RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MEDEA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUE

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Présentée par

NOURINE Amira et HAMIDOUCHE Zobeyda

Thème

Sur une classe des polynômes de type Appell

Soutenue publiquement le 21 ***juin*** 2022***, devant le jury composé de :***

Mr. RAHMANI Mourad	*Prof*	*à l'USTHB*	***Président du jury***
Mr. LAISSAOUI Diffallah	*MCA*	*UYFM*	***Encadreur***
Mme. GUETTAI Ghania	*MCB*	*UYFM*	***Examinatrice***
Mr. SEBAOUI Madjid	*MCB*	*UYFM*	***Examinateur***

Remerciements

Nous remercions en premier lieu ***ALLAH*** *pour la foi, la confiance et la volonté, il nous a dotés pour la réalisation de ce travail.*

ce mémoire, fruit d'un dur labeur et de beaucoup de sacrifices, a bénéficié de l'aide multiforme de plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner tout notre connaissance.

Nous tenons tout particulièrement à exprimer notre gratitude à l'encadreur ***Mr. LAISSAOUI Diffalah****, sans qui notre mémoire n'aurait pu voir lieu, nous le remercions également pour sa patience, son soutien moral, ses orientations, surtout ces conseils qui nous ont permis de mener à bien travailler.*

Nous exprimons nos remerciements à ***Mr. RAHMANI Mourad****, qui nous a honoré en acceptant d'être président du jury de notre mémoire.*

Nos remerciements s'adressent également à ***Mme. GUETTAI Ghania****, qui nous a honorés en acceptant de faire partie de notre jury et d'examiner notre travail.*

Nous remerciements également à ***Mr. SEBAOUI Madjid****, qui nous a honorés en acceptant de faire partie de notre jury et d'examiner notre travail.*

Nous remerciement aussi

notre profonde gratitude à la famille ***NOURINE*** *et* ***HAMIDOUCHE*** *pour l'appui moral, matériel et financier.*

Enfin, nous remerciement à tous ceux, qui de prés ou loin, nous ont apporté leur solution dans la rédaction de ce mémoire.

Dédicace

A ma très chère mère,

Quoi que je fasse on que je dise, je ne saurai point te remercier

comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me

guide et ta présence à mes cotés a toujours été ma source de force

pour affronter les différents obstacles.

A mon très cher père,

tu as toujours été à mes cotés pour me soutien et m'encourager.

que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

A ma chère sœur : ***Yousra***

A mes chers frères : ***Karim, Rayan et Sidali***

*A tous mes chers professeurs,tous les éloges et l'appréciation pour tous vos efforts et vos conseils surtout mon cher monsieur et l'honorable frère :****Me. THELDJOUN.M.***

A mes chères amis : ***Sara, Anfel, Imene, Siheme, Nesrine, Rima, Kholoude, Amel, Maya, Zahra.***

A tous mes collègues de la promotion 2022.

NOURINE Amira

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma famille adorée.

En particulier :

Mes chers parents

Qui me présidez en tout et me conseillez avant que quoi que ce soit n'arrive, qui donnez sans attente, pardonnez sans excuse et êtes à mes cotés en tout. je vous offre les plus belles expressions de remerciement et de gratitude d'un cœur débordant d'amour, d'affection, de respect et d'appréciation pour vous.

Mes chers frères : `Houssem et Aymane`.
Mes sœurs bien-aimées : `Hanane, Sisi et Houda Amal`.

Si vous dites merci, alors mes remerciement ne rempliront pas votre droit. Je vous remercie d'être à mes cotés et de me soutenir.

A mes chèrs nièces et neveux : `Maria Melissa, Loudjina Siline, Djanat dourssaf et Moustapha Chahine`.

A mes chères amies : `Sarah, Siham, Khouloud, Amel et khadidja`.

A tous mes collègues de la promotion 2022.
(Promtion l'heure du virus Corona).

Je tiens à remercier tous les professeurs et les enseignants que j'ai connu tout au long de mon parcours académique, y compris mon professeur d'école primaire qui je lui souhaite une bonne santé.

