République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

Hamza Brahim Boulares

Quelques propriétés sur les suites et les polynômes de Fibonacci

Soutenu publiquement le 8 juillet 2019 devant le jury composé de

M, Laissaoui Diffalah, MCA, université de Médèa,	Précident de jury.
M, Rahmani Mourad, MCA, USTHB,	Examinateur.
Mme, Ait Amrane Nacima−Roza, MAA, université de Médèa,	Examinatrice.
Mme, Guettai Ghania, MAA, université de Médèa,	Encadreur.

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

REMERCIEMENTS

Avant toute chose, je tiens à remercier « **Allah** » le tous puisant, pour avoir donné la force et la patience.
j' exprime ma profonde gratitude et mes remerciements :
À mon encadreur de mémoire **Mm.GUETTAI GHANIA** Maitre de Conférencs, pour avoir accepté d' encadrer, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé d' apporter tout au long de ce travail.
Un remerciement spécial et sincère au **Mr. LAISSAOUI DIFFALAH** , pour son aide et sa disponibilité.
Un grand merci aussi à monsieur , **M, Rahmani Mourad**. d'accepter examiné ce mémoire.

Je tiens a remercie tous les enseignants de Master **Analyse Mathématique et Applications**.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de ma famille.

mes sentiments de reconnaissance et mes remerciements chaleureux vont également à mes camarades de la promotion 2019 de Analyse Mathématique et Applications et mes amis pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement je réserve une mention particulière à toutes les personnes qui me ont apporté le soutien et l'aide attendu.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous étudions les nombres de Fibonacci et de Lucas, leurs propriétés et les relations entre ces deux nombres. Nous présentons aussi les généralisations des nombres de Fibonacci. Tous ses résultats et les propriétés fondamentales sont les manipulations de la fonction génératrice et la matrice associée, d'ailleurs c'est ce qu'a été clairement concrétisé dans cette étude.

A la fin de ce mémoire des exemples d'application étaient le fruit de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

1 Définitions élémentaires **2**
1.1 Coefficients binomiaux. . . . 2
1.2 Fonctions génératrices 3
1.2.1 Fonction génératrice ordinaire. . . . 4
1.2.2 Fonction génératrice exponentielle. . . . 6
1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux. . . . 6
1.4 Nombre d'or 8
1.5 Valeurs propres et vecteurs propres 9
1.5.1 Polynôme et équation caractéristique. . . . 10
1.6 Polynômes de Tchebychev 10

2 Les suites de Fibonacci classiques **12**
2.1 Suite des nombres de Fibonacci. . . . 12
2.1.1 Formule de récurrence 12
2.1.2 Fonction génératrice 12
2.1.3 Forme de Binet. . . . 13
2.1.4 Les identités combinatoires. . . . 16
2.1.5 Relation entre le triangle de Pascal et les nombres de Fibonacci. . . . 20
2.1.6 La suite de Fibonacci d'indice négatif 20
2.2 Suite des nombres de Lucas 21
2.2.1 Formule de récurrence 21
2.2.2 Fonctions génératrices 21
2.2.3 Forme de Binet. . . . 22
2.2.4 Les identités combinatoires. . . . 23
2.2.5 Relations entre la suite de Fibonacci et la suite de Lucas. . . . 24

3 Les polynômes de Fibonacci **26**
3.1 Les polynômes de Fibonacci classiques 26
3.1.1 Relation de récurrence. . . . 26
3.1.2 La fonction génératrice. . . . 27
3.1.3 Forme de Binet. . . . 28
3.1.4 Les identités combinatoires. . . . 29
3.1.5 Matrice associée aux polynômes de Fibonacci 31
3.2 Les polynômes de Lucas classiques. . . . 32
3.2.1 La fonction génératrice 32

3.2.2 Forme de Binet 33
3.3 Les polynômes h(x)−Fibonacci 34
3.3.1 Fonction génératrice 34
3.3.2 Forme de Binet. 35
3.3.3 Matrice associée aux polynômes h(x)−Fibonacci 37
3.4 Les polynômes h(x)−Lucas 38
3.4.1 Fonction génératrice. 39
3.4.2 Forme de Binet. 40
3.5 Les polynômes (p,q)−Fibonacci. 42
3.5.1 Fonction génératrice 43
3.5.2 Forme de Binet. 43
3.5.3 Matrice associée aux polynômes (p,q)−Fibonacci 45
3.6 Les polynômes (p,q)−Lucas. 46
3.6.1 Fonction génératrice. 46
3.6.2 Forme de Binet. 47
3.7 Un q−analogue de polynôme de Fibonacci 48

4 Applications **50**
4.1 Solutions d'équations au différence de Riccati 50
4.2 Les équations de diffusion fractionnaire 51
4.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 52

Bibliographie **55**

INTRODUCTION

La suite de Fibonacci est l'une des suites mathématiques les plus connues, c'est le mathématicien français Edourd Lucas $(1842-1891)$ qui l'a nommé suite de Fibonacci en 1877, découverte initialement par Leonardo Fibonacci en 1202, elle peut être considérée comme étant le premier modèle mathématique en dynamique des populations ! En effet, elle décrit la croissance d'une population de lapins sous des axiomes idéaux, c-à-dire : si on a un couple de lapins pour le premier mois. Le deuxième mois, on n'a toujours que ce même couple, mais en troisième mois on a déjà 2 couples, puis 3 couples, le quatrième mois sera 5 couples et ainsi de suite, autrement dit chaque couple de lapins, engendre chaque mois un nouveau couple de lapins, et ce indéfiniment, la croissance de cette population est décrit par la suite de Fibonacci, d'ailleurs c'est ce qu'a était présenté dans cette étude.

Dans le même contexte dans ce premier chapitre nous avons donné quelques définitions élémentaires à savoir : les coefficients binomiaux, les fonctions génératrices, les suites de récurrences linéaires ainsi que le triangle de Pascal.

Pour le deuxième chapitre, il a été consacré aux définitions des suites classiques, appelée de Fibonacci et Lucas et les relations entre ces deux types de suites de même pour ce qui est de la relation entre le fameux triangle de Pascal et les nombres de Fibonacci.

Pour ce qui est du troisième chapitre on s'est intéressé à l'étude des polynômes de Fibonacci qui ne sont qu'une généralisation des nombres de Fibonacci, et leurs propriétés analytique ainsi que les polynômes de Lucas classiques.

En fin de compte et pour le dernier chapitre, nous mettons en évidence que cette étude comporte plusieurs domaines d'application, ou nous citons à titre d'exemple l'approximation polynomiale, la résolution des équations algébriques et des équations à drivée partielle.

CHAPITRE 1

DÉFINITIONS ÉLÉMENTAIRES

L'objectif de ce chapitre est de présenter et fixer les notations de certains outils analytiques dont nous aurons besoin au long de ce document.

Dans ce chapitre, nous citons les définitions élémentaires des coefficients binomiaux, fonctions génératrices, triangle de Pascal, suites récurrentes linéaires d'ordre deux, nombre d'or, valeurs propres et vecteurs propres, ainsi que des polynômes de Tchebychev. Pour des notions plus précises voir [1, 5, 7, 9].

1.1 Coefficients binomiaux

Le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est défini pour tous entiers n et k $(0 \leq k \leq n)$ par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k \leq 0$ ou $k \geq n$.

Le coefficient $\binom{n}{k}$ peut être interprété comme le nombre de façons de choisir k éléments parmis n.

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a+b)^n$, appelé relation du binôme de Newton, ou a et b sont des nombres réels ou complexes.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \ ,$$

et satisfont une relation de récurrence à trois tèrmes

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-k}{k}. \tag{1.1}$$

A partir de la relation récurrente (1.1) nous pouvons construire le triangle de Pascal ($n = 10,\ k = 10$).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Ce triangle satisfait plusieurs propriétés, par exemple, on remarque que les lignes du triangle sont symétrique i.e

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Autres propriétés.

Pour tous entiers n et k, on a

- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \quad k \neq 0.$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad n > 0.$
- $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$

1.2 Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices forment un lien entre l'analyse mathématique des fonctions à valeurs réelles et les problèmes portant sur les séquences, utiliser les fonctions génératrices pour résoudre des récurrences et des problèmes de dénombrement d' ensembles. En 1718, le mathématicien français Abraham De Moivre$(1667 - 1754)$ a utilisé les fonctions génératrices afin de résoudre la relation de récurrence de Fibonacci.

Notons que le polynôme $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ peut être écrit $(x^6 - 1)(x - 1)$ par la méthode de la division euclidienne, dont la suite des coefficients $1, 1, 1, 1, 1, 1$ présente les coefficients de la fonction génératrice de ce polynôme.

De manière plus générale, nous donnons les définitions suivantes :

1.2.1 Fonction génératrice ordinaire

Définition 1.2.1. *Soient n un entier naturel et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, la fonction*

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n.$$

Exemple 1. $G(x) = 1 + 2x + ... + (n + 1)x^n + ...$ est la fonction génératrice de la suite $1, 2, 3, 4, ...$

L'addition de deux fonctions génératrices ordinaires est définie par

$$F(x) + G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n,$$

où

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n, \quad et \quad G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Le produit de deux fonctions génératrices ordinaires est défini par

$$F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n,$$

où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}.$$

La dérivée d'une fonction génératrice est donnée par

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}.$$

Deux fonctions génératrices $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ et $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ sont égales si

$$a_n = b_n, \ pour \ n \geq 0.$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x} \\
&= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} 1 \times 1x^n\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ...
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{1-x}.\frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} 1.(n+1-k)\Big)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\big(1+2+3+...+(n+1)\big)\,x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n \\
&= 1+3x+6x^2+10x^3+...
\end{aligned}$$

Exemple 3**.**
Pour trouver une fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n) = (n^2)$, on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

alors, la dérivée de $F(x)$ est

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1},$$

ce qui donne

$$xF'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n,$$

donc

$$\Big(xF'(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1}.$$

En multipliant l'identité précédente par x, on trouve

$$x\Big(xF'(x)\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n,$$

donc

$$x\Big(xF'(x)\Big)' = x\Big(x\Big(\frac{1}{1-x}\Big)'\Big)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

et on obtient la fonction génératrice de la suite $(n^2)_{n\geq 0}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

1.2.2 Fonction génératrice exponentielle

Définition 1.2.2. *Soient n un entier naturel et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, la fonction*

$$x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Soient $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ et $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}$.
L'addition de deux fonctions génératrices exponentielles est définie par

$$F(x) + G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \frac{x^n}{n!}.$$

Le produit de deux fonctions génératrices exponentielles est défini par

$$F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!},$$

où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n b_{n-k}.$$

Fonctions génératrices usuelles

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; \qquad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad \frac{1}{1-\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n; \quad \frac{x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} x^n; \qquad \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n; \qquad \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Notons par $A(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, l'espace vectoriel formé des suites à valeurs dans un corps commutatif $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.3.1. *On appelle suite récurrente linéaire, toute suite $V_n \in A(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ définie par ses deux valeurs initiales V_0 et V_1 et la relation de récurrence*

$$V_{n+2} - cV_{n+1} - dV_n = f(n),\ (c,d) \in \mathbb{K}^2$$

avec $f(n)$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.
Lorsque $f(n) = 0$, la suite récurrente linéaire est dite homogène.

Théorème 1.3.1. *Soit* $(c,d) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, *l'ensemble* H *des suites* $(V_n)_{n\geq 0}$ *vérifiant la relation*

$$V_n = cV_{n-1} + dV_{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

est un sous−espace vectoriel de $A(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ *de dimension deux.*

L'équation caractéristique associée à toute suite appartenant à H est

$$r^2 - cr - d = 0 \qquad et \qquad r \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Si cette équation admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors : une base de H est $\big((r_1^n)_{n\geq 0}, (r_2^n)_{n\geq 0}\big)$.

Dans ce cas, toute suite $(V_n)_{n\geq 0}$ de H s'écrit

$$V_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

où λ et μ vérifient les conditions

$$V_0 = \lambda + \mu \qquad et \qquad V_1 = \lambda r_1 + \mu r_2.$$

Ces deux dernières relations permettent de déterminer λ et μ :

$$\lambda = \frac{V_0 r_2 - V_1}{r_2 - r_1} \qquad et \qquad \mu = \frac{V_0 r_1 - V_1}{r_1 - r_2}.$$

La série génératrice exponentielle de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ s'écrit

$$\begin{aligned} G_V(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \\ &= \frac{(V_0 r_2 - V_1)e^{r_1 x} - (V_0 r_1 - V_1)e^{r_2 x}}{r_2 - r_1} \end{aligned}$$

Si l'équation caractéristique $(1,2)$ admet une racine double $r_1 = r_2 = \dfrac{c}{2}$, alors, une base de H est $\Big(((\frac{c}{2})^n)_{n\geq 0}, ((\frac{c}{2})^n)_{n\geq 0}\Big)$.
Dans ce cas, toute suite $(V_n)_{n\geq 0}$ de H s'écrit

$$V_n = \Big(\lambda n + \mu\Big)\Big(\frac{c}{2}\Big)^n,$$

où λ et μ vérifient les conditions

$$V_0 = \mu \qquad et \qquad V_1 = \Big(\lambda + \mu\Big)\frac{c}{2}.$$

La série génératrice exponentielle de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ s'écrit

$$G_V(x) = \Big((V_1 - V_0\frac{c}{2})x + V_0\Big)\, e^{\frac{c}{2}x}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} G_V(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\lambda n + \mu\Big)\Big(\frac{c}{2}\Big)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\lambda n + \mu\Big)\Big(\frac{c}{2}x\Big)^n \frac{1}{n!} \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n\Big(\frac{c}{2}x\Big)^n \frac{1}{n!} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{c}{2}x\Big)^n \frac{1}{n!} \\ &= \lambda \frac{c}{2} e^{\frac{c}{2}x} + \mu e^{\frac{c}{2}x} \\ &= \Big((V_1 - V_0\frac{c}{2})x + V_0\Big)\, e^{\frac{c}{2}x}. \end{aligned}$$

Si l'équation caractéristique $(1, 2)$ possède deux solutions complexes conjuguées ω *et* $\overline{\omega}$.

