Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse combinatoire, Probabilités et applications

Thème

Etude du nombre chromatique de packing dans différents types de graphes

Par

BEZIOU Riham

Soutenu publiquement le 25/05/2026, devant le jury composé de :

Azeddine	BENKACI	MCB	U.Y.F-Médéa	Président
Rachid	LEMDANI	MCA	U.Y.F-Médéa	Directeur de mémoire
Noureddine	IKHLEF ESCHOUF	Professeur	U.Y.F-Médéa	Examinateur

Résumé

Ce travail porte sur l'étude du nombre chromatique de packing. Celui-ci correspond au plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets d'un graphe G de manière que, pour toute couleur i, deux sommets u et v ayant cette même couleur vérifient $d_G(u, v) > i$. Le nombre chromatique de packing de G, est noté $\chi_p(G)$. La principale contribution de ce travail concerne ensuite l'étude du nombre chromatique de packing du joint de deux graphes. Nous obtenons des résultats exacts pour différentes combinaisons de graphes particuliers, notamment les chaînes, les cycles, les graphes complets et les étoiles. Ces résultats mettent en évidence l'impact de la structure des graphes sur la valeur du nombre chromatique de packing après l'opération de joint.

Enfin, nous nous intéressons à la coloration de packing du prisme complémentaire appliqué à certaines familles particulières de graphes, en particulier les graphes friendship et moulin à vent. Pour ces classes de graphes, nous établissons des valeurs exactes accompagnées de démonstrations rigoureuses.

Mots clés: Nombre chromatique de packing, joint de graphes, prisme complémentaire, graphe friendship, graphe moulin.

Abstract

This work is devoted to the study of the packing chromatic number. It corresponds to the smallest number of colors needed to color the vertices of a graph G such that, for every color i, any two vertices u and v assigned the same color satisfy $d_G(u, v) > i$. The packing chromatic number of G is denoted by $\chi_p(G)$. The main contribution of this work concerns the study of the packing chromatic number of the join of two graphs. We obtain exact results for various combinations of particular graphs, including paths, cycles, complete graphs, and stars. These results highlight the impact of graph structure on the value of the packing chromatic number after the join operation.

Finally, we investigate the packing coloring of the complementary prism applied to certain specific families of graphs, particularly friendship graphs and windmill graphs. For these graph classes, we establish exact values accompanied by rigorous proofs.

Keywords: Packing chromatic number, joint graph, complementary prism, friendship graphs, windmill graph.

ملخص

يتناول هذا العمل دراسة العدد اللوني للتعبئة (Packing Chromatic Number). ويُمثّل هذا العدد أقلَّ عدد من الألوان اللازمة لتلوين رؤوس بيان G بحيث إنه، لكل لون i، فإن أي رأسين u و v يحملان اللون نفسه يحققان الشرط $d(u,v) > i$. يُرمز إلى العدد اللوني للتعبئة للبيان G بالرمز $\chi_p(G)$. تتمثل المساهمة الرئيسية لهذا العمل في دراسة العدد اللوني للتعبئة لعملية وصل بيانين. وقد حصلنا على نتائج دقيقة لعدة تراكيب من البيانات الخاصة، لا سيما المسارات، والدورات، والبيانات الكاملة، والنجوم. تُبرز هذه النتائج تأثير بنية البيانات على قيمة العدد اللوني للتعبئة بعد تطبيق عملية الوصل

وأخيرًا، نهتم بدراسة تلوين التعبئة للموشور المتمم المطبق على بعض العائلات الخاصة من البيانات، وبشكل خاص بيانات الصداقة (friendship graphs) وبيانات الطاحونة الهوائية (windmill graph). وبالنسبة لهذه الأصناف من البيانات، قمنا بتحديد قيم دقيقة مدعّمة ببراهين رياضية صارمة.

الكلمات المفتاحية : عدد اللوني للتعبئة، وصل الرسوم البيانية، المنشور المتمم، رسم الصداقة، رسم الطاحونة الهوائية.

Remerciements

Avant tout, je remercie **ALLAH,** le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Rachid LEMDANI**, mon directeur de mémoire pour son encadrement précieux, ses conseils avisés, sa disponibilité et son soutien tout au long de la réalisation de ce mémoire.Je le remercie sincèrement pour sa patience, son sérieux scientifique ainsi que pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je tiens à remercier Monsieur **Azeddine BENKACI**,
pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement le membre du jury, Mr. **Noureddine IKHLEF-ESCHOUF** ,
d'avoir accepté d'examiner ce travail et pour l'intérêt qu'ils lui portent.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement ma famille pour son soutien moral, ses encouragements et sa présence à chaque étape de mon parcours.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à mes amis pour leur aide et leurs encouragements.

Enfin, à toutes les personnes qui ont participé à l'aboutissement de ce travail, je leur adresse mes sincères remerciements.

Dédicace

À **mes très chers parents**

Qui ont toujours été à mes côtés par leur amour, leurs sacrifices et leurs prières.

Votre soutien et votre confiance ont été ma force tout au long de ce parcours.

Que **ALLAH** vous protège et vous accorde santé, bonheur et longue vie.

À mes chers frères : **Islem, Ferass et Abdellah**.

Pour leur affection, leurs encouragements et leur soutien précieux.

Je vous remercie pour tous les moments de joie et d'entraide partagés.

À ma chère cousine **Elaa**,

Pour sa présence, sa gentillesse et son soutien moral.

À toutes mes familles :

BEZIOU et **SEMMANA**, sans exception,

En témoignage de mon amour et de mon respect.

À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail et à tous mes amis.

À tous, je dédie ce travail.

Table des matières

Résumé II

Abstract III

ملخص IV

Table des figures X

Introduction XII

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes **1**

1.1 Concepts fondamentaux 1

1.1.1 Graphe et sa présentation 1

1.1.2 Graphe non orienté 2

1.1.3 Graphe simple 2

1.1.4 Multigraphe 2

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet 3

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre 4

1.1.7 Chaîne et Cycle 4

1.1.8 Quelques graphes particuliers 5

1.1.9 La couronne d'un graphe 14

1.1.10 La couronne voisinage de deux graphes 15

1.1.11 Joint de deux graphes 15

1.1.12 Invariants de graphes 16

1.2 Coloration des sommets 18
1.2.1 Le nombre chromatique 18
1.2.2 Bornes sur le nombre chromatique 19

2 Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing 20
2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing 20
2.1.1 i-packing 21
2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers 21
2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing 23
2.1.4 Coloration de packing pour les arbres 23
2.1.5 Coloration de packing de la couronne d'un graphe 25
2.1.6 La couronne d'une chaîne 25
2.1.7 La couronne d'un cycle 26

3 Détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes 28
3.1 Coloration de packing du Joint de deux graphes 28
3.1.1 Coloration de packing du joint d'une chaîne et d'un cycle 29
3.1.2 Coloration de packing du joint de deux chaînes 30
3.1.3 Coloration de packing du joint de deux cycles 31
3.1.4 Coloration de packing du joint d'un graphe complet et une chaîne . . 32
3.1.5 Coloration de packing du joint de deux graphes complets 33
3.1.6 Coloration de packing du joint d'un graphe complet avec un cycle . . 34
3.1.7 Coloration de packing du joint de deux étoiles 35
3.1.8 Coloration de packing du joint d'une étoile avec une chaîne 36
3.1.9 Coloration de packing du joint d'une étoile avec un cycle 38
3.2 Coloration de packing de prisme complémentaire de quelque types de graphes 40
3.2.1 Coloration de packing du graphe prisme complémentaire de Friendship 41
3.2.2 Coloration de packing de prisme complémentaire du graphe Moulin à vent 44

Conclusion et perspectives **48**

Table des figures

1.1.1 Graphe simple G 2

1.1.2 Un multigraphe G 3

1.1.3 Un cycle C_6 et une roue W_7 à droite..... 5

1.1.4 Un graphe G, un sous graphe et un sous graphe partiel à droite..... 6

1.1.5 Un graphe complet K_6..... 6

1.1.6 Un cycle C_4 et son complémentaire 7

1.1.7 Un graphe G, 4−régulié 8

1.1.8 Un graphe biparti 9

1.1.9 Un graphe biparti complet $K_{3,3}$..... 10

1.1.10 Un graphe connexe 11

1.1.11 Un sommet d'articulation 11

1.1.12 Un arbre T 12

1.1.13 Une forêt T 13

1.1.14 Une étoile $K_{1,4}$..... 13

1.1.15 Une étoile double $S_{3,2}$..... 14

1.1.16 La subdivision d'un graphe G..... 14

1.1.17 La couronne de C_4..... 15

1.1.18 La couronne voisinnage $C_4 \bigstar P_2$..... 15

1.1.19 Le graphe joint de P_3 et P_5..... 16

1.1.20 Une clique engendrée par $\{B, C, D, E\}$..... 16

1.1.21 Un recouverement de G 18
2.1.1 Un graphe G et un $T-$ajout du sommet v 23
2.1.2 Les plus petits arbres avec $\chi_p(T) = 4$ 24
2.1.3 La couronne de P_n 25
2.1.4 Une coloration de packing de $Cr(P_{10}), Cr(P_2)$ et $Cr(P_4)$ 26
2.1.5 La couronne de C_n 26
3.1.1 Coloration de packing de $P_9 + C_6$ 30
3.1.2 Coloration de packing de $P_9 + P_7$ 31
3.1.3 Coloration de packing $C_9 + C_7$ 32
3.1.4 Coloration de packing $K_4 + P_7$ 33
3.1.5 Coloration de packing de $K_4 + K_3$ 34
3.1.6 Coloration de packing $K_4 + C_6$ 35
3.1.7 Coloration de packing $K_{1,6} + K_{1,4}$ 36
3.1.8 Coloration de packing $K_{1,4} + P_5$ 38
3.1.9 Coloration de packing $K_{1,4} + C_5$ 40
3.2.1 Graphe $G\overline{G}$ 41
3.2.2 Graphe F_4 42
3.2.3 Coloration de packing $F_4\overline{F_4}$ 44
3.2.4 Graphe Moulin à vent C_8^3 45
3.2.5 Coloration de packing de graphe C_8^3 45
3.2.6 Coloration de packing de $C_4^3\overline{C_4^3}$ 47

Introduction

La théorie des graphes constitue aujourd'hui une branche essentielle des mathématiques discrètes. Elle offre un cadre puissant pour la modélisation et l'analyse de nombreux problèmes issus de domaines variés tels que les réseaux informatiques, les réseaux routiers, les transports, la planification des emplois du temps, l'électronique, la mécanique du solide ou encore les télécommunications. Grâce à sa richesse théorique et à ses nombreuses applications, elle occupe une place importante dans la recherche scientifique moderne.

Parmi les problèmes fondateurs de cette discipline figure le célèbre problème des quatre couleurs. Celui-ci consiste à déterminer s'il est possible de colorer toute carte géographique à l'aide de seulement quatre couleurs de sorte que deux régions voisines possèdent des couleurs différentes. En théorie des graphes, cette question revient à savoir si tout graphe planaire peut être coloré avec quatre couleurs de manière que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs distinctes. Formulé sous forme de conjecture par F. Guthrie en 1852, ce problème a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs pendant plus d'un siècle. Une première démonstration positive fut proposée en 1977 par Appel, Haken et Koch à l'aide de calculs informatiques considérables. Par la suite, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas ont établi une preuve plus concise, tout en conservant l'assistance de l'ordinateur. Malgré sa résolution, ce problème demeure une source d'inspiration importante dans le domaine de la coloration des graphes.

La littérature scientifique recense aujourd'hui plusieurs variantes de coloration des graphes, définies selon les éléments concernés du graphe: sommets, arêtes ou faces..., et selon diverses contraintes supplémentaires. De nombreux résultats théoriques ont été obtenus dans ce domaine. Parmi les références majeures, l'ouvrage de Jensen et Toft, Graph Coloring

Problems, rassemble une grande partie des résultats connus ainsi que plusieurs questions ouvertes relatives aux différentes colorations de graphes.

Dans ce contexte, Goddard, Hedetniemi, Harris et Rall ont introduit en 2003 la notion de coloration de packing. Cette coloration consiste à attribuer des couleurs aux sommets d'un graphe G de manière que, si deux sommets u et v reçoivent la même couleur, alors la distance entre eux soit strictement supérieure à cette couleur. Le plus petit nombre de couleurs permettant une telle coloration est appelé nombre chromatique de packing et est noté $\chi_p(G)$.

Le présent mémoire est consacré à l'étude de cet invariant pour différentes classes de graphes. Après une introduction générale, le travail est structuré en trois chapitres.

Le premier chapitre présente les notions fondamentales de la théorie des graphes ainsi que les principales définitions et notations utilisées dans ce mémoire. Nous y introduisons également la notion de coloration propre et quelques résultats classiques concernant cet invariant.

Le deuxième chapitre est consacré à la coloration de packing des graphes. Nous y exposons les définitions essentielles, les principales propriétés ainsi qu'un ensemble de résultats déjà établis dans la littérature scientifique.

