoulé depuis l'instant de défaillance. Il existe un certain délai (t) avant que le composant puisse être réparé. Ce délai (t) comprend le temps de détection et le temps d'attente de l'équipe de réparation, il est exprimé comme suit: [7]

$$\mu= \frac{1}{MTTR} \qquad \text{(II.7)}$$

II.2.2.4 La moyenne des temps de fonctionnement ou moyenne de temps entre pannes MTBF (Mean Time Between Failures)

C'est le temps qui sépare deux défaillances consécutives. Le MTBF est la moyenne sur un ensemble d'entités « identiques » et sur leurs durées de vie considérées des TBF.[7]

$$\text{MTBF} = \square \frac{temp\ de\ bon\ fonctionnement\square\ pour\ l'ensemble\ des\ produits\square}{nombre\ total\ de\ defaillances} \quad \text{(II.8)}$$

Et est l'espérance mathématique des défaillances.

$$\text{MTBF} = \square \int_0^{+\infty} tf(t)dt \quad \text{(II.9)}$$

II.2.2.5 La relation entre MUT, MTBF et MTTR

Il est nécessaire au préalable de donné quelques indications sur les temps employé en particulier, pour les MTBF,MUT, MTTR, MDT qui souvent sont confondus, suite à une mauvaise interprétation ou traduction du MTBF, qui se comprend aisément.[7]

II.2.2.5.1 Pour le matériel réparable

On a le chronogramme suivant : MTBF = MUT + MTTR

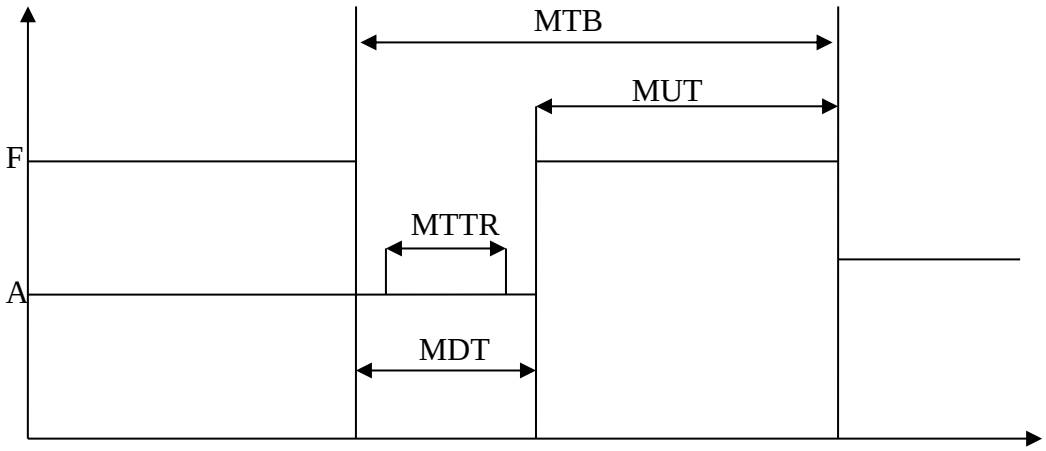


Figure II.2-3 Chronogramme de la relation entre MUT,MTBF et MTTR pour un matériel réparable

F : Fonctionnement.

A : Arrêt.

MUT : Mean up time.

MTTR: Mean time to repair.

MDT : Mean down time.

MTTF: Mean time to failure.

MTBF: Mean time between failures. Si MTTR << MTBF alors MUT = MDT.

MTTF: Mean time to failure.

II.2.2.5.2 Pour le matériel non réparable

On a le chronogramme suivant :[7]

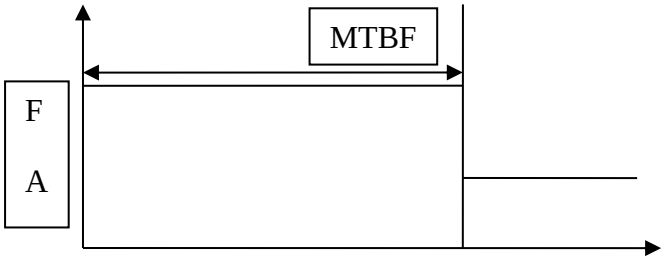


Figure II.2-4 Chronogramme de MTTR pour un matériel non réparable

II.2.2.6 Spécificité de la fiabilité en mécanique

Dans ce paragraphe, nous abordons la spécificité des composants mécaniques dans les études des durées de vie, nous mettons en évidence certains paramètres pouvant influencer l'évaluation de leur fiabilité.[7]

II.2.2.7 Les différentes phases du cycle de vie d'un produit

L'évolution du taux de défaillance d'un produit pendant toute sa durée de vie est caractérisée par ce qu'on appelle en analyse de fiabilité la courbe en baignoire. (figure.2)

Le taux de défaillance est élevé au début de la vie du dispositif. Ensuite, il diminue assez rapidement avec le temps (taux de défaillance décroissant), cette phase de vie est appelée période de jeunesse. Après, il se stabilise à une valeur qu'on souhaite aussi basse que possible pendant une période appelée période de vie utile (taux de défaillance constant). A la fin, il remonte lorsque l'usure et le vieillissement font sentir leurs effets, c'est la période de vieillissement (taux de défaillance croissant):

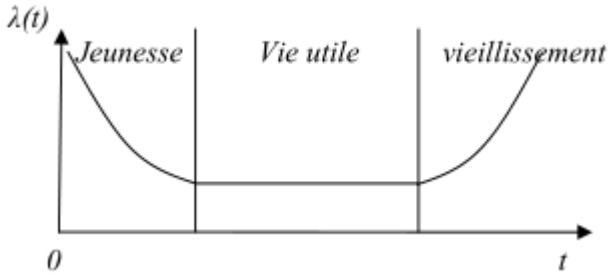


Figure II.2-5 Courbe en baignoire pour les composants électroniques

De nombreux éléments, tels que les composants électroniques, ont un taux de défaillance qui évolue de cette manière là.

Pour souligner la particularité des composants mécaniques dans l'analyse de la fiabilité par rapport aux composants mécaniques, nous allons comparer l'évolution du taux de défaillance dans les deux cas.[10]

II.2.2.7.1 Taux de défaillance pour des composants électroniques

L'expérience a montré que pour des composants électroniques la courbe, représentant le taux de défaillance en fonction du temps t, a la même allure que la courbe en baignoire (figure2.3). Elle est donc composée de trois phases ([Pagès and Gondran, 1980],..):

(1) **Phase 1**

La première phase définit la période de jeunesse, caractérisée par une décroissance rapide du taux de défaillance. Pour un composant électronique cette décroissance s'explique par l'élimination progressive de défauts dus aux processus de conception ou de fabrication mal maîtrisé ou à un lot de composants mauvais. Cette période peut être minimisée pour les composants vendus aujourd'hui. En effet, las fabricants de composants électroniques se sont engagés à vérifier la qualité de leurs produits en sortie de fabrication.

(2) **Phase 2**

La deuxième phase définie la période de vie utile généralement très longue. Le taux de défaillance est approximativement constant. Le choix de la loi exponentielle, dont la propriété principale est d'être sans mémoire, est tout à fait satisfaisant. Les pannes sont dites aléatoires, leur apparition n'est pas liée à l'âge du composant mais à d'autres mécanismes d'endommagement. Les calculs prévisionnels de fiabilité se font presque souvent dans cette période de vie utile.

(3) **Phase 3**

La dernière phase est la période de vieillissement, elle est caractérisée par une augmentation progressive du taux de défaillance avec l'âge du dispositif. Ceci est expliqué par des phénomènes de vieillissement tels que l'usure, l'érosion, etc. Cette période est très nettement au-delà de la durée de vie réelle d'un composant électronique. Parfois, on réalise des tests de vieillissement accélérés pour révéler les différents modes de défaillance des composants. [11]

II.2.2.7.2 Taux de défaillance pour des composants mécaniques

Les composants mécaniques sont soumis, dès le début de leur vie, au phénomène d'usure ou de vieillissement. Si on trace la courbe du taux de défaillance, en fonction du temps, on obtient une courbe qui ne présente pas le plateau de la figure 2.3; la période de vie utile (taux de défaillance constant) n'existe pas ou elle est réduite. Le taux de défaillance du dispositif est une fonction non linéaire du temps et ceci dans chaque phase de sa vie (voir figure 2.4, [Doyle, 1992] , [McLean, 2000]):

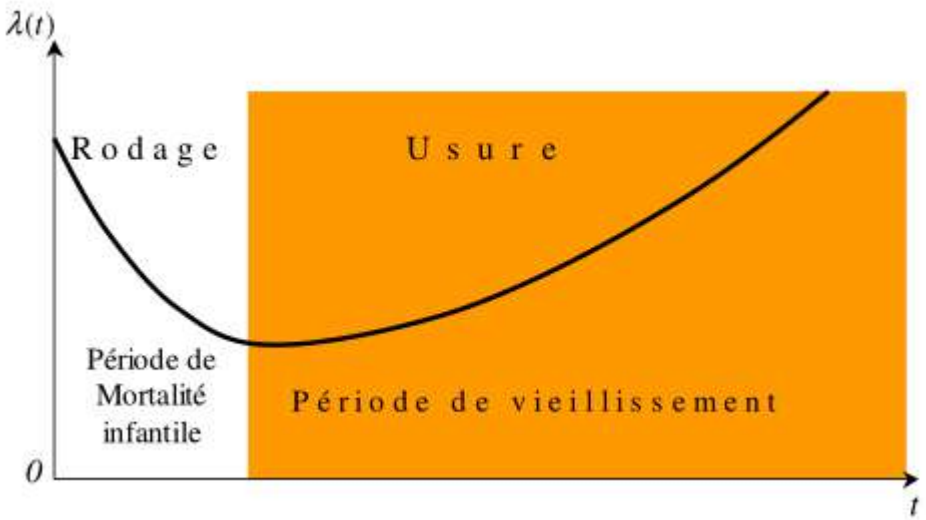


Figure II.2-6 La courbe du taux de défaillance en mécanique

* La première phase définit la période de mortalité infantile. C'est une durée de vie en principe très courte. Elle décrite par une décroissance progressive du taux de défaillance avec le temps dû à une amélioration des caractéristiques internes (caractéristiques de défauts) et des

interfaces, par un rodage préalable des pièces. Par conséquent il n'est pas souhaitable de tester les composants mécaniques dans cette période de leur vie.

* La dernière phase définit la période de vieillissement qui comporte la majorité de la vie du dispositif. Elle est caractérisée par une augmentation progressive du taux de défaillance. Les pièces mécaniques sont soumises à des phénomènes de vieillissement multiples qui peuvent agir en combinaison: corrosion, usure, déformation, fatigue, et finalement perte de résilience ou fragilisation.

* Contrairement aux composants électroniques les calculs de la fiabilité pour des composants mécaniques se font essentiellement dans la période de vieillissement, en utilisant des lois de probabilité dont le taux de défaillance est fonction du temps telles que la loi Log-normale, Weibull, etc. [11]

II.2.2.8 Principales lois de probabilité utilisées en fiabilité

Dans ce paragraphe, nous présenterons quelques distributions de vie qui interviennent le plus fréquemment dans l'analyse des données de vie et qui sont communes à plusieurs disciplines. Nous parlerons en particuliers des lois continues. Nous énoncerons les principales propriétés de ces lois (densité de probabilité, fonctions fiabilité et taux de défaillance) ainsi que leur application en fiabilité ([Afnor, 1988], [Ayyub and Mccuen, 1997], [Birolini, 1997], [Hoang, 2003], [Leemis, 1994], [Procaccia et al., 1992], [Pagès and Gondran, 1980], [Villemeur, 1988]),Il y a également d'autres lois de fiabilité spécifiques à un domaine particulier, nous parlerons de la loi de Birnbaum et Saunders qui caractérise des défaillances dues à la propagation de fissure par fatigue ([Birolini, 1997], [Owen and Padgett, 1998]).[11]

Dans les études de fiabilité des différents équipements, une variable aléatoire continue ou discrète peut être distribuée suivant diverses lois qui sont principalement :

Loi de Poisson

Loi Binomiale

La loi normale (Laplace-Gauss)

La loi Log-normale (ou de Galton)

La loi de Weibull

La loi Gamma

La loi uniforme

La loi du Khi-deux

La loi de Birnbaum-Saunders

II.3 La loi de Weibull

II.3.1 Introduction

La fiabilité est le domaine de la statistique inférentielle traitant des durées de vie (ou de bon fonctionnement) des matériels et donc de l'étude statistique de leurs pannes. Le nom de Wallodi Weibull (1887 – 1979) y est attaché. D'origine suédoise, Weibull travailla comme inventeur (roulements à billes, marteau électrique...) et ingénieur conseil dans de nombreuses sociétés suédoises ou allemandes, par exemple chez SAAB. Il s'intéressa aux problèmes de résistance des matériaux, en particulier à ceux de fatigue et de rupture des tubes à vide. C'est dans ce cadre qu'apparaît en 1939 pour la première fois la distribution de Weibull. Mais l'article qui eut le plus d'influence fut publié en 1951 dans le "Journal of Applied Mechanics" sous le titre "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability" où sont décrient sept cas d'utilisation de la distribution de Weibull. En effet, l'intérêt de cette distribution, outre ses propriétés analytiques satisfaisantes, est de permettre un bon ajustement d'une grande variété de problèmes de durée de vie.

On constate expérimentalement, que pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie (taux de variation du nombre de pannes) en fonction du temps, a la forme d'une "courbe en baignoire".[13]

II.3.2 La loi de Weibull

L'expression loi de Weibull recouvre en fait toute une famille de lois, certaines d'entre elles apparaissant en physique comme conséquence de certaines hypothèses. C'est en particulier, le cas de la loi exponentielle (**β = 1**) et de la loi normale (**β = 3**).

Ces lois constituent surtout des approximations particulièrement utiles dans des techniques diverses alors qu'il serait très difficile et sans grand intérêt de justifier une forme particulière de loi. Une distribution à valeurs positives (ou, plus généralement mais moins fréquemment, à valeurs supérieures à une valeur donnée) a presque toujours la même allure.croît jusqu'à un maximum et décroît plus lentement. Il est alors possible de trouver dans la famille de Weibull une loi qui ne s'éloigne pas trop des données disponibles en calculant β et à partir de la moyenne et la variance observées.[13]

II.3.3 Fonction de fiabilité R (t)

La forme générale de la fonction de fiabilité est désignée par R (t) représentant la probabilité de bon fonctionnement à l'instant t.

$$R(t) = e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}} \qquad \text{(II.10)}$$

La signification des paramètres a été décrite aux chapitres précédents.