Posons $r = |\omega|$ et $\theta = arg\ \omega$. Dans ce cas, toute suite $(V_n)_{n\geq 0}$ de H s'écrit

$$V_n = \lambda r^n cos(n\theta) + \mu r^n sin(n\theta),\ n \in \mathbb{N}.$$

1.4 Nombre d'or

Il existe deux modes de définitions du nombre d'or, celle géométrique qui s'exprime sous forme de proportion et celle algébrique qui définit le nombre comme l'unique racine positive d'une équation.

Définition 1.4.1. *Deux longueurs a et b (strictement positives) respectent la "proportion d'or" si le rapport de a sur b est égal au rapport $a + b$ sur a*

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \tag{1.3}$$

Il existe une interprétation graphique de cette définition, conséquence des propriétés des triangles semblables illustrés par la figure 1. Les segments bleus sont de longueur a et le rouge de longueur b. Dire que la proportion définie par a et b est d'or revient à dire que les triangles OAB et OCA sont semblables. Euclide exprime la " proportion d'or ", qu'il appelle " extrême et moyenne raison ", de la manière suivante : " Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit."

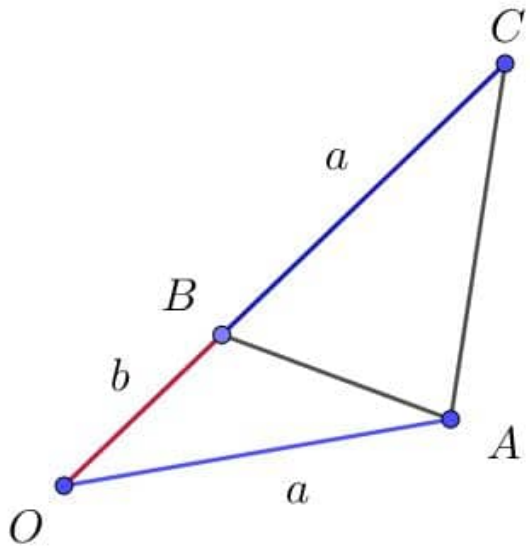


figure 1.

Le rapport $\frac{a}{b}$ ne dépend pas des deux valeurs a et b, dès lors que ces deux nombres sont en proportion d'extrême et de moyenne raison. Cela donne une nouvelle définition d'or :

L'équation $(1,3)$, définissant la proportion d'or, peut être écrit de la manière suivante, obtenue en multipliant l' égalité par $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Longleftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0.$$

Ce qui montre que la proportion d'or $\frac{a}{b}$ notée α, est une solution d'équation du second degré, cette propriété donne la définition :

Définition 1.4.2. *Le nombre d'or est l'unique solution positive de l'équation du second degré suivante :*

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Le nombre d'or $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui a une valeur approximative de 1.61803...
Notons par $\beta = \overline{\alpha} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, la deuxième solution de l'équation précédente.

1.5 Valeurs propres et vecteurs propres

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, φ un endomorphisme de E et $M = (\alpha_{ij})$ sa matrice carrée associée par rapport à une certaine base B de E.

Définition 1.5.1. *Un vecteur non nul $x \in E$ est dit vecteur propre de φ si $\varphi(x)$ appartient au sous$-$espace de E engendré par x c'est à dire*

$$x \text{ vecteure propre de } \varphi \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : \varphi(x) = \lambda x.$$

Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit valeur propre de φ et le vecteur $x \in E$ est dit vecteur propre associé à λ.

Définition 1.5.2. *L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme φ est appelé le spectre de φ. Le sous$-$espace propre associé à λ est formé par les vecteurs propres et sera noté*

$$E_\lambda = Ker(\varphi - \lambda Id_E).$$

1.5.1 Polynôme et équation caractéristique

Définition 1.5.3. *Le polynôme caractéristique de φ est défini par*

$$p(\lambda) = det_B(M - \lambda I).$$

Définition 1.5.4. *L'équation caractéristique de l'endomorphisme φ est l'équation*

$$p(\lambda) = det_B(M - \lambda I) = 0.$$

1.6 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev, nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe **Pafnouti Lvovitch Tchebychev** (1821−1894) sont deux suites de polynômes, notées $(T_n(x))_{n\geq 0}$ pour les polynômes de Tchebychev de première espèce et $(U_n(x))_{n\geq 0}$ pour les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

Ces polynômes sont définis par les relations

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \qquad et \qquad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad pour\ n \geq 2,$$

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x \qquad et \qquad U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \qquad pour\ n \geq 2.$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de première espèce sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de seconde espèce sont

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 3x^3 - 4x \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1. \end{aligned}$$

Le théorème suivant explique l'origine de la définition des polynômes de Tchebychev

Théorème 1.6.1. *Pour tout nombre réel θ, on a*

$$T_n\Big(cos(\theta)\Big) = cos(n\theta),$$

et

$$U_n\Big(cos(\theta)\Big) = \frac{sin\Big((n+1)\theta\Big)}{sin(\theta)}.$$

Propriétés des polynômes de Tchebychev de première espèce

- Pour tout entier $n > 0$, on a la forme explicite

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor n \setminus 2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k},$$

où $\lfloor n \setminus 2 \rfloor$ désigne la partie entière supérieure.

- La parité de T_n dépend de n.

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

- Pour tout entier naturel n,

$$T_n(1) = 1.$$

- Pour touts entiers n, m et pour tout réel x,

$$T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x).$$

- Pour tout entier n strictement positif, les n racines de T_n sont

$$a_k^{(n)} = cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \ pour \ k \in \{1, ..., n\}.$$

- La fonction génératrice ordinaire de T_n est

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}.$$

- La fonction génératrice exponentielle de T_n est

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\left(e^{(x-\sqrt{x^2-1})t} + e^{(x+\sqrt{x^2-1})t}\right).$$

Propriétés des polynômes de Tchebychev de seconde espèce

- Pour tout entier $n > 0$, on a la forme explicite

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n \setminus 2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}.$$

- La parité de U_n dépend de n.

$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x).$$

- Pour tout entier naturel n,

$$U_n(1) = n + 1.$$

- Pour tout entier n strictement positif, les n racines de U_n sont

$$a_k^{(n)} = cos\left(\frac{(k\pi)}{n+1}\right), \ pour \ k \in \{1, ..., n\}.$$

- La fonction génératrice ordinaire de U_n est

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n = \frac{1}{1 - 2tx + t^2}.$$

CHAPITRE 2

LES SUITES DE FIBONACCI CLASSIQUES

2.1 Suite des nombres de Fibonacci

La suite de Fibonacci est une suite d'entier dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précédent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 et ses premiers termes sont :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

Elle doit son nom à **Leonardo Fibonacci** qui, dans un problème récréatif posé dans l'ouvrage Liber abaci publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins : "un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les cotés par un mur. combien de couples obtient−on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?". Les résultats de ce chapitre sont extraites des ouvrages [9].

2.1.1 Formule de récurrence

Définition 2.1.1. *La suite de Fibonacci, notée $(F_n)_{n\geq 0}$, est définie par les valeurs initiales*

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,$$

et par la relation de récurrence suivante :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2. \tag{2.1}$$

2.1.2 Fonction génératrice

Théorème 2.1.1. *Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci, alors la fonction génératrice ordinaire de la suite de Fibonacci est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{2.2}$$

Démonstration. La relation de récurrence (2.1), donne :

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n,$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 - xF_1 = x\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^{n-2}.$$

Par un changement de variable d'indice, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 - xF_1 = x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 + x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

d'ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

ce qui nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

□

2.1.3 Forme de Binet

La forme de Binet est une formule explicite s'écrit en fonction des racines de l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence.

Théorème 2.1.2. *La forme de Binet de la suite de Fibonacci F_n est*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{2.3}$$

où

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad et \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

α et β sont les racines de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ associée à la relation de récurrence (2.1).

Démonstration. Notons par $G(x)$, la fonction génératrice ordinaire de la suite de Fibonacci, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= \frac{x}{1-x-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \sqrt{5}G(x) &= \frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\alpha^n - \beta^n\Big) x^n, \end{aligned}$$

et donc

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} x^n.$$

L'égalité de deux fonctions génératrices, donne

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

d'ou la forme de Binet de F_n.

Autre méthode.

Comme la suite de Fibonacci est linéairement récurrente d'ordre 2, son équation caractéristique est une équation du second degré

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

dont les deux solutions sont :

$$x_1 = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \beta = -\frac{1}{\alpha} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

où α est le nombre d'or.

Les suites $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ et $(\beta^n)_{n\geq 0}$ engendrent alors l'espace vectoriel des suites vérifient

$$V_{n+2} = V_{n+1} + V_n.$$

Il en résulte que :

$$F_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$$

où λ et μ sont des constantes à déterminer à partir de F_0 et F_1.
Les conditions initiales F_0 et F_1 conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Nous obtenons finalement l'expression fonctionnelle recherchée, qui porte le nom de formule de Binet :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-1}{\alpha}.$$

□

Corollaire 2.1.1. (***Limite des quotients***) *On a la limite suivante*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha.$$

et plus généralement, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-r}} = \alpha^r.$$

Démonstration. D'après la formule de Binet (2.3), on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}}{\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}\Big(1-\Big(\dfrac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+1}\Big)}{\alpha^n\Big(1-\Big(\dfrac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\Big)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\Big(1-\Big(\dfrac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+1}\Big)}{\Big(1-\Big(\dfrac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\Big)},\end{aligned}$$

et puisque $|\beta|<\alpha$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n=0,$$

ce qui résulte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\alpha.$$

En général, on peut écrire $\lim_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n-r}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n-1}}\dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}...\dfrac{F_{n-r+1}}{F_{n-r}}=\alpha^r$. □

Corollaire 2.1.2. *La suite (F_{m+n}) est caractérisée par la fonction génératrice ordinaire suivante :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_{m+n}x^n=\frac{F_m+F_{m-1}x}{1-x-x^2}.$$

Démonstration. La forme de Binet de F_{m+n}, donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}F_{m+n}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{m+n}-\beta^{m+n}}{\alpha-\beta}x^n\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\alpha^m\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nx^n-\beta^m\sum_{n=0}^{\infty}\beta^nx^n\Big)\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\frac{\alpha^m}{1-\alpha x}-\frac{\beta^m}{1-\beta x}\Big)\\ &= \frac{\Big(\alpha^m-\beta^m\Big)+\Big(\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}\Big)x}{\Big(\alpha-\beta\Big)\Big(1-\alpha x\Big)\Big(1-\beta x\Big)}\\ &= \frac{F_m+F_{m-1}x}{1-x-x^2},\end{aligned}$$

d'ou le résultat. □

2.1.4 Les identités combinatoires

Les nombres de Fibonacci répondent à de nombreuses identités découvertes au cours des siècles. Dans ce chapitre, nous explorons plusieurs de ces identités fondamentales.

Plusieurs auteurs utilisent les deux racines de l'équation caractéristique dans les preuve de Fibonacci.
En effet, on remarque par exemple qu'on a

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha-\beta=\sqrt{5},\ \alpha.\beta=-1,\ \alpha^2=1+\alpha,\ \beta^2=1+\beta. \tag{2.4}$$

Plus généralement, on peut démontrer par récurrence qu'on a la propriété remarquable suivante

$$\alpha^n=\alpha F_n+F_{n-1},\ \forall n\geq 1.$$

Nous commençons par remarque que si on multiplie l'avant dernière et la dernière égalité dans $(2,4)$ par α et β, on trouve $\alpha^3=2\alpha+1$ et $\beta^3=2\beta+1$. Ainsi, la formule de binôme nous donne

$$\alpha^{3n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(2\alpha\right)^k \quad et \quad \beta^{3n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(2\beta\right)^k.$$

Maintenant, la soustraction des deux sommes précédentes nous donne

$$F_{3n}=\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}F_k.$$

Les identités suivantes à une application pour la théorie des graphes.