Et enfin, je n'oublie pas de me remercier, pour tous les efforts que j'ai faits.

HAMIDOUCHE Zobeyda

Résumé

Ce mémoire de Master intitulé "**Sur une classe des polynômes de type Appell**". On s'intéresse à l'étude de quelques exemples des polynômes d'Appell dans le cas simple et le cas généralisé, puis on donne un représentation de ces polynômes dans le cadre des probabilité dans les deux cas précédant.
Mots-Clés : Fonction génératrice, Polynômes d'Appell, Polynômes d'Appell généralisés.

Abstract

This Master's thetis entitled " **On a class of Appell polynomials**". We are interested in the studing some examples of Appell polynomials in the simple case and the generalized case. Then we give a representation of these polynomials in the framework of probabilities in the two previous cases.
Keywords : Generating function, Appell polynomials, generalization of Appell.

Table des matières

Remerciement i

Dédicace ii

Dédicace iii

Introduction Générale 1

1 Définitions et notions de base 3
1.1 Partition . . . 3
1.2 Les factorielles montantes . . . 3
1.3 Les factorielles descendantes . . . 4
1.4 Les coefficients binomiaux . . . 4
1.5 La Fonction génératrice . . . 5
1.5.1 La fonction génératrice ordinaire : . . . 5
1.5.2 La fonction génératrice exponentielle : . . . 6
1.6 Les nombres de Stirling . . . 6
1.6.1 Les nombres de Stirling de première espèce . . . 7
1.6.2 Les nombres de Stirling de seconde espèce . . . 9
1.6.3 Transformation de Stirling . . . 10
1.7 La variable aléatoire . . . 11
1.8 La variable aléatoire discrète . . . 11
1.9 La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète . . . 11
1.9.1 La fonction de masse . . . 11
1.9.2 La fonction de répartition . . . 12
1.10 L'espérance et la variance . . . 12
1.11 Les lois de probabilités discrètes usuelles . . . 14
1.11.1 La loi uniforme discrète . . . 14
1.11.2 La loi de Bernoulli . . . 14
1.12 Loi binomial . . . 15
1.13 Loi de poisson . . . 15
1.14 La loi géométrique . . . 16
1.15 La variable aléatoire continue . . . 16

1.15.1 La densité . . . 16
1.15.2 La fonction de répartition . . . 16
1.15.3 L'espérance mathématique . . . 17
1.16 Les lois de probabilités continues usuelles . . . 17
1.16.1 La loi uniforme continue . . . 17
1.16.2 La loi Exponentielle . . . 18
1.17 La loi Gamma . . . 18
1.17.1 La loi bêta . . . 18
1.17.2 La loi normale . . . 19
1.17.3 La loi normale centrée réduite . . . 19

2 Quelques exemples des polynômes d'Appell 20
2.1 Les nombres classiques . . . 20
2.1.1 Les nombres de Cauchy . . . 20
2.1.2 Les nombres d'Hermit . . . 22
2.1.3 Les nombres de Bernoulli . . . 23
2.1.4 Les nombres d'Euler . . . 25
2.2 Les polynômes d'Appell . . . 26
2.2.1 Les polynômes de Cauchy . . . 27
2.2.2 Les polynômes d'Hermit . . . 28
2.2.3 Les polynômes de Bernoulli . . . 29
2.2.4 Les polynômes d'Euler . . . 31
2.2.5 Les polynômes d'Apostol-Euler . . . 32
2.3 La généralisation des polynômes d' Appell . . . 32
2.3.1 Les polynômes de Cauchy généralisés . . . 34
2.3.2 Les polynômes d'Hermite généralisés . . . 34
2.3.3 Les polynômes de Bernoulli généralisés . . . 34
2.3.4 Les polynômes de Euler généralisés . . . 35
2.3.5 Les polynômes d'Apostol-Euler généralisés . . . 35