Sa fonction de répartition F (t) est la probabilité que le dispositif soit en panne à l'instant t. Elle est exprimée par :

$$F(t) = 1\text{-}R(t) = 1 - e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}} \qquad \text{(II.11)}$$

Remarque si $\boldsymbol{\gamma = 0}$ et $\boldsymbol{\beta = 1}$ $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{MTBF}$

Son taux instantané de défaillance λ (t) est un estimateur de fiabilité. Il s'exprime par : $\boldsymbol{\lambda}(t) = \frac{\beta}{\eta}(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta-1}$ (II.12)

Sa densité de probabilité $f(t)$ se calcul par l'expression suivante :

$$f(t) = \lambda(t) \times R(t) = \frac{\beta}{\eta}(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta-1} . e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}} \qquad \text{(II.13)}$$

La courbe théorique de distribution est montrée à la figure III.1. On peut remarquer l'influence du paramètre β(coefficient de forme).

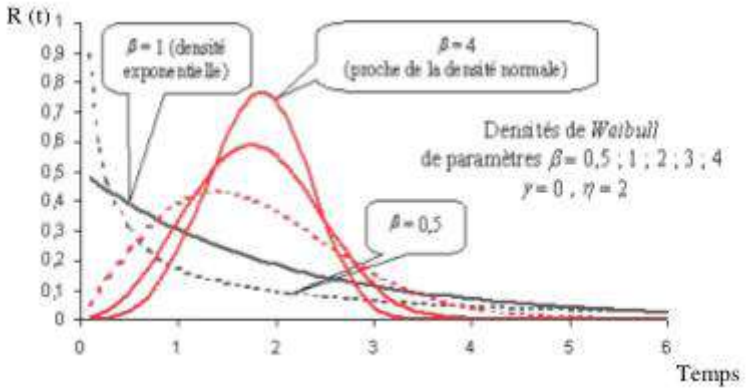


Figure II.3-1

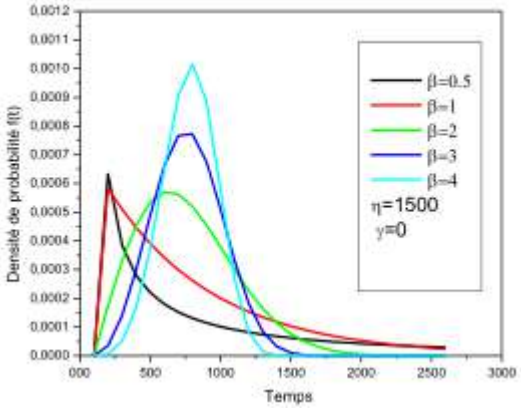


Figure II.3-2 Courbes théoriques de Weibull

Si l'on désigne par t la variable aléatoire qui, à tout matériel choisi au hasard, associe son temps de bon fonctionnement avant défaillance, lorsque β est constant, on montre que **t** suit une loi exponentielle. Pour couvrir tous les cas, Weibull a choisi pour λ une fonction dépendant de trois paramètres : γ, β et η. L'expression de λ(t) est donnée par (III.3)

Avec t >γ , β > 0, $\boldsymbol{\eta}$ > 0 (le paramètre important étant paramètre "de forme", les autres terminent l'ajustement). Ainsi, lorsque la variable aléatoire t, correspondant au temps de bon fonctionnement, suit la loi de Weibull de paramètres γ, β et η. On montre que sa densité est donnée par l'expression (III.6)[13]

II.3.4 Domaine d'application

La distribution de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie, grâce à sa flexibilité car elle permet de représenter au moins approximativement une infinité de lois de probabilité.

Un taux de panne croissant suggère une "usure ou un problème de fiabilité" : les éléments ont de plus en plus de chances de tomber en panne quand le temps passe.[13]

II.3.5 Papier de Weibull

Ce papier de Weibull sert à lire graphiquement les paramètres d'une loi de Weibull dans le cas ou le paramètre γ est nul.

En effet, la fonction de répartition associée à une loi de Weibull de paramètres β, γ = 0, η est définie par :

$$\rightarrow F(t) = 1 - e^{-(\frac{t}{\eta})^{\beta}}$$

$$\rightarrow \ln(1- F(t)) = -(\frac{t}{\eta})^{\beta}$$

$\rightarrow \ln(1- F(t)) = (\frac{t}{\eta})^{\beta}$ (II.14)

$\rightarrow \ln (1-\ln(1-F(t))) = \beta \ln \frac{t}{\eta}$

$\rightarrow \ln (1-\ln(1-F(t))) = \beta \ln t - \beta \ln \eta$

$\rightarrow Y = \beta X - \beta \ln \eta$

La dernière équation obtenue est l'équation d'une droite dans le repère rouge (O ; X ; Y) où O est le point correspondant à X = 0 et Y = 0 soit à t = 1 et F (t) = 1 - 1/e.

Le paramètre se lit directement à l'intersection de la droite précédente avec l'axe des abscisses puisque celui-ci est gradué en échelle logarithmique, ce qui est montré sur les figures III.2.a et III.2.b.

Le paramètre est le coefficient directeur de la droite précédente, il suffit de tracer une droite parallèle à la précédente et de lire directement le coefficient directeur de cette droite sur l'axe d'équation X = - 1. [13]

II.3.5.1.1 Echelles utilisées sur le papier de Weibull

→ Abscisse haute : échelle naturelle en X

→Abscisse intermédiaire : échelle logarithmique (lecture du paramètre t)

→ Abscisse basse : échelle logarithmique (on fait correspondre à chaque valeur de t son logarithme népérien ln t).

→Ordonnée gauche : on place les valeurs de F (t) en pourcentage en échelle ln (- ln (1 – F (t)))

→Ordonnée sur l'axe X = -1 (lecture du paramètre) : ce sont les valeurs : ln (- ln (1 - F (t)))

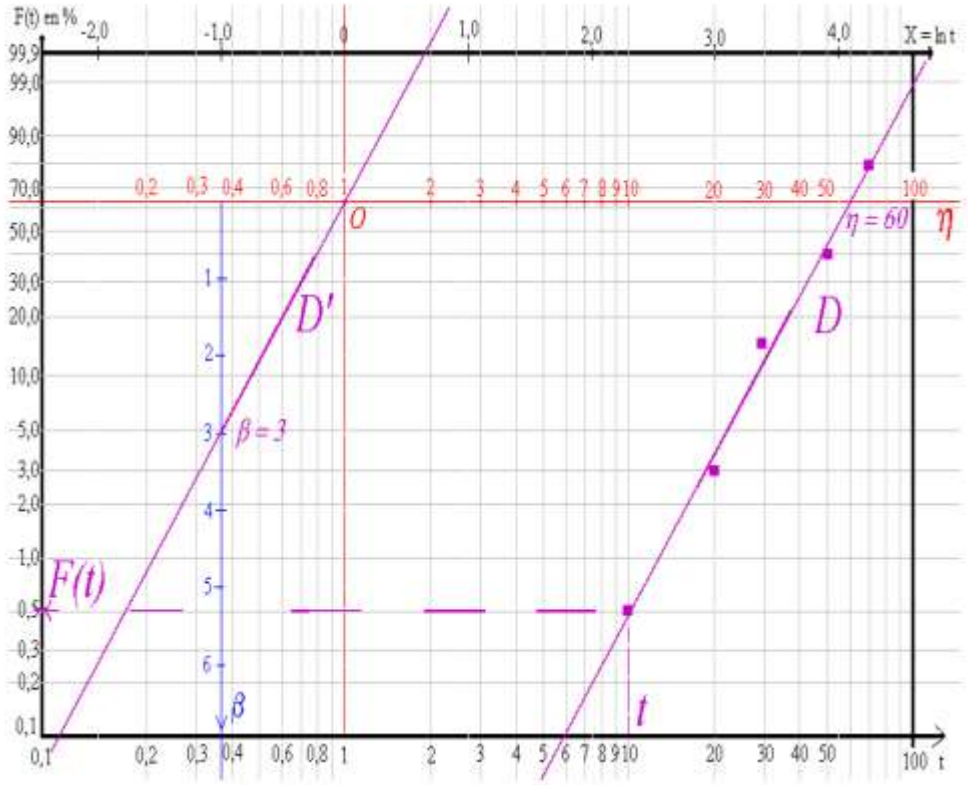


Figure II.3-5 Papier de Weibull

A titre d'exemple :

On construit tout d'abord le nuage de points (t ; F (t)) puis une droite d'ajustement D, on lit la valeur du paramètre η sur l'axe des abscisses puis on trace la parallèle D' à la droite D passant par l'origine O du repère, on lit le paramètre β sur l'axe d'équation X = -1.Pour calculer gamma. Si le nuage de points correspond à une droite, alors γ = 0. Si le nuage de points correspond à une courbe, on la redresse par une translation de tous les points en ajoutant ou en retranchant aux abscisses "t", une même valeur (gamma) afin d'obtenir une droite. Ceci est montré à la figure III.3

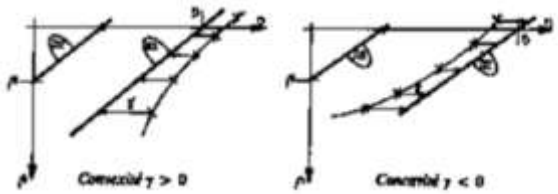


Figure II.3-4 Recherche de gamma

Pour le calcul d'êta. La droite de régression linéaire coupe l'axe A à l'abscisse t = éta. Bêta est la pente de la droite de corrélation. On trace une droite parallèle à la droite de corrélation, et passant par $\boldsymbol{\eta}$ **=1** On lit ensuite bêta sur l'axe bêta est sans dimension. La figure III.3, montre la démarche pour ce calcul.

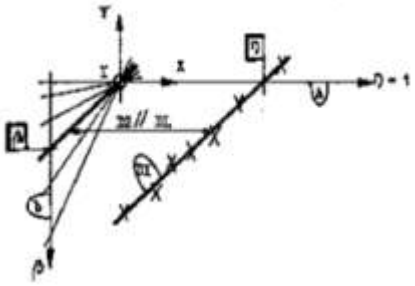


Figure II.3-6 Recherche de bêta

Remarque :

Si le nuage de point met en évidence plusieurs droites, on déterminera plusieurs pentes b montrant des populations distinctes qui correspondent à des modes de défaillances successifs et différents (défaillances juvéniles suivit de défaillances par usure par exemple).

III.4.1.2.Signification des paramètres

⋆**Paramètre d'échelle êta(η):** Ce paramètre permet d'utiliser le papier d'Allan Plait quelque soit l'ordre de grandeur de t. Il n'a donc pas à être interprété.

⋆ **Paramètre de forme bêta (β):** Ce paramètre donne des indications sur le mode des défaillances et sur l'évolution du taux de défaillances dans le temps. Les courbes des figures **III.5.a, III.5.b et III.5.c**, illustrent respectivement l'évolution de la fiabilité, de la fonction de répartition et du taux de défaillance en fonction du paramètre de forme(**β**)

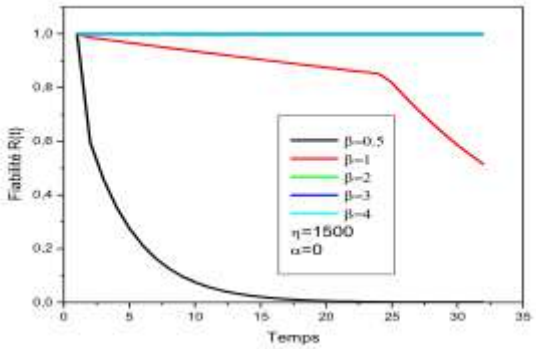


Figure II.3-7 Fiabilité

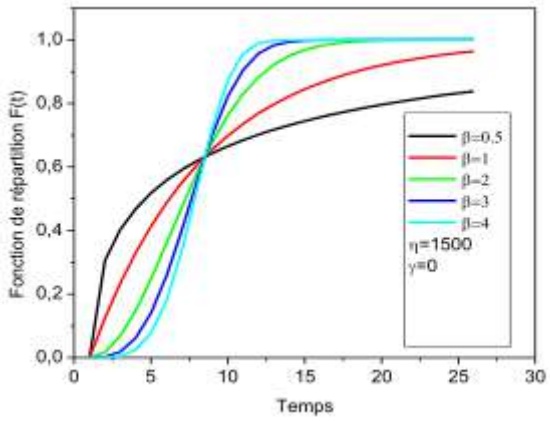


Figure II.3-8 Fonction de répartition

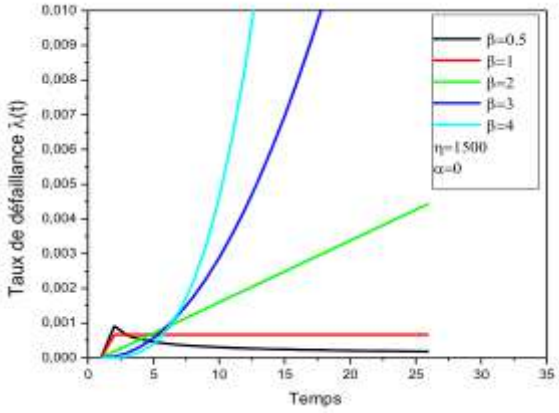


Figure II.3-9 Taux de défaillance

On peut donc remarquer que si :

- β <1 =>λ (t) décroît → période de jeunesse.
- β =1 =>λ (t) = cte → indépendance du temps.
- β >1 =>λ (t) croit → période d'obsolescence.
    - ◗ 1.5< β > 2.5 → exprime un phénomène de fatigue.
    - ◗ 3 < β > 4 → exprime un phénomène d'usure.

Remarque :

Si β = 3.5 => f (t) symétrique =>**distribution normale**.

Le paramètre de position gamma donne des indications sur le retard de la fonction f (t). La figure 3.6d montre cette variation.

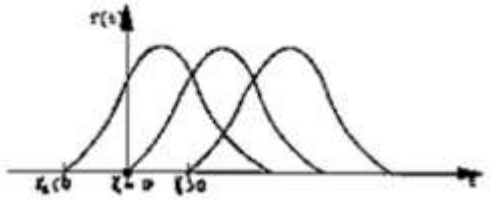


Figure II.3-10 Les courbes de f(t)

◗ Avec γ < 0 ceci explique qu'une probabilité de défaillance est déjà présente au moment de l'installation du système.

◗Avec γ = 0 une probabilité de défaillance sera présente dés la mise en service du Système

◗ Avec γ > 0 une probabilité de défaillance dans les premières utilisations du système est nulle.[13]

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a définit la fiabilité, ainsi que les grandeurs qui les caractérisent. La fiabilité des systèmes et des composants est souvent décrite par la courbe caractéristique dite en "baignoire" qui décrit l'évolution du taux de défaillance instantanée d'où on a souligner la particularité des composants mécaniques dans l'analyse de la fiabilité. On a abordé la spécificité des composants mécaniques dans les études des durées de vie, qui mettent en évidence la complexité des phénomènes physiques de dégradation qui ont une influence sur l'évaluation de leur fiabilité. Pour un système mécanique complexe, son taux de défaillance peut être calculé en fonction de ses composants et leurs implications respectives dans le mécanisme de défaillance incriminé.

La fiabilité du système repose sur la fiabilité de quelques composants élémentaires responsables de son dysfonctionnement parfois un seul.