Enfin, **le troisième chapitre** contient nos principales contributions. Nous y étudions le nombre chromatique de packing du joint de deux graphes en considérant plusieurs familles particulières, notamment les chaînes, les cycles, les graphes complets et les étoiles. Nous établissons des résultats exacts pour différentes combinaisons de ces graphes et analysons l'influence de leur structure sur la valeur du nombre chromatique de packing. Nous nous intéressons également à la coloration de packing du prisme complémentaire.

appliqué à certaines familles spécifiques de graphes, en particulier les graphes friendship et moulin à vent. Tous les résultats obtenus sont accompagnés de démonstrations détaillées ainsi que de figures illustratives réalisées à l'aide du logiciel Geogebra.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus et proposant plusieurs perspectives de recherche pour des travaux futurs.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Ce chapitre expose certains concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions essentielles utilisées tout au long de ce travail de recherche. Ensuite, nous aborderons quelques paramètres de coloration que nous avons analysés.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Graphe et sa présentation

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G; noté par $n\ (G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G; noté par $m\ (G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u, v) noté par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.*

1.1.2 Graphe non orienté

Définition 1.1.2 *Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une « arête ».*

1.1.3 Graphe simple

Définition 1.1.3 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (deux arêtes distinctes joignantes la même paire de sommets). La Figure* 1.1.1 *illusre un graphe simple $G = (V, E)$ où$V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{ab, ac, ae, be, ce, cd, de\}$.*

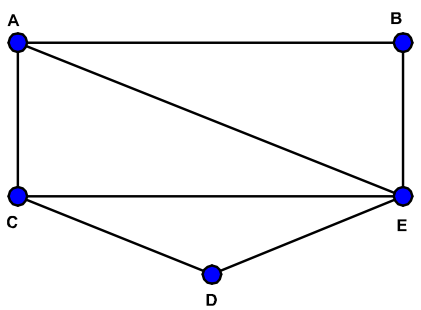


Figure 1.1.1. *Graphe simple*

1.1.4 Multigraphe

Définition 1.1.4 *Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets ainsi que des boucles . La Figure* 1.1.2 *illustre un multigraphe.*

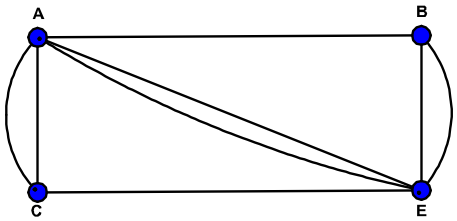


Figure 1.1.2. Multigraphe

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet

Définition 1.1.5 *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour un sommet v de G, le voisinage ouvert de v est*

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}.$$

Le voisinage fermé de v est défini par

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v).$$

le voisinage fermé de S est

$$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[S].$$

Le degré d'un sommet dans un graphe simple est la taille de son voisinage ouvert. Soit $v \in V(G)$, le degré de v est noté par

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Le degré minimum d'un graphe est le degré minimum de tous ses sommets, noté par

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Par exemple pour le graphe G de la Figure 1.1.2*, le voisinage ouvert du sommet A est $N_G(A) = \{B, C, E\}$ et son voisinage fermé est $N_G[v] = \{A, B, C, E\}$. Le graphe G n'a pas de sommets isolés. Le degré minimum du G est donc $\delta(G) = 3$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 5$.*

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre

Soit u et v deux sommets d'un graphe G.

Définition 1.1.6 *On appelle distance entre u et v, notée $d\ (u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignante u et v.*

L'excentricité d'un sommet v dans G est: $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelée un centre.

Le diamètre de G, noté diam (G), est égal $\max\{exc(v) : v \in V\}$.

Par exemple pour le graphe $G(V, E)$ de la Figure 1.1.2*, $d(A, C) = 1$, $exc(B) = 2$ et $diam(G) = 2$.*

1.1.7 Chaîne et Cycle

Définition 1.1.7 *Une chaîne joignante deux sommets x et y dans G est une suite de sommets et d'arêtes telle que la première arête de la suite est incidente à x, la dernière arête de la suite est incidente à y et chaque arête intermédiaire de la suite est adjacente à la précédente par une de ses extrémités.*

Définition 1.1.8 *Une chaîne est simple si la séquence qui la constitue ne parcourt pas plusieurs fois la même arête.*

Une chaîne est élémentaire si la séquence qui la constitue ne parcourt pas plusieurs fois le même sommet.

On appelle cycle C_n dans un graphe G, une chaîne qui se referme.

Un cycle simple est une chaîne simple qui se referme.

Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire qui se referme.

Une roue, notée W_n, est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets du cycle.

La Figure 1.1.3 illustre un cycle C_{10} et une roue W_{11}.

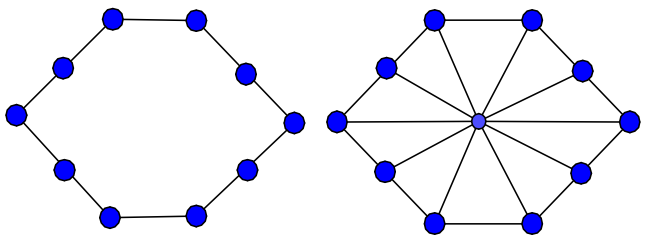


Figure 1.1.3. Un cycle C_{10} et une roue W_{11}.

1.1.8 Quelques graphes particuliers

Sous-graphes et graphes partiels

Définition 1.1.9 *Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.*

• *Le sous-graphe de G* engendré par $A \subseteq V$ est le graphe dans les sommets sont ceux de A et dont les arêtes sont celles de G ayant leurs deux extrémités dans A. Le sous graphe induit par A est le graphe $G[A] = (A, \{xy : xy \in E \text{ et } \{x, y\} \subset A\})$.

• *Le graphe partiel de G* défini par $W \subseteq E$ est le graphe dont ses sommets sont ceux de G et dont ses arêtes sont celles de W. La figure 1.1.4 illustre un sous-graphe et un sous-graphe partiel.

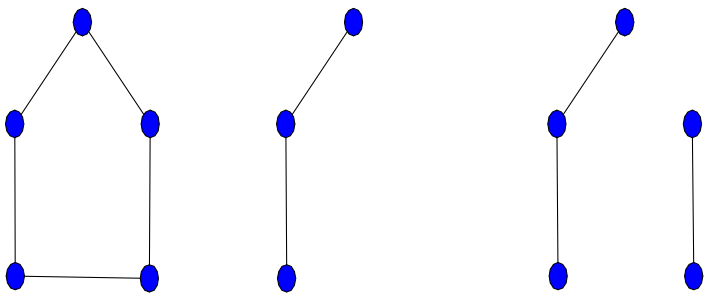


Figure 1.1.4. Un graphe G, un sous-graphe et un sous graphe partiel.

Graphe complet

Définition 1.1.10 *Un graphe complet, est un graphe dont toutes les paires de sommets sont adjacentes. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n et chaque sommet est de degré $n-1$. La Figure* 1.1.5 *illusre un graphe complet K_7.*

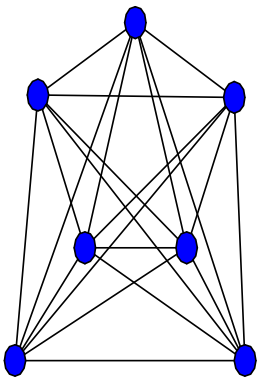


Figure 1.1.5. Un graphe complet K_7

Graphe complémentaire

Définition 1.1.11 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté* $\overline{G} = (V, \overline{E})$*, est défini par* $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ *et* $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u \in V\,(G)\,,\ v \in V\ \ (G)\ \ et\ uv\ \notin E(G)\}$*. La Figure* 1.1.6 *représente un graphe* C_4 *et son complémentaire.*

Remarque 1.1.1 *La superposition de* G *et* $\overline{G}$ *donne un graphe complet .*

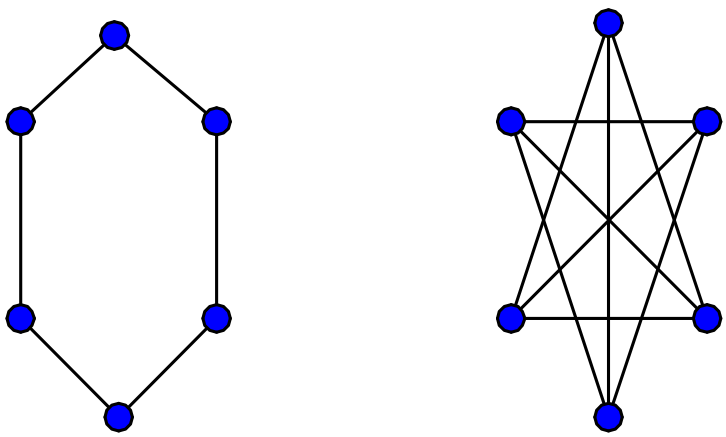


Figure 1.1.6. Un cycle C_6 et son complémentaire

Un graphe k-régulier

Définition 1.1.12 *Un graphe* G *est dit* $k-$*régulier si tous les sommets de* G *sont de degré* k*. La Figure* 1.1.7 *illustre un graphe* G *est* 4*-régulier .*

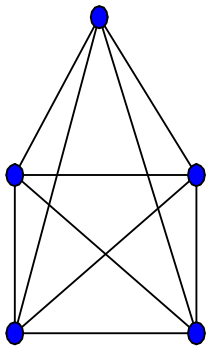


Figure 1.1.7. Un graphe G, 4-régulier

Un graphe discret (nul)

Définition 1.1.13 *Un graphe est dit discret si tous ses sommets sont non adjacents. Un graphe discret G est un graphe $(0)-$ régulier.*

Graphe biparti

Définition 1.1.14 *Un graphe $G = (V, U)$ est dit biparti si V peut se partager en deux sous ensembles V_1 et V_2, de sorte que tous les sommets d'un même ensemble sont non adjacents. La Figure* 1.1.8 *illustre un graphe biparti.*

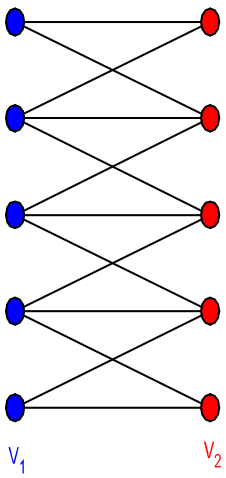


Figure 1.1.8. Un graphe biparti

Un graphe biparti complet

Définition 1.1.15 *Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de* V_1 *est adjacent à tous les sommets de* V_2*. Si* $|V_1| = p$ *et* $|V_2| = q$*, alors le graphe biparti complet est noté* $K_{p,q}$*,* $p, q \geq 1$*. Plus généralement, un graphe* $G = (V, E)$ *est dit* $k-$*parti* $(k \geq 2)$*, si* V *peut être partitionné en* k *stables* $\{V_1, V_2, ...V_k\}$*. Il est dit multiparti-complet si pour tout* $i \neq j$*, tout sommet de* V_i *est adjacent à tout sommet de* V_j*. La Figure* 1.1.9 *illustre un graphe biparti complet .*

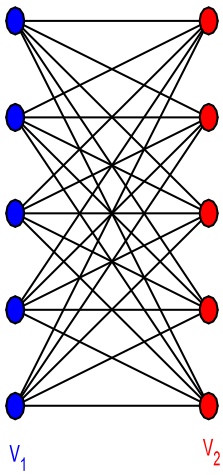


Figure 1.1.9 : Un graphe biparti complet $K_{5,5}$

Graphe connexe

Définition 1.1.16 *Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe connexe s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets du graphe. Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe complet.*

Une arête e est appelée un arête d'articulation (isthme du graphe G) si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G, (i.e, si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe). La Figure 1.1.10 *illustre un graphe connexe.*

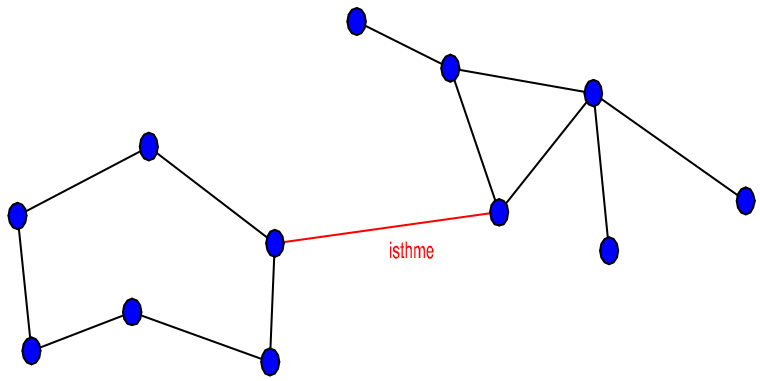


Figure 1.1.10. *Un graphe connexe*

Sommet d'articulation

Définition 1.1.17 *Un sommet v du graphe G est appelé un sommet d'articulation du graphe G si le graphe $(G - v)$ a plus de composantes connexes que G, (i.e, si G est connexe alors $(G - v)$ n'est pas connexe). La Figure* 1.1.11 *illustre un sommet d'articulation*

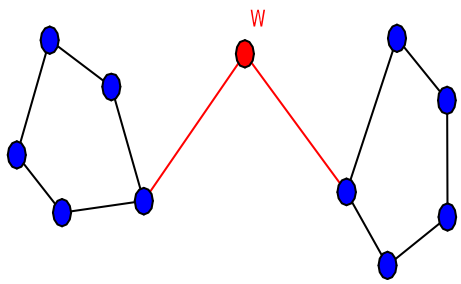


Figure 1.1.11. W est un sommet d'articulation

Graphe $h-$connexe

Définition 1.1.18 *Pour un graphe connexe G, la connectivité $k(G)$ est le nombre minimum de sommets de G dont la suppression déconnecte le graphe G ou le réduit à un sommet isolé. G est dit $h-$connexe si sa connectivité $k(G)$ est supérieure ou égale à h.*

Arbre

Définition 1.1.19 *On appelle arbre, et on note par T, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1, dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support. La hauteur h (T) de l'arbre T est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille. La Figure 1.1.12 représente un arbre.*

