République Algérienne Démocratique et Populaire.

Ministère de l'Enseignement Supérieur et la Recherche Scientifique

Universitaire de Médéa.



Faculté des Sciences et Technologie

Département de: Math et Informatique

Option: Recherche Opérationnelle

Présenté en vue de l'obtention du diplôme De Master en Mathématique
Option : Recherche Opérationnelle

Thème:

Etude de la b-coloration dans les graphes : Graphes critiques

Réalisé par :

- *DJEDILAT Tahar*

Devant le jury composé de :

Président	***N.IKHLEF ESCHOUF***	***MCB***	***U.Dr.Yahia Farès Médéa***
Examinateur	***R.Lemdani***	***MAA***	***U.Dr.Yahia Farès Médéa***
Examinateur	***M.Bouzefrane***	***MAA***	***U.Dr.Yahia Farès Médéa***
promoteur	***M.Zamime***	***MAB***	***U.Dr.Yahia Farès Médéa***

Promotion

2016/2017

1

Table des Matières

Liste des illustrations graphiques **4**

Dédicace **5**

Résumé **6**

Abstract **7**

Remerciements **8**

Introduction **9**

CHAPITRE 1. Généralités sur les graphes **12**

1.1. Introduction 12

1.2. Définitions et notations 12

1.2.1. Graphes et sous-graphes 12

1.2.2. Voisinage et degré 14

1.2.3. Chaînes et cycles 15

1.2.4. Graphes particuliers 16

1.2.5. Ensemble minimal, enemble maximal 19

1.2.6. quelques invariants des graphes 19

CHAPITRE 2. La Coloration dans les graphes **20**

2.1. Introduction 20

2.2. Coloration propre 20

2.3. Bornes sur le nombre chromatique 21

2.4. La a-coloration 23

2.5. La Coloration de Grundy 23

2.6. La b-coloration 23
2.7. Quelques résultats existants sur la b-coloration 24
2.7.1. La b-coloration dans les arbres 27

CHAPITRE 3. Influence subdivision d'une arête sur le nombre b-chromatique **34**
3.1. Introduction 34
3.1.1. Les graphes P_4-sparse sb-critiques 36

Conclusion et perspectives **41**

Liste des illustrations graphiques

Figure 1.1. Le graphe G est dit simple 13

Figure 1.2. Graphe G et sous-graphe associé 14

Figure 1.3. Un graphe et son complémentaire 16

Figure 1.4. Un graphe complet K_5 16

Figure 1.5. Un graphe planaire 17

Figure 1.6. Le graphe $K_{2.3}$ 17

Figure 1.7. Un arbre T 18

Figure 1.8. Un cactus 18

Figure 2.1. $\chi(P_5) = 2$ 20

Figure 2.2. $\psi(P_4) = 3$ 23

Figure 2.3. $b(C_5) = 3$ 24

Figure 3.1. $b(G) = 4$ et $b(G_E) = 3$ 35

Figure 3.2. Exemple d'un graphe scindé 36

Figure 3.3. (a) araignée fine 37

Figure 3.4. (b) araignée épaisse 37

Figure 3.5. La graphe G contient trois composantes connexes G_1, G_2, et G_3. . . . 38

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A la mémoire de mon père, que Dieu tout puissant lui accorde sa sainte miséricorde et

L'accueille en son vaste paradis.

A ma mère, c'est grâce à elle que je suis arrivé à ce stade. Elle n'a jamais cessé de

m'encourager et de me motiver. Si je dois consacrer toute ma vie pour elle j ne peux render

ce qu'elle m'a fait.

A mes frères et mes sœurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

A tous ceux et toutes celles qui me connaissent et qui m'aiment.

Tahar

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de la b-coloration et les graphes sb-critiques.

Etantant donné un graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes, une coloration de sommets de G est une affectation de couleurs aux sommets telle que deux sommets adjacents aient des couleurs différents. Le nombre minimum de couleurs nécessaire pour la coloration des sommets de G est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$ .Une coloration de G avec k couleurs peut être vue comme une partition des sommets de G en k stables (ou k classes de couleurs) .Une b-coloration d'un graphe G est un coloration propre telle que chaque classe de couleur contient au moins un sommet ayant un voisin dans chaque classe de couleur, un tel sommet est appellé b-dominant ou b-sommet.Le nombre b-chromatique de G, noté $b(G)$, est le plus grand entier k tel que G admet une b-coloration avec k couleurs.

En dernier lieu est consacrée à l'étude des graphes dits sb-critiques, c'est à dire les graphes G dont le nombre b-chromatique diminue lorsque G est modifié en subdivision un sommet ou une arête quelconque de G.Dans ce sens, on donne une caractérisation des graphes P_4-sparses sb-critique, et les graphes régulier sb-critiques .

Abstract

this work is devoted to the study of b-coloring and the graphs sb-critiques

Given a graph $G = (V, E)$, with vertex-set $V(G)$ and edge-set $E(G)$,a proper vertex coloring of a graph G is an assignment of colors to the vertices of G such that two adjacent vertices have different colors. The minimum cardinality k for which G has a proper k coloring is the chromatic $\chi(G)$ of G.

A b-coloring of a graph G is a proper coloring of the vertices of G such that each color class has at least one vertex having at least one neighbor in each other class. The largest integer k such that G admist a b-coloring with k colors is the b-chromatic number $b(G)$ of G.

The third part is devoted to the study of so-called sb-critics graphs, that is to say the graph G whose b-chromatic number decreases when G is amended by delting a vertex or one edge of G. In this sense, we give a characterization of P_4-graphs sparses sb-critics, régulier graphe sb-critics .

Remerciements

Avant tout nous remercions Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et patience pour terminer ce travail.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrons témoigner toute notre reconnaissance .

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **Mohamed Zamime** maître de conférences à l'universite Dr: Yahia Farés de Médea d'avoir accepte d'encadrer notre memoire d'avoir été patient sa disponibilité et surtout ses judicieux consiels qui ont contribue à alimenter notre reflexion .

Nous remeçion également Monsieur **Noredine Ikhlef Eschouf**, Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, pour l'honneure qu'il nous a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse un grand remerciement à Monsieur **Rachid Lemdani**, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, Monsieur **Mohamed Bouzefrane**, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, pour avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leurs remarques judicieuses.

Introduction

La recherche opérationnelle (RO) est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la RO s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planifi- cation d'entreprise. Plus récemment, la RO a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

La représentation d'un probléme par un dessin, un plan, une esquisse contribue souvent à sa compréhension. Le langage des graphes est construit, à l'origine, sur ce principe. Nombres de méthodes, de propriétés, de procédures ont été pensées ou trouvées à partir d'un schéma pour être ensuite formalisées et développées. Chacun d'entre nous a, au moins une fois, vu ou utilisé un plan de métro, une carte de lignes ferroviaires, un plan électrique, un arbre généalogique ou un organigramme d'entreprise; ainsi, tout le monde sait plus ou moins intuitivement ce qu'est un graphe. Toutefois, entre cette notion vague ou des points, représentant des individus, des objets, des lieux ou des situations, sont reliés par des fléches, il y a une longue élaboration des concepts. La premiére difficulté à laquelle on peut être confronté concerne la terminologie (trés abondante en théorie des graphes). La théorie des graphes constitue aujourd'hui un corpus de connaissances trés important. Comme son nom l'indique.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que les Sciences techniques (biologie, chimie, physique, informatique,...), les Sciences humaines (géographie, histoire,...) et le Monde économique (finance, logistique,...).

La coloration de graphes tient une place privilligiée dans le domaine des mathématiques discrètes. La coloration de graphes a de nombreuses applications et ne se limitent pas seulement à la gestion d'emlpoi du temps ou d'examens. On peut par exemple évoquer la modélisation des réseaux téléphoniques [8].

Un des premiers problèmes de coloration de graphes est certainement le problème des quatre couleurs posé par Francis Guthier en 1852: toute carte géographique peut

être coloriée avec quatre couleurs de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes. En 1976, le probléme des Quatres couleurs est devenus le Théorème des quatre couleurs puisque Appel et Hakens [1], assistés d'un ordinateur, l'ont résolu.

Il existe de nombreuses variantes de problémes de colorations de graphe disons (coloration des sommets, coloration des arêtes, coloration totale, coloration par liste, etc..). Pour de plus amples détails sur ce sujet, le lecteur peut se reporter aux livres de G. Chartrand et P. Zhang [5] et de T. R. Jensen et B. Toft [8]. La coloration standard ou la plus naturelle est la coloration propre (classique) de sommets. Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique; la plupart de ces colorations cherchent à minimiser le nombre de couleurs. Toutefois, il existe d'autres colorations propres de sommets où l'objectif est de maximiser le nombre de couleurs utilisées, on cite par exemple la b-coloration qui fera l'objet de notre étude dans cette thèse.