Les méthodes utilisées dans chaque étape du cycle de vie de développement des systèmes complexes ont été présentées pour analyser la fiabilité. L'ensemble de ces méthodes constitue un processus à part entière : processus de fiabilité.

Les analyses de fiabilité peuvent être réparties en trois composantes complémentaires qui sont la fiabilité prévisionnelle et la fiabilité expérimentale. Ces deux démarches sont utilisées en phase de conception pour l'évaluation et l'optimisation d'un système en termes de fiabilité,

elles sont choisies sur la base des informations disponibles. Enfin la fiabilité opérationnelle qui permet d'évaluer le système dans son environnement par rapport aux objectifs initiaux, de valider l'ensemble des démarches de fiabilité prévisionnelle et expérimentale, d'identifier les défaillances inconnues, de créer ou affiner des outils et d'avoir une référence pour fixer des objectifs des systèmes ou produits futures.[14]

Chapitre III

Description d’une turbine à gaz

III.1 Introduction

La grande puissance, le bon fonctionnement ainsi que les hautes performances des turbines à gaz font d'elles un des moyens les plus sollicités pour l'entrainement des charges mécaniques. Les turbines utilisées aux centres industriels, sont des turbines à deux arbres.

Ces dernières possèdent deux roues mécaniquement indépendantes.

La turbine à gaz est un moteur à combustion interne de tous les point de vus, elle peut être considérée comme un système autosuffisant ; en effet, elle prend et comprime l'air atmosphérique dans son propre compresseur, augmente la puissance énergétique de l'air atmosphérique dans son propre chambre de combustion et convertie cette puissance en énergie mécanique qui en résulte est transmise par l'intermédiaire d'un accouplement à une machine réceptrice, qui produit la puissance utile pour le processus industriel.

Comparée aux autres moteurs thermique, la turbine à gaz présente une double particularité ; de même que la turbine à vapeur, la turbine à gaz est une machine à écoulement continue, donc ne comporte de variation périodiques de l'état de fluide ; dans toutes section donnée ; mais contrairement à la turbine à vapeur, le fluide ne subit qu'une seul transformation qui est la détente.

La turbine à gaz (au sens large du terme), est le siège de l'ensemble de transformations constituant le cycle thermodynamique décrit par le fluide ; donc, la turbine à gaz est assimilée aux moteurs à combustion interne mais les transformations s'effectuent dans des enceintes juxtaposées dans l'espace. Le rendement thermique d'une T.A.G se situe entre 16 et 28 % pour une installation simple sans la récupération de ses calories d'échappements et entre 26 et 30 % pour une installation avec la récupération de ses calories, néanmoins il reste bien inférieur à celui des moteurs à gaz.[7]

III.1.1 Définition d'une turbine

Une turbine est un dispositif rotatif destiné à utiliser l'énergie cinétique d'un fluide liquide comme l'eau ou d'un gaz (vapeur, air, gaz de combustion), pour faire tourner un arbre solidaire des pales de la turbine. L'énergie du fluide est partiellement convertie en énergie mécanique pour entrainer un alternateur, une pompe ou tout autre récepteur mécanique rotatif. [9]

III.2 Différents types des turbines

On peut diviser les turbines en quatre catégories principales :

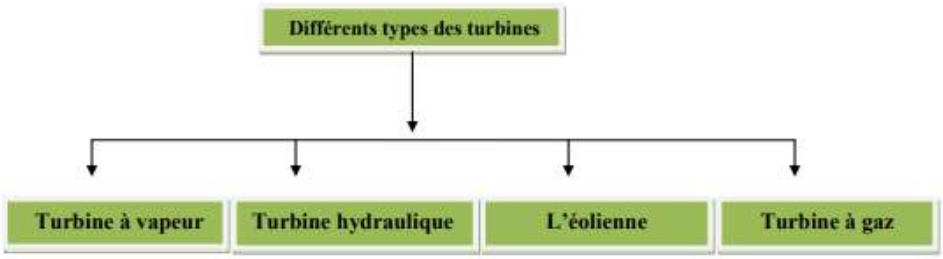


Figure III.2-1 Différents types des turbines

III.2.1 Définition de turbine à vapeur

La turbine à vapeur est une machine tournante qui extrait l'énergie thermique de la vapeur et l'utilise pour produire un travail mécanique de rotation de l'arbre de sortie. [9]

III.2.2 Définition de Turbine hydraulique:

C'est une machine tournante qui produit une énergie mécanique à partir d'eau en mouvement (cours d'eau ou marée) ou potentiellement en mouvement (barrage). Elle constitue le composant essentiel des centrales hydroélectriques destinées à produire de l'électricité à partir d'un flux d'eau. Elle a été inventée par Benoît Fourneyron en 1832, qui installa sa première machine à Pont-sur l'Ognon. [9]

III.2.3 Définition de L'éolienne :

Une éolienne est un dispositif qui transforme l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique, laquelle est ensuite le plus souvent transformée en énergie électrique. Les éoliennes produisant de l'électricité sont appelées aérogénérateurs, tandis que les éoliennes qui pompent directement de l'eau sont parfois dénommées éoliennes de pompage ou pompe à vent. [9]

III.3 Turbines à gaz

III.3.1 Historique des turbines à gaz

Les premières turbines à gaz sont apparues sur le marché à la fin des années 40 ; elles sont généralement employées dans les chemins de fer et avaient l'avantage de brûler du combustible liquide, même à faible qualité (à cause de la limitation des procédés de raffinage).

La turbine MS3001 (Model Série 3001) constitue par GE (General Electric), ayant une puissance de 4500HP (horse power), a été spécifiquement employée pour le service locomoteur.

Pour les précurseurs de la turbine à gaz moderne, on doit mentionner les inventeurs des moteurs thermiques fonctionnant avec un gaz permanant (plus précisément avec l'air chaud), bien que ces moteurs aient été conçus d'après le principe des machines à vapeur a piston.

Ces inventions ont, en effet, permis de déterminer les différentes transformations qui doivent être subies par un gaz permanent servant de fluide moteur, à l'instar du cycle thermodynamique de la turbine à gaz dont certains cycles porte encor les noms de leurs inventeurs à savoir cycle de Joule, cycle d'Ericsson.

Nous présentons dans ce que suit une évolution chronologique de la turbine à gaz :

- 1791 : Premiers brevets de turbine à gaz de John Barber, Angleterre ;
- 1900/1904 : Premiers essais avec la turbine à air chaud selon Stolze ;
- 1905 : Conception de la turbine à explosion selon Holzwarth ;
- 1906/1908 : Construction de la première turbine à explosion par BBC pour Dr.
- Holzwarth ; 1909/1910 : Première turbine à gaz employée industriellement en Allemagne ;
- 1928 : BBC reprend la fabrication d'une turbine Holzwarth améliorée ;
- 1933 : mise en opération de la première turbine Holzwarth de BBC, alimentée en gaz de haut fourneau ;
- 1937 : mise en service du premier groupe compresseur/turbine à gaz "Houdry" auprès• de Marcus HookRefinery, PA, Etats-Unis d'Amérique. Puissance du groupe 2000 Kw ;
- 1939 : Mise en service de la première turbine à gaz de 4000 Kw à la centrale de Neuchâtel ;
- 1944 : Turbine à gaz pour propulsion marine par Elliott ;
- 1966 : Général électrique lance la 5000, la plus répondu des turbines à gaz industrielles ;
- 1975 : La turbine à gaz dépasse 100 Mw(Modèle 9001 Asthom-Atlantique) ;

Les progrès réalisés dans coté métallurgique, en plus des résultats favorables des recherches approfondies sur la combustion, ont permis des améliorations rapides des performances de ces machines, en terme de puissance, rendement, longévité,…etc.

On peut distinguer trois générations, basées sur les intervalles de température maximale(en C°) des gaz à l'entrée de la première roue de la turbine :

1_ génération : 760< T max< 950

2_ génération : 955< T max< 1124

3_génération : 1149< T max< 1288

Evidemment, l'augmentation de la température d'entrée à la première turbine a eu comme effet une augmentation du rendement thermodynamique, qui est passé des valeurs inférieures à 20% dans les premières machines, à des valeurs courantes supérieures à 40% (turbine LM6000).[7]

III.3.2 Définition d'une turbine à gaz

La turbine à gaz est un moteur à combustion interne, dont le rôle est la reconversion de l'énergie thermique due à la combustion d'un hydrocarbure en énergie mécanique (couple mécanique sur l'arbre de la turbine).

La turbine à gaz prend l'air atmosphérique et le comprime dans son propre compresseur, augmente la puissance énergétique de l'air dans sa chambre de combustion et convertie cette puissance en énergie mécanique utile pendent le processus de détente qui a lieu dans la section turbine.

L'énergie mécanique qui en résulte est transmise par l'intermédiaire d'un accouplement en puissance utile à une machine réceptrice (Alternateur, pompes centrifuges, compresseur de gaz…etc.) [7].

III.4 Domaines d'application :

Les turbines à gaz ont une très grande utilité dans l'industrie, du fait qu'elles sont des appareils pour la production de l'énergie mécanique. Elles peuvent être utilisées pour l'entrainement des : [7]

❖ Appareils fixes :

- Générateur d'électricité ;
- Compresseurs ;
- Pompes.

❖ Appareils mobiles :

- Chemin de fer ;
- Propulsion maritime ;
- Aviation.
- Traction routière.

III.5 Les éléments d'une turbine à gaz

- Dans sa forme la plus simple et la plus répandue, cette machine est composée de trois éléments principaux : Une turbine à gaz se compose de trois sections principales : [7]
- Un compresseur axial ;
- Une chambre de combustion ;
- Une turbine de puissance ;

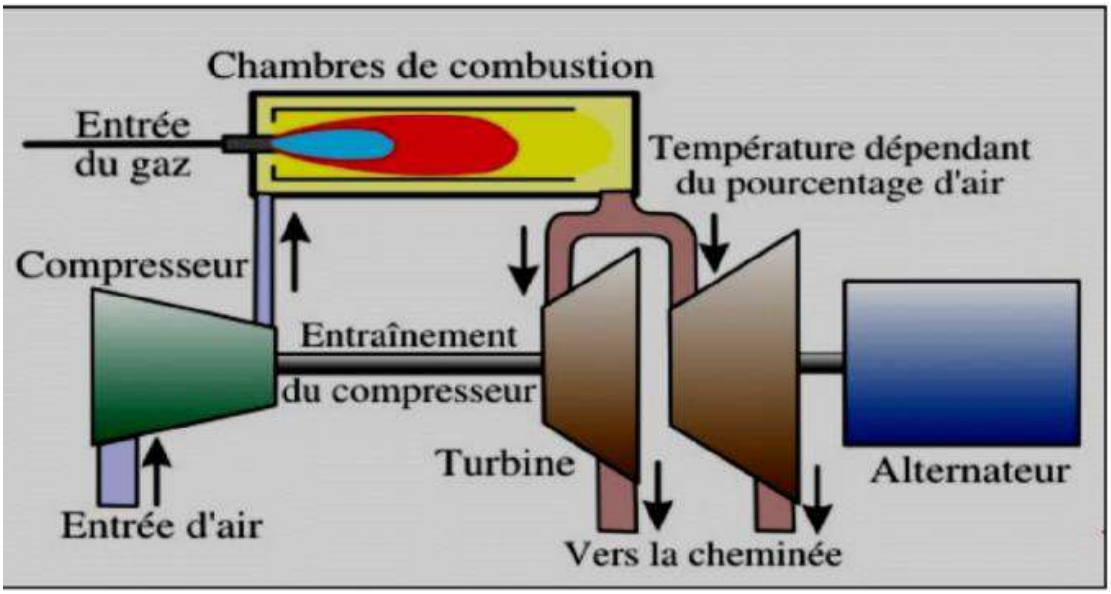


Figure III.5-1 Les éléments d'une turbine à gaz

III.5.1 Section compresseur

Le compresseur est du type à flux axial, il produit des débits d'air importants, nécessaires pour obtenir des puissances utiles élevées avec d es dimensions réduites.

Un compresseur se compose d'une série d'étages d'aubes orientables, qui augmentent la vitesse de l'air en termes d'énergie cinétique, suivie alternativement par des étages d'aubes fixes, qui convertissent cette énergie en une pression plus élevée.

Le nombre d'étages de compression, est lié à la structure de la turbine à gaz et aux taux de compression à obtenir.

Sur le côté aspiration du compresseur, il y a des aubes variables à l'admission (IGV), dont le but est de diriger 'air, vers le premier étage des aubes du rotor.

Ces aubes variables permettent aussi d'assurer le comportement fluido-dynamique correct sous différents régimes de fonctionnement, pendant le démarrage et l'arrêt du compresseur.

Sur le côté refoulement du compresseur, il y a quelques étages d'aubes variables à la sortie (EGV), pour obtenir la récupération de la pression maximale avant que l'air entre dans la chambre de combustion.

Le compresseur sert à fournir une source d'air pour refroidir les parois des directrices, les aubes, les disques de la turbine et l'huile d'étanchéité des joints à labyrinthe du palier.[7]

III.5.2 Section combustion

Elle se compose d'un système comprenant une ou plusieurs chambres de combustion annulaires, disposées systématiquement le long d'une circonférence.

Ces chambres de combustion reçoivent et brûle du combustible, au moyen d'un nombre égal des brûleurs.

L'air entre dans chaque chambre dans une direction opposée à la veine des gaz chauds, pour cette raison, cette méthode de distribution de l'air s'appelle à débit inverse.

Au début de fonctionnement, le processus de combustion est déclenché par une ou plusieurs bougies d'allumage.

Une fois déclenchée, la combustion continue sans intervention, aussi longtemps que les conditions d'alimentation du combustible et d'air de combustion sont maintenues.

Dans le cas des turbines à gaz construite pour l'industrie aéronautique, la section de combustion se compose d'une chambre annulaire simple, à refroidissement directe et non pas à refroidissement à débit inverse.

En effet, cela aide à réduire les dimensions diamétrale extérieurs, puisqu'une plus petite section frontale était nécessaire afin d'offrir une résistance aussi réduite que possible au mouvement de l'avion.[7]

III.5.3 Section turbine 112443

Comprend un certain nombre d'étages, chacun d'entre eux se compose d'un étage stator et d'un étage rotor.

Dans le stator, les gaz à température et pression élevées, fournis par la pièce de transition, sont accélérés et acheminés vers un étage d'aubes du rotor montées sur un disque connecté à l'arbre de puissance.

La conversion de température et de pression, en énergie cinétique a eu lieu dans le stator.