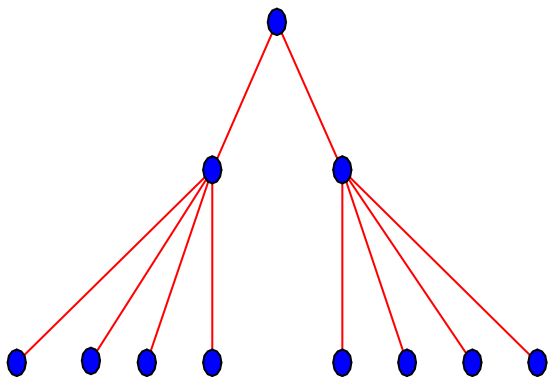


Figure 1.1.12. Un arbre T

Forêt

Définition 1.1.20 *Une forêt est un graphe sans cycle, chacun de ses composants connexes étant un arbre. La figure 1.1.13 représente une forêt.*

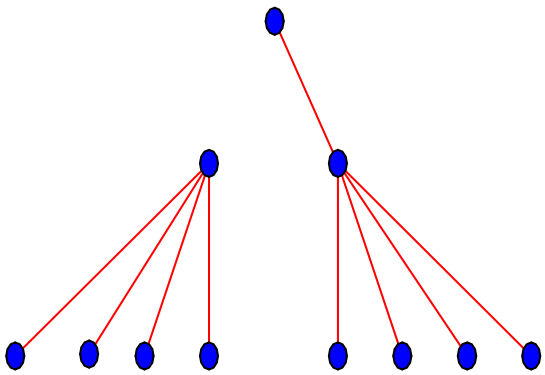


Figure 1.1.13. Une forêt T

Étoile

Définition 1.1.21 *On appelle étoile et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles. La Figure* 1.1.14 *illustre une étoile $K_{1,6}$.*

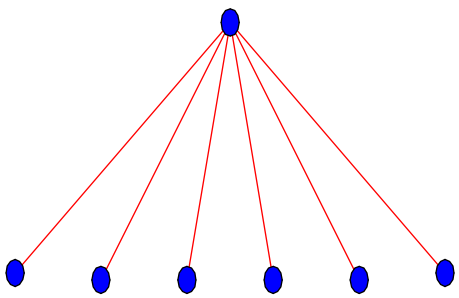


Figure 1.1.14. Une étoile $K_{1,6}$

L'étoile double

Définition 1.1.22 *L'étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendant d'une étoile $K_{1,p}$ au sommet non pendant d'une étoile $K_{1,q}$. La Figure* 1.1.15 *illustre une étoile double $S_{4,3}$.*

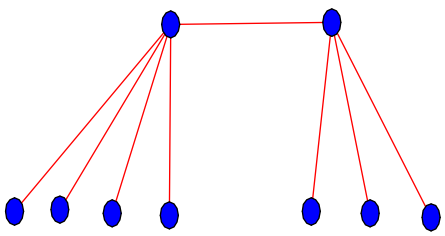


Figure 1.1.15. Une étoile double $S_{4,3}$

La subdivision

Définition 1.1.23 *Le graphe subdivisé $S(G)$ d'un graphe G, est le graphe obtenu en subdivisant chaque arête uv de G une seule fois (voir la Figure* 1.1.16*).*

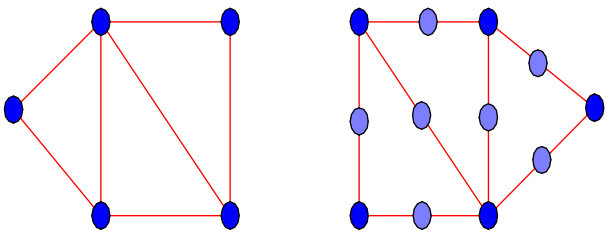


Figure 1.1.16. *La subdivision d'un graphe G*

1.1.9 La couronne d'un graphe

Définition 1.1.24 *La couronne d'un $G = (V, E)$, notée $Cr\ (G)$, est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Donc il est évident que l'ordre de Cr*

(G) *est égal à* $2|V|$. *(Voir la Figure* 1.1.17*).*

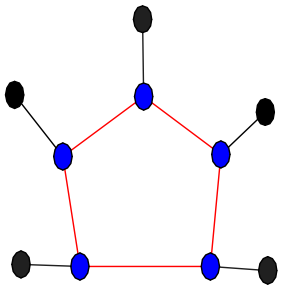


Figure 1.1.17. *La couronne de* C_5

1.1.10 La couronne voisinage de deux graphes

Définition 1.1.25 *Soit* G_1, G_2 *deux graphes de* n_1, n_2 *sommets et* m_1, m_2 *arêtes respectivement. Alors, la couronne voisinage* $G_1 \bigstar G_2$ *est le graphe obtenu par prendre* n_1 *copies de* G_2 *et pour tout* $v_i \in V(G_1)$; $i \in \{1,..., n_1\}$, *on relie les sommets de* G_2 *avec les voisins de* v_i. *La couronne voisinage* $G_1 \bigstar G_2$ *de* G_1 *et* G_2 *a* $n_1 + n_1 n_2$ *sommets et* $n_1(2n_2 + 1) + n_1 n_2$ *arêtes, et quand* $G_2 = K_1$, *le graphe* $G_1 \bigstar G_2$ *est appelé: le graphe splitting de* G_1, *et noté par* $S'(G_1)$. *(Voir la Figure* 1.1.18*).*

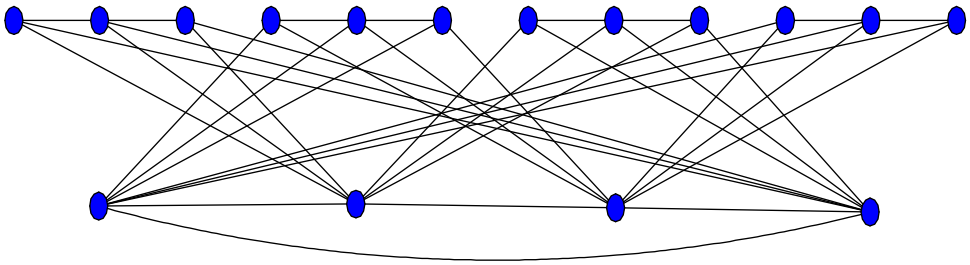


Figure 1.1.18. *La couronne voisinage* $C_4 \bigstar P_3$

1.1.11 Joint de deux graphes

Définition 1.1.26 *Soient* G_1 *et* G_2 *deux graphes. Le graphe* $G_1 + G_2$ *défini par l'ensemble de sommets* $V(G_1) \cup V(G_2)$ *et l'ensemble d'arêtes* $E(G_1) \cup E(G_2)$ *et l'ensemble de toutes les*

arêtes possibles joignant les sommets de $V(G_1)$ à $V(G_2)$, est appelé le graphe joint de G_1et G_2. (Voir la Figure 1.1.19*).*

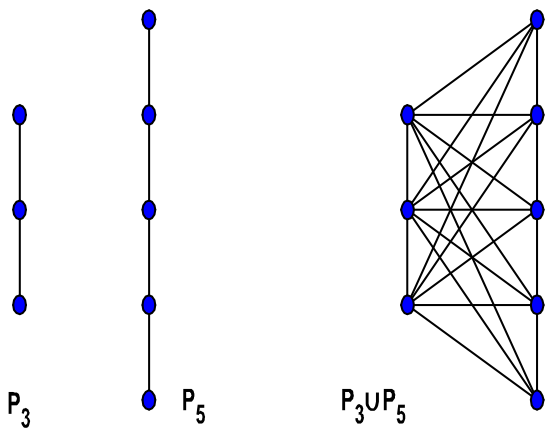


Figure 1.1.19. Le graphe joint de P_3 et P_5

1.1.12 Invariants de graphes

Clique

Définition 1.1.27 *Une clique dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents, ou est un sous-graphe complet. Le nombre de clique $\omega(G)$ de G, est le cardinal maximal d'une clique dans G. Voir la Figure* 1.1.20.

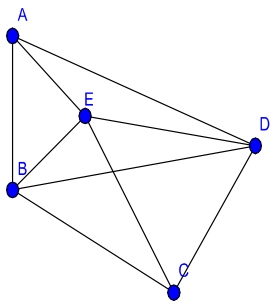


Figure 1.1.20. *Une clique engendrée par $\{B, C, D, E\}$*

Stable

Définition 1.1.28 *Etant donné un graphe simple G, on appelle stable de G un ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents.*

Un ensemble de sommets $S \subset G$, est dit stable maximal, si S n'est inclus dans aucun autre stable plus grand (pour l'inclusion). S est dit stable maximum, si S possède le plus grand cardinal parmi tous les stables du graphe. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité, et notée $\alpha(G)$.

Transversal

Définition 1.1.29 *Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble T de sommets de V qui couvre toutes les arêtes de G, i.e, chaque arête de G est incidente à au moins un sommet de T. Notons qu'un transversal existe pour tout graphe et si T est un transversal alors $V - T$ est un stable. Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal, et noté $\tau(G)$.*

Couplage

Définition 1.1.30 *Etant donné un graphe $G(V, E)$, on appelle un couplage M dans G un sous-ensemble d'arêtes de E deux a deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\alpha_0(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.*

Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tout les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G, sinon, x est dit insaturé par M .

Recouvrement

Définition 1.1.31 *Etant donné un graphe simple G (V, E) sans sommet isolé, on appelle recouvrement de G un ensemble R d'arêtes de E qui couvre tous les sommets de G.*

Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G. Les arêtes en couleur rouge de la Figure 1.1.21 *forme un recouvrement de cardinalité minimum de G.*

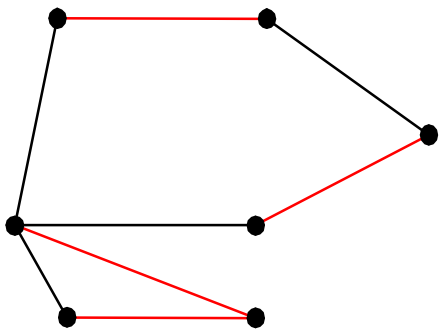


Figure 1.1.21. Un recouvrement de G

1.2 Coloration des sommets

Définition 1.2.1 *On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur a chaque sommet (est une fonction $c : V \to \{1, 2, .., k\}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes ($c(v) \neq c(w), \forall v, w \in V$ adjacents).

G est $k-$colorable si on peut colorer ses sommets avec k couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$. Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une $n-$coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G. D'où la définition du nombre chromatique de G.

1.2.1 Le nombre chromatique

Définition 1.2.2 *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires a une coloration propre des sommets de G.*

On le définit comme étant le plus petit entier k tel que G admet une $k-$coloration, il est dit aussi que G est $\chi(G)-$chromatique

- Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i.

Exemple 1.2.1 *$G = P_3$ est $2-$ colorable, $\chi(G) = 2$.*

Remarque 1.2.1 *Soit G un graphe d'ordre n. Il est clair que $1 \leq \chi(G) \leq n$.*

- *$\chi(G) = 1$ si et seulement si G est un graphe discret.*
- *$\chi(G) = n$ si et seulement si G est un graphe complet.*
- *Pour tout cycle C_n,*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2; & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3; & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.2.2 Bornes sur le nombre chromatique

Proposition 1.2.1 *[21] Si H est un sous-graphe de G, alors*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Proposition 1.2.2 *[21] Pour tout graphe G,*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G.

Proposition 1.2.3 *[17] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha}(G) \right\rceil \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

oú $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G, et $\Delta(G)$ est le degré maximum de G.

Proposition 1.2.4 *[2] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n,*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Proposition 1.2.5 *[16] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Chapitre 2

Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing

Dans ce chapitre, nous exposons la coloration de packing de certains graphes et nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique de la coloration de packing des graphes simples, à savoir: les chaînes, les cycles, les arbres, les graphes puissances.

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing

L'étude de la coloration de packing trouve principalement son origine dans les applications aux réseaux de télécommunication, notamment dans les différentes variantes du problème d'allocation de fréquences. Ce problème est apparu pour la première fois aux Etats-Unis à la suite de l'instauration de nombreuses règles relatives à l'attribution des fréquences de radiodiffusion par la Commission des Communications. En particulier, deux stations de radio utilisant une même fréquence doivent être suffisamment éloignées l'une de l'autre afin que le signal de l'une ne perturbe pas la réception de l'autre. Ainsi, la distance géographique séparant deux stations affectées à une même fréquence dépend directement de la puissance de leurs signaux de radio-diffusion.

2.1.1 i-packing

Définition 2.1.1 *Un sous ensemble de sommets V_i d'un graphe $G = (V, E)$ est dit $i-$packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de V_i est supérieure à i.*

Définition 2.1.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f : V \to \{1, ..., k\}$ est appelée coloration de packing d'ordre k si l'égalité $f\ (u) = f\ (v)$ implique $d\ (u, v) > f\ (u)$.*

L'ordre minimum d'une coloration de packing de G est appelé le nombre chromatique de packing, et il est noté par $\chi_p(G)$. La coloration de packing est donc une partition $P_k = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de V en k $i-$packing. Notons que toute coloration de packing est une coloration propre et donc $\chi(G) \leq \chi_p(G)$. De plus, pour tout sous graphe H d'un graphe G, on a $\chi_p(H) \leq \chi_p(G)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers

Tout graphe G d'ordre n admet une coloration de packing d'ordre n, il est possible d'affecter n entiers distincts, entre 1 et n, à chaque sommet de V. Ainsi, une borne supérieure naturelle serait l'ordre du graphe qui n'est pas forcément la meilleure. Les trois propositions suivantes donnent les valeurs exactes du nombre chromatiques de packing d'une chaîne, cycle et graphe complet.