Une coloration propre de sommets d'un graphe G s'appelle une b-coloration si chaque classe de couleur contient au moins un sommet qui a au moins un voisin dans chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre b-chromatique $b(G)$ de G est le plus grand entier k pour lequel G a une b-coloration avec k couleurs. Ce concept a été introduit en 1999 par Irving et Manlove [7, 9].

Nous considérons que toutes les colorations mentionnées dans ce mémoire seront propres, même si ce n'est pas toujours précisé. Et, parfois on parle de coloration pour désigner une coloration de sommets.

Ce mémoire se décompose en trois chapitre.

Le premier chapitre présente des définitions et quelques conceptes fondamentales de la théorie des graphes nécessaires et utilisées tout au long de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les définitions de la coloration classique, la a-coloration et la b-coloration. Nous donnons ensuite un recueil des principaux résultats de la littérature liés à la notion de la b-coloration. Quelques résultats particuliers (des bornes et des valeurs exactes du nombre b-chromatique) concernant certaines classes de graphes seront présentés à la fin de ce chapitre.

Le chapitre Trois est consacré à l'étude des graphes *arête* subdividée *sb-critiques*, c'est à dire les graphes dont la subdivision d'une arête quelconque fait diminuer le nombre

b-chromatique de G. En effet, après avoir donné quelques propriétés fondamentales de ces graphes, nous caractérisons deux classes de graphes arêtes subdivisées s-b-critiques, à savoir les graphes P_4-sparses et graphe régulier sb-critiques.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale.

CHAPITRE 1

Généralités sur les graphes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les différentes notions utilisées en théorie des graphes de maniére courante et dont nous nous servirons dans ce document ces notations sont standards et peuvent être retrouvées avec plus de détails dans C. Berge [2], J. A. Bondy et U. S. R. Murty [3], R. Diestel [6].

La première partie de ce chapitre rassemble les définitions classiques de la théorie des graphes ainsi que les notations nécessaires dont on aura besoin le long de ce travail. Ces définitions peuvent être retrouvées avec plus de détails dans les ouvrages suivants: C. Berge [2], J. A. Bondy et U. S. R. Murty [3], R. Diestel [6].

1.2 Définitions et notations

1.2.1 Graphes et sous-graphes

Un *graphe* $G = (V, E)$ est constitué d'un ensemble non vide fini de sommets, noté $V(G)$ ou V, et d'un ensemble fini d'arêtes, noté $E(G)$ ou E, qui sont des paires de sommets de $V(G)$. Afin d'alléger les notations on note uv (ou vu) une arête entre la paire de sommets u et v. Une arête est une boucle si $u = v$. Dans le cas général, un graphe peut avoir des arêtes multiples, c'est-à-dire des arêtes différentes qui ont les mêmes extrémités.

Un graphe *simple* est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête de G a ses extrémités distinctes.

Dans toute la suite de ce mémoire, nous considérons uniquement des graphes simples. Le nombre de sommets d'un graphe G est appelé l'*ordre* du graphe G, noté n. Le graphe

G donné en exemple sur la Figure 1.1 est d'ordre 5 et a pour ensemble de sommets $V(G) = \{A, B, C, D, E\}$ et pour l'ensemble d'arête $E(G) = \{AE, AB, ED, EC, EB, CD\}$

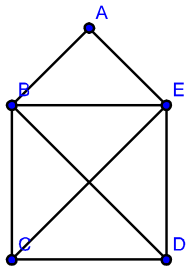


FIGURE 1.1. Le graphe G est dit simple

Deux sommets u et v d'un graphe $G = (V, E)$ sont dite adjacents s'il existe une arête entre u et v dans G. les sommets u et v sont appelés extremités de l'arête uv. On dit aussi que u et v sont voisins et que l'arête uv est incidente aux sommets u et v. L'ensemble des sommets adjacents à u est appelé voisinage de u.

Dans ce cas, u et v sont appelés les *extrémités* de uv. Un *non-voisin* u d'un sommet v d'un graphe G est un sommet non adjacent à v. Une arête uv est souvent désignée par la lettre e, où u et v sont les extrémités de e. Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune. Une arête e sera dite incidente à un sommet v si v est l'une de ses extrémités; dans ce cas v sera dit incident à e. Une *non-arête* dans un graphe G est une paire de sommets non adjacents dans G. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe *simple* est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête de G a ses extrémités distinctes. En d'autres termes, G est simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Dans cette thèse, tous les graphes considérés sont simples et finis.

Un graphe $G' = (V', E')$ est un *sous-graphe* d'un graphe $G = (V, E)$ si $V'(G') \subseteq V(G)$, $E'(G') \subseteq E(G)$ et toutes les arêtes de $E'(G')$ ont leurs extrémités dans $V'(G')$; nous utiliserons la notation $G' \subseteq G$. Par exemple si nous considérons les trois graphes G, H_1et H_2 de la Figure 1.2; nous avons $H_1 \subseteq G$ et $H_2 \subseteq G$.

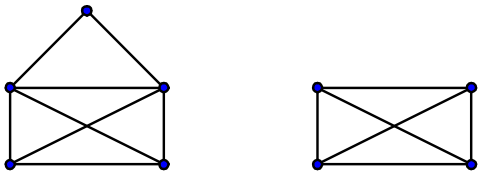


FIGURE 1.2. Graphe G et sous-graphe associé

Soit S un ensemble de sommets de G, $S \subseteq V(G)$. Le sous-graphe de G induit par S, noté $G[S]$, est le graphe défini comme suit:

1- $V(G[S]) = S$.

2- Toutes les arêtes de $E(G)$ ayant leurs deux extrémités dans S sont également dans $E(G[S])$

Par exemple si nous considérons les trois graphes G, H_1et H_2 de la Figure **??**; le graphe H_1est un sous- graphe induit de G, mais H_2 ne l'est pas.

Un graphe $G\prime = (V\prime, E\prime)$ est un sous-graphe couvrant d'un graphe $G = (V, E)$ si $G\prime$ est un sous graphe de G et $V\prime = V$. En d'autres termes un sous-graphe couvrant de G est un sous graphe de G qui contient tous les sommets de G.

On dira que G contient un graphe H s'il existe un sous-graphe induit de G isomorphe à H. Dans le cas contraire, on dira que G est sans H (ou H-libre).

1.2.2 Voisinage et degré

Définition 1.1. *Soit $G = (V,E)$ un graphe et $v \in V$ un sommet de G , le voisinage ouvert de v , noté $N_G(v)$, est donné par:*

$N_G(v) = \{u \in V, uv \in E\}$.

Définition 1.2. *Soit $G = (V,E)$ un graphe et $v \in V$ un sommet de G, le voisinage fermé de v , noté $N_G[v]$, est donné par:*

$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

Pour un sous ensemble $S \subseteq V$,le voisinage ouvert de S est :

$N_G(S) = \cup_{v \in s} N_G(v)$ *et le voisinage fermé de S est :*

$N_G[S] = N_G(S) \cup S$

Définition 1.3. *Pour un graphe $G = (V,E)$, on appelle degré d'un sommet v de G, noté $d_G(v)$ (ou $d(v)$), le nombre de ses voisins dans G. Un sommet de degré zéro est un sommet isolé.Un sommet de degré un est sommet pendant (feuille).*

Le degré maximum d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\Delta(G) = \max_{v \in V}\{d(v)\}$.

De même le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets.

Pour le graphe G de la Figure 1.2, nous avons $\Delta(G) = 4$ et $\delta(G) = 2$.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré, est un graphe régulier. un graphe est k-régulier si tous ses sommets sont de degré k .

Définition 1.4. *Soit $G = (V,E)$ un graphe simple, pour un sous-ensemble $A \subset V$, on désigne par $G[A]$ le sous-graphe de G engendré par A. Donc, le sous-graphe $G[A]$ est le graphe ayant A pour ensemble des sommets et dont les arétes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Dans ce cas, on dira que l'ensemble des sommets de A engendré ou induit le sous- graphe $G[A]$*

L'ensemble $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ représente un sous-graphe de G.

1.2.3 Chaînes et cycles

Une chaîne dans un graphe G est une suite $\{v_0, v_2, ..., v_k\}$ des sommets telle que deux sommets consécutifs v_i et v_{i+1} sont reliés par une arête. La longueur d'une telle chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose; k dans notre exemple.

Une chaîne qui ne contient pas deux fois le même sommet (à l'exception éventuelle de ses extrémités) est dite élémentaire.

Si aucun des arêtes composant la chaîne n'apparait plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne simple.

Un cycle est une chaîne simple $\{v_0, v_2, ..., v_k\}$ dont les deux extrémités sont confondues .$v_0 = v_k$.

1.2.4 Graphes particuliers

- Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe noté $\overline{G}$, défini par $V\left(\overline{G}\right) = V(G)$ et $E\left(\overline{G}\right) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.(Voir Figure 1.3).