Théorème 2.1.3. *La somme des n premiers termes de nombres de Fibonacci est donnée par*

$$\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-1.$$

Démonstration. En utilisant la relation de récurrence de la suite de Fibonacci (2.1), on trouve

$$F_1=F_3-F_2$$

$$F_2=F_4-F_3$$

$$F_3=F_5-F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1}=F_{n+1}-F_n$$

$$F_n=F_{n+2}-F_{n+1}$$

En sommant terme à terme de deux côtés, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-F_2=F_{n+2}-1.$$

□

Exemple 4**.**

$$\sum_{k=0}^{20} F_k = F_{22} - 1 = 17711 - 1 = 17710.$$

Théorème 2.1.4. *La somme des n premiers termes impairs de nombres de Fibonacci est donnée par*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}.$$

Démonstration. La relation de récurrence de la suite de Fibonacci (2.1), donne

$$F_1 = F_2 - F_0$$
$$F_3 = F_4 - F_2$$
$$F_5 = F_6 - F_4$$
$$\vdots$$
$$F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4}$$
$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

En prenant la somme entre 1 et n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n} - F_0,$$

et comme $F_0 = 0$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n},$$

donc la propriété est démontrée. □

Exemple 5**.**

$$\sum_{k=1}^{10} F_{2k-1} = F_{20} = 6765.$$

Corollaire 2.1.3. *La somme des n consécutifs premiers termes pairs de la suite de Fibonacci est donnée par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

Démonstration. D'après la relation de récurrence (2.1) et les théorèmes (2.1.3) et (2.1.4), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} F_{2k} &= \sum_{k=1}^{2n} F_k - \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} \\ &= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n} \\ &= F_{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

□

Théorème 2.1.5. *La somme des carrés des n premiers nombres de Fibonacci se simplifie*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}. \tag{2.5}$$

Démonstration. Par récurrence. Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1^2 = 1 = 1 \times 1 = F_1 F_2,$$

donc l'identité (2.5) est vraie lorsque $n = 1$. On suppose que (2.5) est vraie pour n, et on montre pour $n + 1$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 \\ &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}), \end{aligned}$$

et comme $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, alors la relation (2.4) est démontrée. □

Exemple 6.
Pour $n = 25$, on a

$$\sum_{k=1}^{25} F_k^2 = F_{25} F_{26} = (75025)(121393) = 9107509825.$$

Théorème 2.1.6. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1},$$

et pour $n \geq 1$, on a

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}.$$

Théorème 2.1.7. (***L'identité de D'ocagne***) *Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a*

$$F_{n+r} F_{n+1} - F_{n+r+1} F_n = (-1)^n F_r.$$

Démonstration. Posons

$$u_n = F_{n+r} F_{n+1} - F_{n+r+1} F_n, \quad \textit{pour } n \geq 0.$$

Tout d'abord, pour $n = 0$, on a

$$u_0 = F_r F_1 - F_{r+1} F_0 = F_r,$$

et pour $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= F_{n+r+1} F_{n+2} - F_{n+r+2} F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1}\Big(F_{n+1} + F_n\Big) - \Big(F_{n+r+1} + F_{n+r}\Big) F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1} F_{n+1} + F_{n+r+1} F_n - F_{n+r+1} F_{n+1} - F_{n+r} F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1} F_n - F_{n+r} F_{n+1} \\ &= -u_n. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de premier terme $u_0 = F_r$ et de raison -1.

Il en découle $u_n = (-1)^n F_r$ pour tout $n \geq 0$, c' est-à-dire

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r.$$

□

Théorème 2.1.8. (***L'identité de Catalan***) *Pour tout $n, r \in \mathbb{N}$, on a*

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2.$$

Démonstration. Par la forme de Binet (2.3), pour $n, r \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}
F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} &= \Big(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\Big)^2 - \Big(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\Big)\Big(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\Big) \\
&= \Big(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\Big)^2 - \Big(\frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n+r}\beta^{n-r} - \beta^{n+r}\alpha^{n-r} + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\Big(\alpha^{2n} - \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n - \alpha^{2n} + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r} + \beta\Big)^2\Big) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\Big(- 2(\alpha\beta)^n + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r}\Big) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}\Big(- 2 + \alpha^r\beta^{-r} + \beta^r\alpha^{-r}\Big) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}\Big(- 2 + \frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r}\Big) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}\frac{(\alpha^r - \beta^r)^2}{(\alpha\beta)^r} \\
&= (\alpha\beta)^{n-r}\Big(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\Big)^2 \\
&= (-1)^{n-r}F_r^2. \ (car\ \alpha\beta = 1)
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat. □

Nous obtenons le résultat suivant comme conséquence de théorème 2.1.7, en prenant $r = 1$.

Corollaire 2.1.4. (***L'identité de Cassini***) *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Théorème 2.1.9. (***L'identité de Johnson***) *Soient k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$, tels que $k + l = m + n$, alors*

$$F_kF_l - F_mF_n = (-1)^r\Big(F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}\Big).$$

Démonstration. Soient k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$, tels que $k + l = m + n$. D'après la formule (2.3), d'une part, on a

$$\begin{aligned}
F_kF_l - F_mF_n &= \Big(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}\Big)\Big(\frac{\alpha^l - \beta^l}{\alpha - \beta}\Big) - \Big(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\Big)\Big(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\Big) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\Big(\alpha^{k+l} - \beta^l\alpha^k - \beta^k\alpha^l + \beta^{k+l} - \alpha^{m+n} - \beta^n\alpha^m - \beta^m\alpha^n + \beta^{m+n}\Big) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\Big(- \beta^l\alpha^k - \beta^k\alpha^l + \beta^n\alpha^m + \beta^m\alpha^n\Big),
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(1)^r\Big(F_{k-r}F_{l-r}-F_{m-r}F_{n-r}\Big) &= (-1)^r\Big[\Big(\frac{\alpha^{k-r}-\beta^{k-r}}{\alpha-\beta}\Big)\Big(\frac{\alpha^{l-r}-\beta^{l-r}}{\alpha-\beta}\Big)\Big)\\ &- \Big(\frac{\alpha^{m-r}-\beta^{m-r}}{\alpha-\beta}\Big)\Big(\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\Big)\Big]\\ &= \frac{(\alpha\beta)^r}{(\alpha-\beta)^2}\Big[-\beta^{l-r}\alpha^{k-r}-\beta^{k-r}\alpha^{l-r}+\beta^{n-r}\alpha^{m-r}+\beta^{m-r}\alpha^{n-r}\Big]\\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big(-\beta^l\alpha^k-\beta^k\alpha^l+\beta^n\alpha^m+\beta^m\alpha^n\Big)\\ &= F_kF_l-F_mF_n.\end{aligned}$$

Donc, on a la résultat suivant

$$F_kF_l-F_mF_n=(-1)^r(F_{k-r}F_{l-r}-F_{m-r}F_{n-r}).$$

□

2.1.5 Relation entre le triangle de Pascal et les nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci sont liés au triangle de Pascal par la figure 2. La somme des diagonales montantes du triangle de Pascal forme la suite de Fibonacci.

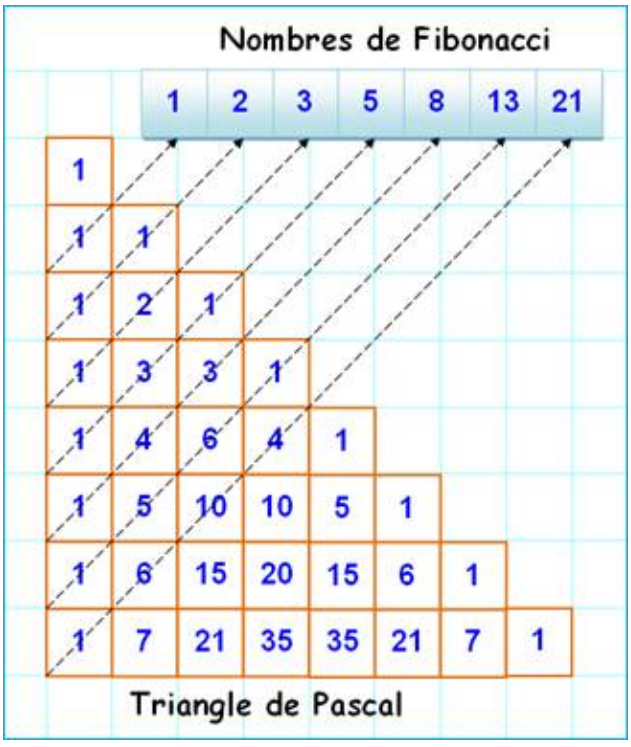


figure 2.

2.1.6 La suite de Fibonacci d'indice négatif

En général, on n'étudie pas les nombres de Fibonacci pour des valeures négatives de n, bien que la formule de récurrence les définisse aussi de proche en proche :

$$F_n=F_{n+2}-F_{n+1}. \tag{2.6}$$

Donc autour de 0, la suite est :..., $5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$
On remarque sur ces premières valeurs que :

$$\begin{cases} F_{-n} &= -F_n, si\ n\ est\ pair \\ F_{-n} &= F_n, si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

De manière plus générale, on donne la formule de la suite de Fibonacci pour les nombres négatifs :

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

2.2 Suite des nombres de Lucas

2.2.1 Formule de récurrence

La suite des nombres de Lucas est, parmi les suites de Lucas, qui sont liés étroitement avec la suite de Fibonacci, introduite par combinaison linéaire de deux nombres de Fibonacci, est appelée suite associée ou companion. Elle est donc définie par la même relation de récurrence linéaire mais par deux valeurs initiales différentes.

Définition 2.2.1. *La suite des nombres de Lucas, notée $(L_n)_{n\geq 0}$, est définie par la relation de récurrence suivante :*

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}\ avec\ L_0 = 2, L_1 = 1. \tag{2.7}$$

Les premier termes de la suite de Lucas sont $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...$

Remarque. Avec les mêmes méthodes utilisées dans les démonstrations de Fibonacci, on obtient les résultats suivants

2.2.2 Fonctions génératrices

Théorème 2.2.1. *Soit $(L_n)_{n\geq 0}$ la suite de Lucas, alors la fonction génératrice ordinaire de la suite de Lucas est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}.$$

Démonstration. Par le formule (2.7), et en faisant la somme sur n, on trouve

$$\sum_{n=2}^{\infty} L_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-2} x^n,$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n - L_0 - xL_1 = x \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-2} x^{n-2},$$

et par un changement de variable d'indice n, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n - 2 - x = x(\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n - L_0) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n,$$

ce qui nous donne le résultat suivant

$$(1-x-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = 2 - x.$$

□

2.2.3 Forme de Binet

Le terme général L_n de la suite de Lucas s'exprime en fonction du nombre d'or α par la formule de Binet dans le théorème suivant, analogue à la formule de Binet pour les nombres de Fibonacci.

Théorème 2.2.2. *La suite $(L_n)_{n\geq 0}$ est donnée par la forme de Binet*

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{2.8}$$

Démonstration. En utilisant les propriétés de la fonction génératrice et par le théorème 2.2.1, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\alpha^n+\beta^n\Big)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n \\
&= \frac{1}{1-\alpha x} + \frac{1}{1-\beta x} \\
&= \frac{2-(\alpha+\beta)x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \\
&= \frac{2-x}{1-x-x^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n.
\end{aligned}$$

□

Le théorème suivant donne la fonction génératrice de la suite (L_{m+n})

Théorème 2.2.3. *La suite (L_{m+n}) est caractérisée par la fonction génératrice ordinaire suivante :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{m+n}x^n = \frac{L_m + L_{m-1}x}{1-x-x^2} \tag{2.9}$$

Démonstration. Par la formule de Binet de L_{m+n}, et les propriétés de la fonction génératrice, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} L_{m+n}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^{m+n}+\beta^{m+n})x^n \\
&= \alpha^m\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n + \beta^m\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n \\
&= \frac{\alpha^m}{1-\alpha x} + \frac{\beta^m}{1-\beta x} \\
&= \frac{\alpha^m(1-\beta x)+\beta^m(1-\alpha x)}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \\
&= \frac{(\alpha^m+\beta^m)-(\alpha^m\beta x+\alpha\beta^m x)}{1-x-x^2} \\
&= \frac{(\alpha^m+\beta^m)-\alpha\beta(\alpha^{m-1}+\beta^{m-1})x}{1-x-x^2} \\
&= \frac{(\alpha^m+\beta^m)+(\alpha^{m-1}+\beta^{m-1})x}{1-x-x^2} \\
&= \frac{L_m + L_{m-1}x}{1-x-x^2}.
\end{aligned}$$

D'ou le résultat. □

2.2.4 Les identités combinatoires.

Théorème 2.2.4. *La somme des n premiers termes de Lucas est donnée par*

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3.$$

La somme des n premiers nombres de Lucas avec indices impairs est donnée par

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k-1} = L_{2n} - 2.$$

Démonstration. A partir de définition de la suite de Lucas (2.7), on peut écrire

$$L_k = L_{k+1} - L_{k-1} \text{ et } L_{2k-1} = L_{2k} - L_{2k-2}$$

En prenant la somme entre 1 et n, on obtient les résultats. □

Corollaire 2.2.1. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1.$$

Démonstration. Par la formule récurrente (2.7) et en faisant la somme sur k, on obtient

$$\sum_{k=1}^{2n} L_k = \sum_{k=1}^{n} L_{2k} + \sum_{k=1}^{n} L_{2k-1},$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = \sum_{k=1}^{2n} L_k - \sum_{k=1}^{n} L_{2k-1},$$

et d'après le théorème (2.2.4), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} L_{2k} &= (L_{2n+2} - 3) - (L_{2n} - 2) \\ &= (L_{2n+2} - L_{2n}) - 1 \\ &= (L_{2n+1} + L_{2n} - L_{2n}) - 1 \\ &= L_{2n+1} - 1. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat. □

Théorème 2.2.5. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2.$$

Démonstration. Par récurrence. Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} L_k^2 = L_1^2 = 1 = 1 \times 3 - 2 = L_1 L_2 - 2$$

on montre pour $n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} L_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} L_k^2 + L_{n+1}^2 \\ &= L_n L_{n+1} + L_{n+1}^2 - 2 \\ &= L_{n+1}(L_{n+1} + L_n) - 2 \\ &= L_{n+1}L_{n+2} - 2.\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.6. (***L'identité de Cassini***) *Pour $n \geq 1$, on a*

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}.$$

2.2.5 Relations entre la suite de Fibonacci et la suite de Lucas.

Théorème 2.2.7. 1. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}.$$

2. *Pour tout $n \geq 2$, on a*

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n.$$

3. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$F_{2n} = F_n L_n.$$

Démonstration. 1. En utilisant la forme de Binet (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}F_{n-1} + F_{n+1} &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\left(\alpha^{n+1} + \alpha^{n-1}\right) - \left(\beta^{n+1} + \beta^{n-1}\right)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \beta^n\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\alpha - \beta}\end{aligned}$$

et comme $\frac{1}{\alpha} = -\beta$, alors

$$\begin{aligned}F_{n-1} + F_{n+1} &= \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha^n + \beta^n \\ &= L_n.\end{aligned}$$

2. Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}F_{n+2} - F_{n-2} &= (F_{n+1} - F_n) - F_{n-2} \\ &= F_{n+1} + (F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-2} \\ &= F_{n+1} + F_{n-1}\end{aligned}$$

et comme $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$, on trouve

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$$

3. Les formes de Binet de F_n et de L_n, donnent le résultat.

$$\begin{aligned} F_{2n} &= \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta} \\ &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)(\alpha^n+\beta^n) \\ &= F_nL_n. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.8. *Pour tout $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on a*

$$F_mL_n + F_{m-1}L_{n-1} = L_{m+n-1}.$$

Démonstration. Par la fonction génératrice de F_n et en utilisant (2.7), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty}\Big(F_mL_n + F_{m-1}L_{n-1}\Big)x^n &= L_n\sum_{m=0}^{\infty}F_mx^n + L_{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}F_{m-1}x^n \\ &= L_n\frac{x}{1-x-x^2} + L_{n-1}\frac{x}{1-x-x^2} \\ &= \frac{L_{n-1}+(L_n-L_{n-1})x}{1-x-x^2} \\ &= \frac{L_{n-1}+L_{n-2}x}{1-x-x^2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}L_{m+n-1}x^n \end{aligned}$$

donc

$$F_mL_n + F_{m-1}L_{n-1} = L_{m+n-1}.$$

□

Autres relations.