Le rotor complète cette conversion, étant donné qu'ici l'énergie cinétique est transformée en énergie d'entraînement de l'arbre. [9]

III.6 Différents types de turbine à gaz

Une turbine à gaz peut comporter une ou deux lignes d'arbre pour l'ensemble des éléments tournants :

III.6.1 Turbine à une ligne d'arbre

Le système est entraîné d'abord par un moteur jusqu'à une certaine vitesse, ensuite c'est la turbine HP qui continue l'entraînement de l'ensemble des éléments. [9]

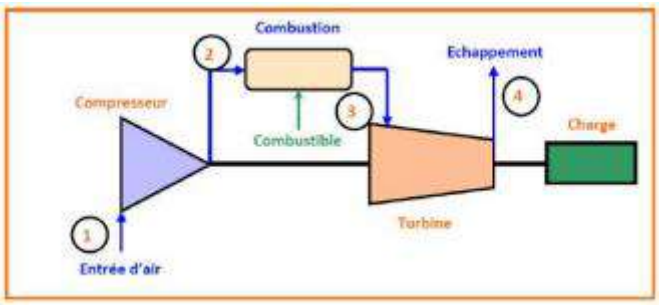


Figure III.6-1 Schéma d'une turbine à un seul arbre.

III.6.2 Turbine à deux lignes d'arbre

Comme pour une ligne d'arbre, il est rajouté une turbine BP en bout d'arbre séparé mécaniquement. La conception à deux lignes d'arbres représente le maximum de souplesse et, est retenue pour les applications de grandes puissances. [9]

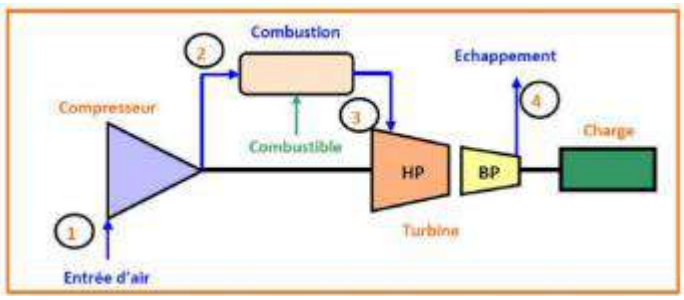


Figure III.6-2 Schéma d'une turbine à deux arbres

Figure II. 2 : Variation de la pression et de la température dans les différentes sections de la machine (Condition ISO).

III.7 Classification des turbines à gaz

(thermobynamic turbin a gaz)

On peut classer les turbines selon différents points comme le montre la figure (II.1)

Par le mode de construction

¬ Par le mode de travail

¬ Par le mode fonctionnement.

¬ Classification des turbines à gaz Mode de construction Mode de travail Mode de fonctionnement Mono arbre Bi arbre A action A réaction A cycle fermé A cycle ouvert Figure II.

3 Simple A régénéré : classification des turbines à gaz [15]

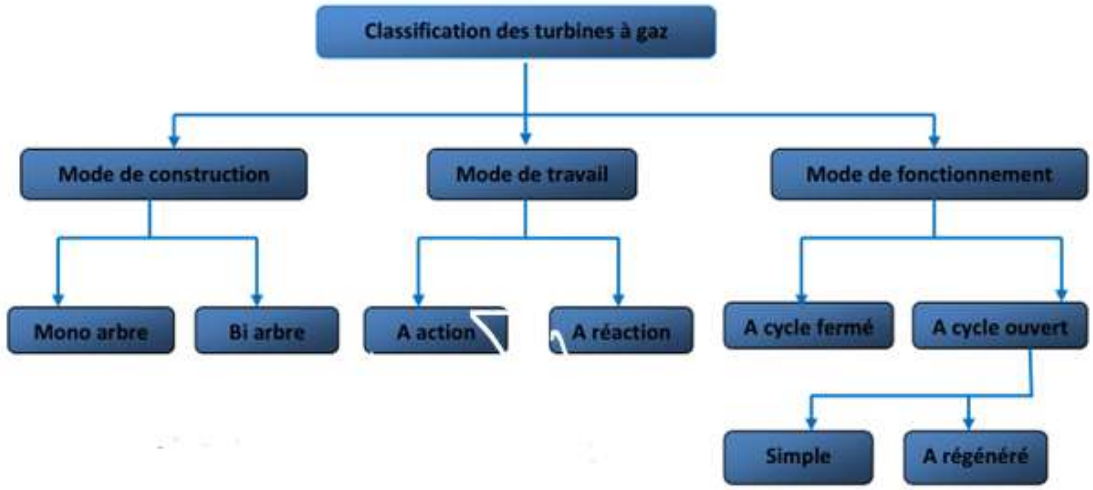


Figure III.7-1 classification des turbines à gaz

III.7.1 D'après le mode de construction

a. Turbine mono-arbre :

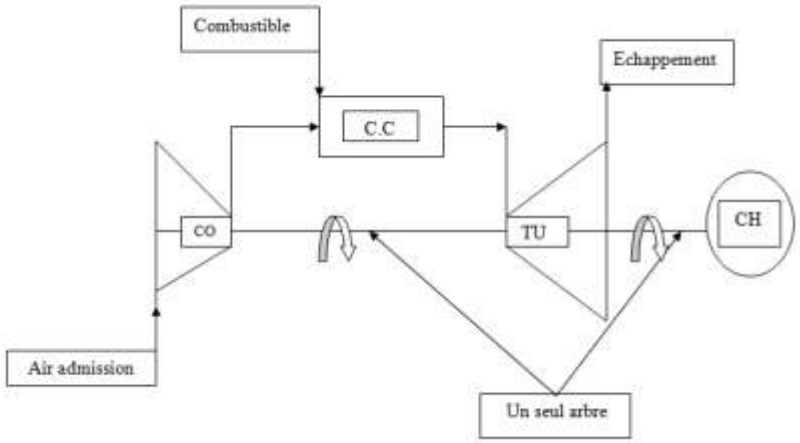


Figure III.7-2 Schéma d'une turbine à gaz mono-arbre.

Le compresseur et les sections de la turbine de ces machines se composent d'un seul rotor simple, où la turbine produit l'énergie pour entrainer le compresseur ainsi que l'énergie pour entrainer la charge. Les turbines à un seul arbre sont favorables dans le cas où la charge est constante. Les turbines à gaz à un seul arbre sont aptes à l'entrainement des machines qui

fonctionnent à vitesse constante. Telle que les alternateurs et, pour cette raison, sont employées dans la génération d'énergie électrique. [15]

CO : Compresseur axial. **CC** : Chambre de combustion.

T : Turbine. **CH** : Charge.

b. Turbine bi-arbre :

La turbine à gaz se compose de deux roues turbines indépendantes mécaniquement. La roue turbine HP entraîne le rotor du compresseur axial et les accessoires, tandis que la roue BP deuxième étage sert à entraîner l'organe récepteur (ex : les compresseurs). Le but des roues turbines non reliés est de permettre aux deux roues de fonctionner à des vitesses différentes pour satisfaire aux exigences de charge variable de l'organe récepteur.

CO : Compresseur axial. **CC** : Chambre de combustion.

Thp : Turbine à haute pression. **Tbp** : Turbin à basse pression.

N : Réducteur. **CH** : Charge

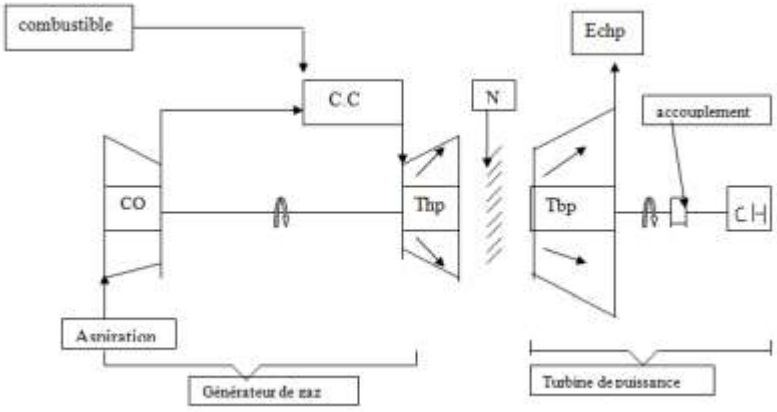


Figure III.7-3 Schéma d'une turbine à gaz bi-arbre.

III.7.2 D'après le mode de travail:

a. Turbine à action : Le principe de fonctionnement d'une turbine à action, est que la transformation thermodynamique du fluide se fait uniquement dans la directrice (entre aubages fixes). Les aubes mobiles n'ont qu'un rôle à jouer, c'est de transformer l'énergie cinétique acquise par la détente (P1 > P2) en travail mécanique communiqué au rotor. L'évolution des gaz dans la roue se fait sans variation de pression statique (P1 = P2).

b. Turbine à reaction : Dans les turbines à réaction, nous savons que la détente se fait aussi bien dans les canaux fixes que dans les canaux mobiles, c-à-d qu'une partie de l'énergie

thermique est transformée dans la roue en énergie cinétique et mécanique. L'évolution des gaz dans la roue se fait avec variation de la pression statique (P1 > P2 > P3).[15]

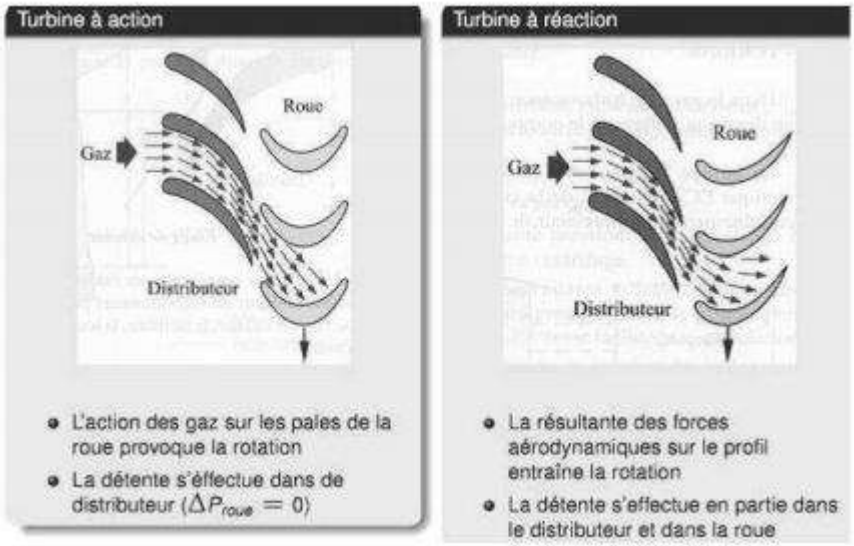


Figure III.7-4 Schéma d'une turbine à action et à réaction.

III.8 Principe de fonctionnement d'une turbine à gaz

Une turbine à gaz fonctionne de façon suivante :

- Elle extrait de l'aire du milieu environnant
- Elle le comprime à une pression plus élevée
- Elle augmente le nivaux d'énergie de l'air comprimé en ajoutant et en brûlant le combustible dans une chambre de combustion
- Elle achemine de l'air à pression et à température élevées vers la section de la turbine, qui convertit l'énergie thermique en énergie mécanique pour faire tourner l'arbre sert, d'un côté, à fournir l'énergie utile à la machine conduite, couplée avec la machine au moyen d'un accouplement et, de l'autre coté à fournir l'énergie nécessaire pour la compression de l'air, qui à lieu dans un compresseur relié directement à la section turbine ;
- Elle décharge à l'atmosphère les gaz à basse pression et température résulte deϖ transformation mentionnée ci. La figure II.2montre les variations de pression et de température dans les différentes sections de la machine correspondant aux phases de fonctionnement mentionnée

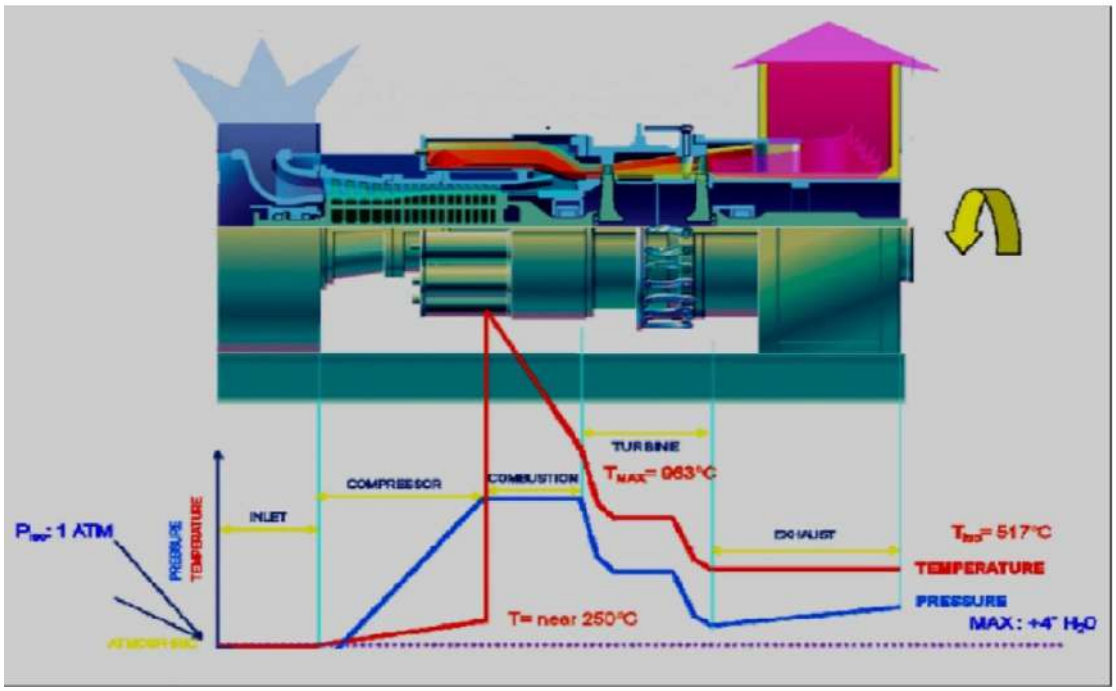


Figure III.8-1 Variation de la pression et de la température dans les différentes sections de la machine (Condition ISO).[15]

III.9 D'âpres le mode de fonctionnement thermodynamique

La turbine à gaz à cycle ouvert dont l'aspiration et l'échappement s'effectuent directement dans l'atmosphère, ce type de turbines qui est le plus répandu se divise en deux classes : « Turbine à cycle simple et turbine à cycle avec régénération ou mixte ». a. Turbine à cycle simple : c'est une turbine utilisant un seul fluide pour la production d'énergie mécanique après la détente les gaz possédant encore un potentiel énergétique sont perdus dans l'atmosphère à travers la cheminée. b. Turbine à cycle avec régénération : Les pertes de chaleur causées par les gaz d'échappement sont les plus importantes dans l'installation de turbine à gaz. Pour cela le rendement des installations de turbine à gaz peut être augmenté, en conduisant les gaz d'échappement dans un échangeur thermique où ils réchauffent l'air sortant du compresseur avant son entrée dans les chambres de combustion. On récupère une partie de chaleur sensible de ces gaz qui se trouvait perdue dans l'atmosphère. [7]

III.10 Par le mode de fonctionnement thermodynamique

Il existe deux cycles thermodynamiques :

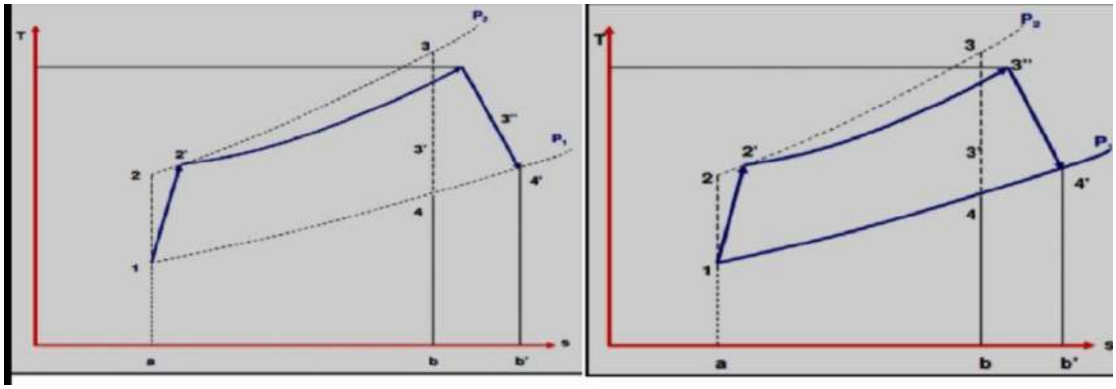
Turbine à gaz à cycle fermé :

Dans laquelle le même fluide est repris après chaque cycle.