Proposition 2.1.1 *[4] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_p(P_n) = 2$, et pour $n \geq 4$, $\chi_p(P_n) = 3$.*

l'affectation des couleurs $1, 2, 1, 3, ...$ aux sommets $u_1, u_2, ..., u_n$ de P_n représente une coloration de packing minimum.

Proposition 2.1.2 *[4] Pour les cycles C_n,*

$$\chi_p(C_n) = \begin{cases} 3; & \text{si } n \equiv 0\,[4] \text{ ou } n = 3, \\ 4; & \text{sinon.} \end{cases}$$

La coloration de packing optimale est donnée par l'affectation aux sommets $v_1, ..., v_n$ de C_n les séquences des couleurs:

$$\begin{aligned} 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3 \quad si\ n &= 4r, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,4 \quad si\ n &= 4r+1, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,4 \quad si\ n &= 4r+2, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,2,4 \quad si\ n &= 4r+3. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *[4] Soit G un graphe complet. Alors $\chi_p\ (K_n) = n$.*

Les propositions suivantes donnent quelques bornes sur le nombre chromatique de packing d'un graphe quelconque.

Proposition 2.1.4 *[4] Pour tout graphe G, $\chi_p(G) \leq \tau(G) + 1$, avec égalité si G a le diamètre deux.*

Proposition 2.1.5 *[4] Si G est un graphe biparti de diamètre 3. Alors*

$$\tau(G) \leq \chi_p(G) \leq \tau(G) + 1.$$

Proposition 2.1.6 *[4] Pour tout graphe G,*

$$\omega\,(G) \leq \chi\,(G) \leq \chi_p(G).$$

Proposition 2.1.7 *[4] Soit G un graphe. si $\chi(G) = \chi_p(G)$, alors $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.*

Proposition 2.1.8 *[4] Pour tout graphe connexe G, $\chi_p\,(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Proposition 2.1.9 *[4] Pour tout sous graphe H d'un graphe G,*

$$\chi_p(H) \leq \chi_p(G).$$

2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing

En utilisant le fait qu'un graphe G tel que $\chi_p(G) = 2$ ne contient pas P_4 comme sous-graphe induit et vérifie $diam(G) \leq 2$, alors d'aprés la Proposition **2.1.4**, on a forcément $\tau(G) = 1$ c.à.d que G est une étoile. D'où la caractérisation des graphes de nombre de packing chromatique égal à 2.

Proposition 2.1.10 *[4] Soit G un graphe $2-$connexe. Alors $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si $G = S(H)$ où H est un multi-graphe biparti ou G est le joint de K_2 et d'un stable. Pour un sommet v, on définit un $T-$ajout de v comme étant l'opération qui consiste à ajouter un sommet w_v, un stable X_v, l'arête vw_v et quelques arêtes entre $\{v, w_v\}$ et X_v. Voir la Figure* 2.1.1.

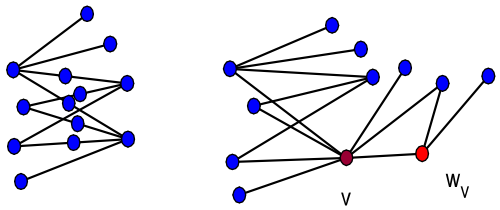


Figure 2.1.1. Un graphe G et un $T-$ajout du sommet v

Proposition 2.1.11 *[4] Soit G un graphe. $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si G peut être formé en prenant un certain multigraphe biparti H avec bipartition (V_2, V_3), en subdivisant chaque arête exactement une fois, en ajoutant des feuilles à certains sommets dans $V_2 \cup V_3$, puis en effectuant un seul T-ajout à certains sommets de V_3.*

2.1.4 Coloration de packing pour les arbres

Nous nous intéressons aux arbres avec un nombre de coloration de paking très grand. Pour cela, il est nécessaire d'examiner les petits cas. Un arbre de diamètre 2 (étoile) a un nombre chromatique de packing égal à 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique de packing 3. Le cas d'un arbre de diamètre 4 est plus compliqué, mais **Goddard et al** [4]

ont pu donner une formule explicite basée sur le sommet central et leurs voisins de degré 1, 2 et 3 et de degré supérieur ou égal à 4. Pour cela on définit un sommet petit s'il est de degré inférieur ou égal à 3 et un sommet grand s'il est de degré supérieur ou égal à 4.

Soit T un arbre de diamètre 4 avec un sommet central v. Pour $i = 1, 2, 3$, soit n_i le nombre de voisins de v de degré i et soit L le nombre de grands voisins de v, alors nous avons la proposition suivante:

Proposition 2.1.12 *[4] Soit T un arbre de diamètre 4. Si $L = 0$, alors*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} 4; & si \quad n_3 \geq 2 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3; & sinon. \end{cases}$$

et si $L > 0$, alors

$$\chi_p(T) = \begin{cases} L+3; & si \quad n_3 \geq 1 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L+1; & si \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L+2; & sinon. \end{cases}$$

Proposition 2.1.13 *[4] L'ordre minimum d'un arbre avec $\chi_p(T) = 2$ est 2. Pour $\chi_p(T) = 3$ c'est 4 et pour $\chi_p(T) = 4$ c'est 8. En outre, P_4 est l'arbre unique de 4 sommets qui ont besoin de 3 couleurs. Les deux arbres de 8 sommets qui ont besoin de 4 couleurs sont:*

(*i*) *L'arbre de diamètre 4 avec $n_3 = 2$, $n_1 = 1$ et $L = n_2 = 0$, appelé A_8.*

(*ii*) *L'arbre de diamètre 5 où les deux sommets centraux ont le degré 3 et pour chaque sommet central 3 sommets voisins de degrés 1, 2 et 3 respectivement, appelé B_8. Voir la Figure 2.1.2.*

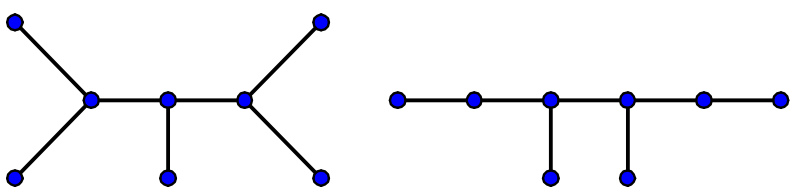


Figure 2.1.2. Les plus petits arbres avec $\chi_p\ (T) = 4$

Proposition 2.1.14 *[4] Soit T un arbre différent de P_4. Supposons T contient une chaîne $\{t\ u\ v\ w\}$ où t est de degré 1. u et v ont le degré 2. Alors: $\chi_p(T) = \chi_p(T - t)$.*

Théorème 2.1.1 *[4] Pour tout arbre T d'ordre n,*

$$\chi_p(T) \leq \frac{n+7}{4}$$

excepter quand $n = 4$ ou 8, et cette borne est atteinte.

2.1.5 Coloration de packing de la couronne d'un graphe

Dans cette section, nous exposons des valeurs exactes du nombre chromatique de packing des couronnes des chaînes et des cycles, déterminées par [19]. Des valeurs exactes, et des bornes sur les différentes classes de chenilles sont énoncées. On définit la couronne d'un graphe G, notée $Cr(G)$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de G.

2.1.6 La couronne d'une chaîne

Soit $P_n = \{x_1, ..., x_n\}$ une chaîne de longueur n et $Cr(P_n)$ la couronne de P_n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets $x_1, ..., x_n$ respectivement.

Voir la Figure 2.1.3

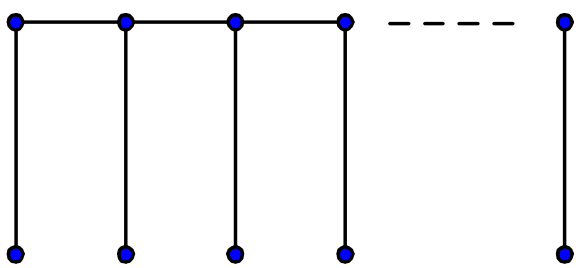


Figure 2.1.3. La couronne de P_n

Proposition 2.1.15 *[14] Pour tout entier n, $n \geq 10$,*

(1) *Pour* $n = 2$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 3$.

(2) *Pour* $n \in \{3, ..., 9\}$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 4$.

(3) *Pour* $n \geq 10$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 5$.

Voir la Figure 2.1.4

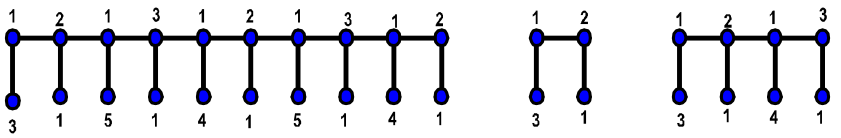


Figure 2.1.4. Une coloration de packing de $Cr(P_{10})$, $Cr(P_2)$ et $Cr(P_4)$

2.1.7 La couronne d'un cycle

Soit $Cr(C_n)$ la couronne d'un cycle $C_n = \{x_1, ..., x_n\}$ de longueur n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets de C_n. Voir la Figure 2.1.5

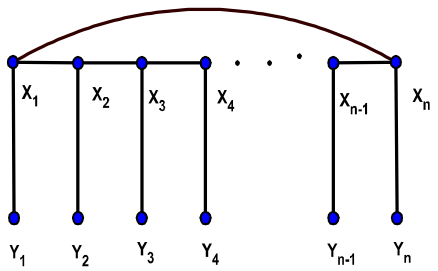


Figure 2.1.5. La couronne de C_n

Pour la couronne du cycle, il y'a un résultat identique à celui de la couronne d'une chaîne. Pour les autres valeurs de n, le résultat est donné par la proposition suivante:

Proposition 2.1.16 *[14] Pour tout entier $n \geq 3$,*

$$\chi_p\left(Cr\left(C_n\right)\right) = \begin{cases} 4; & si \quad n \in \{3,4\}, \\ 5; & sinon \end{cases}$$

Chapitre 3

Détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes

Ce chapitre étudie la coloration de packing des graphes joint de Quelques graphes particuliers. Il présente ensuite des résultats pour différentes combinaisons de graphes et analyse le prisme complémentaire de graphes spécifiques avec démonstrations.

3.1 Coloration de packing du Joint de deux graphes

Lemme 3.1.1 *Soient G et H deux graphes connexes tels que $\mid G \mid = n$ et $\mid H \mid = p$. Alors, $\chi_p(G+H) \geqslant n + p - \alpha(G+H) + 1$.*

Preuve. *Soit c une coloration de packing sur $G+H$. Notons que $diam(G+H) = 2$ et donc $\mid c^{-1}(i) \mid \leq 1$ pour tout $i \geqslant 2$. Par conséquent, une coloration de packing optimale consiste à assigner la couleur 1 aux maximums des sommets de $G+H$. D'autre part, la couleur 1 est utilisée uniquement soit aux sommets du sous-graphe G , soit à ceux du sous-graphe H, car tout sommet de G est adjacent à tous les sommets de H, et réciproquement, tout sommet de H est adjacent à tous les sommets de G. Par conséquent, l'enembles des sommets colorés par 1 forme un stable maximum dans $G+H$, c'est-à-dire $\alpha(G+H) =$*

$\max\{n,p\}$. *Donc, puisque* $\mid V(G+H) \mid = n+p$, *on obtient* $\chi_p(G+H) \geqslant \mid V(G+H) \mid -\alpha(G+H)+1$. ■

3.1.1 Coloration de packing du joint d'une chaîne et d'un cycle

Théorème 3.1.1 *Pour tous* $p,\ n \geqslant 3$,

$$\chi_p(P_n + C_p) = \begin{cases} n+p-\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor; & \text{si } p \leq n+2, \\ n+p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor; & \text{si } p > n+2. \end{cases}$$

Preuve. Notons par $u_i,\ i \in \{1,...,n\}$ les sommets de P_n et par $v_i,\ i \in \{1,...,p\}$ les sommets de $C_{p.}$

· Si l'on utilise la couleur 1 sur la chaîne P_n, alors on obtient $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ sommets de P_n colorés par 1. Par conséquent, $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ sommets de $P_n + C_p$ sont également colorés par 1.

· Si l'on utilise la couleur 1 sur le cycle C_p, alors $\left\lfloor \frac{p-2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ sommets de C_p sont colorés par 1, et par conséquent $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ sommets de $P_n + C_p$ sont également colorés par 1.

· Si $p \leq n+2$, alors $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \geqslant \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$, est ainsi $\alpha(P_n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$. D'après le lemme 3.1.1, on obtient $\chi_p(P_n + C_p) \geqslant n+p-(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1)+1 = n+p-\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

· Si $p > n+2$, alors $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$,est ainsi $\alpha(C_p) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$. D'après le lemme 3.1.1, on obtient $\chi_p(P_n + C_p) \geqslant n+p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$. ■

La Figure suivante montre une coloration de packing de $P_9 + C_6$.