- $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$, et ainsi la suite $\left(\frac{L_n}{F_n}\right)$ converge vers $\sqrt{5}$.
- $F_{n+k} + (-1)^kF_{n-k} = L_kF_k$.
- $L_{n+k} - (-1)^kL_{n-k} = 5F_kF_n$.
- $F_n = \frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{5}$.

Relation entre L_n, F_n et le nombre d'or.

Théorème 2.2.9. *La relation entre L_n, F_n et α est donnée par*

$$\alpha^n = \frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2},\ \beta^n = \frac{L_n-F_n\sqrt{5}}{2}.$$

Démonstration. Les formes de Binet de F_n et de L_n, donnent directement les résultats. □

CHAPITRE 3

LES POLYNÔMES DE FIBONACCI

Dans ce chapitre nous proposons quelques généralisations des résultats discutés dans le premier chapitre, appelées les polynômes de Fibonacci. Toutes ces généralisations considérées se réduisent au cas des nombres autour de $x = 1$. Parmi ces polynômes, les polynômes de Catalan, les polynômes $h(x)-$Fibonacci, et les polynômes $(p, q)-$Fibonacci. Pour plus de détails voir [2, 6, 8, 9].

3.1 Les polynômes de Fibonacci classiques

3.1.1 Relation de récurrence

Définition 3.1.1. *Les polynômes de Fibonacci classiques $f_n(x)$, étudiés par Catalan sont définis par la relation de récurrence*

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x),\ n \geq 2 \tag{3.1}$$

où $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$.

Les premiers termes de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 0\\
f_1(x) &= 1\\
f_2(x) &= x\\
f_3(x) &= x^2 + 1\\
f_4(x) &= x^3 + 2x\\
f_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1\\
f_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x\\
f_7(x) &= x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1\\
f_8(x) &= x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x\\
f_9(x) &= x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1\\
f_{10}(x) &= x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x.
\end{aligned}$$

Pour $x = 1$, on trouve la suite de Fibonacci classiques $(F_n)_{n\geq 0}$.

Les polynômes de Fibonacci classiques d'indices négatifs peuvent être définis par :

$$f_{-n}(x) = (-1)^{n+1} f_n(x). \tag{3.2}$$

En prenant $x = 1$ dans la formule (3.2), on trouve la formule des nombres négatifs pour la suite de Fibonacci.

3.1.2 La fonction génératrice

Théorème 3.1.1. *La fonction génératrice ordinaire de $f_n(x)$ est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2}. \tag{3.3}$$

Démonstration. Notons

$$g_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n,$$

alors

$$xtg_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} xf_n(x)t^{n+1},$$

et

$$t^2 g_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^{n+2},$$

ce qui donne

$$g_f(t) - xtg_f(t) - t^2 g_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} xf_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^{n+2},$$

c'est-à-dire

$$(1 - xt - t^2)g_f(t) = f_0(x) + tf_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)t^n - xtf_0(x) - \sum_{n=1}^{\infty} xf_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^{n+2},$$

puisque $f_0(x) = 0$ et $f_1(x) = 1$, on obtient

$$(1 - xt - t^2)g_f(t) = t + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} xf_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}(x)t^n,$$

donc

$$(1 - xt - t^2)g_f(t) = t + \sum_{n=2}^{\infty} t^n[f_n(x) - xf_{n-1}(x) + f_{n-2}]$$

$$(1 - xt - t^2)g_f(t) = t,$$

alors

$$g_f(t) = \frac{t}{1 - xt - t^2}.$$

□

Les théorèmes suivants donnent les formules explicites pour les polynômes de Fibonacci $f_n(x)$.

3.1.3 Forme de Binet

Théorème 3.1.2. *La suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ s'exprime en fonction du nombre d'or par la forme de Binet suivante :*

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)},$$

où

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}, \qquad et \qquad \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}.$$

$\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les racines de l'équation caractéristique $t^2 - xt - 1 = 0$.

Démonstration. En utilisant le théorème 3.1.1 et les propriétés des fonctions génératrices, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} t^n &= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n(x) t^n \Big] \\
&= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \Big[\frac{1}{1 - \alpha(x)t} - \frac{1}{1 - \beta(x)t^n} \Big] \\
&= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \frac{\Big(\alpha(x) - \beta(x)\Big)t}{\Big(1 - \alpha(x)t\Big)\Big(1 - \beta(x)t\Big)} \\
&= \frac{t}{1 - xt - t^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n.
\end{aligned}$$

L'égalité de deux fonctions génératrices, donne le résultat. □

Exemple. Pour $n = 5$, on a

$$\begin{aligned}
f_5(x) &= \frac{\Big(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\Big)^5 - \Big(\frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}\Big)^5}{\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} - \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}} \\
&= \frac{1}{32\sqrt{x^2+4}} \Big[\Big(x + \sqrt{x^2+4}\Big)^5 - \Big(x - \sqrt{x^2+4}\Big)^5 \Big] \\
&= \frac{32\Big(x^4 + 3x^2 + 1\Big)\sqrt{x^2+4}}{32\sqrt{x^2+4}} \\
&= \Big(x^4 + 3x^2 + 1\Big)
\end{aligned}$$

Une autre formule explicite pour $f_n(x)$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.1.3. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)\backslash 2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}.$$

Démonstration. D'une part, d'après le théorème 3.1.1, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)y^n = \frac{y}{1-xy-y^2},$$

et d'autre part, la forme explicite pour le polynôme de Chebychev de seconde espèce, est

$$U_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\setminus 2\rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2t)^{n-2k}.$$

Pour $z = iy$ et $t = x \setminus 2i$ et $i^2 = -1$, on trouve

$$\frac{1}{1-xy-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n U(x \setminus 2i)y^n,$$

et

$$\frac{y}{1-xy-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n U_n(x \setminus 2i)y^{n+1}, \tag{3.4}$$

et d'aprés les équations (3.3) et (3.4), on trouve que :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= i^n U(x \setminus 2i) \\ &= i^n \sum_{k=0}^{\lfloor n\setminus 2\rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (x \setminus i)^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n\setminus 2\rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)\setminus 2\rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}, \end{aligned}$$

□

3.1.4 Les identités combinatoires

Théorème 3.1.4. *Pour $n \geq 1$, on a*

$$f_n'(x) = \sum_{1\leq k\leq n-1} f_k(x)f_{n-k}(x).$$

Démonstration. Par le théorème 3.1.1 et la formule de binôme de Newton, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)t^n &= \Big(\frac{t}{1-xt-t^2}\Big)^2 \\ &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n\Big]^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{1\leq k\leq n} f_k(x)f_{n-k}(x)\Big]t^n \end{aligned}$$

alors

$$f_n'(x) = \sum_{1\leq k\leq n} f_k(x)f_{n-k}(x).$$

□

Exemple. Pour $f_0(x) = 0$, on a

$$f_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$$

$$f_6'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 3$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq k\leq 6} f_k(x)f_{6-k}(x) &= f_1(x)f_5(x) + f_2(x)f_4(x) + f_3(x)f_3(x) + f_4(x)f_2(x) + f_5(x)f_1(x)\\ &= 2f_1(x)f_5(x) + 2f_2(x)f_4(x) + f_3^2(x)\\ &= 2(1)(x^4 + 3x2 + 1) + 2x(x^3 + 2x) + (x^2 + 1)^2\\ &= 5x^4 + 12x^2 + 3\\ &= f_6'(x)\end{aligned}$$

Théorème 3.1.5. *Pour $n \geq 1$, on a*

$$x\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1.$$

Démonstration. Par la relation de récurrence (3.1) et en prenant la somme entre 1 et n, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} f_{k+1}(x) = x\sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}(x),$$

ce qui donne

$$x\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f_{k+1}(x) - \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}(x),$$

c'est−à−dire

$$x\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \Big(f_2(x) + f_3(x) + ... + f_{n+1}(x)\Big) - \Big(f_0(x) + f_1(x) + ... + f_{n-1}(x)\Big),$$

donc

$$x\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - f_1(x) - f_0(x),$$

et comme $f_0(x) = 0$ et $f_1(x) = 1$, on trouve

$$x\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1,$$

d'ou le résultat. □

Pour $x = 1$, le théorème 3.1.5 devient le théorème 2.1.3.

Théorème 3.1.6. *Pour $n, m \geq 0$, on a*

$$f_{m+n+1}(x) = f_{m+1}(x)f_{n+1}(x) + f_m(x)f_n(x).$$

3.1.5 Matrice associée aux polynômes de Fibonacci

Dans cette section nous présentons la matrice $Q(x)$ qui joue le rôle de la matrice Q dans le cas des nombres de Fibonacci. La matrice Q définie par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice Q est un outil important pour démontrer et construire des identités pas seulement pour les nombres ou les polynômes de Fibonacci, mais pour n'importe qu'elle famille de polynômes qui vérifie une récurrence linéaire finie ou non. La matrice Q est parfois appelée "la matrice companion". Dans le cas de Fibonacci classique, la matrice companion prend la forme suivante

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1.7. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$Q^n(x) = \begin{pmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Démonstration. On montre par récurrence. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre n ($n \geq 1$) et montrons à l'ordre $(n+1)$. Alors

$$\begin{aligned} Q^{n+1}(x) &= Q^n(x)Q(x) \\ &= \begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xf_{n+1}(x) + f_n(x) & f_{n+1}(x) \\ xf_n(x) + f_{n-1}(x) & f_n(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{n+2}(x) & f_{n+1}(x) \\ f_{n+1}(x) & f_n(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ainsi la formule (3.5) est vraie pour tout entier strictement positif. □

D'autre part, sachant que le déterminant de Q égale à 1, on en déduit le résultat suivant

Théorème 3.1.8. ***(Identité de Cassini)*** *Pour $n \geq 1$, on a*

$$f_{n+1}(x)f_{n-1}(x) - f_n^2(x) = (-1)^n.$$

Démonstration. Pour $n \geq 1$, $|Q| = -1$, $|Q^n| = (-1)^n$, donc

$$f_{n+1}(x)f_{n-1}(x) - f_n^2(x) = (-1)^n.$$

□

Pour $x = 1$, on obtient l'identité de Cassini pour les nombres de Fibonacci.

On peut utiliser la matrice companion pour démontrer (par la multiplication de deux matrice) des identités plus compliquées. Citons à titre d'exemple les formules suivantes. sachant que $Q^{2n+1}(x) = Q^{n+1}(x)Q^n(x)$.

$$f_{2n+1}(x) = f_{n+1}^2(x) + f_n^2(x)$$

$$f_{2n}(x) = f_{n+1}(x)f_n(x) + f_n(x)f_{n-1}(x),$$
$$f_{2n+1}(x) = f_{n+2}(x)f_n(x) + f_{n+1}(x)f_{n-1}(x).$$

En effet,

$$\begin{aligned} Q^{2n+1}(x) &= \begin{bmatrix} f_{2n+2}(x) & f_{2n+1}(x) \\ f_{2n+1}(x) & f_{2n}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{n+2}(x) & f_{n+1}(x) \\ f_{n+1}(x) & f_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{n+2}(x)f_{n+1}(x) + f_{n+1}(x)f_n(x) & f_{n+2}(x)f_n(x) + f_{n+1}(x)f_{n-1}(x) \\ f_{n+1}^2(x) + f_n^2(x) & f_{n+1}(x)f_n(x) + f_n(x)f_{n-1}(x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. De même, on peut trouver le résultat suivant par le produit matriciel $Q^{m+n}(x) = Q^m(x).Q^n(x)$

Théorème 3.1.9. *Pour $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on a*

$$f_{m+n}(x) = f_{m+1}(x)f_n(x) + f_m(x)f_{n-1}(x).$$

3.2 Les polynômes de Lucas classiques

Définition 3.2.1. *Les polynôme de Lucas notés $l_n(x)$ définis par la relation de récurrence suivante :*

$$l_n(x) = xl_{n-1}(x) + l_{n-2}(x),\ n \geq 2$$

où $l_0(x) = 2,\ l_1(x) = x.$

Les premiers termes de la suite $(l_n(x))_{n\geq 0}$ sont :

$$\begin{aligned} l_1(x) &= x \\ l_2(x) &= x^2 + 2 \\ l_3(x) &= x^3 + 3x \\ l_4(x) &= x^4 + 4x^2 + 2 \\ l_5(x) &= x^5 + 5x^3 + 5x \\ l_6(x) &= x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2 \\ l_7(x) &= x^7 + 7x^5 + 9x^3 + 7x \\ l_8(x) &= x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2 \\ l_9(x) &= x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x \\ l_{10}(x) &= x^10 + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2. \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, on obtient les nombres de Lucas L_n.