Turbine à gaz à cycle ouvert :

C'est une turbine dont l'aspiration et l'échappement s'effectuent directement dans l'atmosphère.

Cycle idéal Cycle réel



a-Cycle à ouvert b-Cycle fermé

Figure III.10-1 Représentation du cycle ouvert et cycle fermé

Ce type de turbine qui est le plus répandu se divise en deux classes :

- **Turbine à cycle simple :**

C'est une turbine utilisant un seul fluide pour la production d'énergie mécanique, après la détente les gaz possédant encore un potentiel énergétique sont perdu dans l'atmosphère à travers l'échappement.

- **Turbine à cycle régénéré :**

C'est une turbine dont le cycle thermodynamique fait intervenir plusieurs fluides moteurs dans le but d'augmenter le rendement de l'installation.

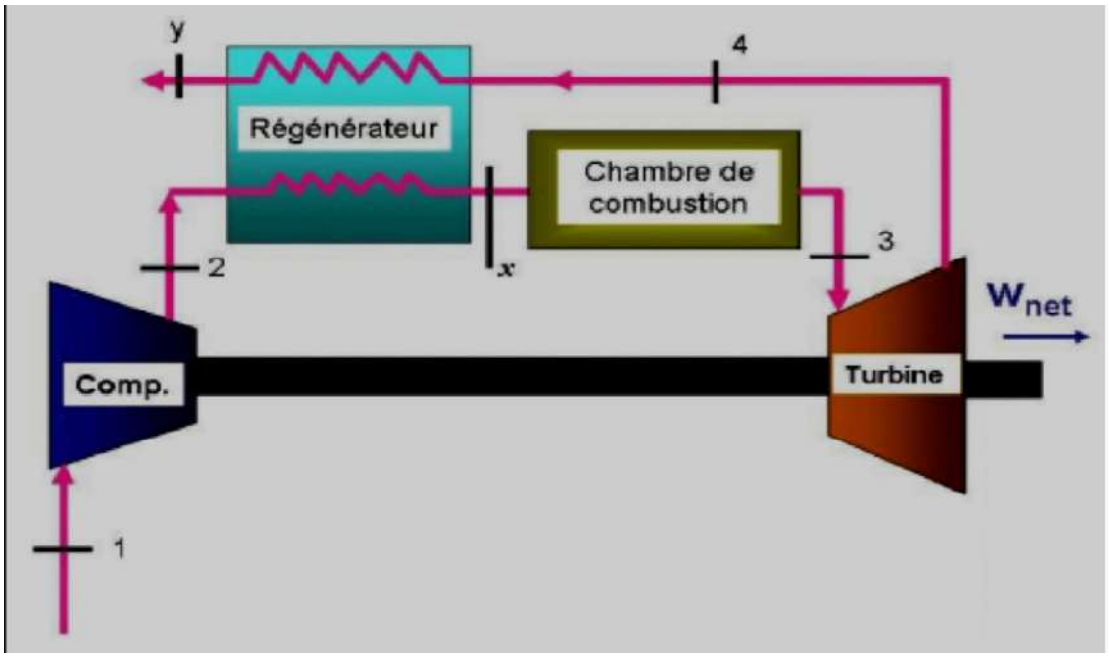


Figure III.10-1 Représentation du cycle de régénération

III.11 Domaines d'utilisations des turbines à gaz

Les turbines à gaz sont des groupes de force dont l'utilisation est très répondue dans différents domaines d'applications, nous citerons : l'industrie des centrales électriques (nucléaires ou non nucléaires), transport des hydrocarbures et du transport par la propulsion.

Parmi ces domaines d'application :

III.11.1 Aéronautique

III.11.1.1 Turbocompresseur

Ce terme désigne une turbine actionnée par les gaz d'échappement d'un moteur à piston et dont le travail sert à comprimer l'air admis dans le moteur.

Ce dispositif représente une amélioration importante du moteur classique notamment sur les points suivants :

- Augmentation de la puissance massique et volumique par une puissance supérieure à cylindrée égale. Afin de maximiser cet effet, il est nécessaire de refroidir l'air comprimé par un échangeur (intercooler),
- Suppression de l'inconvénient de la détente écourtée des cycles Otto et Diesel d'où amélioration de rendement.[7]

III.11.1.2 Turbine à gaz d'avion

Dans les moteurs d'avions, l'unité de turbine à gaz fonctionne entièrement comme générateur de gaz dans le turbo jet et les moteurs de turboréacteur, tandis qu'elle fournit la puissance exigée d'axe au propulseur dans le moteur de turbopropulseur.

La centrale de turbine à gaz utilisée pour la propulsion d'avion travaille sur le cycle de circuit ouvert de pression constante.[7]

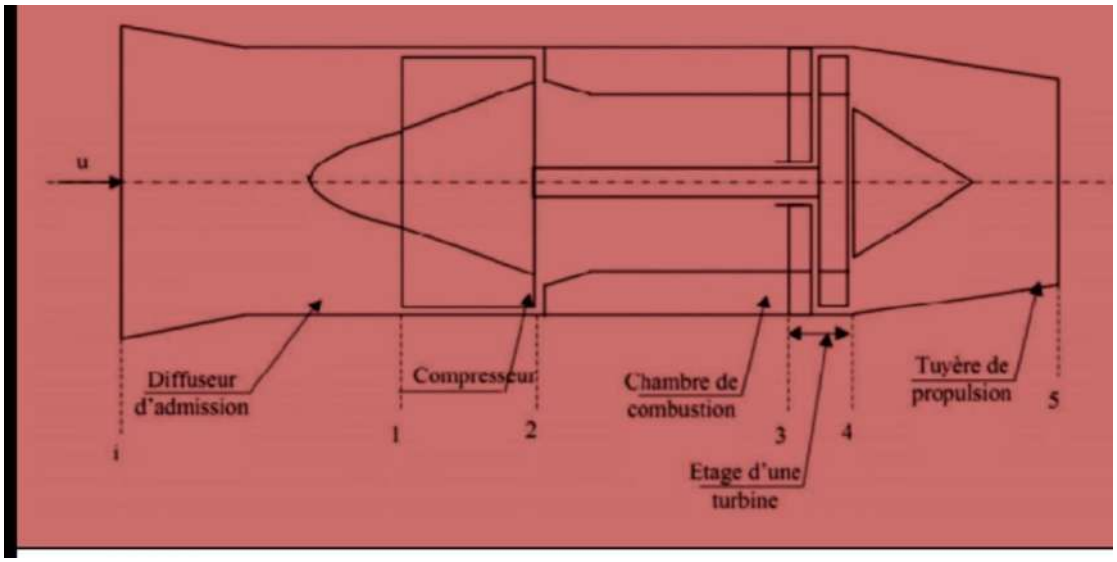


Figure III.11-2 Les composants principaux d'un turboréacteur. [8]

III.11.1.3 Moteur de turbopropulseur

Dans le système de turbopropulseur la centrale de turbine à gaz conduit un propulseur à une vitesse raisonnable relativement basse par une vitesse de réduction.

La turbine extrait une grande propulsion de l'énergie à partir des gaz chauds en développant la puissance requise pour conduire le propulseur.

Par conséquent l'énergie restent dans les gaz d'échappement est comparativement basse.

Ainsi la poussée due à la détente des gaz dans la tuyère de propulsion ne représente que 10 % de toute la poussée.

Le grand diamètre du propulseur manipulable de très grandes quantités d'aire avec une petite différence de vitesse. La masse d'aire passant par le moteur est seulement une petite fraction d'air manipulé par le propulseur. Ainsi le moteur du turbopropulseur peut être considéré come une sorte de réacteur à double flux avec un rapport très élevé de déviation. [7]

III.11.1.4 Moteur de turbojet

Le moteur turbojet diffère du moteur de turbopropulseur parce que la puissance de la turbine est complètement consommée par le compresseur ; dans ce cas aucune puissance de sortie d'axe.

L'avion est complètement propulsé par la poussée de la tuyère. Par conséquent il y a une augmentation substantielle de la vitesse des gaz lorsqu'ils se détendent dans la tuyère de propulsion.[7]

III.11.1.5 Moteur d'avion nucléaire

La figure 13 montre un moteur d'air chaud d'un turbojet à propulsion nucléaire.

La chambre de combustion du moteur turbojet conventionnel est remplacée ici par un échangeur de chaleur où s'effectue des transferts appropriés de la quantité de chaleur d'un liquide réfrigèrent requise du réacteur à l'air.

Le compresseur d'air est entrainé par une turbine à air chaud qui fonctionne ici dans un environnement moins hostile comparé aux turbines à gaz.[7]

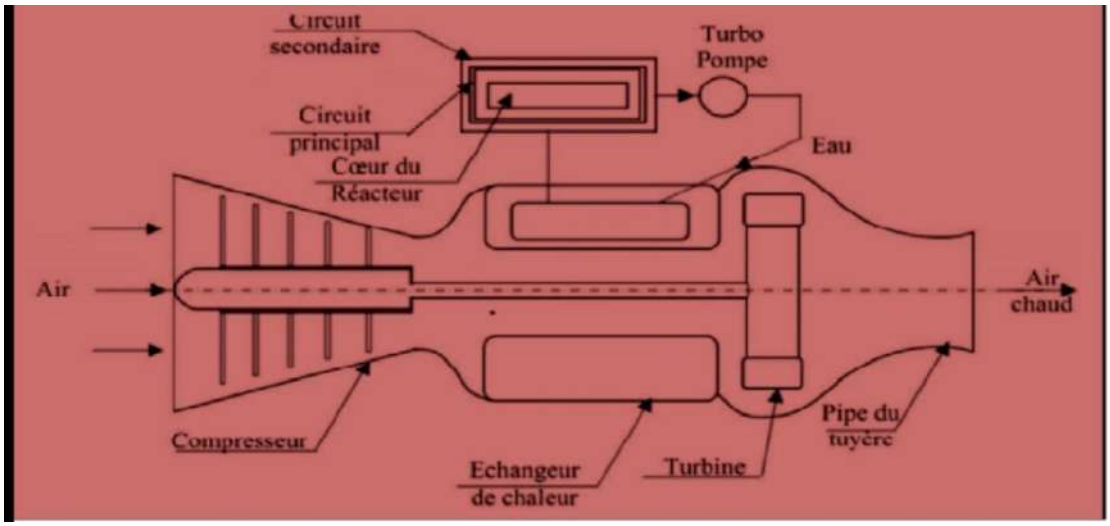


Figure III.11-3 Avion nucléaire [8]

III.11.2 Turbine à gaz pour des véhicules

Des turbines à gaz utilisées par les véhicules extérieurs sont considérablement différentes de ceux des turbines à gaz d'avion.

III.11.2.1 Automobiles

Des tentatives ont été par un certain nombre de compagnies de fabrication d'automobile dans plusieurs pays de perfectionner des turbomoteurs pour des voitures.

Un échangeur de chaleur d'échappement a été employé pour une consommation optimale du carburant.

Un certain degré de succès a été réalisé dans le domaine des véhicules avec des moteurs de plus de 200 kilowatts.

Beaucoup de concepteurs ont utilisé la combinaison d'une turbine axiale et d'un compresseur centrifuge de basse pression avec un échangeur de chaleur rotatif.[7]

III.11.2.2 Locomotives ferroviaires

Dans beaucoup de pays, les trains de voyageurs de longue distance utilisent des locomotives à turbine à gaz et celles avec transmission électrique peuvent être présentées dans les secteurs Où la traction électrique est économique.[7]

III.11.2.3 Suralimentation par les gaz d'échappement

De petites turbines à gaz sont également utilisées dans des automobiles pour la suralimentation. Tous les grands camions et locomotives à moteur diesel ferroviaire sont suralimentés. Ils utilisent les turbines entrainées par les gaz d'échappement pour l'entraînement des compresseurs d'air. [7]

III.11.3 Turbine à gaz pour la production d'énergie électrique

Les centrales électriques à cycle simple, Figure (10), utilisent les turbines à gaz pour entrainement des alternateurs pour la production de l'énergie électrique.[7]

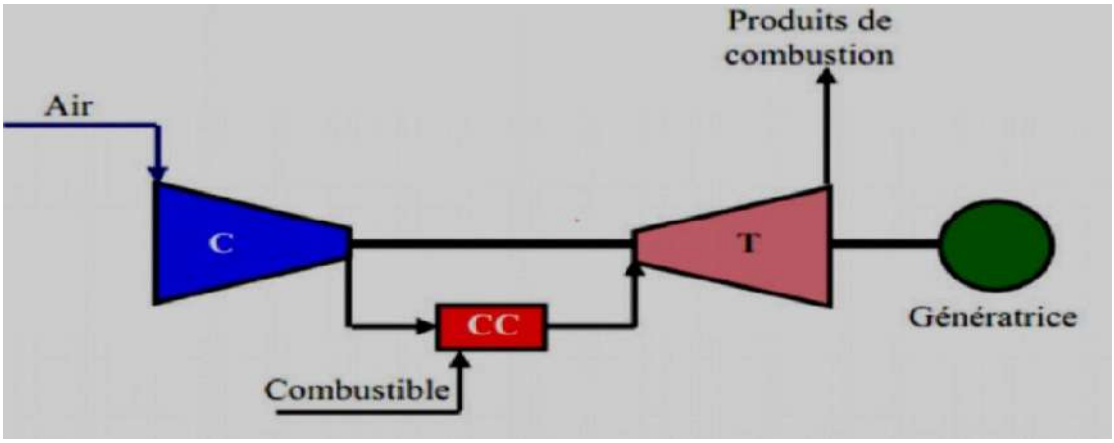


Figure III.11-4 Production d'électricité par turbine à gaz- cycle simple [7].