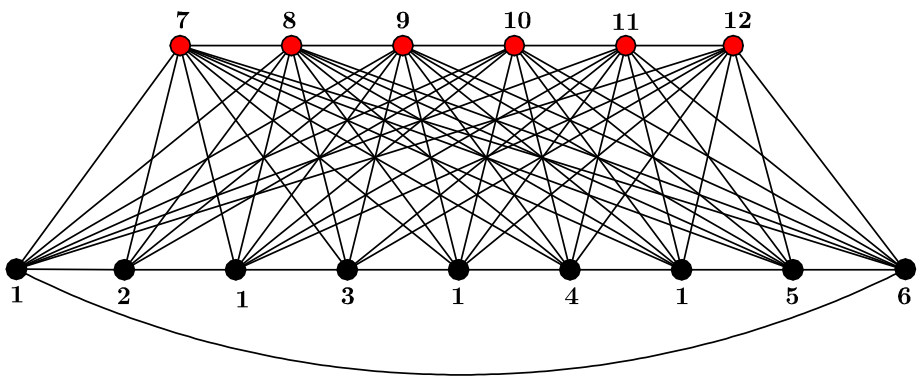


Figure 3.1.1. Coloration de packing de $P_9 + C_6$

3.1.2 Coloration de packing du joint de deux chaînes

Théorème 3.1.2 *Pour tous* p, $n \geqslant 2$, *tels que* $n \geqslant p$, $\chi_p(P_n + P_p) = n + p - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Preuve. Soit c une coloration de packing optimale sur $P_n + P_p$. Comme $n \geqslant p$ et c est une coloration de packing optimale, elle assigne la couleur 1 aux sommets de la chaîne P_n. Posons $c(v_i) = 1$ si $i = 2n+1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi, nous avons $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ sommets de P_n colorés par 1, c'est-à-dire $\alpha(P_n + P_p) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$. Les autres sommets de $P_n + P_p$ recoivent des couleurs différentes de 1, c-à-d $(n+p) - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1$ couleurs supplémentaires. D'après le lemme 3.1.1, on obtient la borne inférieure $\chi_p(P_n + P_p) \geqslant (n+p) - (\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1) + 1 = n + p - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Pour montrer que $\chi_p(P_n + P_p) \leqslant (n + p) - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, on construit une coloration $(n + p - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor)$-packing sur $P_n + P_p$ de la manière suivante. Colorons les sommets impairs de P_n par 1, c'est-à-dire qu'au plus $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ sommets de P_n sont colorés par 1. Les autres sommets de $P_n + P_p$ reçoivent des couleurs différentes de 1, c'est-à-dire $(n + p) - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1$ sommets colorés par d'autres couleurs. Au total, nous obtenons $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 + n + p - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1 = n + p =\mid V(P_n + P_p) \mid$. Par conséquent, $\chi_p(P_n + P_p) \leqslant (n + p) - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Il en découle que $\chi_p(P_n + P_p) = (n + p) - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Ainsi, le théorème est démontré. ■

Figure 3.1.2 montre une coloration de packing de $P_9 + P_7$.

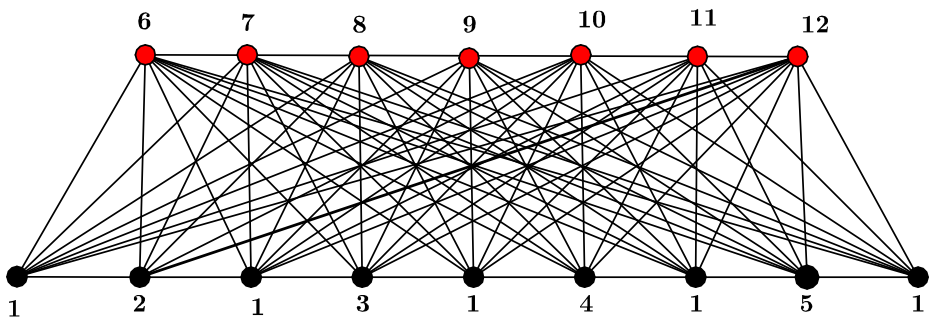


Figure 3.1.2. Coloration de packing de $P_9 + P_7$

3.1.3 Coloration de packing du joint de deux cycles

Théorème 3.1.3 *Pour tous* n, $p \geqslant 3$, *tels que* $n \geqslant p$, $\chi_p(C_n + C_p) = n + p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Preuve. Notons par u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de C_n et par v_i, $i \in \{1, ..., p\}$ les sommets de l'autre cycle C_p. Comme $diam(C_n + C_p) = 2$ et $n \geqslant p$, alors la couleur 1 est utilisée sur le cycle C_n, $\alpha(C_n)$ fois. Posons $c(u_i) = 1$ si $i = 2k+1$ et $1 \leqslant i \leqslant n-1$. On obtient alors $\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. D'après le lemme 3.1.1, on a $\chi_p(C_n + C_p) \geqslant n + p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Pour démontrer la borne supérieure, on construit une coloration $(n + p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1)$-packing de la manière suivante. Colorons les sommets impairs du cycle C_n par la couleur 1. Ainsi, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sommets de C_n sont colorés par 1, et ces mêmes sommets sont également colorés par 1 dans $C_n + C_p$. Les autres sommet de $C_n + C_p$, c'est-à-dire $n + p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, reçoivent des couleurs différentes de 1. Autrement dit, nous avons $n + p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ couleurs supplémentaires. Donc, le nombre total de couleurs utilisées sur $C_n + C_p$ est $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n + p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n + p$ ce qui correspond à l'ordre du graphe. Par conséquent, $\chi_p(C_n + C_p) \leqslant n + p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. On en déduit donc que $\chi_p(C_n + C_p) = n + p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. ■

La Figure suivante montre une coloration de packing de $C_9 + C_7$.

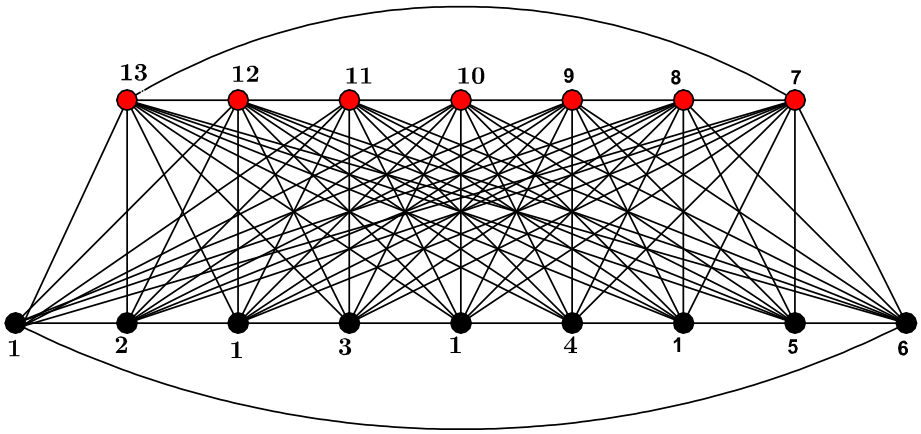


Figure 3.1.3. Le graphe $C_9 + C_7$ et sa coloration de packing

3.1.4 Coloration de packing du joint d'un graphe complet et une chaîne

Théorème 3.1.4 *Pour tous* $n \geqslant 1$ *et* $p \geqslant 2$, $\chi_p(K_n + P_p) = (n+p) - \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$.

Preuve. Notons par u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du graphe complet K_n et par v_i, $i \in \{1, ..., p\}$ les sommets de la chaine P_p. Dans le graphe joint $K_n + P_p$ chaque sommet de K_n est adjacent à tous les sommets de P_p. Par conséquent, $diam(K_n + P_p) = 2$. Ainsi, dans toute coloration de packing optimale, chaque couleur $i \geqslant 2$, ne peut être utilisée qu'une seule fois sur $K_n + P_p$. Par conséquent, dans une coloration de packing optimale, la couleur 1 est utilisée sur le plus grand nombre possible de sommets. Dans le graphe complet K_n tous les sommets sont adjacents entre eux. Par conséquent, un seul sommet peut recevoir la couleur 1. On obtient alors $\alpha(K_n) = 1$. Dans la chaîne P_p on peut colorer les sommets impairs avec la couleur 1, ce qui donne $\alpha(P_p) = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + 1$. Comme $\left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + 1 \geqslant 1$, la couleur 1 est utilisée dans le sous-graphe P_p, et donc $\alpha(K_n + P_p) = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + 1$. D'après le lemme 3.1.1, on obtient la borne inférieure $\chi_p(K_n + P_p) \geqslant \mid V(K_n + P_p) \mid - \alpha(K_n + P_p) + 1$. Le graphe $K_n + P_p$ possède $n + p$ sommets. Par conséquent $\chi_p(K_n + P_p) \geqslant (n+p) - \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$.

Pour démontrer la borne supérieure, on construit une coloration de packing de la manière suivante. On colore $\left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + 1$ sommets de P_p avec la couleur 1. Les autres sommets de $K_n + P_p$ reçoivent des couleurs différentes de 1. Le nombre de ces couleurs est $n + p - \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + 1$. On obtient ainsi une coloration $(n + p - \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor)$-packing. Donc $\chi_p(K_n + P_p) \leqslant (n + p) - \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$. En combinant cette borne supérieure avec la borne inférieure précédente, on conclut que $\chi_p(K_n + P_p) = (n + p) - \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$. ■

La Figure suivante illustre une coloration de packing du graphe $K_4 + P_7$.

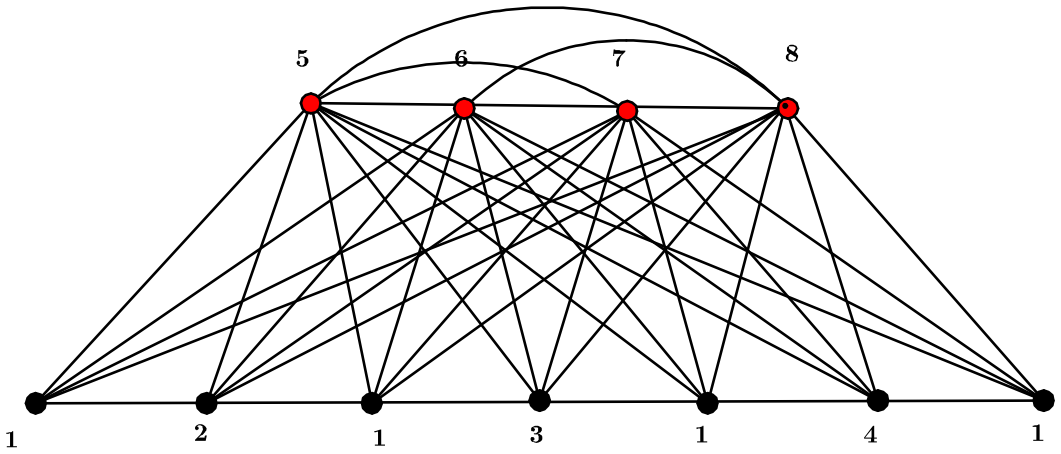


Figure 3.1.4. Coloration de packing de $K_4 + P_7$

3.1.5 Coloration de packing du joint de deux graphes complets

Proposition 3.1.1 *Soient K_n et K_p deux graphes complets avec $n \geqslant p \geqslant 1$. Alors $\chi_p(K_n + K_p) = n + p$.*

Preuve. Notons paru_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du graphe complet K_n et v_i, $i \in \{1, ..., p\}$, les sommets de l'autre graphe complet K_p. On sait que les sommets de K_n sont deux à deux adjacents, et de même pour K_p. Dans le graphe joint $K_n + K_p$, chaque sommet de K_n est adjacent à tous les sommets de K_p. Par conséquent, $K_n + K_p$ est lui-même un graphe complet, c'est-à-dire $K_n + K_p = K_{n+p}$. Dans un graphe complet, la distance entre deux sommets distincts est égale à 1. Il en découle que chaque sommet doit recevoir une couleur

distincte dans une coloration de packing. Le graphe $K_n + K_p$ possédant $n+p$ sommets, une coloration de packing nécessite au moins $n+p$ couleurs. Ainsi $\chi_p(K_n + K_p) = n + p$. ■

Un exemple d'une coloration de packing de $K_4 + K_3$ est donné par la Figure suivante.