3 La représentation probabiliste des polynômes d'Appell 36
3.1 La représentation probabiliste des polynômes d' Appell dans le cas $\alpha = 1$ . . . 36
3.1.1 La représentation probabiliste des polynômes de Cauchy 36
3.1.2 La représentation probabiliste des polynômes d'Hermit . 38
3.1.3 La représentation probabiliste des polynômes de Bernoulli 39
3.1.4 La représentation probabiliste des polynômes d'Euler . . 40
3.1.5 La représentation probabiliste des polynômes d'Apostol-Euler . . . 40
3.2 La représentation probabiliste des polynômes d' Appell généralisés 41

3.2.1 La représentation probabiliste des polynômes de Cauchy généralisés 41
3.2.2 La représentation probabiliste des polynômes d'Hermit généralisés 41
3.2.3 La représentation probabiliste des polynômes de Bernoulli généralisés 42
3.2.4 La représentation probabiliste des polynômes d'Euler généralisés 42
3.2.5 La représentation probabiliste des polynômes d'Apostol-Euler généralisés 43

Notation

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels.
[n]	l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes.
$\binom{n}{k}$	les coefficients binomiaux.
$(x)^n$	la factorielle montante.
$(x)_n$	la factorielle descendante.
$s(n,k)$	les nombres de Stirling de première espèce signés.
$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$	les nombres de Stirling de seconde espèce.
Ω	l'espace fondamentale.
X	La variable aléatoire.
$p(A)$	La probabilité de l'évènement A.
$E(X)$	l'esperance mathematique de X.
$V(X)$	la variance de X.
$F_X(x)$	la fonction de répartion.
$f_X(x_i)$	la fonction de densité.
$P_X(x_i)$	la fonction de masse.

C_n	les nombres de Cauchy de première espèce.
$\widehat{C_n}$	les nombres de Cauchy de seconde espèce.
H_n	les nombres d'Hermit.
B_n	les nombres de Bernoulli.
E_n	les nombres d' Euler.
$A_n(x)$	les polynômes d'Appell.
$C_n(x)$	les polynômes de Cauchy.
$H_n(x)$	les polynômes d'Hermit.
$B_n(x)$	les polynômes de Bernoulli.
$E_n(x)$	les polynômes d' Euler.
$E_n(x,\lambda)$	les polynômes d' Apostol-Euler.
$A_n^{(\alpha)}(x)$	les polynômes d'Appell généralisés.
$C_n^{(\alpha)}(x)$	les polynômes de Cauchy généralisés.
$H_n^{(\alpha)}(x)$	les polynômes d'Hermit généralisés.
$B_n^{(\alpha)}(x)$	les polynômes de Bernoulli généralisés.
$E_n^{(\alpha)}(x)$	les polynômes d' Euler généralisés.
$E_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$	les polynômes d' Apostol-Euler généralisés.
$E(e^{tX})$	la fonction génératrice des moments.

Introduction Générale

Plusieurs familles de polynômes jouent un rôle fondamental dans divers domaines mathématiques et sciences appliquées. Surtout après les travaux d'Appell. Les polynômes d'Appell font l'objet de beaucoup d'attention et leur théorie fait l'objet de nombreuses études. En effet, la recherche active sur cette famille de polynômes est motivée par ses nombreuses applications dans les divers domaines mathématiques et sciences appliquées, en particulier la combinatoire, la théorie analytique des nombres et la théorie de l'approximation asymptotique. Parmi les diverses méthodes et techniques utilisées dans la littérature pour étudier les polynômes d'Appell et leurs généralisation, on trouve celles développées par " Srivastava "en termes d'intégrale de Stieltjes. Costabile et al, qui ont proposé une forme déterminentale pour les polynômes de Bernoulli. Quelques années après "Costabile et Longo», ont étendu cette représentation pour les polynômes d'Appell.
Verde-Star et Srivastava visent à donner certaines formules binomiales pour les polynômes d'Appell généralisés en utilisant l'approche de la fonction génératrice.
Plusieurs caractérisations de la famille des polynômes d'Appell $A_n(x)_{n\geq 0}$, où $deg(A_n) = n$, ont été données dans diverses études.
Principalement, il été montré que :

$$\frac{d}{dx}A_n(x) = nA_{n-1}(x), \qquad n \geq 0,$$

équivalent à l'existence d'une série formelle $f(t) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ avec $a_0 \neq 0$, vérifiant l'équation :

$$f(t)e^{xt} = \sum_{n\geq 0} A_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Afin de réaliser ce travail, nous avons organisé cette mémoire de la manière suivante :