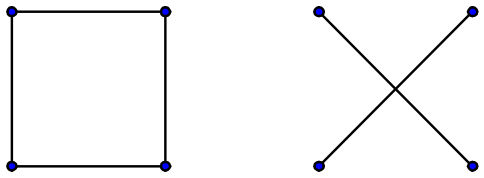


FIGURE 1.3. Un graphe et son complémentaire

- Un graphe G est dit connexe si pour toute paire des sommets distincts u et v de ce graphe est reliée par une chaîne. Une composante connexe d'un graphe G est sous-graphe connexe maximal.

- Un graphe G est dit complet si pour toute paire de sommet (x, y), il existe une arête les reliant, (toute les sommets sont deux à deux adjacents). Un graphe simple complet d'ordre n noté K_n. Dans ce graphe, chaque sommet est de degré $n - 1$.(Voir Figure 1.4).

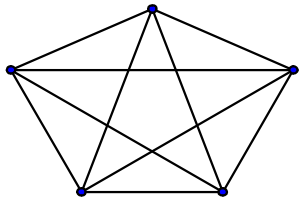


FIGURE 1.4. Un graphe complet K_5

- Un graphe G est dit planaire s'il peut être déssiné dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.(Voir Figure 1.5)

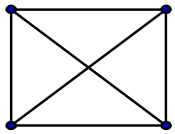


FIGURE 1.5. Un graphe planaire

- Un graphe discrét est un graphe sans arêtes.

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si V peut se partager en deux sous ensembles V_1 et V_2 stables. Un graphe biparti complet est un graphe biparti telle que touts les sommets de V_1 sont adjacents à touts les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$, plus généralement, Un graphe $G = (V, E)$ est dit k-parti $(k \geq 2)$, si V peut être partitionné en k stables V_1, V_2, ..., V_k, il est dit multiparti-complet si, pour tout, $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j. Notons qu'un graphe est multiparti-complet si et seulement s'il ne contient pas $K_1 + K_2$ comme sous graphe induit .(Voir Figure 1.6).

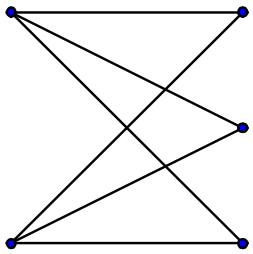


FIGURE 1.6. Le graphe $K_{2.3}$

- On appelle arbre, et on note par T, un graphe simple connexe, sans cycles. Un arbre T d'ordre n contient $(n - 1)$ arêtes. Un arbre est dit trivial (respectivement non

trivial) s'il contient un seul sommet (respectivement au moins deux sommets). On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1 (sommet pendant).(Voir Figure 1.7).

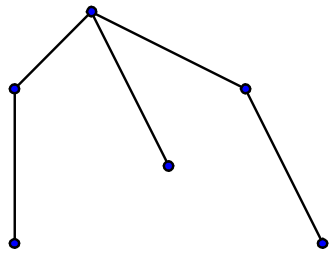


FIGURE 1.7. Un arbre T

- On appelle forêt un graphe non-connexe ou chaque composante connexe est un arbre. On appelle étoile, et on note par $K_{1,n}$, $(n \geq 3)$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles.

- Une étoile double noté $S_{p,q}$ est le graphe obtenu en ajoutant une arête reliant les deux centres des étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$.

- Un cactus est un graphe ou chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit unicycle. (Voir Figure 1.8).

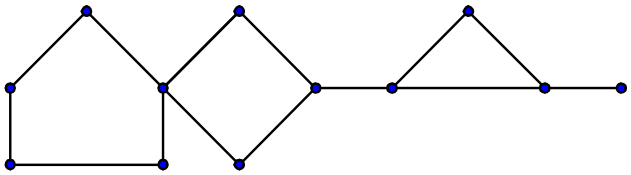


FIGURE 1.8. Un cactus

- Un graphe est dit sans griffe, s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit

1.2.5 Ensemble minimal, enemble maximal

Définition 1.5. *Soit $G = (V, E)$ un graphe.*

- On dit qu'un sous-ensemble A de V est minimal (respectivement maximal) , par rapport à une propriété P, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset A$ (resp $A \subset B$) telle que $G[B]$ vérifier la propriété P.

- On dit qu'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (respectivement maximum ou de taille maximal) par rapport à une propriété P, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ telle que $G[B]$ vérifier la propriété P et $|B| \langle |A|$ (resp $|B| \rangle |A|$).

1.2.6 quelques invariants des graphes

- Une clique d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

- Un stable S (appellé aussi ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous-ensemble des sommets de V deux à deux non adjacents.

  $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$ est appélle nombre de stabilité de G .

- Un couplage dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacents, on noté $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.

Soit M un couplage dans G. Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui saturé tous les sommets de G est dit couplage parfait dans G, si non, x est dit insaturé

CHAPITRE 2

La Coloration dans les graphes

2.1 Introduction

Dans la deuxième partie, nous présentons quelques types de coloration des graphes et leurs paramètres associées. Dans ce contexte, nous rappelons les définitions de la coloration classique et de la a-coloration ensuite nous focalisons essentiellement sur la notion de la b-coloration et le nombre b-chromatique. Ensuite, nous passons en revue les principaux travaux réalisés ou existants liés à la b-coloration et au nombre b-chromatique.

2.2 Coloration propre

Définition 2.1. *Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une application c qui associé à chaque sommet de $V(G)$ une couleur de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., k\}$ de telle façon que les sommets voisins (adjacents) ont des couleurs distinctes:*

$\{(uv)\} \in E(G) \implies c(u) \neq c(v)$ (*Voir Figure* 2.1).

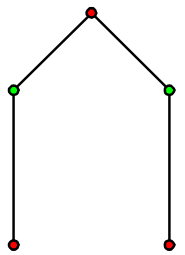


Figure 2.1. $\chi(P_5) = 2$

Définition 2.2. *De maniére équivalente, la classe de couleur d'une coloration de G en k couleurs est une partition de l'ensemble des sommets $V(G)$ en k ensembles stables (ou*

indépendants) $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup ..... \cup V_k$ *avec* V_i *=ensemble des sommets coloriés par la couleur* i $(i = 1, ..., k)$.

On dira que le graphe G admet une k-coloration.

Définition 2.3. *On appellera nombre chromatique d'un graphe* $G = (V, E)$*, noté* $\chi(G)$*, le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration. c'est à dire le plus petit nombre des couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.*

La coloration optimale (minimale) du graphe $G = (V, E)$ est appellée $\chi(G)$-coloration, ou bien $\chi(G)$-chromatique.

2.3 Bornes sur le nombre chromatique

Définition 2.4. *Un sous-graphe d'un graphe* $G = (V, E)$ *est un graphe dont les sommets et les arêtes sont des sommets et des arêtes de* G.

Définition 2.5. *Un sous-graphe est stable si ses sommets ne sont reliés par aucune arête. Le cardinal du plus grand stable est noté* $\alpha(G)$.

Le nombre chromatique d'un sous-graphe stable est toujours égale à un 1.Car aucun sommet n'y est relié.

Définition 2.6. *Un sous-graphe est une clique si tous ses sommets sont reliés les uns aux autres par une arête. Le cardinal de la plus grande clique est noté* $\omega\ (G)$.

Une clique de taille n est notée K_n .Le nombre chromatique des graphes complets K_n, est égal au degré $d_G(x)$,des sommets, soit $\chi(G) = n$.

Le nombre chromatique d'un sous-graphe clique est toujours égal au degré $d(x)$, de cette clique car les sommets sont tous liés.

Proposition 2.7. *[14]Le nombre chromatique d'un cycle élementaire est:*

- 1 si nombre des sommets est paire.
- 2 si nombre des sommets est impaire.

Proposition 2.8. *[2] Si H est un sous-graphe de $G = (V, E)$,alors $\chi(H) \leq \chi(G)$*

Proposition 2.9. *[2]Pour tout graphe G, $\chi(G) \geq \omega(G)$.*

Théorème 2.10. *[22]Pour tout graphe $G = (V, E)$ de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Preuve. Soit $\{S_1, S_2, ..., S_p\}$ une partition de V en stable tel que $p = \chi(G)$.Alors il existeun sommet $x_i \in S_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$ tel que $N_{S_j}(x_i) \neq \emptyset$ pour tout $i \neq j$, ceci implique que $d_G(x_i) \geq p - 1$. Par conséquent $\Delta(G) \geq p - 1 = x_k(G) - 1$. □

Ce pendant Brooks a amélioré cette borne.