3.2.1 La fonction génératrice

Théorème 3.2.1. *La fonction génératrice de $l_n(x)$ est donnée par la relation suivante :*

$$g_l(t) = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}.$$

Démonstration. On a

$$g_l(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_n(x)t^n$$

donc

$$xtg_l(t) = \sum_{k=0}^{\infty} xl_n(x)t^{n+1}$$

$$t^2g_l(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_n(x)t^{n+2}$$

alors

$$g_l(t) - xtg_l(t) - t^2g_l(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_n(x)t^n - \sum_{k=0}^{\infty} xl_n(x)t^{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty} l_n(x)t^{n+2}$$

$$(1 - xt - t^2)g_f(t) = l_0(x) + tl_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} l_n(x)t^n - xtl_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty} xl_n(x)t^{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty} l_n(x)t^{n+2}$$

donc

$$(1 - xt - t^2)g_l(t) = 2 + tx - 2xt + \sum_{k=2}^{\infty} l_n(x)t^n - \sum_{k=2}^{\infty} xl_{n-1}(x)t^n - \sum_{k=2}^{\infty} l_{n+2}(x)t^n$$

$$(1 - xt - t^2)g_l(t) = 2 - xt + \sum_{k=2}^{\infty} t^n[l_n(x) - xl_{n-1}(x) + l_{n-2}]$$

D' après la relation de récurrence des polynômes de Lucas, on a

$$l_n(x) = xl_{n-1}(x) + l_{n-2}(x),\ n \geq 2,$$

$$(1 - xt - t^2)g_l(t) = 2 - xt,$$

alors

$$g_f(t) = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}.$$

□

3.2.2 Forme de Binet .

Théorème 3.2.2. *Les polynômes de Lucas $l_n(x)$ sont caractérisés par la forme de Binet suivante :*

$$l_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x),$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2},\ et\ \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

Le théorème suivant donne les relations entre les polynômes de Fibonacci classiques et de Lucas classiques.

Théorème 3.2.3. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned} l_n(x) &= f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) \\ f_{2n}(x) &= f_n(x)l_n(x). \end{aligned}$$

Théorème 3.2.4. *Pour $n \geq 1$ et $m \geq 1$,*

$$f_{m+n}(x) + (-1)^n f_{m-n}(x) = f_m l_n(x).$$

Démonstration. D'après le théorème 3.1.9, on a

$$f_{m+n}(x) = f_{m+1}(x)f_n(x) + f_m(x)f_{n-1}(x).$$

En remplaçant n par $-n$ et par la formule (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} f_{m-n}(x) &= f_{m+1}(x)f_{-n}(x) + f_m(x)f_{-n-1}(x) \\ &= (-1)^{n+1} f_{m+1}(x)f_n(x) + (-1)^{n+2} f_m(x)f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

maintenant, en utilisant le théorème 3.2.3, on trouve

$$\begin{aligned} f_{m+n}(x) + (-1)^n f_{m-n}(x) &= f_m(x)f_{n-1}(x) + f_m(x)f_{n+1}(x) \\ &= f_m(x)(f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x)) \\ &= f_m l_n(x). \end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration. □

On remplace n par k et m par $m-k$ dans le théorème 3.2.4, on trouve l'identité suivante

$$f_m(x) = l_k(x)f_{m-k}(x) + (-1)^{k+1} f_{m-2k}(x).$$

3.3 Les polynômes h(x)−Fibonacci

Définition 3.3.1. *Soit $h(x)$ un polynôme à coefficients réels, les polynômes h(x)-Fibonacci notés $(f_{h,n}(x))_{n\geq 0}$ sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$f_{h,n+1}(x) = h(x)f_{h,n}(x) + f_{h,n-1}(x), \tag{3.6}$$

avec les conditions initiales $f_{h,0}(x) = 0, \quad f_{h,1}(x) = 1$.

Pour $h(x) = x$, on trouve les polynômes de Fibonacci classiques étudiés dans la section précédente.

3.3.1 Fonction génératrice

Théorème 3.3.1. *La fonction génératrice $g_f(t)$ de la suite $(f_{h,n}(x))_{n\geq 0}$ est définie par*

$$g_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n = \frac{t}{1 - h(x)t - t^2}. \tag{3.7}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} g_f(t) - h(x)tg_f(t) - t^2 g_f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n - h(x)t\sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n - t^2\sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n - h(x)\sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^{n+2} \\ &= f_{h,0} + tf_{h,1}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n - h(x)tf_{h,0} - h(x)\sum_{n=1}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^{n+2} \end{aligned}$$

et comme

$$f_{h,0}(x) = 0 \quad f_{h,1}(x) = 1,$$

alors

$$\begin{aligned} g_f(t) - h(x)tg_f(t) - t^2 g_f(t) &= t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n - h(x)\sum_{n=2}^{\infty} f_{h,n-1}(x)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} f_{h,n-2}(x)t^n \\ &= t + \sum_{n=2}^{\infty} t^n \Big[f_{h,n}(x) - h(x)f_{h,n-1}(x) - f_{h,n-2}(x) \Big], \end{aligned}$$

maintenant la récurrence (3.6) conduit à la résultat. □

Théorème 3.3.2. *Supposons que $h(x)$ soit un polynôme impair. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{h,n}(-x) = (-1)^{n+1} f_{h,n}(x).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(-x)(-t)^n = \frac{-t}{1 - h(x)t - t^2},$$

alors, en multipliant les deux équations par (-1), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} f_{h,n}(-x)t^n &= \frac{t}{1 - h(x)t - t^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{h,n}(x)t^n, \end{aligned}$$

l'égalité de deux sériés génératrices, donne le résultat. □

3.3.2 Forme de Binet.

Théorème 3.3.3. *Pour tout entier positif n, on a la formule de Binet suivante :*

$$f_{h,n}(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}, \tag{3.8}$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{h(x) + \sqrt{h^2(x) + 4}}{2}, \quad \beta(x) = \frac{h(x) - \sqrt{h^2(x) + 4}}{2}$$

$\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les racines de l'équation caractéristique $v^2 - h(x)v - 1 = 0$.

donc $\alpha(x) + \beta(x) = h(x)$, $\alpha(x)\beta(x) = -1$ et $\alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{h^2(x) + 4}$.

Une autre formule explicite pour $f_{h,n}(x)$ est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 3.3.4. *Pour tout entier strictement positif n, la forme explicite des polynômes $f_{h,n}(x)$ est donnée par*

$$f_{h,n}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)\backslash 2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} h^{n-2k-1}(x). \tag{3.9}$$

Démonstration. D'après la formule (3.3) et par la forme de binôme de Newton, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{t}{1-(h(x)t+t^2)} &= t\sum_{n=0}^{\infty}(h(x)t+t^2)^n \\ &= t\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(h(x)t)^{n-k}(t^2)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{n-k}(x)t^{n+k+1}\end{aligned}$$

posons $n+k+1=m$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_{h,n}(x)t^n=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\sum_{k=0}^{\lfloor(m-1)\backslash 2\rfloor}\binom{m-k-1}{k}^{m-2k-1}(x)\Big]t^m,$$

ce qui prouve (3.9). □

Théorème 3.3.5. *Pour $n\geq 1$, on a*

$$f_{h,n}(x)=2^{1-n}\sum_{k=0}^{\lfloor(n-1)\backslash 2\rfloor}\binom{n}{2k+1}h^{n-2k-1}(x)\left(h^2(x)+4\right)^k.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\alpha^n(x)-\beta^n(x) &= 2^{-n}\left[\left(h(x)+\sqrt{h^2(x)+4}\right)^n-\left(h(x)-\sqrt{h^2(x)+4}\right)^n\right] \\ &= 2^{-n}\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{n-k}(x)\Big(\sqrt{h^2(x)+4}\Big)^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{n-k}(x)\Big(-\sqrt{h^2(x)+4}\Big)^k\Big] \\ &= 2^{-n+1}\sum_{k=0}^{\lfloor(n-1)\backslash 2\rfloor}\binom{n}{2k+1}h^{n-2k-1}(x)\Big(\sqrt{h^2(x)+4}\Big)^{2k+1},\end{aligned}$$

la formule de Binet de $f_{h,n}(x)$, donne

$$\begin{aligned}f_{h,n}(x) &= \frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \\ &= \frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\sqrt{h^2(x)+4}} \\ &= 2^{-n+1}\sum_{k=0}^{\lfloor(n-1)\backslash 2\rfloor}\binom{n}{2k+1}h^{n-2k-1}(x)\left(h^2(x)+4\right)^k.\end{aligned}$$

□

Le polynôme $f_{h,n}(x)$ s'exprime en fonction de polynôme de Tchebychev de seconde espèce.

Théorème 3.3.6. *Pour $n\geq 1$,*

$$f_{h,n}(x)=i^{n-1}U_{n-1}\left(\frac{h(x)}{2i}\right), \tag{3.10}$$

avec $i^2=-1$, et $U_n(t)$ le polynôme de Tchebychev de seconde espèce.

Démonstration. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)z^n = \frac{1}{1-2tz-z^2}.$$

Pour $z = iy$ et $t = \dfrac{h(x)}{2i}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n U_n\left(\frac{h(x)}{2i}\right) y^n = \frac{1}{1-h(x)y-y^2},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n U_n\left(\frac{h(x)}{2i}\right) y^{n+1} = \frac{y}{1-h(x)y-y^2},$$

et d'après le Théorème 3.1.1, on obtient (3.10). □

Théorème 3.3.7. *Soit $D_n(x)$ la matrice d'ordre n définie comme suit :*

$$D_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & i & & & & & & \\ 0 & h(x) & i & & & & & \\ & & h(x) & i & . & & & \\ & & & . & . & . & & \\ & & & & . & . & . & \\ & & & & & . & . & i \\ & & & & & & i & h(x) \end{pmatrix}; \qquad n \geq 1,$$

avec $i^2 = -1$ et $D_0(x) = (0)$. Alors

$$detD_n(x) = f_{h,n}(x), \qquad n \geq 0.$$

Démonstration. Par récurrence. Pour $n = 1$ et $n = 2$, le résultat est vrai.

$$detD_1(x) = 1 = f_{h,1}(x) \text{ et } detD_2(x) = h(x) = f_{h,2}(x).$$

On suppose

$$detD_{n-1} = f_{h,n-1} \text{ et } detD_{n-2} = f_{h,n-2},\ n \geq 3.$$

Alors

$$detD_n(x) = h(x)detD_{n-1}(x) - i^2 detD_{n-2}(x) = h(x)f_{h,n-1}(x) + f_{h,n-2}(x).$$

Par la relation récurrente (3.6), on obtient

$$detD_n(x) = f_{h,n}(x).$$

□

3.3.3 Matrice associée aux polynômes h(x)−Fibonacci

Définition 3.3.2. *La matrice $Q_h(x)$ associée aux polynômes $h(x)-$Fibonacci est définie par :*

$$Q_h(x) = \begin{bmatrix} h(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Théorème 3.3.8. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$Q_h^n(x) = \begin{bmatrix} f_{h,n+1}(x) & f_{h,n}(x) \\ f_{h,n}(x) & f_{h,n-1}(x) \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Démonstration. On montre par récurrence, le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre n $(n \geq 1)$ et montre à l'ordre $(n + 1)$. Alors

$$\begin{aligned} Q_h^{n+1}(x) &= Q_h^n(x)Q_h(x) \\ &= \begin{bmatrix} f_{h,n+1}(x) & f_{h,n}(x) \\ f_{h,n}(x) & f_{h,n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h(x)f_{h,n+1}(x) + f_{h,n}(x) & f_{h,n+1}(x) \\ h(x)f_{h,n}(x) + f_{h,n-1}(x) & f_{h,n}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{h,n+2}(x) & f_{h,n+1}(x) \\ f_{h,n+1}(x) & f_{h,n}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ainsi la formule (3.11) est vraie pour tout entier strictement positif. □

Sachant que le déterminant de Q_h égale à 1, on en déduit le résultat suivant

Corollaire 3.3.1. ***(Identité de Cassini)*** *pour $n \geq 1$, on a*

$$f_{h,n+1}(x)f_{h,n+1}(x) - f_{h,n}^2(x) = (-1)^n.$$

Démonstration. On a $|Q_h(x)| = (-1)$, alors $|Q_h^n(x)| = (-1)^n$, et on a

$$|Q_h^n(x)| = F_{h,n+1}(x)F_{h,n+1}(x) - F_{h,n}^2(x)$$

donc

$$F_{h,n+1}(x)F_{h,n+1}(x) - F_{h,n}^2(x) = (-1)^n.$$

□

Corollaire 3.3.2. *Pour $n, m \geq 1$, on a*

$$f_{h,2n+1}(x) = f_{h,n+1}^2(x) + f_{h,n}^2(x)$$

et

$$f_{h,2n}(x) = f_{h,n}(x)\left(f_{h,n+1}(x) + f_{h,n-1}(x)\right).$$

Démonstration. La démonstration se fait par le produit matriciel $Q_h^{2n+1}(x) = Q^{n+1}(x)Q^n(x)$. □

3.4 Les polynômes h(x)−Lucas

Définition 3.4.1. *Soit $h(x)$ un polynôme à coefficients réels, les polynômes h(x)-Lucas notés $(l_{h,n}(x))_{n\geq 0}$ sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$l_{h,n+1}(x) = h(x)l_{h,n}(x) + l_{h,n-1}(x),\ n \geq 1 \tag{3.12}$$

avec les conditions initiales $l_{h,0}(x) = 2$ et $l_{h,1}(x) = h(x)$.