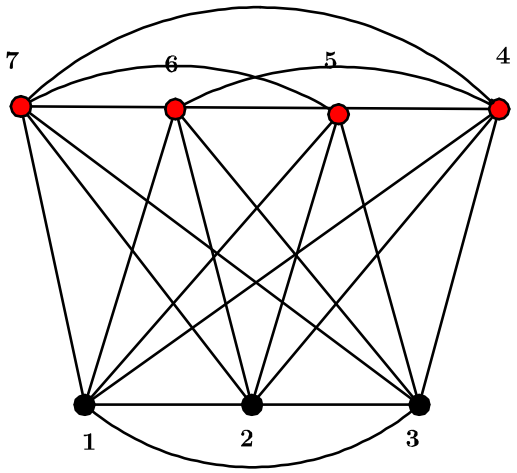


Figure 3.1.5. Coloration de packing de $K_4 + K_3$

3.1.6 Coloration de packing du joint d'un graphe complet avec un cycle

Théorème 3.1.5 *Pour tous $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 3$, $\chi_p(K_n + C_p) = n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$.*

Preuve. Notons par u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du graphe complet K_n et par v_i, $i \in \{1, ..., p\}$ les sommets du cycle C_p. Dans le graphe joint $K_n + C_p$ chaque sommet de K_n est adjacent à tous les sommets de C_p. Par conséquent, $diam(K_n + P_p) = 2$. Ainsi, dans toute coloration de packing, toute couleur $i \geqslant 2$ ne peut être utilisée qu'une seule fois. Par conséquent, une coloration de packing optimale consiste à attribuer la couleur 1 au plus grand nombre possible de sommets. Dans le graphe complet K_n tous les sommets sont deux à deux adjacents. Donc, un seul sommet de K_n peut recevoir la couleur 1. On obtient alors $\alpha(K_n) = 1$. Dans le sous-graphe engendré par le cycle C_p, on peut colorer tous

les sommets d'indice impair par la couleur 1, sauf le dernier sommet v_p. On obtient ainsi $\alpha(C_p) = \left\lfloor \frac{p-2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$. Comme $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \geqslant 1$ pour tout $p \geqslant 3$, la couleur 1 est utilisée dans le sous-graphe C_p. D'après le lemme 3.1.1, on obtient la borne inférieure $\chi_p(K_n + C_p) \geqslant |V(K_n+C_p)| - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1 = n+p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$. Ainsi, $\chi_p(K_n+C_p) \geqslant n+p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$. Pour montrer la borne supérieure, on construit une coloration $(n+p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1)$-packing comme suit. On colore $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ sommets de C_p par la couleur 1. Les autres sommets de $K_n + C_p$ reçoivent des couleurs distinctes de 1, c'est-à-dire que $n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ couleurs additionnelles, toutes différentes de 1, sont utilisées. Par conséquent, le nombre total de couleurs utilisées est $n+p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$, ce qui correspond exactement à notre coloration de packing. Donc, $\chi_p(K_n + P_p) \leqslant n+p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$. En combinant les deux inégalités, on obtient $\chi_p(K_n + C_p) = n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$. Ceci achève la démonstration du théorème. ■

La Figure suivante montre une coloration de packing de $K_4 + C_6$

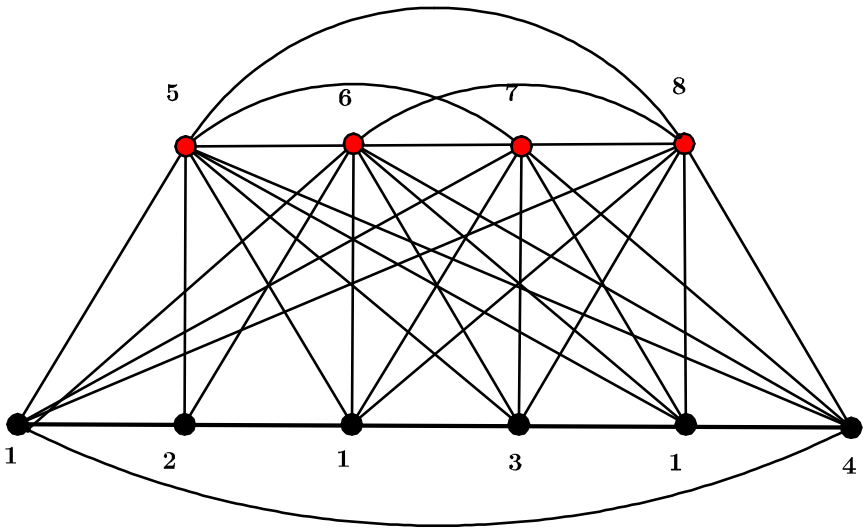


Figure 3.1.6. Coloration de packing de $K_4 + C_6$

3.1.7 Coloration de packing du joint de deux étoiles

Théorème 3.1.6 *Si pour tous n et p tels que, $n \geqslant p \geqslant 1$, $\chi_p(K_{1,n} + K_{1,p}) = p + 3$.*

Preuve. Notons par u_i, $i \in \{0, ..., n\}$ les sommets de $K_{1,n}$ tels que $d_{K_{1,n}}(u_0) = n$ et par

v_i, $i \in \{0, ..., p\}$ les sommets de $K_{1,p}$ tels que $d_{K_{1,p}}(v_0) = p$. Puisque $n \geqslant p$ et d'après le lemme 3.1.1, la couleur 1 est utilisée sur l'étoile $K_{1,n}$. Donc, $\alpha(K_{1,n} + K_{1,p}) = \alpha(K_{1,n}) = n$. Comme $| V(K_{1,n}+K_{1,p}) | = n+p+2$, on obtient $\chi_p(K_{1,n}+K_{1,p}) \geqslant (n+p+2)-n+1 = p+3$. Pour démontrer que $\chi_p(K_{1,n} + K_{1,p}) \leqslant p + 3$, on construit une coloration $(p + 3)$-packing comme suit. On pose $c(u_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, de sorte que les n sommets de $K_{1,n} + K_{1,p}$ sont colorés par la couleur 1. Les autres sommets du graphe $K_{1,n} + K_{1,p}$ sont colorés en utilisant $(n + p + 2) - n = p + 2$ couleurs additionnelles. On obtient ainsi un total de $p + 2 + 1 = p + 3$ couleurs, ce qui constitue une coloration de packing. Donc, $\chi_p(K_{1,n} + K_{1,p}) \leqslant p + 3$. En conclusion, $\chi_p(K_{1,n} + K_{1,p}) = p + 3$. ■

La Figure suivante montre une coloration de packing de $K_{1,6} + K_{1,4}$.

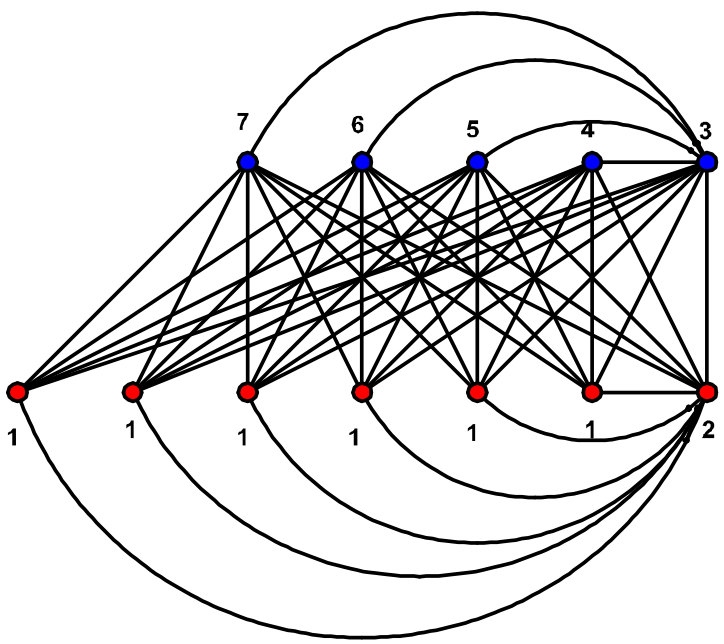


Figure 3.1.7. Coloration de packing de $K_{1,6} + K_{1,4}$

3.1.8 Coloration de packing du joint d'une étoile avec une chaîne

Théorème 3.1.7 *Pour tous n et p tels que, $n \geqslant 1$, $p \geqslant 2$,*

$$\chi_p(K_{1,n}+P_p)=\begin{cases} n+p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1; & si\ p\geq 2n-1,\\ p+2; & si\ p<2n-1.\end{cases}$$

Preuve. Notons par u_i, $i\in\{0,...,n\}$ les sommets de $K_{1,n}$ tels que $d_{K_{1,n}}(u_0)=n$ et par v_i, $i\in\{1,...,p\}$ les sommets de P_p. D'après le lemme 3.1.1, la couleur 1 est utilisée sur l'un des deux graphes $K_{1,n}$ ou P_p. Premièrement, supposons que la couleur 1 soit utilisée sur la chaîne P_p. Posons alors $c(v_i)=1$ pour tout $i=2k+1$, avec $i\in\{1,...,p\}$. Ainsi, la couleur 1 est attribuée à $\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$ sommets de la chaîne P_p, et donc du graphe $K_{1,n}+P_p$. Par ailleurs, si la couleur 1 est utilisée sur l'étoile $K_{1,n}$, alors les n sommets pendants de l'étoile reçoivent la couleur 1. Ainsi, la couleur 1 est utilisée n fois dans $K_{1,n}+P_p$. Supposons maintenant que $n\leq\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$. En utilisant l'inégalité $\lfloor x\rfloor\leq x$, on obtient $n\leq\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\leq\frac{p-1}{2}+1=\frac{p+1}{2}$. Par conséquent $p\geq 2n-1$. Réciproquement, si $n>\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$, alors on a nécessairement $p<2n-1$. Dans ce cas, la couleur 1 est utilisée sur l'étoile $K_{1,n}$.

Cas 1. $p\geq 2n-1$. Alors, la couleur 1 est utilisée sur la chaîne P_p. D'après le lemme 3.1.1, on a $\alpha(K_{1,n}+P_p)=\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$. Or, par la proposition reliant le nombre chromatique de packing et le nombre d'indépendance, $\chi_p(K_{1,n}+P_p)\geq\mid V(K_{1,n}+P_p)\mid-\alpha(K_{1,n}+P_p)+1$. Comme $\mid V(K_{1,n}+P_p)\mid=n+p+1$, cela donne $\chi_p(K_{1,n}+P_p)\geq n+p+1-(\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1)+1$. Ainsi $\chi_p(K_{1,n}+P_p)\geq n+p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$. Pour montrer que $\chi_p(K_{1,n}+P_p)\leq n+p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$, on construit une coloration $(n+p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1)$-packing de la manière suivante. On attribue la couleur 1 aux $\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$ sommets d'indices impair de la chaîne P_p. Les autres sommets de P_p reçoivent $p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor-1$ couleurs distinctes de 1. Les sommets de l'étoile $K_{1,n}$ reçoivent $(n+1)$ couleurs supplémentaires. Ainsi, le nombre total de couleurs utilisées est $p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor-1+(n+1)+1=n+p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$. Par conséquent $\chi_p(K_{1,n}+P_p)\leq n+p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$. Comme ce nombre correspond également à une borne inférieure (par le comptage des sommets et des distances minimales), on obtient l'égalité $\chi_p(K_{1,n}+P_p)=n+p-\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$.

Cas 2. $p<2n-1$. Alors, la couleur 1 est utilisée sur l'étoile $K_{1,n}$. D'après le lemme 3.1.1, on a $\alpha(K_{1,n}+P_p)=n$. Par conséquent $\chi_p(K_{1,n}+P_p)\geq\mid V(K_{1,n}+P_p)\mid-\alpha(K_{1,n}+P_p)+1$. Or, $\mid V(K_{1,n}+P_p)\mid=n+p+1$, il vient $\chi_p(K_{1,n}+P_p)\geq n+p+1-n+1=p+2$. Pour obtenir une borne supérieure, on peut construire explicitement une coloration $(p+2)$-packing. On attribue la couleur 1 aux n feuilles de $K_{1,n}$. Les p sommets de P_p ainsi que le

sommet de degré n de l'étoile reçoivent les $(p+1)$ autres couleurs. On utilise donc au total $(p+1)+1 = p+2$ couleurs. Ainsi $\chi_p(K_{1,n}+P_p) \leq p+2$. Donc, $\chi_p(K_{1,n}+P_p) = p+2$, et le théorème est démontré. ■

La Figure suivante montre une coloration de packing de $K_{1,4}+P_5$.

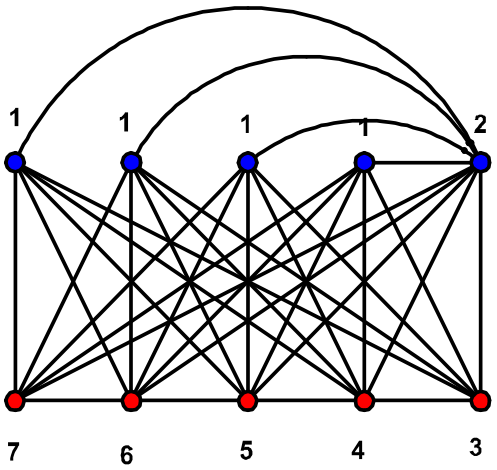


Figure 3.1.8. Coloration de packing de $K_{1,4}+P_5$

3.1.9 Coloration de packing du joint d'une étoile avec un cycle

Théorème 3.1.8 *Pour tous $n \geq 1$ et $p \geqslant 3$,*

$$\chi_p(K_{1,n}+C_p) = \begin{cases} n+p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2; & \text{si } p \geq 2n, \\ p+2; & \text{si } p < 2n. \end{cases}$$