Chapitre 1 : Définition et notions de base

Le premier chapitre introductif vise à présenter les définitions et les notions de base de quelques structures combinatoires dans la première partie, les notions et les définitions fondamentaux de probabilité dans la deuxième partie .

Chapitre 2 : Quelques exemples des polynômes d'Appell

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude des polynômes d'Appell, en particulier les polynômes de Cauchy, Hermit, Bernoulli, Euler et Apostol-Eulre. Nous commençons d'abord par le cas simple puis le cas généralisés. Nous donnons quelques types des nombres classiques et présentons quelques propriétés de ces nombres. Ensuite, nous introduisons ces polynômes et donnons leurs propriétés combinatoires à savoir la fonction génératrice, la relation de récurrence, la formule explicite et ainsi leurs propriétés.

Chapitre 3 : La représentation probabiliste des polynômes d'Appell

Nous terminons ce mémoire par une étude probabiliste des polynômes d'Appell dans le cas simple et le cas généralisés. Commençons par la représentation probabiliste de ces polynômes qui sont étudier dans le chapitre précédent dans le cas simple, après nous donnons cette représentation dans le cas généralisés.

Chapitre 1

Définitions et notions de base

Ce chapitre est subdivisé en deux parties. La première partie est relative aux définitions et notions de base de quelques structures combinatoires. La deuxième partie, concerne des définitions et des concepts sur les notions de probabilité. Pour des notions plus précises et détaillées, consulter les références[8, 9, 10]

Combinatoire élémentaire

Commençons donc par les notions de base de la combinatoire élémentaire.

1.1 Partition

Définitions 1.1.1 *Soit un ensemble E quelconque, un ensemble $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_i\}$ de sous-ensemble de E est une partition de E si :*

1. *Aucun élément de P n'est pas vide.*
2. *L'union des éléments de P est égale à E.*
3. *Les élément de P sont deux à deux disjoints.*

Exemple 1.1.0.1 *Considérons le cas suivant :*
Soit $A = \{1, 2, 3\}$ les partitions de A sont :
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$.

1.2 Les factorielles montantes

Soient x un nombre réel ou complexe et n un entier positif, on définit la factorielle montante de x d'ordre n, notée $(x)^n$, par :

$$(x)^n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1), & si\ \ n \geq 1. \end{cases}$$

1.3 Les factorielles descendantes

Soient x un nombre réel ou complexe et n un entier positif, on définit la factorielle descendante de x d'ordre n, notée $(x)_n$, par :

$$(x)_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1), & si\ \ n \geq 1. \end{cases}$$

1.4 Les coefficients binomiaux

En combinatoire, le coefficient binomiale noté $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir un sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments.

On peut aussi définir le coefficient binomiale pour tous entier n et k par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!},$$

avec $\binom{n}{k} = 0$ pour $k >$n, et $\binom{n}{k} = 1$ pour k=0 ou k=n.

Exemple 1.4.0.2 *Dans l'ensemble [4], il y a six façons de choisir deux éléments :*

$\{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\},$

par conséquent $\binom{4}{2} = 6.$

En remplaçant le n par 4, et k par 2, on obtient :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6.$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a+b)^n$, appelée la relation de binôme de newton, où a et b sont des nombres réels, cette relation est donnée par :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \tag{1.1}$$

satisfont la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \tag{1.2}$$

A partir de la formule (1.2) nous pouvons construire le triangle de Pascal :

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

TABLE 1.1 – Les premières valeurs de $\binom{n}{k}$.