Théorème 3.4.1. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$l_{h,n}(x) = f_{h,n+1}(x) + f_{h,n-1}(x).$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n. Le résultat et vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre n, alors

$$\begin{aligned} l_{h,n+1}(x) &= h(x)l_{h,n}(x) + l_{h,n-1}(x) \\ &= h(x)\Big(f_{h,n+1}(x) + f_{h,n-1}(x)\Big) + \Big(f_{h,n}(x) + f_{h,n-2}(x)\Big) \\ &= \Big(h(x)f_{h,n+1}(x) + f_{h,n}(x)\Big) + \Big(h(x)f_{h,n-1}(x) + f_{h,n-2}(x)\Big) \\ &= f_{h,n+2}(x) + f_{h,n}(x) \end{aligned}$$

donc le résultat est vrai. □

Corollaire 3.4.1. *Pour* $n \geq 1$

$$l_{h,n}(x) = h(x)f_{h,n}(x) + 2f_{h,n-1}(x).$$

Démonstration. D'après la récurrence (3.6)

$$\begin{aligned} h(x)f_{h,n}(x) + 2f_{h,n-1}(x) &= \Big(h(x)f_{h,n}(x) + f_{h,n-1}(x)\Big) + f_{h,n-1}(x) \\ &= f_{h,n+1}(x) + f_{h,n-1}(x) \\ &= l_{h,n}(x), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

3.4.1 Fonction génératrice

Théorème 3.4.2. *La fonction génératrice* $g_l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_{h,n}(x)t^n$ *de la suite* $\big(l_{h,n}(x)\big)_{n\geq 0}$ *est définie par l'expression suivante :*

$$g_l(t) = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} g_l(t) - h(x)tg_l(t) - t^2 g_l(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} l_{h,n}(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} h(x)l_{h,n}(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} l_{h,n}(x)t^n \\ &= l_{h,0} + tl_{h,1}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} l_{h,n}(x)t^n - h(x)tl_{h,0} - \sum_{n=1}^{\infty} h(x)l_{h,n}(x)t^n \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} l_{h,n}(x)t^{n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 + h(x)t - 2h(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} l_{h,n}(x)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} h(x)l_{h,n-1}(x)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} l_{h,n-2}(x)t^n \\ &= 2 - h(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} t^n[l_{h,n}(x) - h(x)l_{h,n-1}(x) - l_{h,n-2}(x)] \end{aligned}$$

la relation de récurrence $h(x)$−Lucas (3.12), donne

$$g_l(t) = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}.$$

□

Théorème 3.4.3. *Supposons que $h(x)$ soit un polynôme impair. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad l_{h,n}(-x) = (-1)^n l_{h,n}(x).$$

Démonstration. On a

$$g_l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_{h,n}(x)t^n = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_{h,n}(-x)(-t)^n = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n l_{h,n}(-x)t^n &= \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} l_{h,n}(x)t^n, \end{aligned}$$

l'égalité de deux fonctions génératrices, donne le résultat. □

3.4.2 Forme de Binet

Théorème 3.4.4. *Pour $n \geq 0$,*

$$l_{h,n}(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{h(x) + \sqrt{h^2(x) + 4}}{2}, \qquad \beta(x) = \frac{h(x) - \sqrt{h^2(x) + 4}}{2}$$

Corollaire 3.4.2. *Pour $n \geq 0$,*

$$\alpha^n(x) = \frac{l_{h,n} + \sqrt{h^2(x) + 4} f_{h,n}(x)}{2}.$$

$$\beta^n(x) = \frac{l_{h,n} - \sqrt{h^2(x) + 4} f_{h,n}(x)}{2}.$$

Démonstration. L'addition, respectivement la soustraction des formes de Binet de $f_{h,n}(x)$ et $l_{h,n}(x)$, donnent les résultats immédiatement. □

Corollaire 3.4.3. *Pour $n \geq 0$,*

$$l_{h,n}^2(x) - \left(h^2(x) + 4\right) f_{h,n}^2(x) = 4\left(-1\right)^n.$$

Démonstration. D'après le Corollaire 3.4.3, on résulte

$$2\alpha^n(x) - l_{h,n}(x) = \sqrt{h^2(x) + 4}.f_{h,n}(x).$$

La fonction carrée de deux nombres, donne

$$\begin{aligned} l_{h,n}^2(x) - \Big(h^2(x) + 4\Big) f_{h,n}^2(x) &= -4\alpha^{2n}(x) + 4\alpha^n(x) l_{h,n}^2(x) \\ &= -4\alpha^{2n}(x) + 4\alpha^n(x)\Big(\alpha^n(x) + \beta^n(x)\Big) \\ &= 4\Big(\alpha(x)\beta(x)\Big)^n \\ &= 4\Big(-1\Big)^n. \end{aligned}$$

Le corollaire est démontré. □

Corollaire 3.4.4. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$f_{h,2n}(x) = f_{h,n}(x) l_{h,n}(x).$$

Démonstration. Par le Théorème 3.2.1 et en utilisant le Théorème 3.4.4, on obtient

$$f_{h,2n}(x) = \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

donc

$$f_{h,2n}(x) = \left(\frac{\alpha^{n}(x) - \beta^{n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \left(\alpha^{n}(x) + \beta^{n}(x) \right)$$

ce qui donne

$$f_{h,2n}(x) = f_{h,n}(x) l_{h,n}(x).$$

□

Théorème 3.4.5. *Pour $n \geq 1$,*

$$l_{h,n}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor n \backslash 2 \rfloor} \binom{n}{2k} h^{n-2k}(x) \left(h^2(x) + 4 \right)^k.$$

Démonstration. Par le Théorème 3.4.4 et en utilisant la formule de binôme de Newton, on trouve

$$\begin{aligned}
l_{h,n}(x) &= \alpha^n(x) + \beta^n(x) \\
&= 2^{-n} \left[\left(h(x) + \sqrt{h^2(x)+4} \right)^n + \left(h(x) - \sqrt{h^2(x)+4} \right)^n \right] \\
&= 2^{-n} \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k}(x) \Big(\sqrt{h^2(x)+4} \Big)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k}(x) \Big(- \sqrt{h^2(x)+4} \Big)^k \Big] \\
&= 2^{-n+1} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1) \backslash 2 \rfloor} \binom{n}{2k} h^{n-2k}(x) \Big(\sqrt{h^2(x)+4} \Big)^{2k} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1) \backslash 2 \rfloor} \binom{n}{2k} h^{n-2k}(x) \Big(h^2(x)+4 \Big)^k.
\end{aligned}$$

□

La relation entre les polynômes $h(x)-$Fibonacci et le polynôme de Tchebychev de première espèce donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.4.6. *Pour $n \geq 0$,*

$$l_{h,n}(x) = 2 i^n T_n \left[h(x) 2i \right]$$

avec $i^2 = -1$ et $T_n(t)$ est un polynôme de Tchebychev de première espèce.

Théorème 3.4.7. *Soit $R_n(x)$ la matrice tridiagonale d'ordre n, définie par :*

$$R_n(x) = \begin{pmatrix}
2 & i & & & & & \\
0 & \frac{h(x)}{2} & i & & & & \\
 & & h(x) & i & . & & \\
 & & & . & . & . & \\
 & & & & . & . & . \\
 & & & & & . & i \\
 & & & & & i & h(x)
\end{pmatrix}; \qquad n \geq 1$$

avec $i^2 = -1$, *alors*

$$detR_n(x) = l_{h,n-1}(x), \qquad n \geq 0.$$

Théorème 3.4.8. *Les racines d'équation caractéristique de* $Q_h^n(x)$ *sont* $\alpha^n(x)$ *et* $\beta^n(x)$.

Démonstration. Le polynôme caractéristique de $Q_h^n(x)$ est défini par :

$$|Q_h^n(x) - \lambda I| = det \begin{bmatrix} F_{h,n+1}(x) - \lambda & F_{h,n}(x) \\ F_{h,n}(x) & F_{h,n-1} - \lambda(x) \end{bmatrix}$$

$$|Q_h^n(x) - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda(F_{h,n+1}(x) + F_{h,n-1}(x)) + (F_{h,n+1}(x)F_{h,n+1}(x) - F_{h,n}^2(x)).$$

En appliquant le Théorème 3.4.1, on trouve

$$|Q_h^n(x) - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda L_{h,n}(x) + (-1)^n$$

Les racines d'équation caractéristique de $Q_h^n(x)$ sont

$$\lambda = \frac{L_{h,n}(x) \pm \sqrt{L_{h,n}^2(x) - 4(-1)^n}}{2}$$

alors

$$\lambda = \alpha^n(x) \; ou \; \lambda = \beta^n(x).$$

□

3.5 Les polynômes (p,q)−Fibonacci

Nous proposons encore une nouvelle généralisation apparaît en combinatoire mais nous allons emprunter leur construction d'un point de vue analytique et non combinatoire.

Définition 3.5.1. *Soient* $p(x)$ *et* $q(x)$ *deux polynômes à coefficients réels, on définit les polynômes (p,q)−Fibonacci notés* $(f_{p,q,n}(x))_{n\geq 0}$ *par la relation récurrente suivante :*

$$f_{p,q,n+1}(x) = p(x)f_{p,q,n}(x) + q(x)f_{p,q,n-1}(x), \; n \geq 1$$

avec les conditions initiales $f_{p,q,0}(x) = 0$ *et* $f_{p,q,1}(x) = 1$.

Les premiers termes de la suite $(f_{p,q,n}(x))_{n\geq 0}$ sont

$$\begin{aligned} f_{p,q,2}(x) &= p(x) \\ f_{p,q,3}(x) &= p^2(x) + q(x) \\ f_{p,q,4}(x) &= p^3(x) + 2p(x)q(x) \\ f_{p,q,5}(x) &= p^4(x) + 3p^2(x)q(x) + q^2(x). \end{aligned}$$

Pour $p(x) = q(x) = 1$, on obtient les nombres de Fibonacci. Pour $p(x) = h(x)$ et $q(x) = 1$, on obtient les polynômes $h(x)$−Fibonacci et pour $p(x) = x$ et $q(x) = 1$, on trouve les polynômes de Fibonacci classiques.

3.5.1 Fonction génératrice

Théorème 3.5.1. *La fonction génératrice ordinaire $(p,q)-$Fibonacci, notée $g_f(t)$ est donnée par :*

$$g_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{p,q,n}(x)t^n = \frac{t}{1-p(x)t-q(x)t^2}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
g_f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{p,q,n}(x)t^n \\
&= f_{p,q,1}(x) + f_{p,q,2}(x)t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_{p,q,n}(x)t^n \\
&= t + t^2p(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \left[p(x)f_{p,q,n-1}(x) + q(x)f_{p,q,n-2}(x)\right] t^n \\
&= t + t^2p(x) + \sum_{n=3}^{\infty} p(x)f_{p,q,n-1}(x)t^n + \sum_{n=3}^{\infty} q(x)f_{p,q,n-2}(x)t^n \\
&= t + t^2p(x) + t\sum_{n=3}^{\infty} p(x)f_{p,q,n-1}(x)t^{n-1} + t^2\sum_{n=3}^{\infty} q(x)f_{p,q,n-2}(x)t^{n-2} \\
&= t + t^2p(x) + tp(x)\sum_{n=2}^{\infty} f_{p,q,n}(x)t^n + t^2q(x)\sum_{n=1}^{\infty} f_{p,q,n}(x)t^n \\
&= t + t^2p(x) + tp(x)\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_{p,q,n}(x)t^n - t\right] + t^2q(x)\sum_{n=1}^{\infty} f_{p,q,n}(x)t^n \\
&= t + t^2p(x) + tp(x)\left[g_f(t) - t\right] + t^2q(x)g_f(t)
\end{aligned}$$

donc

$$g_f(t) = t + t^2p(x) - t^2p(x) + t^2q(x)g_f(t) + tp(x)g_f(t)$$

et d'après la Définition 3.5.1 on a

$$\left(1 - tp(x) - t^2q(x)\right) g_f(t) = t$$

alors

$$g_f(t) = \frac{t}{1-p(x)t-q(x)t^2}$$

□

3.5.2 Forme de Binet

Théorème 3.5.2. *Les polynômes (p,q)−Fibonacci sont caractérisés par la forme de Binet suivante :*

$$f_{p,q,n}(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{p(x) + \sqrt{p^2(x)+4q(x)}}{2},\ et\quad \beta(x) = \frac{p(x) - \sqrt{p^2(x)+4q(x)}}{2}$$

$\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont solutions de l'équation caractéristique suivante : $t^2 - p(x)t - q(x) = 0$.

On a $\alpha(x) + \beta(x) = p(x)$, $\alpha(x)\beta(x) = -q(x)$ et $\alpha(x) + \beta(x) = \sqrt{p^2(x)+4q(x)}$.