Preuve. Notons par u_i, $i \in \{0,...,n\}$ les sommets de $K_{1,n}$ tels que $d_{K_{1,n}}(u_0) = n$ et par v_i, $i \in \{1,...,p\}$ les sommets de C_p. Comme $\text{diam}(K_{1,n}+C_p) = 2$, on a $\mid c^{-1}(i) \mid \leq 1$ pour toute couleur $i \geqslant 2$. D'après le lemme 3.1.1, on a $\alpha(K_{1,n}+C_p) = \max\left\{n, \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right\}$. En effet, si la couleur 1 est utilisée sur le cycle C_p, on peut poser $c(v_i) = 1$ pour tout $i = 2k+1$ avec $i \in \{1,...,p-1\}$. Ainsi, la couleur 1 est utilisée $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ fois sur le cycle C_p,

et donc sur $K_{1,n} + C_p$. Par ailleurs, si la couleur 1 est utilisée sur l'étoile $K_{1,n}$, alors les n sommets pendants de l'étoile reçoivent cette couleur. Ainsi, la couleur 1 est utilisée n fois dans $K_{1,n} + C_p$. Supposons d'abord que $n \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$. Comme $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \leq \frac{p}{2}$, on obtient $n \leq \frac{p}{2}$, d'où $p \geq 2n$. Dans ce cas, on a $\alpha(K_{1,n} + C_p) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$. Or, $V(K_{1,n} + C_p) = n + p + 1$. D'après le lemme 3.1.1, on a $\chi_p(K_{1,n} + C_p) \geq |V(K_{1,n} + C_p)| - \alpha(K_{1,n} + C_p) + 1$, d'où $\chi_p(K_{1,n} + C_p) \geq n + p + 1 - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$. Ainsi, $\chi_p(K_{1,n} + C_p) \geq n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2$. Pour montrer que $\chi_p(K_{1,n} + C_p) \leq n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2$, on construit une coloration $(n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2)$-packing. On utilise la couleur 1 pour colorer les sommets d'indice impair du cycle, en excluant le dernier sommet de C_p. Ainsi, la couleur 1 est utilisée sur exactement $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ sommets du cycle. Les $p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ sommets restants du cycle ainsi que les $(n+1)$ sommets de l'étoile $K_{1,n}$ sont colorés avec des couleurs distinctes de 1. Par conséquent, le nombre total de couleurs utilisées est $p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + (n+1) + 1 = n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2$. Ainsi, on obtient bien une coloration $p-$packing de $K_{1,n} + C_p$ utilisant $n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2$ couleurs, d'où $\chi_p(K_{1,n} + C_p) \leq n + p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2$. Supposons maintenant que $n > \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$. Alors $p < 2n$, et dans ce cas $\alpha(K_{1,n} + C_p) = n$. Par conséquent $\chi_p(K_{1,n} + C_p) \geq n + p + 1 - n + 1 = p + 2$. Pour démontrer que $\chi_p(K_{1,n} + C_p) \leqslant p + 2$, on forme une coloration $(p+2)$-packing comme suit. Posons $c(u_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, de sorte que les n sommets pendants de l'étoile $K_{1,n}$ sont colorés par la couleur 1. Les autres sommets du graphe sont colorés à l'aide de $(n + p + 1) - n = p + 1$ couleurs supplémentaires. Ainsi, le nombre total de couleurs utilisées est $p + 1 + 1 = p + 2$. On obtient donc une coloration $(p + 2)-$packing de $K_{1,n} + C_p$, d'où $\chi_p(K_{1,n} + C_p) \leqslant p + 2$. En conclusion, en combinant avec la borne inférieure, on a $\chi_p(K_{1,n} + C_p) = p + 2$. ■

La Figure suivante montre une coloration de packing de $K_{1,4} + C_5$.

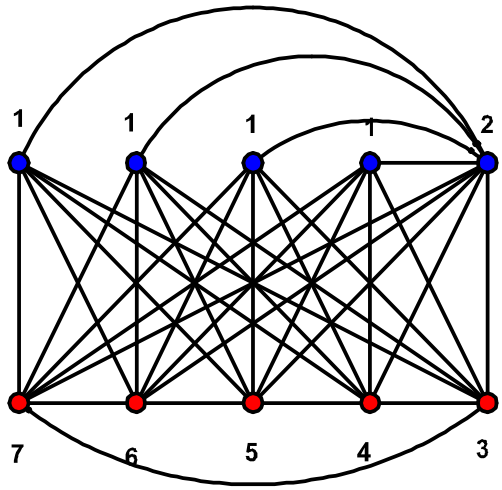


Figure 3.1.9. Coloration de packing de $K_{1,4} + C_5$

3.2 Coloration de packing de prisme complémentaire de quelque types de graphes

Dans cette section, nous introduisons le prisme complémentaire d'un graphe, puis nous étudions le nombre de coloration de packing pour certaines classes particulières, notamment les graphes friendship F_n $\overline{F_n}$ et Moulin à vent (Windmell) $C_n^m\overline{C_n^m}$.

Définition 3.2.1 *Soit G un graphe et $\overline{G}$ le complémentaire de G. Le prisme complémentaire, noté $G\overline{G}$ du graphe G est le graphe formé par l'union disjointe de G et de $\overline{G}$ en y rajoutant des arêtes qui forme un couplage parfait entre les sommets correspondants de G et $\overline{G}$.*

La Figure suivante montre le graphe $C_5\overline{C_5}$.

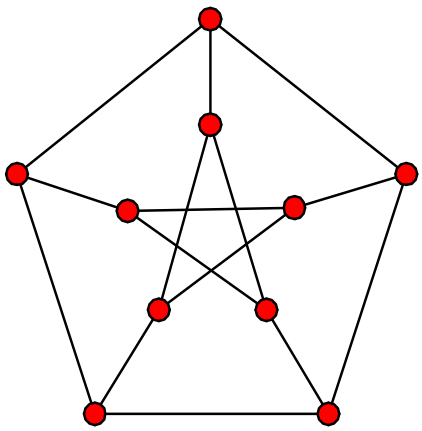


Figure 3.2.1. Graphe $C_5\overline{C_5}$

3.2.1 Coloration de packing du graphe prisme complémentaire de Friendship

Nous introduisons tout d'abord la définition du graphe Friendship, nécessaire à l'étude de la coloration de packing du prisme complémentaire associé.

Définition 3.2.2 *Le graphe Friendship noté F_n, est un graphe planaire avec $2n+1$ sommets et $3n$ arêtes, peut être construit à partir de n copies de C_3 par identification d'un sommet de chaque copie C_3.*

La Figure suivante montre le graphe F_4.

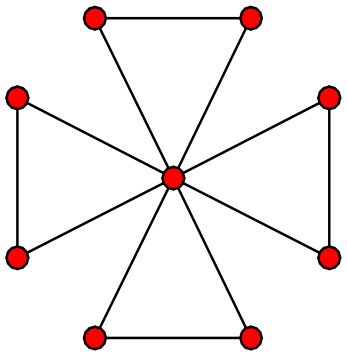


Figure 3.2.2. Graphe F_4

Avant de déterminer le nombre chromatique de packing de F_n $\overline{F_n}$, il est nécessaire de définir les notations suivantes. On note par x, le sommet commun aux n copies de C_3 dans F_n de degré $2n$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1,\ 2\}$, on note par u_i^j les sommets de F_n distincts de x, où l'indice i désigne le numéro de la copie C_3 dans F_n, et l'indice j désigne le numéro du sommet dans cette copie. Ainsi, chaque triangle de F_n est de la forme $\{x, u_i^1, u_i^2\}$, $i \in \{1, ..., n\}$. Dans le complémentaire $\overline{F_n}$, on note par $\overline{x}$ le sommet correspondant à x, et par $\overline{u_i^j}$ le sommet correspondant à u_i^j, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1,\ 2\}$. Les arêtes supplémentaires du prisme complémentaire F_n $\overline{F_n}$ forment alors le couplage parfait $\{x\overline{x}\} \cup \left\{u_i^j\overline{u_i^j};\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 2\right\}$.

Lemme 3.2.1 *Soit c une coloration de packing optimale du prisme complémentaire de F_n. Alors:*

· *aucun sommet u_i^j, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1,\ 2\}$, ne peut recevoir la couleur 2;*

· *exactement deux sommets de F_n $\overline{F_n}$ reçoivent la couleur 2, à savoir le sommet $\overline{x}$ et un unique sommet de $\overline{F_n}$.*

Preuve. Rappelons qu'une couleur k dans une coloration de packing impose que toute paire de sommets de couleur k soit à distance strictement supérieure à k. Considérons un sommet u_i^j de F_n. Dans le graphe $F_n\overline{F_n}$, ce sommet est adjacent à x, u_i^{3-j} et $\overline{u_i^j}$. De plus, pour tout autre sommet u_k^l de F_n, on a $d(u_i^j, \overline{u_i^j}) \leq 2$, car il existe toujours un chaîne passant par le sommet central x. Par ailleurs, tout sommet de F_n, i.e., les sommets u_i^j sont également

à distance au plus 2 par rapport à tous les sommets du graphe, soit directement, soit via $\overline{u_i^j}$. Ainsi, $d\left(u_i^j, v\right) \leq 2$ pour tout $v \in V(F_n\overline{F_n})\backslash\{u_i^j\}$. Supposons maintenant que $c(u_i^j) = 2$. Alors aucun autre sommet du graphe ne peut recevoir la couleur 2, puisque deux sommets de couleur 2 doivent être à distance strictement supérieure à 2. La couleur 2 n'apparaîtrait donc qu'une seule fois. Or, dans une coloration de packing optimale, les seules couleurs susceptibles d'être répétées sont 1 et 2. En effet, $\text{diam}\left(F_n\overline{F_n}\right) = 3$. Il est donc nécessaire, dans une coloration optimale, que la couleur 2 soit utilisée sur deux sommets distincts. Comme aucun sommet u_i^j ne peut recevoir cette couleur, le sommet $\overline{x}$ reçoit la couleur 2, ainsi qu'un unique sommet de $\overline{F_n}$. Par conséquent $c(u_i^j) \neq 2$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1,\ 2\}$, et exactement deux sommets de $F_n\ \overline{F_n}$ reçoivent la couleur 2. ■

Théorème 3.2.1 *Pour tout $n \geqslant 1$, $\chi_p\left(F_n\overline{F_n}\right) = 3n + 1$.*

Preuve. D'après le lemme 3.2.1, dans $F_n\ \overline{F_n}$, deux sommets seulement peuvent recevoir la couleur 2, à savoir le sommet x et un unique sommet de l'ensemble $\left\{\overline{u_i^j};\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 2\right\}$. D'autre part, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe deux sommets seulement colorés par 1, de la manière $\left\{\overline{u_i^j};\ 1 \leq j \leq 2\right\}$, car $d(\overline{u_i^j}, \overline{u_l^j}) \leq 1$ pour tout $i \neq l$. Par ailleurs, on peut colorer n sommets de $\left\{u_i^j;\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 2\right\}$ par la couleur 1; c'est-à-dire qu'au plus un sommet de chaque triangle $\{x, u_i^1, u_i^2\}$, $i \in \{1, ..., n\}$, peut recevoir la couleur 1. Dans ce cas, un seul sommet de l'ensemble $\left\{\overline{u_i^j};\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 2\right\}$ peut également être coloré par 1. Par conséquent, on obtient $(n + 1)$ sommets colorés par 1 sur $F_n\ \overline{F_n}$. Ainsi, le nombre total de sommets pouvant être colorés par les couleurs 1 et 2 est au plus égal à $(n + 1) + 2 = n + 3$. Or $\mid V(F_n\overline{F_n}) \mid = 4n + 2$. Les autres sommets doivent donc recevoir des couleurs distinctes supérieures ou égales à 3. On obtient alors $\chi_p\left(F_n\overline{F_n}\right) \geq (4n + 2) - (n + 3) + 2 = 3n + 1$, ce qui démontre la borne inférieure. Pour montrer que $\chi_p\left(F_n\overline{F_n}\right) \leq 3n + 1$, construisons une coloration $(3n + 1)-$packing comme suit. Posons $c(u_i^1) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $c(\overline{u_1^2})$ $= 1$. Ainsi, nous obtenons $(n + 1)$ sommets colorés par la couleur 1. Posons ensuite $c(x)$ $= c(u_1^1) = 2$, ce qui donne deux sommets colorés par la couleur 2. Au total, $(n+3)$ sommets de $F_n\overline{F_n}$ sont colorés par les couleurs 1 et 2. Les autres sommets du graphe, c'est-à-dire $(4n + 2)-\ (n + 3) = 3n - 1$, reçoivent des couleurs distinctes différentes de 1 et 2. Ainsi, le nombre total de couleurs utilisées est $(3n - 1) + 2 = 3n + 1$. La borne supérieure est donc

démontrée, et par conséquent, $\chi_p\left(F_n\overline{F_n}\right) \leq 3n+1$. En combinant cette borne supérieure avec la borne inférieure précédemment établie, on conclut que $\chi_p\left(F_n\overline{F_n}\right) = 3n+1$. ■

La Figure suivante montre une coloration de packing de $F_4\overline{F_4}$.

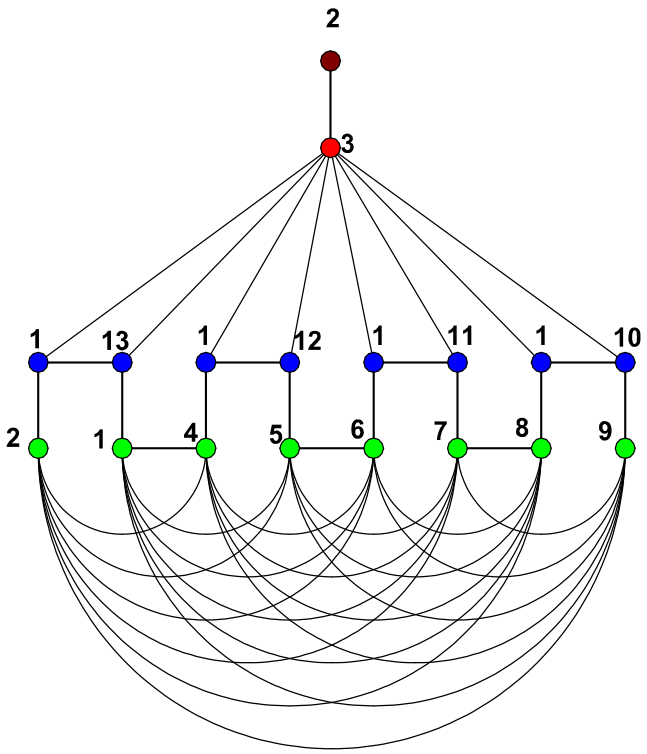


Figure 3.2.3. Coloration de packing de $F_4\overline{F_4}$

3.2.2 Coloration de packing de prisme complémentaire du graphe Moulin à vent

Nous définissons maintenant un nouveau graphe noté, le graphe Moulin à vent (Windmill). Cette classe des graphes a été définie par Gayathri et al [24].