Théorème 2.11. *[4] Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, Si G n'est ni un cycle d'ordre impaire, ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$*

Théorème 2.12. *[17]Si G est un graphe d'ordre n, Alors:*

$\chi(G) \times \alpha(G) \geq n$

$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$

Preuve. Colorions les sommets de G avec $k = \chi(G)$ couleurs, et soit S_i l'ensemble des sommets de couleurs α_i, c'est un ensemble stable, donc:

$S_1 \cup S_2 \cup ..... \cup S_k = V$

$|S_1 \cup S_2 \cup ..... \cup S_k| = |V| = n$

$n = \sum |S_i| \leq k\alpha(G) = \chi(G) \times \alpha(G)$

d'où $\chi(G) \times \alpha(G) \geq n$

D'autre part; si l'on colorié l'ensemble stable maximum S par une premiére couleur, on peut utiliser $n - |S| = n - \alpha(G)$ couleurs pour colorier $V \backslash S$, d'où $\chi(G) \leq (n - \alpha(G)) + 1$. □

Proposition 2.13. *[14]Si $\overline{G}$ est le graphe simple complémentaire du graphe simple G, Alors $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.*

2.4 La a-coloration

Définition 2.14. *Une a-coloration est une coloration propre des sommets telle que chaque paire des couleurs différentes i et j, les deux classes des couleurs i et j engendre un sous-graphe contenant au moins une arête.*

Le nombre a-chromatique d'un graphe G, noté $\psi(G)$ est le nombre maximum des couleurs pour lequel G possède une a-coloration (Voir Figure 2.2).

FIGURE 2.2. $\psi(P_4) = 3$

2.5 La Coloration de Grundy

Définition 2.15. *Soit G un graphe, une coloration de Grundy est une coloration propre des sommets telle que pour tout sommet $u \in C_i$, u est adjacent à un sommet coloré j pour chaque $j < i$.La notion de k-colorable sera notée k-Grundy colorable pour la colration de Grundy en k-couleurs. Le nombre de Grundy de G, noté $\gamma(G)$ est le plus grand entier k tel que G est k-Grundy colorable.*

2.6 La b-coloration

Définition 2.16. *La b-coloration est une coloration propre des sommets tel que chaque classe de couleur i contient au moins un sommet qui a un voisin dans toutes les autres classes des couleurs appellée coloration dominante, et le sommet est dit sommet b-dominant pour la couleur i .*

Définition 2.17. *On appelle nombre b-chromatique, le nombre maximum de classes de couleurs dans une b-coloration (coloration dominante) noté $b(G)$.*

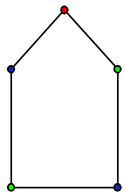


FIGURE 2.3. $b\,(C_5) = 3$

Une coloration dominante d'un graphe G avec k couleurs est une $(k)b$-coloration.

Définition 2.18. *L'ensemble des sommets b-dominants dans une b-coloration (coloration dominante) forment un système appelé système b-dominant S d'un graphe G tel que $|S| = b(G)$.*

Définition 2.19. *Classer les sommets u_i $(i = 1, .., n)$,d'un graphe G selon leurs degré croissant tel que $d_G(u_1) \geq d_G(u_2) \geq .. \geq d_G(u_i) .. \geq d_G(u_n)$ d'où $d_G(u_i)$ degré de u_i. Soit le m-degré de G, noté $m(G)$ définie comme suit: $m(G) = max\{i : d(u_i) \geq i - 1\}$.*

Un sommet u est dense s'il vérifié $d(u) \geq m(G) - 1\}$.

Remarque 2.20. *Un graphe G admet une coloration dominante avec k couleurs, il doit avoir au moins k sommets de degré supérieur à $k - 1$*

Puisque toute b-coloration vérifie la définition de la a-coloration, alors le résultat suivant est immédiat.

$$b(G) \leq \psi(G).$$

2.7 Quelques résultats existants sur la b-coloration

Nous allons illustrer quelques résultats classiques liées à la b-coloration, Kouider et Mahéo ont données les valeurs exactes du nombre b-chromatique pour des graphes simples:

pour le graphe discrèt $b(S_n) = 1$

pour la chaîne $b(P_n) = 2$ si $n \leq 4$ et $b(P_n) = 3$ si $n \geq 5$.

pour le cycle $b(C_n) = 2$ si $n = 4$ et $b(C_n) = 3$ si $n \neq 4$.

D'autres études ont essayer de borner $b(G)$, Irving et Manlove et Kouider et Mahéo ont montés que le m-degré de G est une borne supérieur du nombre b-chromatique.

Proposition 2.21. *[15][21]Soit l'ensemble des sommets $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ d'un graphe G classées dans l'ordre décroissant de leurs degrés alors $b(G) \leq m(G)$.*

Preuve. Dans une coloration dominante de G avec $b(G)$-couleur, il existe au moins $b(G)$ sommets de degré au moins $b(G) - 1$.

Si $b(G) \geq m(G) + 1$, alors il existe au moins $b(G)$ sommets de degré supérieur ou égale à $m(G)$. Autrement dit, il y a au moins $m(G) + 1$ sommets de degré supérieur ou égal à $m(G)$, contradiction avec la définition de $m(G)$. □

la différence entre le nombre b-chromatique et le m-degré d'un graphe G peut être trés grande.

Exemple 2.22. *Pour K_n on a: $m(K_n) = b(K_n) = n$, par contre pour $K_{n,n}$ on a: $m(K_{n,n}) = n$ et $b(K_{n,n}) = 2$.*

Proposition 2.23. *[18]Toute $\chi(G)$-coloration est une coloration dominante.*

Preuve. Soient G un graphe, c une coloration minimale de G et $S = \{S_1, S_2, ..., S_\chi\}$ une partition minimale en $\chi(G)$-classes de couleurs. Si la coloration c n'est pas dominante alors, il existe au moins une classe S_i de couleur i qui ne contient aucun sommet b-dominant. Dans ce cas, les sommets de S_i peuvent être transférés dans les autres classes S_j, $j \neq i$, contradiction avec la minimalité de la coloration c. □

D'où la déduction du corollaire suivant:

Corollaire 2.24. *pour tout graphe G on a: $b(G) \geq \chi(G)$.*

De plus tout $b(G)$-coloration vérifie la définition de la a-coloration alors on déduit le corollaire suivant:

Corollaire 2.25. *Pour tout graphe G on a: $\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$.*

R.W.Irving et D.F.Manlove ont montrés que $\Delta(G)+1$ et une borne supérieure pour le nombre b-chromatique d'un graphe..

Proposition 2.26. *[18]Tout graphe G satisfait, $b(G) \leq \Delta(G)+1$, où $\Delta(G)$ et le degré maximum de G.*

Preuve. Si u_i est un sommet b-dominant de couleur i alors il vérifie $d(u_i) \geq b(G)-1$. Et comme $\Delta(G)$ est le degré maximum de G, alors $\Delta(G) \geq d(u_i) \geq b(G)-1$. □

M.Kouider et M.Mahéo ont aussi donner d'autres bornes supérieures.

Proposition 2.27. *[19]Pour tout graphe G de taille m, on a : $b(G) \leq \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2m(G)}$.*

Preuve. Soit donnée une partition en b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs.

Alors, il existe au moins une arête entre deux classes de couleur quelconques. Donc, $m(G) \geq C_b^2 = \frac{b(b-1)}{2}$.

$b^2(G) - b(G) - 2m(G) \leq 0$ la résolution de cette inéquation donne la borne de la proposition.

Proposition 2.28. *[20]Si un graphe d'ordre n, alors $b(G) \geq \dfrac{n}{\alpha(G)}$ où $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité.*

Preuve. Soit une partition $S = \{S_1, S_2, ..., S_b\}$ en b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs, comme $|S_i| \leq \alpha(G), 1 \leq i \leq b(G)$, alors $n = \sum_{i=1}^{b(G)} |S_i| \leq b(G)\alpha(G)$ d'où la formule. □

Proposition 2.29. *[20]Soit un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n et $\overline{G}$ son graphe complémentaire, Alors $b(G)b(\overline{G}) \geq n$.*

Preuve. Soit $S = \{S_1, S_2, ..., S_b\}$ une partition en b-coloration de $\overline{G}$ avec $b(\overline{G})$ couleurs, les stables S_i sont des cliques dans G, donc $|S_i| \leq \chi(G)$, $1 \leq i \leq b(\overline{G})$, d'où $n = \sum_{i=1}^{b(\overline{G})} |S_i| \leq b(\overline{G})\chi(G) \leq b(\overline{G})b(G)$. □

Proposition 2.30. *[18]Pour tout $n, p \in N$, $b(K_{n,p}) = 2$, où $K_{n,p}$ est un graphe biparti complet.*

Preuve. Soit $V(K_{n,p}) = A \cup B$ avec $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$. comme $\chi(K_{n,p}) \leq b(K_{n,p})$, posons $b(K_{n,p}) = h \geq 2$. Supposons que a_1 est un sommet b-dominant de couleur 1 dans une b-coloration de $K_{n,p}$ avec h couleurs. Donc, les couleurs 2,3,...,h

apparaissent dans B, et tout sommet a_i, $2 \leq i \leq n$ a la couleur 1. En conséquence, un sommet b_j, $1 \leq j \leq p$, ne peut pas dominer une couleur autre que 1, et donc h=2. □