Démonstration. Par les propriétés de la fonction génératrice et le Théorème 3.5.1, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}t^n &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n(x)t^n\Big]\\ &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\Big[\frac{1}{1-\alpha(x)t}-\frac{1}{1-\beta(x)t^n}\Big]\\ &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\frac{\Big(\alpha(x)-\beta(x)\Big)t}{\Big(1-\alpha(x)t\Big)\Big(1-\beta(x)t\Big)}\\ &= \frac{t}{1-p(x)t-q(x)t^2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}f_{p,q,n}(x)t^n,\end{aligned}$$

L'égalité de deux fonctions génératrices, donne le résultat. □

Une autre formule explicite pour $f_{p,q,n}(x)$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.5.3. *Pour $n \geq 1$,*

$$f_{p,q,n}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)\backslash 2\rfloor}\binom{n-i}{i}p^{n-2i}(x)q^i(x).$$

Théorème 3.5.4. *Pour $n \geq 0$,*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)q^{n-k}(x)f_{p,q,k}(x) = f_{p,q,2n}(x)$$

Démonstration. Par le Théorème 3.5.2 et la formule de binôme de Newton, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)q^{n-k}(x)f_{p,q,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)q^{n-k}(x)\frac{\alpha^k(x)-\beta^k(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\\ &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)q^{n-k}(x)\left(\alpha^k(x)-\beta^k(x)\right)\Big)\\ &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(p(x)\alpha(x)\big)^k q^{n-k}(x)\\ &- \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(p(x)\beta(x)\big)^k q^{n-k}(x)\Big)\\ &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[\big(p(x)\alpha(x)+q(x)\big)^n+\big(p(x)\alpha(x)+q(x)\big)^n\right]\end{aligned}$$

et comme $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les solutions de l'équation caractéristique $t^2-p(x)t-q(x)=0$, alors

$$\alpha^2(x) = p(x)\alpha(x)+q(x)$$
$$\beta^2(x) = p(x)\beta(x)+q(x)$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)q^{n-k}(x)f_{p,q,k}(x) &= \frac{\big(\alpha^2(x)\big)^n-\big(\beta^2(x)\big)^n}{\alpha(x)-\beta(x)}\\ &= f_{p,q,2n}(x)\end{aligned}$$

□

Théorème 3.5.5. *Pour* $n\geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)\big(-q(x)\big)^{n-k}f_{p,q,k}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(-2q(x)\big)^{n-k}f_{p,q,2(n-k)}(x).$$

Démonstration. Par le Théorème 3.5.2 et la formule de binôme de Newton, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)\Big(-q(x)\Big)^{n-k}f_{p,q,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)\Big(-q(x)\Big)^{n-k}\frac{\alpha^k(x)-\beta^k(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\\ &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)\Big(-q(x)\Big)^{n-k}(x)\\ &\times \Big(\alpha^k(x)-\beta^k(x)\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(p(x)\alpha(x)\Big)^k\Big(-q(x)\Big)^{n-k}(x)\\ &- \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(p(x)\beta(x)\Big)^k(-q(x))^{n-k}(x)\Big)\\ &= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\Big(\Big(p(x)\alpha(x)-q(x)\Big)^n+\Big(p(x)\alpha(x)-q(x)\Big)^n\Big),\end{aligned}$$

et comme $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont solutions de l'équation caractéristique $t^2-p(x)t-q(x)=0$, alors

$$\begin{aligned}p(x)\alpha(x)-q(x)&=\alpha^2(x)-2q(x)\\ p(x)\beta(x)-q(x)&=\beta^2(x)-2q(x)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(x)\big(-q(x)\big)^{n-k}f_{p,q,k}(x) &= \frac{\big(\alpha^2(x)-2q(x)\big)^n\big(\beta^2(x)-2q(x)\big)^n}{\alpha(x)-\beta(x)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(-2q(x)\big)^{n-k}f_{p,q,2(n-k)}(x)\end{aligned}$$

□

3.5.3 Matrice associée aux polynômes (p,q)−Fibonacci

Définition 3.5.2. *Soit* $Q_{p,q}(x)$ *la matrice carrée, définie par :*

$$Q_{p,q}(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Théorème 3.5.6. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$Q_{p,q}^n(x) = \begin{pmatrix} f_{p,q,n+1}(x) & q(x)f_{p,q,n}(x) \\ f_{p,q,n}(x) & q(x)f_{p,q,n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.5.7. ***(L'identié de Cassini)*** *Pour $n \geq 1$*

$$f_{p,q,n+1}(x)f_{p,q,n-1}(x) - f_{p,q,n}^2(x) = (-1)^n q^{n-1}(x).$$

Démonstration. On a

$$|Q_{p,q}| = -q(x)$$

alors

$$|Q_{p,q}^n| = (-1)^n q^n(x)$$

et comme

$$|Q_{p,q}^n| = q(x)f_{p,q,n+1}(x)f_{p,q,n-1}(x) - q(x)f_{p,q,n}^2(x)$$

on obtient

$$q(x)f_{p,q,n+1}(x)f_{p,q,n-1}(x) - q(x)f_{p,q,n}^2(x) = (-1)^n q^n(x)$$

ce qui donne

$$f_{p,q,n+1}(x)f_{p,q,n-1}(x) - f_{p,q,n}^2(x) = (-1)^n q^{n-1}(x).$$

□

3.6 Les polynômes (p,q)−Lucas

Définition 3.6.1. *Soient $p(x)$ et $q(x)$ deux polynômes à coefficients réels, on définit les polynômes (p,q)−Lucas $(f_{p,q,n}(x))_{n\geq 0}$ par la relation récurrente suivante :*

$$l_{p,q,n+1}(x) = p(x)l_{p,q,n}(x) + q(x)l_{p,q,n-1}(x),\ n \geq 1$$

avec les conditions initiales $l_{p,q,0}(x) = 2$ et $l_{p,q,1}(x) = p(x)$

Les premiers termes de la suite $(l_{p,q,n}(x))_{n\geq 0}$ sont

$$\begin{aligned} l_{p,q,0}(x) &= 2 \\ l_{p,q,1}(x) &= p(x) \\ l_{p,q,2}(x) &= p^2(x) + 2q(x) \\ l_{p,q,3}(x) &= p^3(x) + 3p(x)q(x) \\ l_{p,q,4}(x) &= p^4(x) + 4p^2(x)q(x) + 2q^2(x). \end{aligned}$$

En particulier, pour $p(x) = q(x) = 1$, on obtient les nombres de Lucas. Pour $p(x) = h(x)$ et $q(x) = 1$, on obtient les polynômes $h(x)$−Lucas et pour $p(x) = x$ et $q(x) = 1$, on trouve les polynômes de Lucas classiques.

3.6.1 Fonction génératrice

Théorème 3.6.1. *La fonction génératrice ordinaire $g_l(t)$, (p,q)−Fibonacci est donnée par :*

$$g_l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_{p,q,n}(x)t^n = \frac{2 - p(x)t}{1 - p(x)t - q(x)t^2}.$$

3.6.2 Forme de Binet

Théorème 3.6.2. *Les polynômes (p,q)−Lucas sont caractérisés par la forme de Binet suivante*

$$l_{p,q,n}(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x),$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{p(x) + \sqrt{p^2(x) + 4q(x)}}{2}, \text{ et } \qquad \beta(x) = \frac{p(x) - \sqrt{p^2(x) + 4q(x)}}{2}.$$

Théorème 3.6.3. *Pour $n \geq 0$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k}(x) \big(-1\big)^k l_{p,q,k}(x) = l_{p,q,n}(x).$$

Démonstration. On a $p(x) - \alpha(x) = -q(x) \setminus \alpha(x)$ et $p(x) - \beta(x) = -q(x) \setminus \beta(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k}(x) \big(-1\big)^k l_{p,q,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k}(x) \big(-1\big)^k \big(\alpha^k(x) + \beta^k(x)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k}(x)(-\alpha(x))^k \\
&+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k}(x)(-\beta(x))^k \\
&= \big(p(x) - \alpha(x)\big)^n + \big(p(x) - \beta(x)\big)^n \\
&= \left(\frac{-q(x)}{\alpha(x)}\right)^n + \left(\frac{-q(x)}{\beta(x)}\right)^n \\
&= \Big(-q(x)\Big)^n \Big(\frac{\alpha^n(x) + \beta^n(x)}{(\alpha(x)\beta(x))^n}\Big) \\
&= l_{p,q,n}(x).
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.6.4. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$f_{p,q,n+m}(x) - (-q(x))^m f_{p,q,n-m}(x) = f_{p,q,n}(x) l_{p,q,n}(x).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
f_{p,q,n+m}(x) - (-q(x))^m f_{p,q,n-m}(x) &= \frac{\alpha^{n+m}(x) - \beta^{n+m}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} - (-q(x))^m \frac{\alpha^{n-m}(x) - \beta^{n-m}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
&= \frac{\alpha^{n+m}(x) - \beta^{n+m}(x) - (-q(x))^m \big(\alpha^{n-m}(x) - \beta^{n-m}(x)\big)}{\alpha(x) - \beta(x)}
\end{aligned}$$

et comme $\alpha(x)\beta(x) = -q(x)$, alors

$$\begin{aligned}
f_{p,q,n+m}(x) - (-q(x))^m f_{p,q,n-m}(x) &= \frac{\alpha^{n+m}(x) - \beta^{n+m}(x) - (\alpha(x)\beta(x))^m \big(\alpha^{n-m}(x) - \beta^{n-m}(x)\big)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
&= \frac{\alpha^{n+m}(x) - \beta^{n+m}(x) - \big(\alpha^n(x)\beta^m(x) - \alpha^m(x)\beta^n(x)\big)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
&= \frac{\big(\alpha^m(x) - \beta^m(x)\big) - \big(\alpha^n(x) + \beta^n(x)\big)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
&= \frac{\alpha^m(x) - \beta^m(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \big(\alpha^n(x) + \beta^n(x)\big) \\
&= f_{p,q,n}(x) l_{p,q,n}(x).
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.6.5. *Pour* $n \geq 1$,

$$l_{p,q,n}(x) = f_{p,q,n+1}(x) + q(x) f_{p,q,n}(x).$$

Théorème 3.6.6. *Pour* $n \geq 0$

$$f_{p,q,2n}(x) = f_{p,q,n}(x) l_{p,q,n}(x).$$

3.7 Un $q-$analogue de polynôme de Fibonacci

Le $q-$analogue est une extention utilisée dans plusieurs domaines mathématiques, impliquant un nouveau paramètre q et qui se spécialise en théorie original lorsque l'on prend la limite quand q tend vers 1.
Rappelons quelques notions et définitions du coefficient $q-$binomial, où q est un nombre différent de 1. Notons par

$$\Big[n\Big]_q = 1 + q + ... + q^{n-1}, \ \Big[n\Big]_q ! = \Big[1\Big]_q \Big[2\Big]_q ... \Big[n\Big]_q$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\Big[n\Big]_q !}{\Big[k\Big]_q ! \Big[n-k\Big]_q}.$$

Les nombres de Gauss $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ généralisent les coefficients binomiaux, ils convergent les binomiaux lorsque $q \longrightarrow 1$. Les relations récurrentes de $q-$binomial sont données par les formules suivantes

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ q \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

Maintenant nous allons proposer une famille $q-$analogue au Fibonacci notées $(F_n(q))$, définie à l'aide de la récurrence suivante

$$F_{n+1}(q) = F_n(q) + q^{n-1} F_{n-1}(q),$$

avec les conditions initiales $F_1(q) = F_2(q) = 1$. Par conséquent, on peut obtenir les résultats suivants

proposition 3.7.1. *Pour tout* $n \geq 1$, *les* $q-$*Fibonacci définis ci−dessus vérifiant la factorisation suivante*

$$F_{n+3}(q) + q^{2n-1} F_{n-1}(q) = \Big(1 + q^n + q^{n+1}\Big) F_{n+1}(q)$$

$$F_{2n+1}(q) - q^{n^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k}(q)$$

La version précédente à été généralisée par Carlitz en définant des polynômes $q-$analogue à l'aide de la récurrence suivante

$$f_{n+1}(x,q) = xf_{n+1}(x,q) + q^{n-1}f_{n+1}(x,q),$$

avec les conditions initiales $f_1(x,q) = 1$ et $f_2(x,q) = x$.
A l'aide des multiplications des séries entières, Carlitz avait obtenus plusieurs résultats et expressions de ces polynômes. En faite il a réussi la forme simple suivante

$$f_n(x) = \sum_{2r\leq n} \begin{bmatrix} n-r \\ r \end{bmatrix}_q q^{r(r-1)} x^{n-2r}.$$

Carlitz avait donné également la formule inverse dans ce cas, c$-$à$-$dire, l'expression de x^k en terme des polynômes $f_n(x,q)$.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS

Parmi les applications de la suite de Fibonacci, nous citons

4.1 Solutions d'équations au différence de Riccati

Nous étudions les solutions de deux types particuliers de l'équation au différence de Riccati $x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{-1+y_n}$ de sorte que leurs solutions sont associées aux nombres de Fibonacci. Pour des notions plus précises voir [4].

Considérons l'équation de différence de Riccati

$$x_{n+1} = \frac{a+bx_n}{c+dx_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

De toute évidence, en prenant $a = c = d = 1,\ b = 0$ et $a = d = 1,\ c = -1,\ b = 0$, l'équation (4.1), se transforme en équations suivantes :

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n},\ n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{-1+y_n},\ n \in \mathbb{N} \tag{4.3}$$

où les conditions initiales sont $x_0 \in \mathbb{R} - (-\dfrac{F_{m+1}}{F_m})_{m\geq 1}$ et $y_0 \in \mathbb{R} - (-\dfrac{F_{m+1}}{F_m})_{m\geq 1}$ et F_m est le nombre d'ordre m de Fibonacci. L'objectif de cette étude et les solutions d'équations (4.2) et (4.3).