1.5 La Fonction génératrice

La fonction génératrice est un outil algébrique qui permet de reformulé des problèmes de combinatoire, afin de les transformer en problème de manipulation d'expressions algébriques.
En particulier, en combinatoire, il s'agit souvent de déterminer le nombre d'objets de certaines types qui sont de taille n ; ce qui donne lieu à une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dont on cherche à déterminer le n-ième terme.

1.5.1 La fonction génératrice ordinaire :

Définitions 1.5.1 *Soit n un entier naturel et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. La fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est définie par :*

$$A(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n, \tag{1.3}$$

cette série à une indéterminée x et à coefficient $(a_n)_{n\geq 0}$ dans un anneau $\mathbb{K}$.

- *L'addition de deux séries génératrices ordinaires $\sum\limits_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n t^n$,*

est définie par :

$$\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)t^n=\sum_{n\geq 0}a_nt^n+\sum_{n\geq 0}b_nt^n.$$

• *La multiplication de deux séries génératrices ordinaires est définie par :*

$$\left(\sum_{n\geq 0}a_nt^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}b_nt^n\right)=\sum_{n\geq 0}c_nt^n,$$

avec

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

1.5.2 La fonction génératrice exponentielle :

Définitions 1.5.2 *Soit n un entier naturel et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes, on appelle fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, la fonction $B(t)$ donnée par :*

$$B(t)=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{t^n}{n!}. \tag{1.4}$$

• *L'addition de deux séries génératrices exponentielle est définie par :*

$$\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{t^n}{n!}+\sum_{n\geq 0}b_n\frac{t^n}{n!}.$$

• *La multiplication de deux séries génératrices exponentielle est définie par :*

$$\left(\sum_{n\geq 0}a_n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}b_n\frac{t^n}{n!}\right)=\sum_{\geq 0}c_n\frac{t^n}{n!},$$

avec

$$c_n=\sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}.$$

1.6 Les nombres de Stirling

Les nombres de Stirling jouent un rôle fondamental dans plusieurs domaines et notamment en combinatoire. Ils ont été introduits par J.Stirling et furent nommés ainsi, par Nielsen. Il sont divisés en deux catégories : les nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Stirling de seconde espèce.

1.6.1 Les nombres de Stirling de première espèce

Définitions 1.6.1 *Les nombres de Stirling de première espèce signés notés $s(n,k)$, sont les coefficients de développement de la factorielle descendante dans la base canonique, c'est-à-dire que :*

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1.5}$$

Exemple 1.6.1.1

$$\begin{aligned}(x)_3 &= x(x-1)(x-2)\\ &= x^3 - 3x^2 + 2x,\end{aligned}$$

d'où l'on tire :
$s(3,0) = 0, \quad s(3,1) = 2, \quad s(3,2) = -3 \quad et \quad s(3,3) = 1.$

Définitions 1.6.2 *Les nombres de Stirling de première espèce non signés $\mid s(n,k) \mid$ sont les coefficients de développement de la factorielle montante dans la base canonique $(x)^n$, c'est-à-dire :*

$$(x)^n = \sum_{k=0}^{n} |S(n,k)|x^k,$$

Exemple 1.6.1.2 *On prend $n = 2$, alors :*

$$\begin{aligned}(x)^2 &= x(x+1)\\ &= x^2 + x,\end{aligned}$$

nous pouvons dire à partir de cet exemple que :
$\mid s(2,0) \mid = 0.$
$\mid s(2,1) \mid = 1.$
$\mid s(2,2) \mid = 1.$

Interprétation combinatoire

Les nombres de Stirling de première espèce $\mid S(n,k) \mid$ comptent le nombre de permutation de n objets composés exactement k cycles disjoints.

Remarque 1 *Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, les nombres de Stirling de première espèce signés ont le même signe que $(-1)^{n-k}$.*

La relation de récurrence

Voici une table donnant quelques valeurs des $s(n,k)$, que l'on calculer ligne par ligne grâce à la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} s(n,0) = s(0,k),\ sauf\ \ s(0,0) = 1 \\ s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k),\ (n,k \geqslant 1). \end{cases}$$

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	-1	1					
3	0	2	-3	1				
4	0	-6	11	-6	1			
5	0	24	-50	35	-10	1		
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

TABLE 1.2 – Les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce signés.