Proposition 2.31. *[20]Si $G = (V, E)$ est un graphe non connexe avec des composantes connexes $C_1, C_2, ..., C_p$, $p \geq 2$ alors $b(G) \geq max\{b(C_i);\ 1 \leq i \leq p\}$.*

Preuve. Comme $b(G) \geq b(C_i)$, $1 \leq i \leq p$, celà implique que $b(G) \geq max\{b(C_i);\ 1 \leq i \leq p\}$. □

Remarque 2.32. *La différence entre les deux membres de cette inégalité peut être non bornée. En effet, il suffit de considérer le graphe composé de p étoiles de sommets disjoints, chacune est d'ordre p. On constate aisement que $b(G) = \max\{b(C_i),\ 1 \leq i \leq p\} + p - 2$.*

□

2.7.1 La b-coloration dans les arbres

b-coloration dans les arbres pivotés :

Définition 2.33. *soient les sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ d'un graphes G ordonnés tels que: $d(v_1) \geq d(v_2) \geq .. \geq d(v_i) \geq .. \geq d(v_n)$ où $d(v_i)$ est le degré de v_i , le m-degré (noté m(G)).*

Pour trouver le nombre b-chromatique d'un arbre Irving et manlove ont montré qu'on peut trouver presque toujours une b-coloration de l'arbre T en utilisant m couleurs sauf dans le cas suivant.

Définition 2.34. *Un arbre T est dit pivoté si T admet exactement m sommets denses et contient un sommet v distingué (appelé pivot), non dense tel que:*

a) tout sommet dense est adjacent à v ou à un sommet dense adjacent à v.

b) tout sommet dense adjacent à v et à un autre sommet dense est de degré $m - 1$

Remarque 2.35. *Reconnaitre si un arbre $T = (V, E)$ d'ordre n est pivoté se fait en temps polynomial.*

Théorème 2.36. *[21]Si $T = (V, E)$ est pivoté, alors $b(T) = m(T) - 1$.*

Preuve. On note v le pivot de T, et $v_1, v_2, ..., v_m$ $(m < n)$ les sommets denses de T, $v_1, v_2, ..., v_p$ $(p \leq m)$ sont les sommets denses adjacents à v et $v_1, v_2, ..., v_q$ $(q \leq p)$ sommets denses adjacents au sommet v qui ont au moins un sommet dense dans leur voisinage. On fait les obsevations suivantes:

• *$p \geq 2$,sinon $p = 1$ et donc v_1 serait de degré m, contradiction avec $d(v_1) = m(T) - 1$*

• *$q \geq 1$,sinon $q = 0$ et donc $p = m$ donc $d(v) = m$, ce qui implique que le sommet v est dense, contradiction.*

• *$p = 2$ on a forcément $q = 2$, sinon soient v_1 et v_2 les sommets voisins de v et $v_3$le sommet voinsin de $v_1$ce qui contredit $d(v_1) = m - 1$.*

On montre que $b(T) < m$, supposons au contraire qu'il existe une b-coloration utilisant m couleur telle que la couleur de v_i soit égale à i, $1 \leq i \leq m$, comme v ne peut prendre aucune couleur de 1 à p (sinon la coloration n'est pas propre dans T) ni aucune couleur de $p + 1$ à m car $d(v_j) = m - 1$ $(1 \leq j \leq q)$ et v_j ne peut être adjacent à deux sommets de la même couleur et donc v ne peut être coloré, contradiction. Donc $b(T) \leq m - 1$. On construit alors une (m-1) b-coloration de l'arbre T de la maniére suivante:

Comme $p \geq 2$ et $q \geq 1$, soient v_1 et v_2 les deux sommets denses adjacents au sommet v, il existe un sommet v_r adjacent à v_1; pour $p + 1 \leq r \leq m$. □

Algorithm 1. *(Détermination d'une (m-1) b-coloration dans un arbre pivoté)*

Etape *1: Colorer tout sommet v_i,$2 \leq i \leq m$ par la couleur i. Affecter les deux couleurs r et 2 aux sommets v et v_1 respectivement.*

Etape *2: On colore les sommets non denses adjacents aux sommets denses. Pour le faire on construit les ensembles suivants:*

$$R_i = \{2, 3, ..., m\} \backslash \{i\}$$

et

$$C_i = \{c(v_j),\ 1 \leq j \leq n,\ v_j \in N(v_i),\ v_j \text{ coloré}\}, 2 \leq i \leq m;$$

ensemble des couleurs manquantes et existantes dans le voisinage de v_i respectivement; $U_i = \{v_j,\ m + 1 \leq j \leq n,\ v_j \in N(v_i)\ \ v_j \text{ non coloré}\}$; $2 \leq i \leq m$ sont les sommets non colorés dans le voisinage de v_i. Par construction le sommet v_i ne peut être adjacent à deux sommets de même couleur. Donc $|C_i| + |U_i| = d(v_i) \geq m - 1 > m - 2 = |R_i|$

et puisque $C_i \subseteq R_i$ *on a* $|U_i| \geq |R_i \backslash C_i|$. *Soit* $R_i \backslash C_i = \{r_i^1, ..., r_i^{n_i}\}$ *et pour* $\{u_i^1, ..., u_i^{n_i}\}$ *sommets choisis dans* U_i *où* $n_i \geq 0$, *on pose:* $c(u_i^j) = r_i^j$, $1 \leq j \leq n_i$.

Etape 3*: Soit* v_i *sommet non coloré à l'étape* 2 *comme* $d(v_i) < m-1$, $m+1 \leq i \leq n$. *chercher* $j \in \{2, ..., m\} \backslash C_i$ *où* $C_i = \{r_i^1, ..., r_i^{n_i}\}$, *poser ensuite* $c(v_i) = j$.

b-coloration dans les arbres non pivotés :

Définition 2.37. *1-* $\forall v_i \in V"$, $v_i \in N(v)$, *où* $v_i \in N(N(v) \cap V")$

2- $\forall v_i \in V"$, *si* $v_i \in N(v)$ *et* $v_i \in N(V")$, *alors on a* $d(v_i) = m-1$.

Remarque 2.38. *Si* v *est non dense et* $V' = V"$, *alors l'arbre* T *serait pivoté.*

Définition 2.39. *Soit* V' *l'ensemble des sommets denses de* T *et* V'' *est un sous-ensemble de* V' *de cardinalité* m. V'' *est dit un bon ensemble relativement à* G *si:*

1- V'' *n'encercle aucun sommet de* $V \backslash V''$

2- $\forall u \in V \backslash V"$ *tel que* $d(u) \geq m$, u *est adjacent à un sommet* v *de* V'' *tel que* $d(v)$=m-1.

Lemme 2.40. *[21]Si* T=(V,E) *est un arbre non pivoté, on peut toujours construire un bon ensemble.*

Preuve. En effet, soit V' *l'ensemble des sommets denses de* T, *en ordonnant les sommets denses suivant leurs degrés décroissants, on peut choisir un ensemble* V'' *de cardinalité* m, *de maniére que tout sommet de* $V \backslash V''$ *aity un degré plus petit que* m. *Notons* V=$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *et* V''=$\{v_1, v_2, ..., v_m\}$. *on suppose que:*

1. V'' *encercle un sommet* $v \in V \backslash V"$ *sinon* V'' *serait un bon ensemble*

2. $v_i \in V" \cap N(v)$, $1 \leq i \leq p$ $(p \leq m)$

3. $v_i \in V" \cap N(v)$ *et* $v_i \in V" \cap N(v_d)$, $v_d \in V"$, $1 \leq i \leq q$ $(q \leq p)$

Observons que:

• $p \geq 2$ *sinon* p=1 *et* v_1 *sera de degré* m, *alors qu'il est de degré* m-1.