Théorème 4.1.1. *Pour tout entier positif n, les solutions des équations* (4.2) *et* (4.3) *sont les suivantes :*
$(i)-$ *Pour* $x_0 \in \mathbb{R} - (\{\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}\} \cup (-\dfrac{F_{m+1}}{F_m})_{m\geq 1}), \quad x_n = \dfrac{F_n + F_{n-1}x_0}{F_{n+1} + F_n x_0}.$
$(ii)-$ *Pour* $y_0 \in \mathbb{R} - (\{\alpha, \beta\} \cup (-\dfrac{F_{m+1}}{F_m})_{m\geq 1}), \quad y_n = \dfrac{F_{-n} + F_{-(n-1)}y_0}{F_{n+1} + F_{-n}y_0}.$

Démonstration. Tout d'abord, ici, nous allons simplement prouver (ii) que (i) peut être pensé de la même manière. (ii) Nous allons prouver ce Théorème par induction. supposons maintenant que

$$y_k = \frac{F_{-k} + F_{-(k-1)}y_0}{F_{k+1} + F_{-k}y_0}, \tag{4.4}$$

pour $k = 0$,

$$\frac{F_0 + F_1 y_0}{F_{-1} + F_0 y_0} = \frac{0 + 1y_0}{1 + 0y_0} = y_0,$$

est vrai pour tous les entiers positifs k. Par suite, nous devons montrer que c'est vrai pour $k + 1$ prise dans le compte $F_{-n} = F_{-n+2} - F_{-n+1}$ et (4.4), nous écrivons

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \frac{1}{-1 + y_k} \\ &= \frac{F_{-k} y_0 + F_{-(k+1)}}{F_{-k} - F_{-(k+1)} + (F_{-(k-1)} - F_{-k}) y_0} \\ &= \frac{F_{-(k+1)} + F_{-k} y_0}{F_{-(k+2)} + F_{-(k+1)} y_0}. \end{aligned}$$

Qui met fin à l'induction et à la preuve. □

4.2 Les équations de diffusion fractionnaire

Ces dernière années, de nombreuses études ont été développées sur les équations aux dérivées partielles fractionnaires. Les equations aux dérivées partielles fractionnées se rencontrent dans de nombreux problèmes physiques et d'ingénierie, tels que les équations de diffusion d'ordre fractionnaire qui sont des généralisations des équations de diffusion classique.

La méthode de collocation de Fibonacci basée sur les polynôme de Fibonacci est présenté pour résoudre les équations de diffusion fractionnaires avec des coefficients variables. Les dérivées fractionnaires sont d'écrits au sens se Caputo. Pour des raisons d'études, dans cette partie nous nous intéressons que par un exemple démonstratif sans citer la notion de cette méthode. Pour des notions plus précises voir [3].

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire avec des coefficients variables :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c(x)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + q(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 \le t \le \tau, \quad 1 < \alpha < 2 \tag{4.5}$$

avec des conditions

$$u(x,0) = K(x), \quad 0 < x < l,$$

et les conditions aux bords

$$\begin{aligned} u(0,t) &= g_0(t), \quad 0 < t \le \tau. \\ u(l,t) &= g_1(t), \quad 0 < t \le \tau, \end{aligned}$$

où $c(x) \neq 0$ est le coefficient de diffusion, $q(x,t)$, $K(x)$, $g_0(t)$ *et* $g_1(t)$ sont des fonctions connues, et la fonction $u(x,t)$ est inconnue.

En développant la méthode de collocation Fibonacci, nous obtiendrons la solution approximative de l'équation (4.5) sous la forme d'une série de Fibonacci

$$u_N(x,t) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_{mn} F_m(x) F_n(t),$$

où $a_{mn}; m, n = \overline{1, N}$ sont les coefficients inconnus de Fibonacci et $F_n(x),\ F_m(x)\,; m, n = \overline{1, N}$ sont les fonctions de Fibonacci définies par

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{[(n-1)\backslash 2]} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1}, \quad \left[\frac{n-1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n-2}{2} & , \ n \ pair \\ \frac{n-1}{2} & , \ n \ impair \end{cases}$$

où [.] désigne la partie entière.

4.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 4.2.1. *La définition de Caputo de la dérivée d'ordre fractionnaire est définie comme*

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad n-1 < \alpha < n,\ n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha > 1$ est l'ordre de dérivée, $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma. Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{N}$, l'opérateur différentiel de Caputo coincide avec l'opérateur différentiel habituel d'ordre entier. Pour la dérivée de Capotu :

$$D^{\alpha} x^{\beta} = \begin{cases} 0 & avec \quad \beta \in \mathbb{N}_0,\ et\ \beta < [\alpha] \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}, & avec \quad \beta \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N},\ \beta > [\alpha] \end{cases}$$

Nous utilisons également $\mathbb{N} = \{1, 2, 3...\}$ et $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. L'opérateur différentiel fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire.

Exemple 1.(Deghan 2006)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c(x) \frac{\partial^{1.8} u(x,t)}{\partial x^{1.8}} + q(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < 2$$

où $q(x,t) = (6x^3 - 3x^2)e^{-t}$, le coefficient de diffusion $c(x) = \Gamma(1.2)x^{1.8}$
avec la condition initiale

$$u(x,0) = x^2 - x^3, \quad 0 < x < 1$$

et les conditions aux bords

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0. \\ u(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

La solution exacte de ce problème est $u(x,t) = (x^2 - x^3)e^{-t}$
La figure 3. donne la comparaison entre la solution exacte **(a)** et la solution approchée **(b)** par le polynôme de Fibonacci pour $N = 5$.

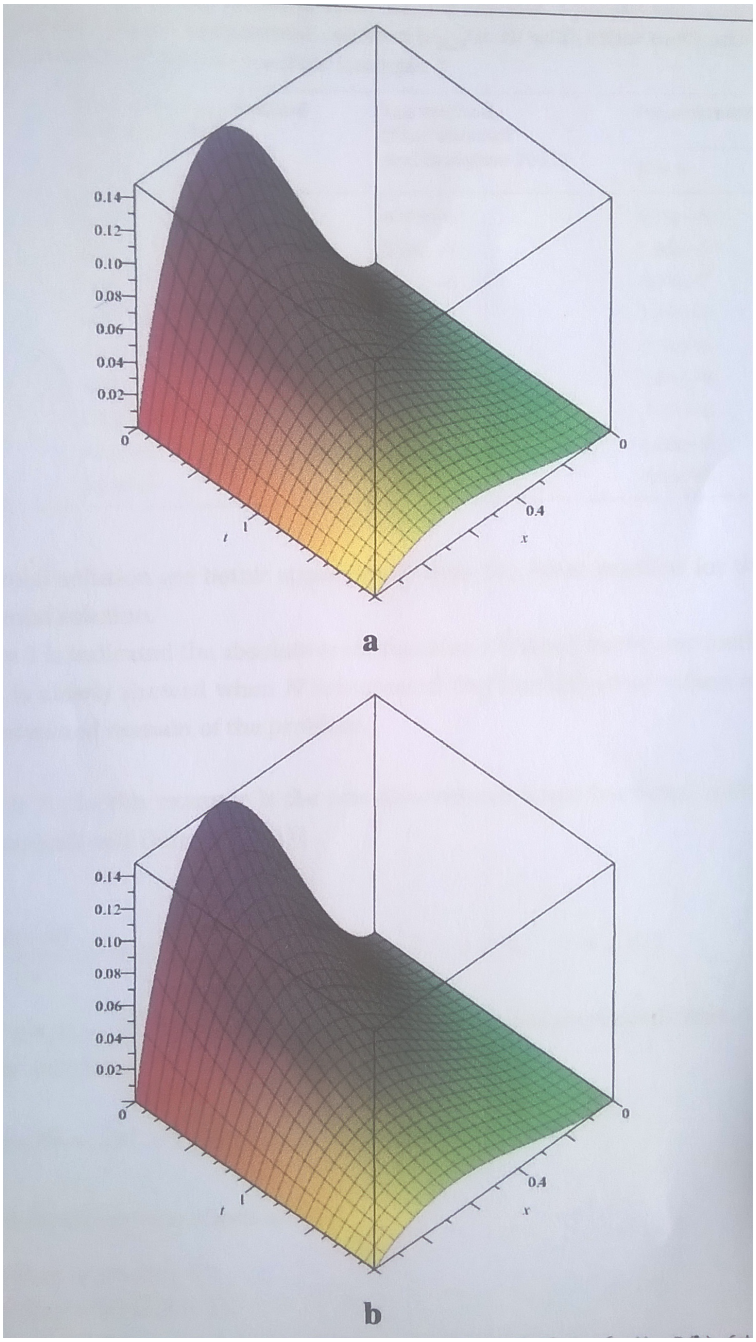


figure 3.

Exemple 2.(Saadatmandi et Deghan 2011)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c(x)\frac{\partial^{1.5} u(x,t)}{\partial x^{1.5}} + q(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 1 < t < 2$$

où $q(x,t) = (x^2+1)cos(t+1) - 2xsin(t+1)$, le coefficient de diffusion $c(x) = \Gamma(1.5)x^{0.5}$ avec la condition initiale

$$u(x,0) = (x^2+1)sin(1), \quad 0 < x < 1$$

et les conditions aux bords

$$\begin{aligned} u(0,t) &= sin(t+1). \\ u(1,t) &= 2sin(t+1). \end{aligned}$$

La solution exacte de ce problème est donnée par $u(x,t) = (x^2+1)sin(t+1)$
Figure 4. Comparaison des fonctions d'erreur absolue $|u(x,t) - u_N(x,t)|$ de la solution polynomiale de Fibonacci pour $N = 8$ **(a)** et $N = 12$ **(b)**.

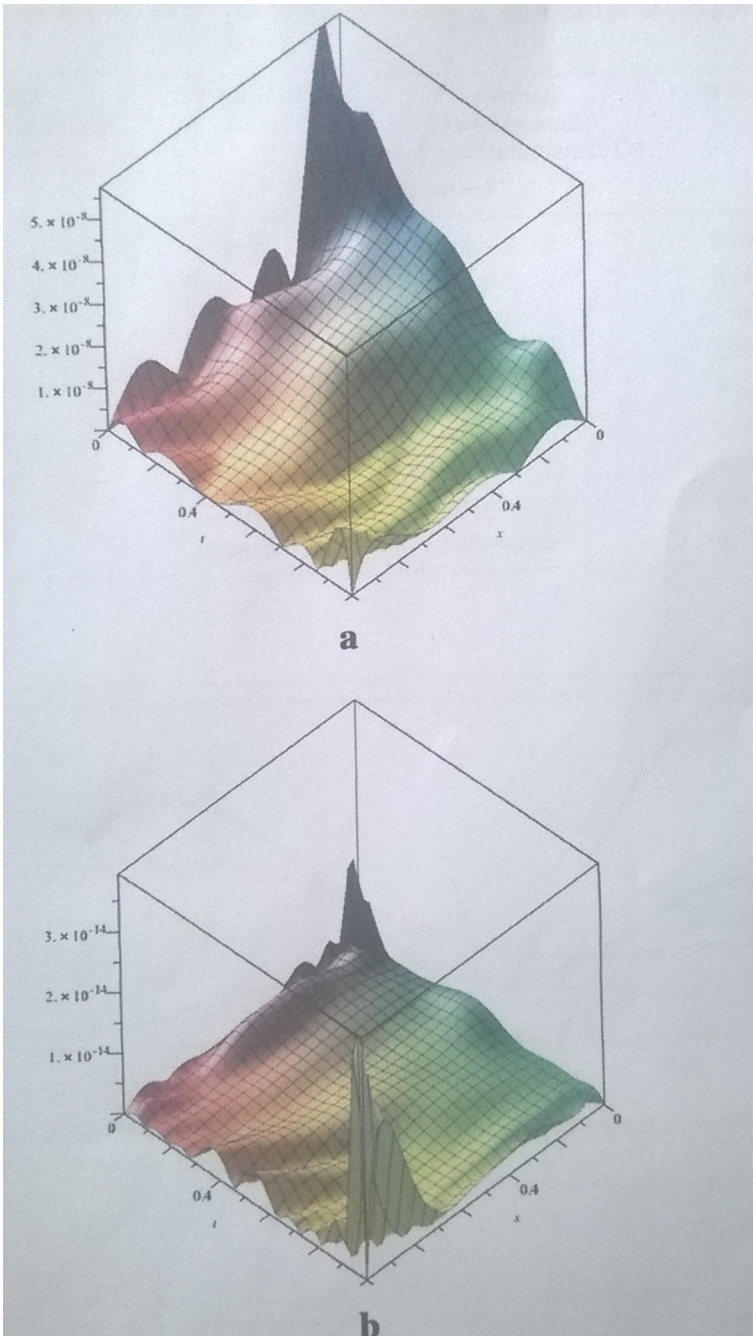


figure 4.

CONCLUSION

La suite de Fibonacci est récurrente linéaire d'ordre deux trés riche en propriétés. Par conséquent, on attend de l'étude de cette suite de nombreux résultats. En effet, dans le domaine des mathématiques on trouve beaucoup de chercheurs intéressés par cette suite ou ils travaillent sur d'autres problèmes de suites récurrentes linéaires référés toujours à cette suite.

Parmi les applications de ces nombres, la résolution des équations à dérivées partielles, les équations algébriques et la théorie des graphes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amara Hitta, *Cours d'algèbre et exercices corriges*, 2006.

[2] Ayse Nalli, Pentti Hauknen, *On generalized Fibonacci and Lucas polynomials*, ELSEVIER, 42, (2009), 3179−3186.

[3] Bahsi and Yalçinbas, *Numerical solutions and error estimations for the space fractional diffusion equation with veriable coefficients via Fibonacci collocation method*, Springer Plus, 2016.

[4] Durhasan T Tollu, Yasin Yarlik and Necati Taskara, *On the solutions of two special types of Ricatti difference equation Via Fibonacci numbers*, Advance in Difference Equations, 174, (2013).

[5] Farouk Boucekkine, *Du Triangle de Pascal aux séries Formelles.*

[6] Gwang Yeon, Mustafa Asci, *Some properties of the* $(p,q)-$*Fibonacci and* $(p,q)-$*Lucas polynomials*, Journal of Applied Mathematics, 2012.

[7] J.C.Mason, D.C.Handscomb, *CHEBYSHEV POLYNOMIALS*, 2002.

[8] L.Carlitz, *Fibonacci notes* 4 *:Fibonacci polynomials*, Fibonacci Quart. 13 (2) (1975), $97-103$.

[9] Thomas Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, 2001.