La fonction génératrice

Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$ ont une fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(ln(1+x))^k}{k!}.$$

La formule explicite

La formes explicites pour les nombres de Stirling de première espèce signés est donnée par :

$$S(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1+\ldots\cdots+i_k=n} \frac{1}{i_1 \cdots i_k},$$

et pour $\mid S(n,k) \mid$ la formule :

$$\mid S(n,k) \mid = \sum_{0 \leqslant j \leqslant h \leqslant n-k}^{\infty} (-1)^{j+h} \binom{h}{j} \binom{n-1+h}{n-k+h}.$$

Remarque 2 *Pour tout* $(n \geq 1)$*, on donne la relation entre les nombres de Stirling de première espèce signés et non signés par :*

$$\mid s(n,k) \mid = (-1)^{n-k} s(n,k).$$

1.6.2 Les nombres de Stirling de seconde espèce

Définitions 1.6.3 *Les nombres de Stirling de seconde espèce notés* $\left\{ {n \atop k} \right\}$*, sont les coefficients du développement de polynôme* x^n *dans la base descendante, c'est-à-dire :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x)_k.$$

Interprétation combinatoire

Les nombres de Stirling de seconde espèce $\left\{ {n \atop k} \right\}$, compte le nombre des partitions d'un ensemble à n éléments en k sous-ensembles non vide $(0 \leq k \leq n)$.

Exemple 1.6.2.1
• *Si* $n = 1$ *: on a une seule partition de* N*, donc S(1,1)=1 (la partition grossière) est celle dont la seul bloc est* N*.*
• *Si* $n = 2$ *: avec* $N = \{a, b\}$ *, il y a deux partitions :* $\{a, b\}$ *,*$\{\{a\}, \{b\}\}$ *donc :* $S(2, 2) = S(2, 1) = 1$*.*

• *Si* $n = 3$ *: avec* $N = \{a, b, c\}$*, on trouve les cinq partitions suivantes :* $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$*,* $\{\{a\}, \{b, c\}\}$*,* $\{\{b\}, \{a, c\}\}$*,* $\{\{c\}, \{a, b\}\}$*,* $\{a, b, c\}$ *donc :* $S(3, 3) = 1$*,* $S(3, 2) = 3$*,* $S(3, 1) = 1$*.*

La fonction génératrice

La fonction génératrice ordinaire et exponentielle des nombres de Stirling de seconde espèce sont données respectivement par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-jx)},$$

et

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k.$$

La forme explicite

La forme explicite pour les nombre de Stirling de second espèce est donnée par :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

La relation de récurrence

Les nombres de Stirling de second espèce sont définis par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop k} \right\} = 1, sauf \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \\ \\ \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\},\ n \geq k. \end{cases}$$

Voici une table donnant quelques valeurs des $\left\{ {n \atop k} \right\}$ que l'on calculer ligne par ligne grâce à la relation de récurrence précédent :

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	20	1

TABLE 1.3 – Les premières valeurs des nombres de Stirling de second espèce.

1.6.3 Transformation de Stirling

La transformation de Stirling d'une suite (a_n) et la suite (b_n) donnée par :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} a_n,$$

ou $\left\{ {n \atop k} \right\}$ sont les nombres de Stirling de seconde espèce.
La transformation inverse est donnée par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) b_n,$$

$s(n,k)$ sont les nombres de Stirling de première espèce.