• $q \geq 1$ *sinon* $q = 0$, *donc* $p = m$ *ce qui entraine* v *sommet dense* $(d(v) \geq m)$, *contradiction avec* $d(v) < m$

• *Comme* $q \geq 1$, $\exists r \in \{p+1, ..., m\}$ *tel que* $v_r \in V"$ *et est adjacent à* v_1.

deux cas s'imposent:

Cas 1. *Si v est un sommet dense alors $d(v) = m-1$ (puisque v est dense et $v \notin V$" donc $d(v)<m$), soit $W = (V"\backslash\{v_2\}) \cup \{v\}$ et $|V"| = m$, le sommet v_2 existe puisque $p \geq 2$ et par le choix de V'', v_2 est le seul sommet qui n'est pas dans W pouvant avoir un degré m puisque v_2 est adjacent à $v \in W$ et $d(v)=m$-1 et W satisfait la condition 2 de la définition 4.7. On montre que W n'encercle aucun sommet de $V\backslash W$. Si un sommet $t \notin W$ et si:*

1. *t est adjacent à un sommet v_i, $p+1 \leq i \leq m$, alors t est à distance 3 de $v \in W$*

2. *t est adjacent à un sommet v_i, $1 \leq i \leq p$, alors t est à distance 3 de tout sommet $v_k \in W$ $k \neq i$, $1 \leq k \leq p$*

3. *t est adjacent au sommet $v \in W$, alors t est à distance 3 de v_{p+1}, et donc $v_2 \notin W$, $\exists$ $v_{p+1} \in N(v_1)$ tel que v_2 soit à distance 3 de v_{p+1}.*

Cas 2. *Si v est un sommet non dense $|V'| \neq m$, sinon T est pivoté au sommet v contradiction. Donc $|V'| > m, \exists u \in V'\backslash V"$ et on pose $W = (V"\backslash\{v_1\}) \cup \{u\}$ et supposons que W encercle un sommet x de $V\backslash W$, alors x serait le seul sommet de $V\backslash W$ se trouvant sur une chaine reliant toute paire de sommets non adjacents de W. Mais les sommets v_1 et v n'appartiennent pas à W, et se trouvent sur une chaine reliant les sommets v_2 et v_r de W ceci contradit le fait que W encercle un sommet x de $V\backslash W$. W est donc un ensemble bon car il vérifie la deuxieme propriété de la définition, puisque $d(v) < m-1$ et $d(v_1) = m-1$ et tout sommet en dehors de W est de degré plus petit que m.* □

On construit par l'algorithme suivant un bon ensemble, pour cela, soit T un arbre avec l'ensemble des sommets $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et V' est l'ensemble des sommets denses de T.

Algorithm 2. *Début*

Etape 1*: Choisir $V'' \subset V'$ tel que $|V'| = m$, soit $V" = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ et $\forall v \in V\backslash V"$, $d(v) < m$ (un tel choix est possible par définition du m-degré)*

Etape 2*: Si V'' n'encercle aucun sommet $v \in V\backslash V"$, alors V'' est un ensemble bon. sinon, $\exists v \in V\backslash V"$ tel que V'' encercle un sommet $v \in V\backslash V"$, aller à l'etape 3.*

Etape 3*: Tester $d(v)$*

Si $d(v)=m$-1, tel que l'arête (v_1, v_2) n'existe pas, choisir $W=(V''\backslash\{v_2\}) \cup \{v\}$ et W serait un bon ensemble.

Si d(v)<m-1, aller à l'etape 4.

***Etape** 4:*

Si $|V'| = m$, G est pivoté, aller faire une (m-1)b-coloration

Si $|V'| > m$, $W = (V"\backslash\{v_1\}) \cup \{u\}$, $u \in V'\backslash V"$, W est un bon ensemble

Fin.

Théorème 2.41. *[15]Si T est un arbre non pivoté, alors on a $b(T) = m(T)$.*

Preuve. Notons $W = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ un bon ensemble de T qui existe car T est non pivoté, avec $c(v_i) = i \ \forall i, 1 \leq i \leq m$. Il s'agit de montrer en premier lieu que cette coloration peut être étendue en une m-b-coloration partielle de T telle que v_i soient des sommets b-chromatiques et ensuite que cette coloration est étendue à une coloration b-chromatique dans tout le graphe utilisant m couleurs. Pour le faire, on pose $U = N(W)\backslash W$, et on partitionne U en deux sous-ensembles appelés: U sous-ensemble des sommets u intérieurs tels que u se trouve sur une chaine de longueur au plus trois reliant deux sommets de W et U_0 sous ensemble des sommets extérieurs, respectivement. On commence par étendre la coloration aux sommets intérieurs, puis aux sommets extérieurs et enfin aux sommets de $V\backslash U$. On supposera que si dans $W, i < j$, alors le sommet v_i a au □

Détermination d'une *m-b*-coloration dans un arbre non pivoté.

Algorithm 3. ***Etape** 1: Choisir $W = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ un ensemble bon et poser $c(v_i) = i, 1 \leq i \leq m$*

***Etape** 2: Considérer $U = N(W)\backslash W = U_i \cup U_0$. où U_i sont les sommets de U se trouvant sur une chaîne de longueur au plus trois reliant deux sommets de W (sommets intérieurs). $U_0 = U\backslash U_i$ est l'ensemble des sommets extérieurs;*

ordonner les sommets de $W = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ comme suit:

$i < j si \ |N(v_i) \cap U_i| \geq |N(v_j) \cap U_i|$

poser $W = \{v_1, ..., v_p\} \cup \{v_{p+1}, ..., v_q\} \cup \{v_{q+1}, ..., v_m\}$ où:

$|N(v_i) \cap U_i| \geq 2$, si $1 \leq i \leq p$

$|N(v_i) \cap U_i| = 1$, si $p + 1 \leq i \leq q$

$|N(v_i) \cap U_i| = 0$, si $q + 1 \leq i \leq m$

Etape 3*: $N(v_i) \cap U_i = \{x_i, 1 \leq i \leq s\}$ est l'ensemble des sommets intérieurs non colorés voisins de v_i $(1 \leq i \leq p)$.*

tester si $s < 1$:

- Si oui $c(x_j) = c_j \neq c_i = c(v_i)$ et $c(x_j) = c_{j+1}$ et $c(x_s) = c_1$ où $1 \leq j \leq s-1$

- Si s=1, x_i est seul sommet intérieur voisin de v_i qui soit non coloré $c(x_1) = c(x_i)$, x_1 et $x_i \in N(v_i) \cap U_i$

Etape 4*: z_i sommet intérieur voisin unique de v_i, $p+1 \leq i \leq q$*

$c \in C \Longleftrightarrow (v_c \in N(z_j)) \curlyvee (\exists d, v_c \in N(v_d) \curlywedge v_d \in N(z_j) \curlywedge d(v_d) = m-1)$ où $1 \leq c, d \leq m$, $c(z_i) = c_j \notin C$ et qui ne soit pas dans le voisinage de v_i.

Etape 5*: Colorer les sommets extérieurs U_0 voisins de v_i et on pose:*

U_i ensemble des sommets voisins de v_i non colorés $= \{v_j, m+1 \leq j \leq n$ et $v_j \in N(v_i)$ et v_j non coloré$\}$

C_i ensemble des couleurs existantes dans $N(v_i) = \{c(v_j) : 1 \leq j \leq n$ et $v_j \in N(v_i)$ et v_j coloré$\}$

R_i ensemble des couleurs manquantes dans $N(v_i)$, $R_i = \{1, ..., m\} \backslash \{i\}$.

donner les $R_i \backslash C_i = \{r_1^i, ..., r_{n_i}^i\}$ couleurs manquantes aux sommets $\{u_1^i, ..., u_{n_i}^i\} \subseteq U_i$

Etape 6*: Tout sommet v_i restant incoloré est tel que $d(v_i) \leq m-1$*

$C_i = \{r_1^i, ..., r_{n_i}^i\}$ les couleurs existantes dans le voisinage de v_i

pour $j \in (\{1, ..., m\} \backslash C_i)$, poser $c(v_i) = j$, couleur qui n'existe pas dans le voisinage de v_i.

Maintenant on peut formuler l'algorithme de détermination d'une b-coloration dans un arbre quelconque.

Algorithm 4. *Début*

Etape 1*:T arbre et V ' ensemble des sommets denses de T.*

Etape 2*: Choisir $V'' \subset V'$ ou $|V'| = m$ et $d(v) < m$pour tout $v \in V \backslash V"$ (choisir les m premiers sommets ordonnés dans le sens décroissant de leurs degrés) $V" = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$.*

Etape 3*: Tester si v'' encercle un sommet $v \in V \backslash V"$*

Si $V"$ n'encercle aucun sommet de $V \backslash V", V"$ est bon. Aller faire une m-b-coloration de T (Algorithme 3)

Sinon aller à l'étape 4.

Etape 4*: Déterminer* v *tel que* $d(v)<m$

Si $d(v)=m$-1, $W=(V''\setminus\{v_2\})\cup\{v\}$ *est bon. Aller déterminer une* m*-b-coloration de* T *(Algorithme 3).*

*Sinon aller à l'étape*5.

Etape 5*: Si* $|V"| > m$, *déterminer* $u \in V'\setminus V"$, *et poser* $W=(V''\setminus\{v_1\})\cup\{u\}$, W *est bon. Aller faire une* m*-b-coloration (Algorithme3)*

Si $V'=m$, *aller à l'étape* 6.

Etape 6*:* T *est un arbre pivoté où* $|V'| = |V"| = m$ *et* v *est le pivot. Aller faire une* (m-1) *b-coloration (Algorithme3).*

Fin.

CHAPITRE 3

Influence subdivision d'une arête sur le nombre b-chromatique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'effet de la subdivision d'une arête quelconque sur le nombre b-chromatique, Plus précisément sur la dimunition du nombre b-chromatique.