Définition 3.2.3 *[24] Le graphe Moulin à vent (Windmill) C_n^m est constitué de m copies d'un cycle C_n disjoints partageant un méme sommet.*

La Figure suivante montre le graphe de Moulin à vent C_8^3.

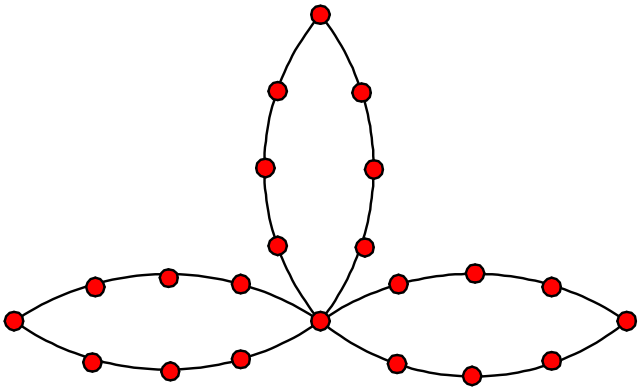


Figure 3.2.4. Graphe Moulin à vent C_8^3

Le théorème suivant a été démontré par William et Roy [24], il donne le nombre chromatique de packing du graphe Moulin à vent pour tout $m \geqslant 4$.

Théorème 3.2.2 *[24]* $\chi_p(C_n^m) = \begin{cases} 3 \ si \ n \approxeq 0(\mathrm{mod}\, 4) \\ 4 \ si \ non. \end{cases}$

Le figure suivant illustre une coloration de packing de graphe C_8^3 .

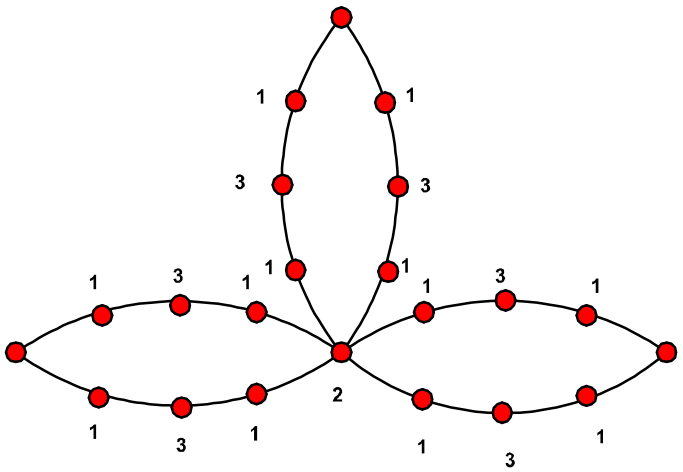


Figure 3.2.5. Coloration de packing de C_8^3

Remarque 3.2.1 *Le graphe Friendship F_n est un graphe particulier de C_n^m lorsque $n = 3$, alors le lemme précédent reste vrai concernant l'utilisation de la couleur 2 sur C_n^m.*

Le théorème suivant donne le nombre chromatique de packing de prisme complémentaire du graphe Moulin à vent $C_n^m\overline{C_n^m}$.

Théorème 3.2.3 *Pour tous $n \geqslant 3$ et $m \geqslant 1$, $\chi_p(C_n^m\overline{C_n^m}) = 2m(n-1) - m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$.*

Preuve. Comme $diam\left(C_n^m\overline{C_n^m}\right) = 3$, les seules couleurs pouvant être répétées dans une coloration de packing sont 1 et 2.

Notons par x le sommet commun aux m cycles de degré $2m$ dans C_n^m. Pour $j \in \{1, ..., m\}$, notons par C_n^j le $j^{éme}$ cycle de C_n^m, et par $u_2^j, u_3^j, ..., u_n^j$ ses sommets. Dans le complémentaire $\overline{C_n^m}$ du graphe C_n^m, notons par x' le sommet correspondant à x, et par $v_2^j, v_3^j, ..., v_n^j$ les sommets correspondant aux $u_2^j, u_3^j, ..., u_n^j$. Remarquons que, pour tout $j \in \{1, ..., m\}$ et pour tout $i \neq k$ avec $i, k \in \{2, ..., n\}$, on a $d(u_i^j, u_k^j) \leq 2$ et $d(v_i^j, v_k^j) \leq 2$. Ainsi, les couleurs 2 et 3 ne peuvent pas être répétées parmi les sous-graphes $\{u_i^j; 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ et $\{v_i^j; 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. D'autre part, les sommets du sous-graphe engendré par $\{x; v_i^j, u_i^j, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ sont deux à deux à distance inférieure ou égale à 2. Par conséquent, les couleurs 2 et 3 ne peuvent y être utilisées qu'une seule fois. En outre, on a $d(x', v_i^j) = 3$ pour tout i et j , ce qui permet de colorer x' et un seul sommet de $\{v_i^j; 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ par la couleur 2. Concernant la couleur 1, elle peut être utilisée au plus deux fois dans $\{v_i^j; 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. En revanche, dans le sous-graphe $\{u_i^j;\ 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, la couleur 1 peut être utilisée plusieurs fois; pour chaque cycle C_n^j, elle apparaît au plus $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ fois. Ainsi, pour les m cycles, elle est utilisée au plus $m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ fois. Dans ce cas, on peut en plus colorer un sommet de $\{v_i^j; 2 \leq i \leq n\}$ par 1. Au total, on obtient $m\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$ sommets colorés par 1 et deux sommets colorés par 2. Comme le graphe possède $\mid V(C_n^m\overline{C_n^m}) \mid = 2m(n-1) + 2$ sommets, on en déduit la borne inférieure $\chi_p\left(C_n^m\overline{C_n^m}\right) \geq 2m(n-1) + 2 - (\ m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 + 2) + 2 = 2m(n-1) - m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$. Pour la borne supérieure, on construit une coloration de packing explicite. Posons $c(u_i^j) = 1$ pour $i = 2k + 2$ avec $2 \leq i \leq n$. Ainsi, pour tout $j \in \{1, ..., m\}$, on obtient $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ sommets colorés par 1 sur le cycle C_n^j. Posons ensuite $c(v_2^1) = 1$. Comme il y a m cycles, on obtient alors

$m\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$ sommets colorés par 1 dans $C_n^m\overline{C_n^m}$. Posons maintenant $c(x) = c(v_1^1) = 2$, ce qui donne deux sommets colorés par 2. Ainsi, le nombre total de sommets colorés par 1 et 2 est $m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 + 2 = m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 3$. Les autres sommets de $C_n^m\overline{C_n^m}$ reçoivent des couleurs distinctes, différentes de 1 et 2, au nombre de $2m(n-1) + 2 - (m\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 3) = 2m(n-1) - m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1$. On obtient donc $\chi_p\left(C_n^m\overline{C_n^m}\right) \leq 2m(n-1) - m\lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1 + 2 = 2m(n-1) - m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$.

Par conséquent, $\chi_p(C_n^m\overline{C_n^m}) = 2m(n-1) - m\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$. Le théorème est ainsi démontré.

■

La Figure suivante montre une coloration de packing de $C_4^3\overline{C_4^3}$.

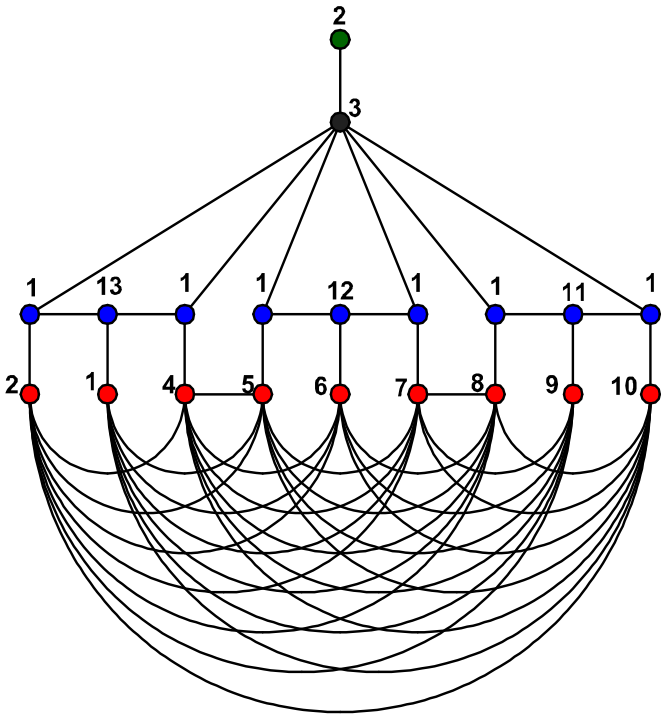


Figure 3.2.6. Coloration de packing de $C_4^3\overline{C_4^3}$

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème de la coloration de packing des graphes. Le premier chapitre a été consacré au rappel des notions fondamentales de la théorie des graphes indispensables à la compréhension de ce travail. Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les principaux résultats de la littérature relatifs à la coloration de packing ainsi que les définitions et propriétés essentielles de cet invariant.

Le troisième chapitre représente la contribution principale de ce mémoire. Nous y avons analysé le nombre chromatique de packing pour plusieurs classes particulières de graphes, en nous intéressant principalement à la détermination de valeurs exactes de cet invariant. Plus précisément, nous avons étudié le nombre chromatique de packing du joint de différents graphes, notamment les chaînes, les cycles, les graphes complets et les étoiles. Nous avons également examiné la coloration de packing du prisme complémentaire appliqué au graphe friendship, pour lequel nous avons obtenu des résultats exacts accompagnés de démonstrations rigoureuses. Par ailleurs, nous avons déterminé la valeur exacte du nombre chromatique de packing du graphe moulin à vent.

Les résultats obtenus montrent clairement l'influence de la structure des graphes ainsi que des différentes opérations sur graphes sur le comportement du nombre chromatique de packing.

Ce travail ouvre également plusieurs perspectives de recherche, parmi lesquelles :

• Déterminer de nouvelles valeurs exactes ainsi que des bornes inférie ures et supérieures du nombre chromatique de packing $\chi_p(G)$ pour d'autres classes de graphes.

• Etendre cette étude au joint d'autres familles de graphes, telles que les graphes bipartis, les graphes planaires ou les grilles.

• Etendre cette étude au prisme complémentaire pour d'autres familles de graphes, telles que les graphes bipartis, les graphes planaires ou les grilles.

Bibliographie

[1] St. Aloysius College, Edathua, Kerala. The spectrum of neighborhood corona of graphs, Kerala, India, 689573.

[2] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.

[3] B. Bresãr, S. Klavsãr, D. F. Rall, On the packing chromatic number of cartesian products, Hexagonal lattice, and trees. Discrete Appl. Math., 155(17) : 2303- 2311; 2007.

[4] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, J. M. Harris, D.F. Rall, Packing chromatic numbers of graphs, Ars Combin., 86 : 33-49, 2008.

[5] M. Joice Punitha, Kernel in Interconnection Networks, Ph.D thesis, University of Madras, March 2009.

[6] R. LEMDANI, CHABANE Kwider et ZAHED Ahmed, Sur le Nombre de Subdivision de la Domination Broadcast, 17/06/2015.

[7] R. LEMDANI, A.TAIBAOUI et O. MEZIOUD. Opérations sur le nombre de la coloration de packing. Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle, juin 2015.

[8] R. LEMDANI, A. SOUADKIA et F.S DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 16/06/2016.

[9] R. LEMDANI, K BAKHTI et K. MELIANI, Opérations sur le nombre de la domination broadcast, Mémoire de Master, RO, 14/06/2017.

[10] R. LEMDANI, Y. MOUSSA et O. ALLOUCHE, Etude de la coloration packing dans les graphes, Mémoire de Master, RO, 18/06/2018.

[11] R. LEMDANI, C. OUNNAS et S. ZENIKHRI, Détermination du nombre de la coloration packing de certaines classes de graphes, Mémoire de Master, RO, 2019.

[12] R. LEMDANI, N.R. YAHIAOUI et B. BEN KOUIDER, Opérations sur le nombre de la coloration packing de certains types de graphes, Mémoire de Master, RO, 29/10/2020.

[13] R. LEMDANI. M. BESSERI et I. HADJADJ, Etude et détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 18 Juillet, 2021.

[14] D. Laiche, Mémoire présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).D. Laiche, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).

[15] D. Miller. Introduction à la théorie des graphes, www.apprendre-en-ligne.net/graphes, (2008).

[16] E. A. Nordhaus, J.W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Monthly, 63:175 − 177, (1956).

[17] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes.

[18] Christian Sloper. Packing-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002.

[19] E. Sopena, Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs, University of Bordeaux, JUNE 2015.

[20] A. SOUADKIA, F.S. DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, 2016.

[21] M. A. Tahraoui. Coloring, packing and embedding of graphs. Thèse de doctorat, Université de Lyon, Décembre 2012.

[22] S. K. Vaidya et P. L. Vihol, Discussion on Some Interesting Topics in Graph Theory, Ph.D Thesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[23] S. Velammel, Studies in Graph Theory : Covering, Independence, Domination and Related Topics, Ph.D. Thesis (Manonmaniam Sundaranar University),1997.

[24] A. William, S. Roy**,** Paking chromatic number of certain graphs. Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600034, INDIA.

[25] A. William, S. Roy, Packing Chromatic Number of Certain Trees and Cycle Related Graphs, Chennai 600034, INDIA.