III.11.4 Centrale nucléaire

Dans les centrales nucléaires on utilise l'hélium comme liquide réfrigérant dans le réacteur et fluide de fonctionnement de l'unité de turbine à gaz à circuit fermé figure (11).

Après la compression, l'hélium subit d'abord un chauffage dans l'échangeur de chaleur puis dans le réacteur puis une détente dans la turbine.

Grace à la haute pression et la température des gaz, la turbine entraîne le compresseur et la charge (générateur électrique).[7]

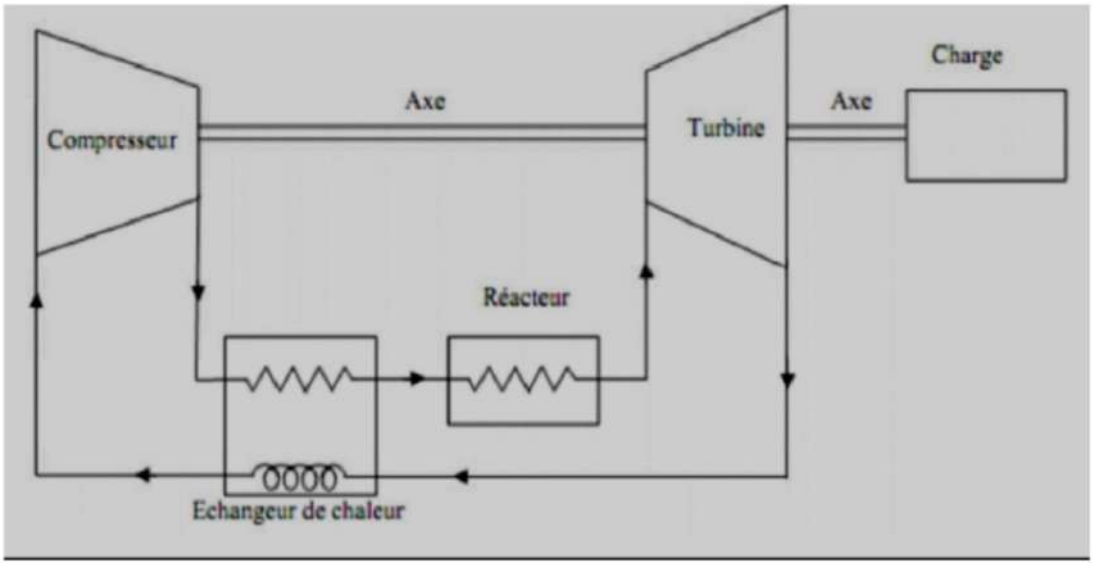


Figure III.11-5 Centrale nucléaire de turbine à gaz à circuit fermé [10]

III.11.5 Utilisation des turbines à gaz dans les stations de réinjection dans un gisement de pétrole et de gaz

Pour améliorer la production des gisements de pétrole, on utilise les turbines à gaz pour augmenter la pression du réservoir en injectant du gaz naturel dans les puits, dans le but est de maintenir la pression dans ces puits entre 100 à 150 bars.[7]

Le processus de réinjection est présenté sur la figure (12) :

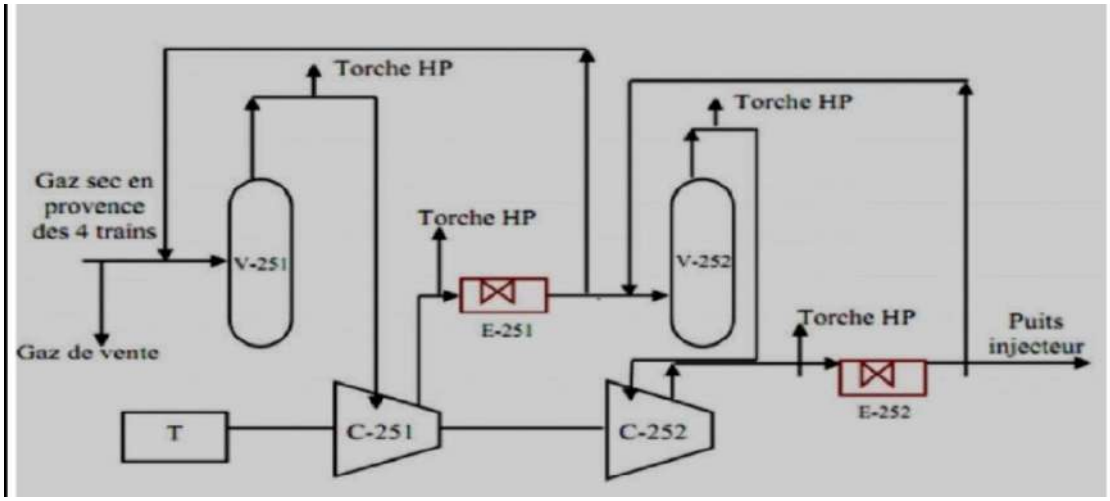


Figure III.11-6 Réinjection des gaz résiduels [10]

III.12 Avantages et inconvénients des turbines à gaz

III.12.1 Avantage des turbines à gaz

La turbine à gaz représente des avantages remarquables :

- Simplicité d`installation.
- Génération simultanée d'électricité et de chaleur utilisable soit directement, soit indirectement dans les procédés industriels.
- Possibilité de fonctionnement avec différents combustibles.
- Grande sécurité de fonctionnement.
- Entretien facile. - Marche régulière.

- valeur d`émission favorable sans équipement. [9]

III.12.2 Inconvénients des turbines à gaz

- Mauvais rendement : moins de 30% de l'énergie calorifique contenue dans le carburant est transformée en énergie mécanique.
- Faibles pressions de travail.
- Régimes souvent beaucoup trop élevés.
- Coût de fabrication élevé.
- Importante consommation de carburant.
- Mal adaptée aux faibles puissances.
- Bruyante par la vitesse des gaz.
- Nécessite des réducteurs coûteux. [9]

III.13 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les turbines à gaz d'une manière générale ; leurs principe de fonctionnement, une classification selon les divers critères utilisés, et les domaines d'application de ces turbines à gaz, et enfin une comparative entre avantages et inconvénients de ces installations a été dressé. [7]

Chapitre IV

Estimation de la fiabilité d'une turbine à gaz à l'aide de la distribution log-normale

IV.1 Introduction

Les distributions de Weibull et log-normales sont les modèles les plus couramment utilisés pour analyser une variété de données provenant de différents domaines. On constate souvent que les deux modèles représentent bien un ensemble de données donné même si les analyses impliquées et les procédures inférentielles pertinentes peuvent différer de manière significative. Par conséquent, il est hautement souhaitable d'étudier le comportement des deux modèles pour un ensemble donné d'observations à la lumière des trousses à outils récentes pour la comparaison/sélection de modèles.16]]

Ce chapitre traite de l'étude du modèle log normal et de sa comparaison avec le modèle de wiebull en calculant les résultats statistique et les courbes

IV.2 calcul les paramètres de log normal

IV.2.1 Modalisation de la fiabilité

Dans cet article, les données de fiabilité d'une turbine à gaz ont été modélisées par la distribution log-normale. Ces données sont extraites des données historiques de défaillances d'une turbine à gaz fonctionnant dans le sud de l'Algérie. La distribution log-normale est généralement utilisée dans l'analyse globale de la fiabilité. Il a été estimé comme un bon

Représentation de la répartition des (TTF, Time To Failure) des pièces mécaniques. Il représente bien la durée de vie des roulements. La fonction de densité est donnée par :[18]

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)^2\right), t > 0 \qquad \text{(IV.1)}$$

L'écart type SD est calculé par la relation fluide

$$mean = exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \text{(IV.2)}$$

$$=> SD = \left[exp(2\mu + 2\sigma^2) - exp(2\mu + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{(IV.3)}$$

Où μ etσ sont la moyenne et l'écart-type de ln(t).

La fonction de distribution cumulée est donnée par :

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt$$

Ce qui peut être lié à la distribution normale, comme suit

$$F(t) = P[t \leq T] = P\left[Z\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$F(t) = \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{(IV.4)}$$

Où est la fonction de distribution de la distribution normale standard.

Pour déterminer la fonction de fiabilité, nous avons utilisé la fonction suivante :

$$R(t) = 1 - F(t) = P\left[Z > \left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$R(t) = 1 - \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{(IV.5)}$$

The hasard function in This reliability function is given by :

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\frac{1}{\sigma t}\phi\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)} \quad \text{(IV.6)}$$

Où ϕ et sont respectivement la fonction de distribution de probabilité et la fonction de probabilité de distribution cumulative de la distribution normale.

IV.2.2 Modélisation de la fiabilité des turbines à gaz

Une méthode graphique est utilisée pour déterminer les paramètres du modèle Log-Normal pour cela, les étapes suivantes sont suivies :

> Calcul des rangs médians et Traçage des rangs médians en fonction de leurs temps de défaillances respectifs, sur un log -papier de probabilité normale,

> Ajuster une ligne droite aux points tracés,

> Les points tracés sont très proches de la ligne ajustée, ce qui nous permet de dire que la distribution log-normale est une distribution acceptable pour nos données.

Les données des turbines à gaz sont extraites des données historiques de défaillances d'une turbine à gaz fonctionnant dans un système de transport de gaz dans le sud de l'Algérie, présentées dans le tableau 1. [18]

Tableau IV.2-1 Données de défaillance d'une turbine à gaz

N°	Debut de l'intervalle	Fin de l'intervalle	NB panne	m.rangs	m.rangs %
1	0	836	12	0.297105	29.7105
2	836	1672	6	0.449466	44.9466
3	1672	2508	11	0.728796	72.8796
4	2508	3344	4	0.830370	83.0370
5	3344	4180	3	0.906551	90.6551
6	4180	5016	2	0.957338	95.7338
7	5016	5856	2	0.982732	98.2732

Moyenne de la distribution log-normale T '

Elle n'est autre que le logarithme de l'abscisse T_{50} du point d'intersection de la droite d'ajustement des données avec la droite qui représente le quantile à 50% Q50, cette

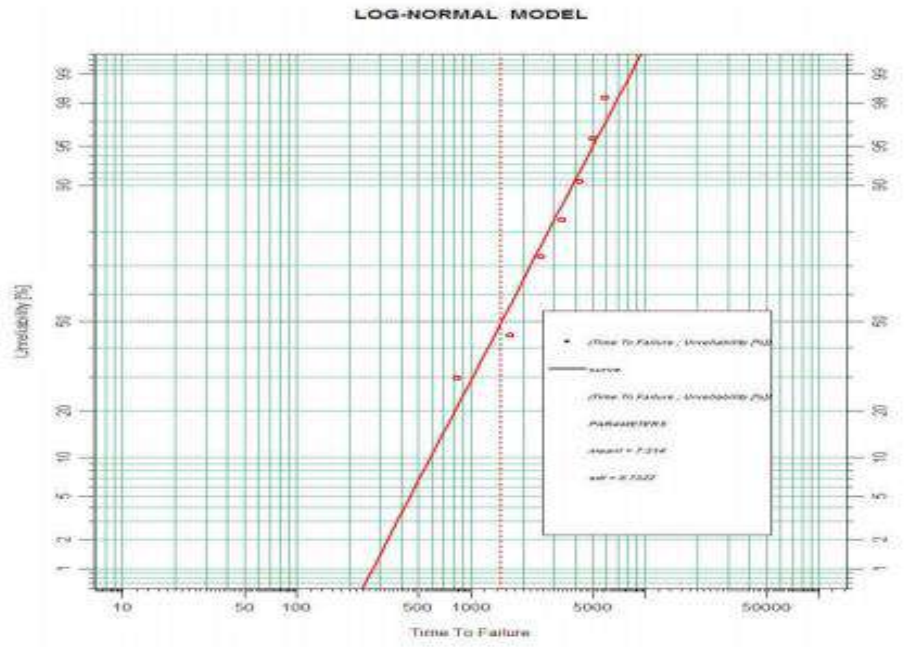


Figure IV.2-1 Tracé des probabilité des logarithmes des temps de défaillance

valeur peut être lue directement sur la Figure IV.1 ,

avec $\widehat{\widehat{T}'}=\ln(T_{50}\%) = \ln(\hat{T}) = 7.3132$

L'écart type σ $_{T'}$

Pour déterminer le deuxième paramètre trois formules peuvent être utilisées:

$$\sigma_{T'} = \frac{T'(84.1\%<) - T'(15.9\%<)}{2}$$

$$\sigma_{T'} = \frac{T'(97.7\%<) - T'(2.3\%<)}{4}$$

$$\sigma_{T'} = \frac{T'(99.865\%<) - T'(0.135\%<)}{6}$$

En utilisant la 1er équation du (III.21), T(84.1%<)= 3000, T (15.9 %<) =700

$$\sigma_{T'} = \frac{T'(84.1\% <) - T'(15.9\% <)}{2} = \frac{\ln(3000) - \ln(700)}{2} = 0.7265$$

Les résultats peuvent être affectés par des erreurs de lecture et d'ajustement visuel des données par la droite d'ajustement, ces résultats sont présentés sur le Tableau IV .2

Tableau IV.2-2 Résultats des paramètres estimés

Paramètres	$T(15.9\%<)$	$T(50\%<)$	$T(84\%<)$	$\hat{T}'$	$\hat{\sigma}'_T$
Valeurs	700 h	1500 h	3000 h	Log(1500) =7.31375	0.7265

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{0.7265 t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t) - 7.31375}{0.7265}\right)^2\right)$$