Définition 3.1. *Un graphe G est dit sb-critique si pour tout arête $e \in E(G)$, $b(G_e) < b(G)$*

.

Théorème 3.2. *[13]Soient $G = (V, E)$ un graphe sb-critique et c une b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs alors:*

1*) Le b-système S de c est unique*

2*) $V \backslash S$ est un stable*

3*) $\forall u \in V \backslash S \;\; d_G(u) \leq |S| - 2$*

4*) $\forall v \in V$, $d(v) \geq 2$.*

Preuve. 1*) Supposons qu'il existe u_1 et u_2 deux b-sommets de c qui ont la même couleur, ceçi implique que tous les voisins de u_i $(i = 1, 2)$ sont des b-sommets. Sinon $N(u_i)$ $(i = 1ou2)$ contient x un non b-sommets, En subdivison l'arête (x, u_i), colorons le sommet xu_i par la couleur de x et colorons x par une couleur différente de la couleur de xu_i. alors $b(G_{xu_i}) \geq b(G)$ contradiction, donc tous les voisins de u_i $(i = 1, 2)$ sont des b-sommets dans ce cas soit $y \in N(u_i)$ $(i = 1ou2)$ une b-coloration de G_{u_iy} est obtenue en colorant u_iy par une couleur manquante et y garde son couleur ceci implique que $b(G_{u_iy}) \geq b(G)$, contradiction.*

2*) Soient $x, y \in V \backslash S$, d'aprés 1) x et y sont non b-sommets si l'arête (x,y) existe dans G, alors subdivisons cette arête, alors $b(G_{xy}) \geq b(G)$, contradiction.*

3*) Soit* $x \in V\backslash S$*, supposons que* $d_G(x) \geq |S| - 1$*, alors* x *est donc un b-sommet, contradiction.*

4*) S'il existe* $v \in V(G)$*, tel que* $d_G(v) = 1$*, et soit* u *le support adjacent à* v *subdivison l'arête* (u, v)*, alors* $b(G_{uv}) \geq b(G)$ *contradiction.* □

Théorème 3.3. *[6]Si* $G = (V, E)$ *est un graphe sb-critique, alors* $b(G) = \Delta(G) + 1$.

Preuve. Soit c une b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs, et soit S le b-système de c. □

$\forall x \in S$, on a $d_G(x) \geq b(G) - 1$.Si $d_G(x) > b(G) - 1$, alors il existe deux sommets $v_1, v_2 \in N(x)$ tel que $C(v_1) = C(v_2)$ en la même couleur, ceçi implique que l'un des deux sommets v_i (i=1 ou 2) n'est pas un b-sommet, car sinon $b(G_{xv_i}) \geq b(G)$, $i = 1$ *ou* 2, contradiction avec le théorème 3.2 donc $d_G(x) = b(G) - 1$ $\forall x \in S.\forall y \in V\backslash S$, $d_G(y) \leq b(G) - 2$, d'aprés le théorème 3.2 , donc les sommets de S sont de degré $\Delta(G)$. c'est à dire $\forall x \in S$ $d_G(x) = \Delta(G)$,d'où $d_G(x) = b(G) - 1 = \Delta(G) \Rightarrow b(G) = \Delta(G) + 1$ (Voir Figure 3.1).

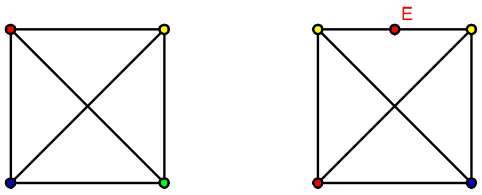


FIGURE 3.1. $b(G) = 4$ et $b(G_E) = 3$

Théorème 3.4. *[6]Un graphe d-régulier est sb-critique si et seulement si* G *est un graphe complet.*

Preuve. Soit G un grapheμ d-régulier sb-critique, $\Delta(G) = d$, d'aprés le théorème 3.3 $b(G) = \Delta(G) + 1 = d + 1$, et soit c une b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs, et S le b-système de c. On a $|S| = b(G)$ par définition de S. Supposons le contraire que S n'est pas une clique, G=(V,E) est d-régulier et $V\backslash S$ est un stable, alors il existe un sommet

$v \in V \backslash S$ qui est adjacent à d sommets de S, donc d'aprés théorème3.2. v est un b-sommet de couleur répétée, contradiction avec le théorème 3.2, donc $V \backslash S$ est un ensemble vide ce qui veut dire que S est une clique d'ordre $d + 1$. □

Corollaire 3.5. *Si T est un arbre, alors T n'est pas sb-critique.*

3.1.1 Les graphes P_4-sparse *sb*-critiques

Définition 3.6. *Un graphe G est dit P_4-sparse, si tout sous-graphe à cinq sommets de G contient au plus un P_4*

Définition 3.7. *Un graphe scindé est un graphe dont les sommets peuvent être partitionner en deux sous ensembles S et K où K est une clique et S un stable* (*Voir Figure* 3.2).

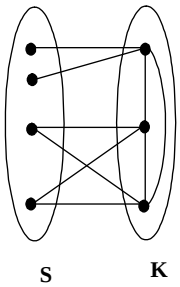


FIGURE 3.2. Exemple d'un graphe scindé

Maintenant nous allons définir la famille de graphes suivante.

Définition 3.8. *Une araignée est un graphe qui peut être partitionné en trois ensembles de sommet S, K et R, avec R éventuellement vide, tels que :*

1. S est un stable et K est une clique et $|S| = |K| \geq 2$;

2. Tous les sommets de R sont adjacents à tous les sommets de K et à aucun sommet de S;

3. Il existe une bijection $f : S \longrightarrow K$ telle que:

(3.1) soit $\forall x \in S$, $N(x) \cap K = \{f(x)\}$.

(3.2) soit $\forall x \in S$, $N(x) \cap K = K \setminus \{f(x)\}$.

Une araignée qui vérifie la condition (3.1) est dit fine, et épaisse si elle vérifie la condition (3.2) , Une exemple d'araignée ,(a) araignée fine et (b) araignée épaisse.

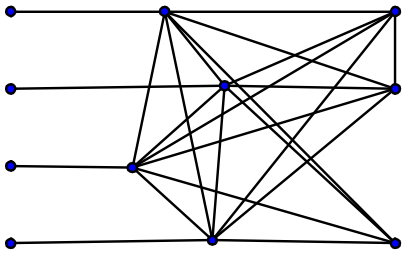


FIGURE 3.3. (a) araignée fine

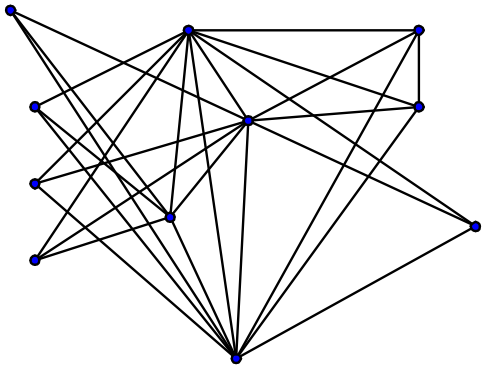


FIGURE 3.4. (b) araignée épaisse

Il est à noter que le graphe complémentaire d'une araignée fine est une araignée épaisse et vice versa.

Les graphes P_4-sparse ont été caractérisés par Hoàng dans [10] et indépendamment par Jamison & Olariu dans [11]

Théorème 3.9. *[10][11]Si G est un graphe P_4-sparse, alors G où $\overline{G}$ est non connexe, où G est une araignée.*

Du théorème 3.9 on peut déduire l'observation suivante:

Observation 3.10. *Soit G un graphe P_4-sparsenon connexe. Alors, toute composante connexe de G est soit une araignée où le joint le deux graphes.*

Définition 3.11. *Un graphe appartient à la famille $\mathcal{F}$, s'ils existent deux entiers k et p avec $2 \leq p \leq \frac{k}{2}$, tels que le graphe $G = (V, E)$ contient p composantes connexes G_i $(i = 1, ..., p)$ satisfait les conditions suivantes:*

- $V(G_i) = K^i \cup S^i \qquad i = \overline{1, p}$
- $V(G_i) = V(G_j) \qquad i = \overline{1, p}\ ,\ j = \overline{1, p}.$
- K^i Clique, S^i Stable.$|S^i| = |K^{i+1}|$, $1 \leq i \leq p$.
- Tout sommet de S^i est adjacent à tout les sommets de K^i
- $|K^i| \geq 2$, $|S^i| \geq 2$.
- $\sum_{i=1}^{p} |K^i| = k$.
- $\Delta(G) = \Delta(G_i) = \sum_{i=1}^{p} |K^i| - 1,\ i \in \{1, ..., p\}$ .Une exemple dans la Figure 3.5.