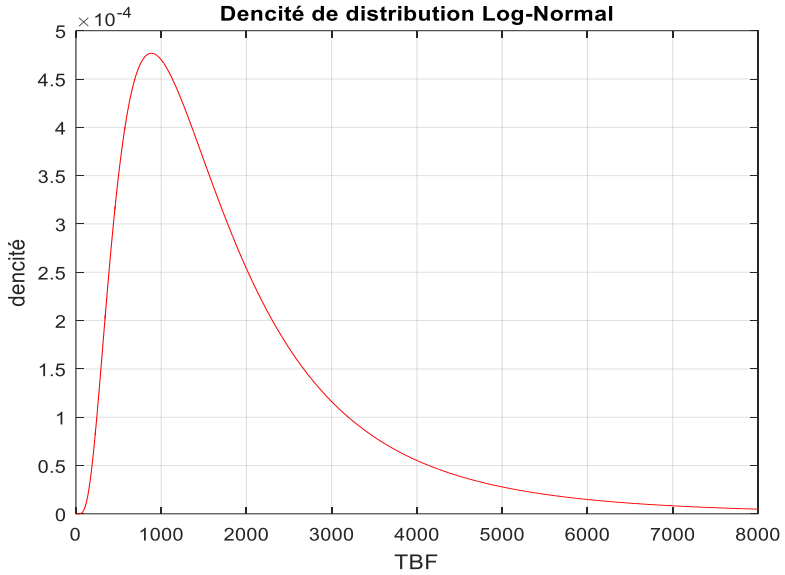


Figure IV.2-2 Densité Log-Normal des données de fiabilité de la turbine

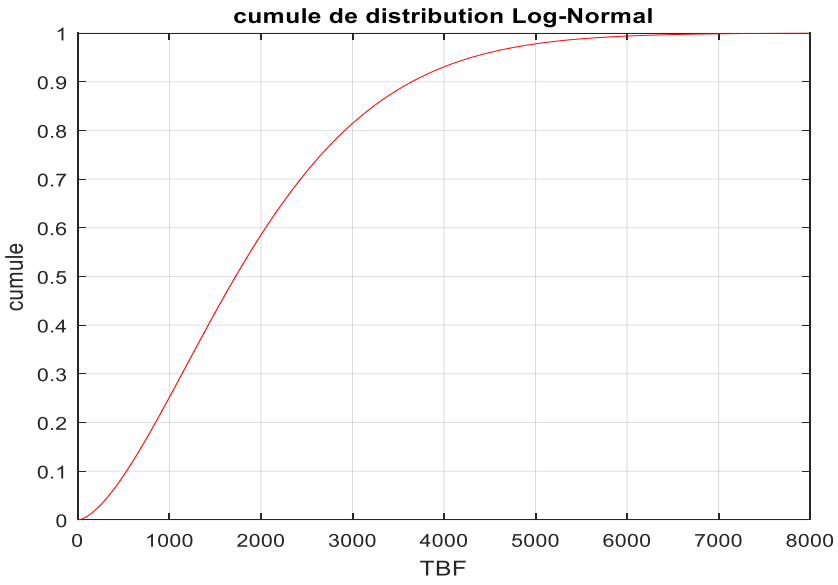


Figure IV.2-3 Cumule de distribution Log-Normale

- Calcule des paramètres de log normal

La moyenne de distribution log normal :

$$\bar{T} = e^{(\bar{T}' + \frac{1}{2}\sigma_{T'}^2)} = e^{(7.31375 + \frac{1}{2}X(0.7265)^2)} = 1962.244$$

La fonction de distribution de l'écart type est :

$\sigma_T = [(e^{2T'+\sigma^2_{T'}})((e^{\sigma^2_{T'}-1})]^{\frac{1}{2}} = [(e^{(2X7.31375)+(0.7265)^2})((e^{0.7265}-1)]^{\frac{1}{2}} = 1652.792$

La médian est :

$\breve{T} = e^{\bar{T}'} = e^{7.31375} = 1500.8$

Le mode est :

$\tilde{T} = e^{(\bar{T}'-\sigma^2_{T'})} = e^{((7.31375)-(0.7265)^2)} = 877.936$

L'asymétrie est :

$\alpha_3 = (e^{\sigma^2_{T'}-1})^{\frac{1}{2}}(e^{\sigma^2_{T'}+2}) = 3.124469$

L'aplatissement est :

$\alpha_4 = 3+(e^{\sigma^2_{T'}-1})(e^{3\sigma^2_{T'}+3}e^{2\sigma^2_{T'}+6}e^{\sigma^2_{T'}+6}) = 24.29745$

Erreur quadratique moyenne (Root-mean-square error)

$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{F}(t_i)-F(t_i))^2}{n}} = 0.05333$.

CV(RMSE) = $\frac{RMSE}{\bar{y}} = 0.07397294$,

IV.2.3 Calcul les paramètres de Weibull

Le tableau suivant comporte les TBF classés par ordre croissant, et les F (ti) calculés par la méthode des ranges médians $F(ti) = \frac{\Sigma\, ni-0,3}{N+0,4}$ (III.1)

(Dans notre cas N =12 ≤ 20) et on trace la courbe de Wei Bull :

Tableau IV.2-3 calcul la Fonction de réparation réelle

N°	TBF	ni	$\sum Fi$	Fi	Fi %
1	836	12	12	0.28960	28.960
2	1672	6	18	0.43811	43.811
3	2508	11	29	0.71039	71.039
4	3344	4	33	0.80940	80.940
5	4180	3	36	0.88366	88.366
6	5016	2	38	0.93316	93.316
7	5856	2	40	0.98267	98.267

On déduire les paramètres: .γ et η ,β

$$\begin{cases} \beta = 1.4 \\ \eta = 2166 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

IV.3 Résultats

IV.3.1 Test (Kolmogorov Smirnov)

Avant la validation de toutes les lois de fiabilité, il est nécessaire de tester l'hypothèse pour savoir si nous devrons accepter ou rejeter le modèle proposé par le test de K-S avec un α = 20%. Ce test consiste à calculer l'écart entre la fonction théoriqueαseuil de confiance de F(i) et la fonction réelle F(t) et prendre le maximum en valeur absolue $D_{n.max}$.

Cette valeur est comparée avec D_n. α Qui est donnée par la table de Kolmogorov Smirnov (voir sur table Annexe 1).

Si $D_{n.max} > D_n$. α On refuse l'hypothèse.

Tableau K-S

Tableau IV.3-1 Test de Kolmogorov-Smirnov

N	TBF	Fi	F(t)	$D_{n.m}=\|Fi - F(T)\|$
1	836	0.28960	0.2318	0.0578
2	1672	0.43811	0.5014	0.0632
3	2508	0.71039	0.7071	0.0032
4	3344	0.80940	0.8407	0.0313
5	4180	0.88366	0.9188	0.0351
6	5016	0.93316	0.9608	0.0276
7	5856	0.98267	0.9821	0.0005

D'après la table de K-S:

DN max< DN α Ce qui veut dire que le modèle de Wei Bull est accepté. Nous avons pris la valeur maximale DN max = |F (i) – F(t)|.

$D_{N\,max}$=0.0840 tandis que $D_{N.\,\alpha=}\,D_{12.\,20}$ = 0,295 (voir annexe tab.1).

0.0632< 0,295 donc l'hypothèse du modèle de Wei Bull est acceptable.

IV.3.2 Exploitation les paramètres de WEIBULL

IV.3.2.1 Le MTBF

Le tableau de MTBF donne A=0.911, B=0.660 (voir annexe tab.2).

MTBF =Aη+γ

MTBF=0.9114x 2166+ 0

MTBF = 1974 h

σ=Bxη =0,660 x 2166 =1429 h

IV.3.2.2 La densité de probabilité en fonction de MTBF :

$f(t)=\frac{\beta}{\eta}\ (\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta-1}\ e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$

f(t=MTBF) =

IV.3.2.3 La fonction de répartition en fonction de MTBF :

$F(t)=1-e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$

IV.3.2.4 La fiabilité en fonction de MTBF

R(t=MTBF) = 1 - F(t= MTBF) = 1- 0.567987= 0.432013

R(MTBF) = 43.20 %

On remarque que la fiabilité de la turbine est faible.

IV.3.2.5 e taux de défaillance en fonction de MTBF

$\lambda(t)=\frac{\beta}{\eta}\ (\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta-1}$

IV.3.3 Calcul du temps souhaitable pour une intervention systématique

R(t)=80 % ⇒t= ?

$R(t)= e^{-(\frac{t}{\eta})^{\beta}}$

ln R(t)=-(t/ β) $^{\beta}$ =ln (0.80) ⇔-[ln R(t)]$^{1/\beta}$= t /η⇒ t=η [ln(1 /R(t)]$^{1/\beta}$. t=2166[ln(1/0.80)]$^{1/1.4}$

t $_{Sys}$ = 742 heures.

Pour garder la fiabilité de la turbine 80% il faut intervenir chaque temps systématique 742 h.

IV.3.4 Étude de modèle de Wei bull

IV.3.4.1 La fonction de la densité de probabilité

$$f(t)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$f(t)= \lambda\, t\, .R(t)$ $f(t=MTBF)=2.588x10^{-4}$

Tableau IV.3-2 Calcul la fonction de la densité de probabilité

TBF	836	1672	2508	3344	4180	5016	5856
f(t) $x10^{-4}$	3.392	2.905	2.007	1.225	0.683	0.354	0.171

IV.3.4.2 Courbe de la densité de la probabilité f(t)

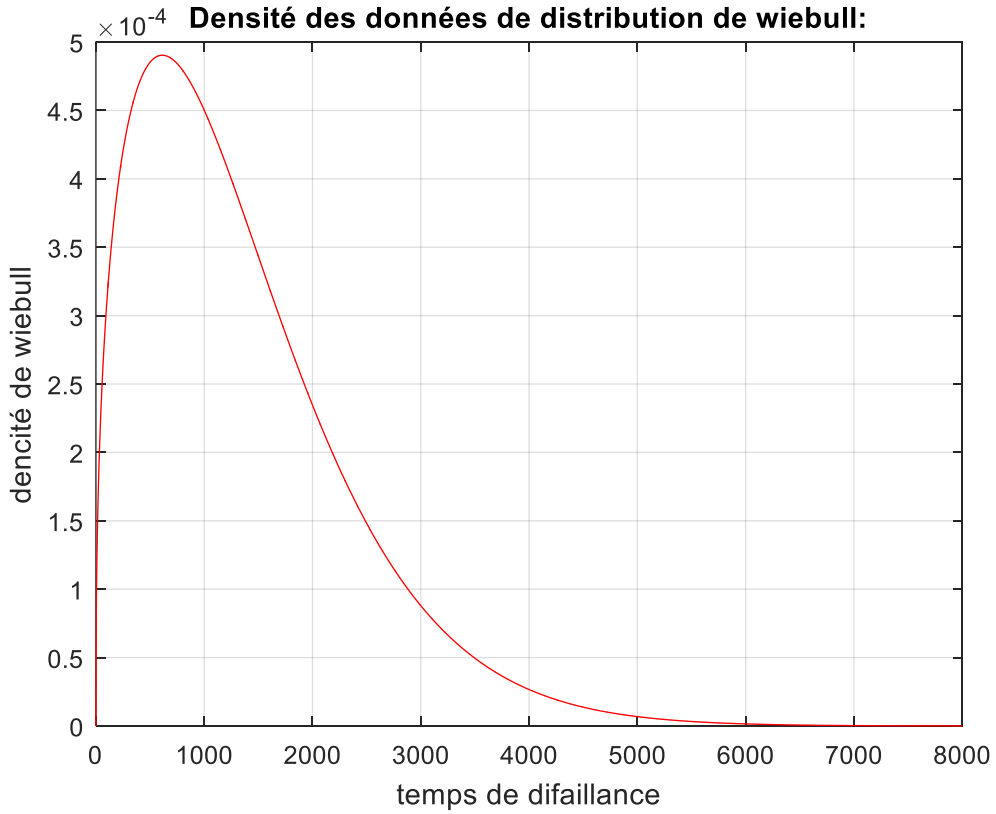


Figure IV.3-1 Densité des données de distribution de wiebull

Analyse de la courbe

D'après cette courbe on remarque que la fonction f(t) (densité de probabilité) croissant avec le temps jusqu'à t=880 h, puis décroisant.

IV.3.4.3 Fonction de répartition F(t)

$F(t)=1-e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$

Tableau IV.3-3 Calcul la Fonction de répartition F(t)

TBF	836	1672	2508	3344	4180	5016	5856
F(t)	0.2318	0.5014	0.7071	0.8407	0.9188	0.9608	0.9821

IV.3.4.4 La fiabilité

La fonction fiabilité de celle de répartition: R (t) = 1-F (t), après calcul la fiabilité de la turbine aux temps t=MTBF, on début que la valeur n'est pas satisfaisante donc on peut dire que la turbine n'est pas fiable à t= MTBF

$R(t)= e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$

R(t=MTBF)=0.4156 =41.56 %

Tableau IV.3-4 Calcul de la fiabilité

TBF	836	1672	2508	3344	4180	5016	5856
R(t)	0.7682	0.4986	0.2929	0.1593	0.0812	0.0392	0.0179

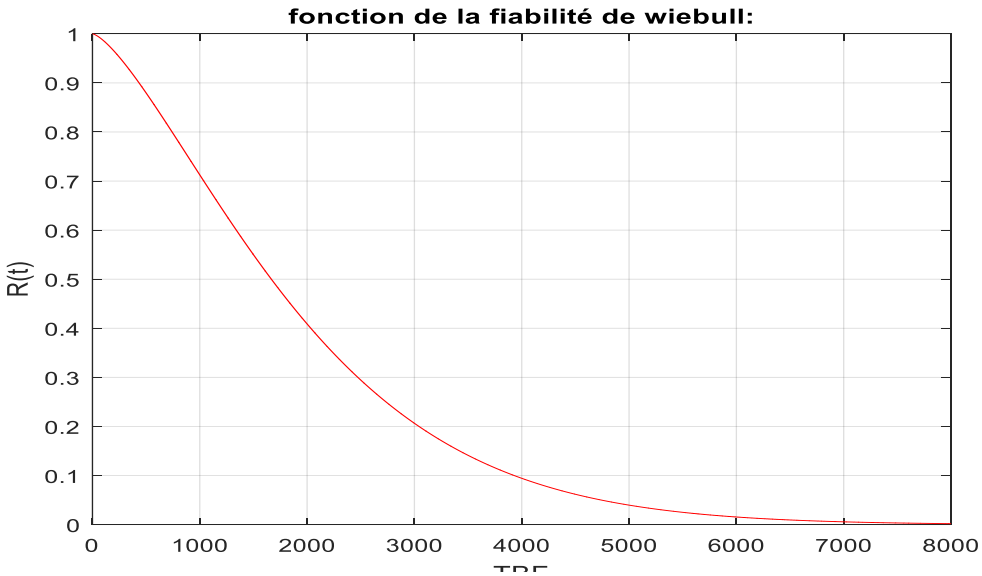


Figure IV.3-2 Courbe fonction de la fiabilité

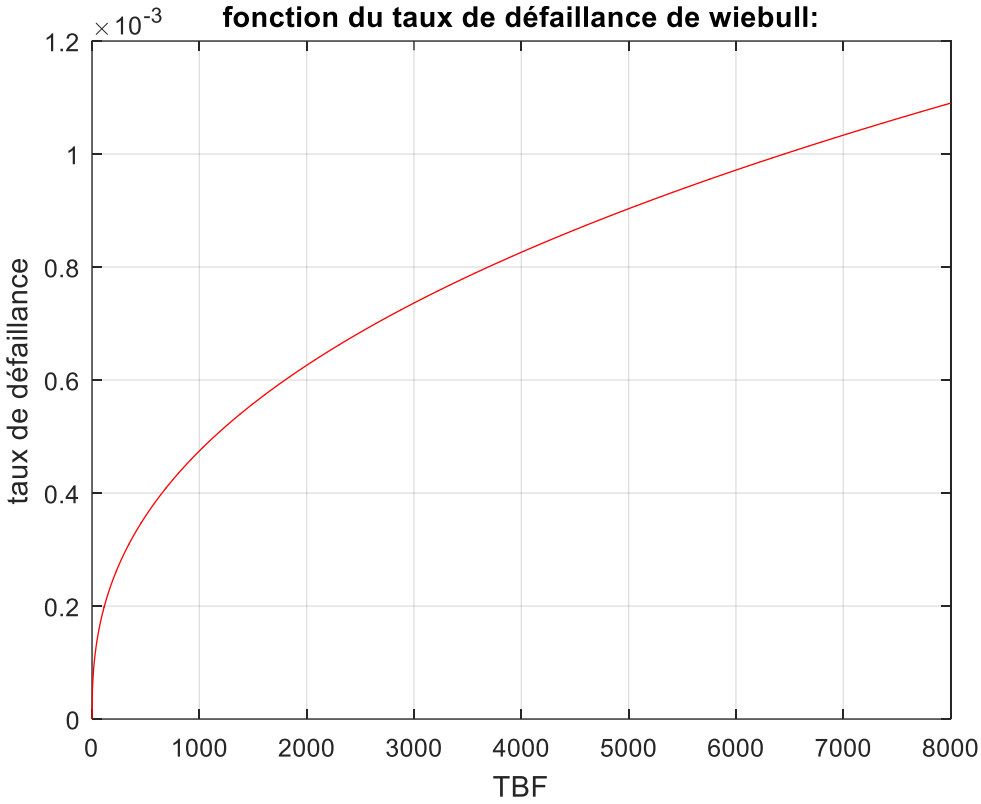


Figure IV.3-3 Courbe fonction du taux de défaillance

Analyse de la courbe :

Le graphe décroisant en fonction de temps ce qui fait expliquer par le phénomène de dégradation comme par exemple décrochement. L'amélioration de la fiabilité de la turbine passe obligatoirement par une analyse des défaillances avec une étude détaillée de leurs causes de leurs modes et de leurs conséquences.

IV.3.4.5 Le taux de défaillance

$$\lambda(t)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

$\lambda(\mathrm{t}=\mathrm{MTBF})=6.227\ \mathrm{x}10^{-4}$ panne/heures

Tableau IV.3-5 Calcul le taux de défaillance

TBF	836	1672	2508	3344	4180	5016	5856
$\lambda\,(t)\mathrm{x}10^{-4}$	4.4166	5.827	6.8853	7.689	8.407	9.043	9.621

IV.3.4.5.1 Analyse de la courbe

Le taux de défaillance est croissant en fonction de temps. Cette augmentation est considérée normale c.-à-d.né pas rapide

IV.4 Comparaison de la distribution log normal avec la distribution de wiebull

IV.4.1 Comparaison des courbes

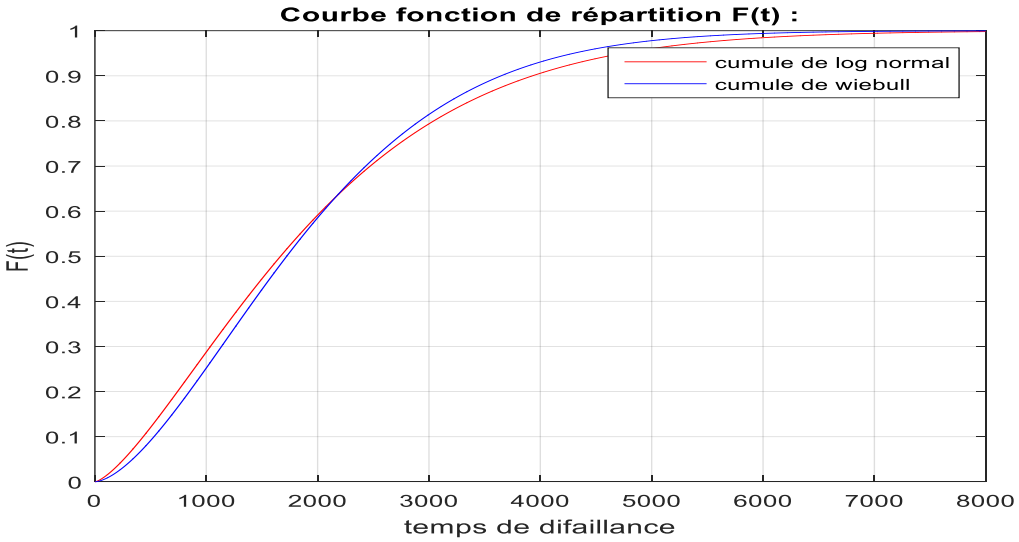


Figure IV.4-1 courbe fonction de répartition de log normal et wiebull

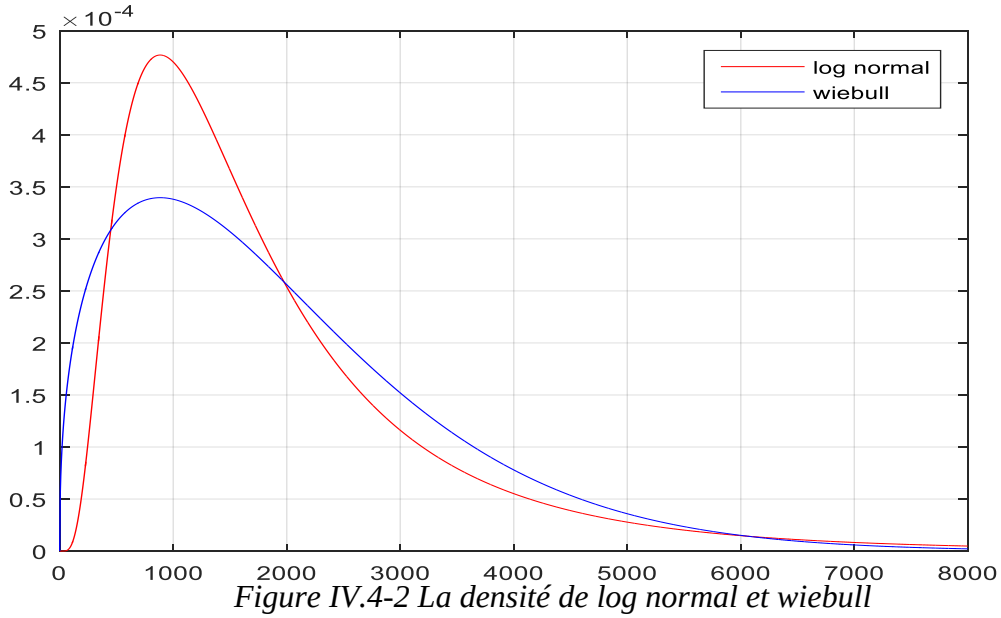


Figure IV.4-2 La densité de log normal et wiebull

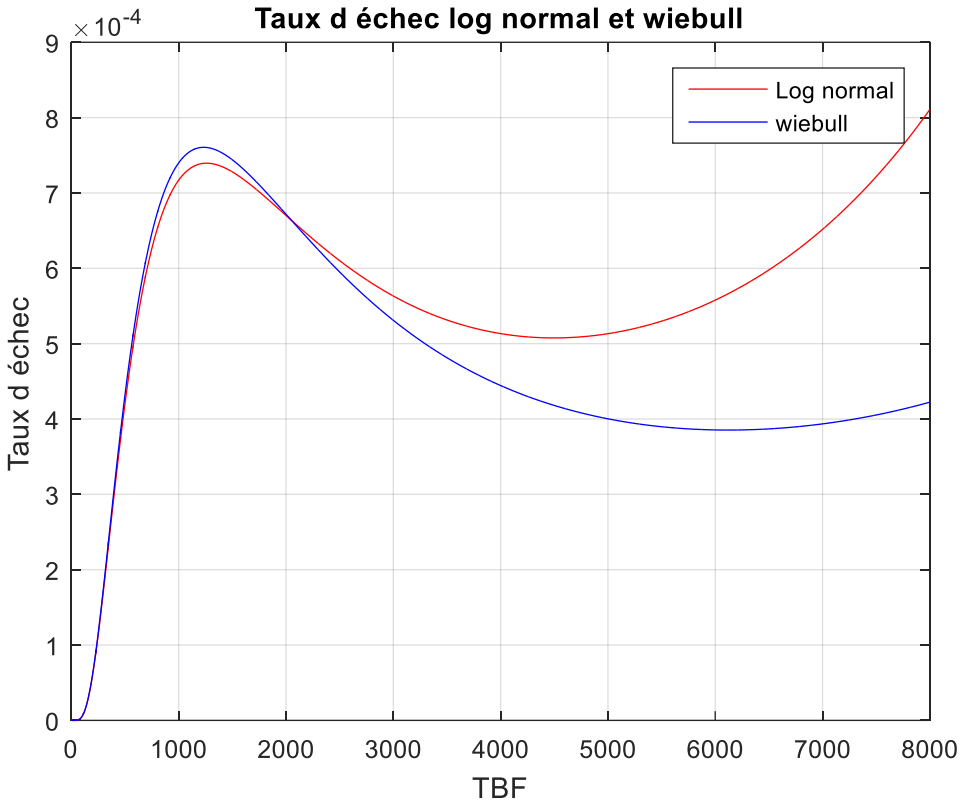


Figure IV.4-3 Rite du hasard de log normal et wiebull

A partir des courbes, on remarque que les deux distribution sont proches en termes de densité, cumule et rite du hasard

IV.4.2 Comparaisons de paramètres

Tableau IV.4-1 Comparaison des paramètres de log normal avec wiebull

Statistiques	Log normal	wiebull
MTBF du système	1962.244 h	1974 h
La médiane	1500.801	1429
Le mode	877.936	881
l'écart-type du modèle	1652.792	1702
RMSE	0.05333 .	0.04749413

A partir du tableau, nous remarquons que les paramètres des deux distributions sont similaires.

L'objectif atteint dans ce chapitre concerne la fiabilité industrielle, ce qui oblige les spécialistes à être plus compétitifs et plus réactifs aux conditions variables du marché. Il est

évident que pour parvenir à une meilleure gestion des performances des installations, il est nécessaire d'améliorer la fiabilité. Il a été montré qu'avec l'application de la modèle log normal de bons résultats peuvent être obtenus. L'objectif principal est d'analyser et de mesurer les paramètres de fiabilité du système examiné afin de déterminer le meilleur moment pour entreprendre une action de maintenance sur la base d'une analyse de fiabilité.

Le modèle log normal dans ce chapitre permet à la modélisation des effets d'endommagement de prédire les performances du fonctionnement de la turbine à gaz examiné et de conduire à de bons résultats en termes de validité par rapport à l'approche de Weibull.[17]

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, deux modèles ont été présentés dans le but de donner une contribution dans le domaine de la fiabilité. Le but était d'explorer de nouvelles idées afin de pouvoir améliorer l'étude et l'analyse de la fiabilité des systèmes. Un modèle pratique et flexible apporte un bénéfice en temps et en coût.

Le premier modèle, La distribution Log-Normale est couramment utilisée pour modéliser la durée de vie des unités dont les modes défaillance sont de nature « fatigue », liés aux stress mécaniques. Comme elle peut être particulièrement utile pour la modélisation des données qui sont presque symétriques ou asymétriques à droite

Le deuxième modèle, issu du modèle de Weibull, ce qui nécessite des méthodes d'estimation plus souple et rapides pour faciliter son utilisation. L'exploration des nouvelles méthodes d'optimisation peut apporter un plus a ce modèle, telle que les algorithmes génétiques, les algorithmes des colonies d'abeilles et autres. Ce modèle limite le temps d'observation ce qui peut présenter un inconvénient, car comme on peut le constater, la fonction de répartition tends vers l'unité dans un temps inférieur à l'infinie.

L'approche du modèle de log normal et le modèle de Weibull modifié proposés de fiabilité ont été testés et validés, avec des erreurs de prédiction convergente vers zéro, cette approche a permis de modéliser les actes de dégradation des composants de la turbine à gaz examinée et d'estimé et planifie la durée de dysfonctionnement de ce système de turbine à gaz.[17]

Conclusion générale

Dans un monde où une concurrence accrue existe entre les compagnies industrielles afin de satisfaire les demandes de leurs clients en termes de service, qualité du produit et performance, la maintenance garde une position primordiale dans la réussite des objectifs, tout en conservant une viabilité et une sureté de fonctionnement, les machines tournantes représentent une classe dominante, dans les systèmes de production, et peuvent y occuper des position stratégiques.

Ce présent travail permet aussi de connaître les caractéristiques et la structure de la turbine à gaz, de bien comprendre son fonctionnement et son utilité dans le domaine pétrolier. Ainsi, le bon fonctionnement de la turbine dépend du programme de maintenance préventive dans le but est de maintenir les équipements en bon état de marche, détecter les problèmes existants, diagnostiquer la nature et la gravité des pannes mécaniques qui surviennent et rechercher les solutions adéquates à ces problèmes par utilisation des méthodes efficaces que nous avons abordées dans le cadre de notre formation en spécialiste la maintenance industrielle.

Références Bibliographiques

[1] Saporta, Gilbert. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2006.

[2] JOURDAIN, Benjamin. "Probabilités et statistique pour l'ingénieur." *Ecole des Ponts, Paris Tech* (2018).

[3] Perrut, A. "Cours de probabilités et statistiques." *Université Claude Bernard Lyon* 1 (2010).

[4] Rakotomalala, Ricco. "Probabilités et Statistique." *Notes de cours, Université Lumière Lyon* 2.

[5] Velenik, Y. "Probabilités et statistique." *Université de Geneve* (2011).

[6] Ferrara, Laurent, Introduction aux modèles statistiques .Cours de Modélisation Appliquée à l'université Paris Ouest. (2012).

[7] Kais, Ali, and Seddik Meftah. *Estimation de la fiabilité de la turbine à gaz MS5002C et la gestion des opérations de MI*. Diss. Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2016.

[8] Benaicha, Halima, *Analyse des stratégies de maintenance des systèmes de production industrielle* (Doctoral dissertation, University of sciences and technology in Oran). (2015).

[9] TOUMI Ouail, AKERMI Said, Etude Analytique De La maintenance Préventive D'une Turbine à Gaz GE10/2.Diss. UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA, 2019.

[10] MEBARKIA, Djalal. *Recherche d'une solution optimale d'exploitation et de maintenance des gazoducs algériens tenant compte de la fiabilité des équipements des différentes lignes*. Diss. Université de Boumerdès-M'hamed Bougara, 2013.

[11] Tebbi, Ouahiba. *Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés*. Diss. Université d'Angers, 2005.

[12] Bellaouar, Ahmed, & Beleulmi, Salima, fiabilité maintenabilite disponibilité. Diss. Université *Constantine 1*, 2014.

[13] Beleulmi, Salima. "Contribution à l'analyse bayésienne en fiabilité et maintenabilité des systèmes mécaniques." (1955).

[14] METALLAOUI, Nassim, Étude thermodynamique de la turbine à gaz MS7001EA au niveau du complexe GNL1K de Skikda.Diss. UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA,2017

[15] Upadhyay, S. K., and M. Peshwani. "Choice between Weibull and lognormal models: A simulation based Bayesian study." *Communications in Statistics-Theory and Methods* 32.2 (2003): 381-405.

[16] Djeddi, Ahmed Zouhair. *Etude de fiabilité et de disponibilité des systèmes de turbines à gaz*. Diss. université Yahia Fares de Medea, 2016.

[17] Zohair, Djeddi Ahmed, et al. "Reliability estimation in industrial process using Log-normal distribution: Gas turbine application."