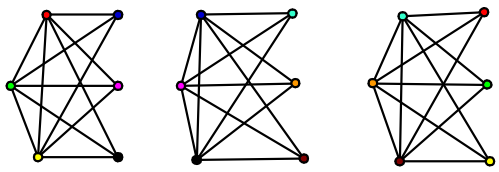


FIGURE 3.5. La graphe G contient trois composantes connexes G_1, G_2, et G_3.

Observation 3.12. *Si $G \in \mathcal{F}$ alors il est sb-critique.*

Observation 3.13. *Soit $G \in \mathcal{F}$. Alors $b(G) = \Delta(G) + 1$.*

Preuve. Soit $G \in \mathcal{F}$, a b-coloration de graphe G avec $\Delta(G) + 1$ couleurs par chaque coloration $\bigcup_{i=1}^{i=p} K_i$ avec couleur distincte, pour toute stable S_i, chaque coloration de $|S_i|$ avec sommets a couleur distincte tel que cette couleur n'apparaissent pas K_i . □

Lemme 3.14. *[10]Soit $p \geq 1$ un entier. Soit G' et K_p deux graphes de sommets disjoints où K_p est un de p sommets,et soit $G = G' + K_p$. Alors, ona $b(G) = max\{b(G'), p\}$*

Maintenant, nous donnons une caractérisation des graphes P_4-sparse *sb* critiques.

Théorème 3.15. *[11]Soit $G = (V, E)$ un graphe P_4-sparse, Alors G est sb-critique si et seulement si G est un graphe complet où $G \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe P_4-sparse, Il est facile vérifier que les graphes complets sont sb critiques. Par ailleurs, l'observation 3.9. *implique que tout graphe de $\mathcal{F}$ est sb-critique. Il suffit donc de montrer la condition nécessaire. On peut distinguer trois cas.* □

Cas 1 $\overline{G}$ est non connexe . Alors G est le joint de deux graphe G_1 et G_2 ,alors dans chaque coloration de G , aucune couleur ne peut apparaître dans G_1 et G_2, Si $b(G) \geq 3$ alors au moins l'un des graphes G_1 où G_2 ,G_1 contient au moins deux sommets adjacent u , v, Par le théorème 3.2 au moins un des sommet u, v, et que u est b-sommet par le théorème 3.4, Tous le sommet de G_2 sont des b-sommet avec des couleur distinctes , Étant donne que les couleurs attribuées a G_2 n'apparaissent pas dans G_1 .

Cas 2 G est non connexe , Alors G est l'union d'au moins deux composante connexe de G .

Fait 1. *G_i n'est pas une clique .*

Preuve. Supposons que G_i est une clique d'ordre p , Puisque G est non connexe alors $G = G' + G_i$,où G' est un sous-graphe induit de G . Comme G est sans sommet isolés alors $E(G') \neq \emptyset$ et $|V(G_i)| \geq 2$,Le lemme 3.12 implique que $b(G) = b(G')$ ou p . Si $b(G) = p$ alors $b(G_{uv}) \geq b(G)$ pour toute arête uv de G' sinon $b(G_{uv}) \geq b(G)$ pour toute

arête uv de G_i , Ona donc contradiction dans les deux cas, ce qui prouve que G_i n'est pas une clique .

Fait 2. $\Delta(G_i) = \Delta(G)$.

□

Preuve. D'aprés le théorème 3.13 implique que G_i ne contient aucun b-sommet, Comme G_i est sans sommets isolés, Alors $b(G_{uv}) \geq b(G)$, Pour toute arête uv de G_i, contradiction .

Fait 3. *G_i n'est pas une araignée .*

□

Preuve. Supposons que G_i est une araignée , Comme l'araignée contient au moins deux sommet de degré un ,d'aprés le théorème 3 , G_i est une araignée épaisse (S_i, K_i, R_i) , et que $|S_i| = |K_i| \geq 3$,Il est simple de montrer que tous les sommets de $R_i \cup S_i$ a un au plus $|R_i| + |K_i| - 1$,Clairement chaque sommet de K_i au plus de dégre $|K_i| + |R_i| + 1$,Comme G est sb critique ,tous les sommets de K_i sont des couleurs distinctes, Et $S_i = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$, $K_i = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$ et $R_i = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$. Soit c une b-coloration avec $b(G)$ couleurs , couleurs les sommets de K_i avec les couleurs $1, 2, ..., p$, couleur les sommets de R_i avec les couleurs $p+1, p+2, ..., p+q$.Couleur x_i par $p+q+i$,$1 \leq i \leq p-1$.Comme il ne reste que le sommet x_p not coloré , Il existe au moins un sommet $y_j \in K_i$ tel que toutes les couleurs ne apparaissent dans son .Ainsi $b(G) \leq \Delta(G)$,contradiction . □

Cas 3 G est une araignée. Le même raisonnement s'applique à la derniére Fait, Par conséquent $b(G) \leq \Delta(G)$, contradiction .

En utilisant l'observation et les Fait , on peut déduire que, G_i est le joint de deux graphes $G[K^i]$ et $G[S^i]$ où K^i et S_i sont, respectivement, clique et stable vérifiant $|K_i| \geq 2$, $|S_i| \geq 2$ et $\Delta(G_i) = |K_i| + |S_i| - 1$, Le théorème 3.2 implique que $\bigcup_{i=1}^{i=p} K_i$ est un b-système de G, Donc $b(G) = \sum_{i=1}^{i=p} |K_i|$, Le théorème et la Fait implique que $\sum_{i=1}^{i=p} |K_i| = \Delta(G) + 1 = \Delta(G_i) + 1$.En conséquence , $G \in \mathcal{F}$.

Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à la notion de la b-coloration et son inflience sur les graphes sb-critique .

Généralement, la détermination de $b(G)$ est un probléme difficile pour un graphe quelconque .

Nous avons abordé la notion des graphes dites sb-critiques, c'est à dire les graphes G dont la subdivision d'une arête quelconque de G fait diminuer le nombre b-chromatique de G. En effet, aprés avoir donné quellque propriétés fondamentales de ces graphes, nous avons caractérisé deux classes de graphes sb-critiques, à savoir les graphes P_4-sparses sb-critiques et les graphes régulier sb-critiques.

Références

[1] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable: Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., 21 (1977) 429 − 490.

[2] C. Berge. *Graph*. North Holland, 1985.

[3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph theory with applications, North-Holland, New York, 1979.

[4] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 (1941) 194 − 197.

[5] G. Chartrand and P. Zhang. Chromatic graph theoery. Discrete Mathematics and its Applications, Series Editor KENNETH H. ROSEN, CRC Press, 2009.

[6] R. Diestel. Graph theory. Electronic Edition 2005, Springer-Verlag, New York 1997, 2000, 2005.

[7] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91 (1999) 127 − 141.

[8] T.R. Jensen and B. Toft. Graph Coloring Problems. John Wiley & Sons, New York, 1994.

[9] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems: a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 − 27 of the Computing Science Depertement of Glasgow University.1998.

[10] Hoàng, M. Kouider. On the $b-$dominating coloring of graphs. Discrete Appl. Math. 152:176-186, 2005.

[11] Jamison, S. Olarui. A representation for P_4-sparse graphs. Discrete Appl. Math. 35 ,115 − 129, 1992.

[12] F.Bonomo, G. Durán, F. Maffray, J. Marenco, M. Valencia-Pabon. On the b-coloring of cographs and P_4-sparse graphs. Graphs and Combinatorics 25 :153 -176, 2009.

[13] F. Maffray, M. Mechebb ek. On b-perfect chordal graphs. Graphs and Combinatorics 25 (2009) 365- 375.

[14] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On vertex b-critical trees. Opuscula Mathematica 33 (1) (2013) 19- 28.

[15] C. Berge. Graphs. North Holland, 1985.

[16] M. Behzad: A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc.Camb.Philos. Soc. 63 (1967) 679 - 681.

[17] L.W. Beineke : Characterizations of derived graphs. Journal of Combinatorial Theory,9(2) (1970) 129 - 135.

[18] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math.91 (1999) 127 141:

[19] M. Kouider, M. MahÈo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph. Discret Math. 256 (2002) 267 277.

[20] A. El Sahili, H. Kheddouci, M.Kouider, M. Mortada. The b-chromatic number and f-chromatic vertex number of regular graphs. Discrete Applied Mathematics. 179(2014) 79 - 85.

[21] M. Behzad: A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc.Camb.Philos. Soc. 63 (1967) 679- 681.

[22] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Ma§ray. On graphs vertex critical with respect tb-chromaticnumberColloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Informatique COSI 2011, 24 28 Avril, Guelma, Algérie.

[23] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63(1956) 175 - 177.

[24] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems: a partial orderbased approach. PhD thesis, technical report tr-1998 - 27 of the Computing ScienceDepartment of Glasgow University, 1998.