Probabilité élémentaire

1.7 La variable aléatoire

Définitions 1.7.1 *Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on appelle variable aléatoire sur cet espace, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$\begin{cases} X : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \\ \omega \to X(\omega) \end{cases}$$

Définitions 1.7.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, une variable aléatoire X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.*

1.8 La variable aléatoire discrète

Définitions 1.8.1 *Une variable aléatoire est dite discrète, si elle ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle (borné ou non borné). L'ensemble des nombres entiers est discrets en règle générale, si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.*

1.9 La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définitions 1.9.1 *La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités p_k des évènements $\{X = k\}$.*

Remarque 3 *Afin de simplifier l'écriture, nous notons dans la suite :*
$Pqsq(\{X = k\})$ équivalent à *$P(X = k)$.*

1.9.1 La fonction de masse

Définitions 1.9.2 *La fonction de masse d'une variable aléatoire discrète X est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définit par :*

$$f(x) = f_X(x) = P(X = x)$$
$$ou : P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}).$$

Propriétés 1.9.1

1. $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$,
2. $\{x / f_X(x) > 0\} = X(\Omega)$ *fini ou dénombrable,*
3. $\Sigma_{x \epsilon \mathbb{R}} f_X(x) = 1$.

1.9.2 La fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire discrète, on définit la fonction de répartition F de X par la fonction :

$$F : \mathbb{R} \to [0,1] \quad telle \quad que \quad F_X(x) = P(X < x).$$

- Si X est une variable aléatoire discrète ayant une loi de probabilité $P(X = k)$, F la fonction de répartition est une fonction en escalier définie par :

$$F_X(x) = \sum_{k<x} P(X = k).$$

propriétés

- F est une fonction monotone croissante, c'est-à-dire :

$$F_X(a) \leq F_X(b) \quad si \quad a \leq b.$$

- La limite de F_X à gauche est 0, et la limite à droite est 1 :

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

1.10 L'espérance et la variance

Une loi de probabilité peut caractériser par certaines valeurs typiques correspondant aux notions de valeurs centrale, de dépression et de forme de distribution.

L'espérance mathématique

Définitions 1.10.1 *L'espérance d'une variable aléatoire X correspond à la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par la probabilité associe à ces valeurs. C'est un paramètre de position qui correspond au moment d'ordre 1 de la variable aléatoire X.*

Définitions 1.10.2 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers probabilisé Ω. On appelle espérance de X, le réel définit par :*

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i P(X = x_i).$$

Remarque 4

- $E(X)$ *n'est pas une valeur possible de* X.
- $E(X)$ *excite si* $\sum_x \mid x \mid f_X(x) < \infty$.

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors :

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,
- $E(aX) = aE(X), \quad \forall a \in \mathbb{R}$,
- $Si \quad X \geqslant 0 \quad alors \quad E(X) \geqslant 0$,
- Si X est une variable aléatoire constante, tel que $\forall w \in \Omega$ $X(w) = k$, $alors \quad E(X) = k$.

par simple indication, il vient

corollaire 1.10.1 *Soient* $X_1, X_2, ..., X_n$ *des variables aléatoires sur* Ω *, alors :*

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

La variance

Définitions 1.10.3 *Soit* X *une variable aléatoire ayant espérance* $E(X)$*. On appelle variance de* X *le réel :*

$$V(X) = E([X - E(X)]^2),$$

ou bien :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Définitions 1.10.4 *Soit* X *une variable aléatoire ayant une variance* $V(X)$*. On appelle l'écart-type de* X *le réel :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Propriétés 1.10.1

- $\forall a \in \mathbb{R} \quad V(aX) = a^2 V(X)$,
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$,
- $V(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = E(X)$.

1.11 Les lois de probabilités discrètes usuelles

1.11.1 La loi uniforme discrète

Définitions 1.11.1 *Une loi uniforme discrète est une loi de probabilité discrète, indiquant une probabilité de se réaliser identique (équiprobabilité) à chaque valeur d'un ensemble fini de valeurs possibles. Sa densité est donnée par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ x = 1, 2, \cdots n \\ 0 & sinon\ . \end{cases}$$

théorème 1 *Soit X une variable aléatoire suit la loi uniforme décrète, l'espérance et la variance de X sont données par :*

- *l'espérance* $E(X) = \frac{1+n}{2}$.
- *La variance* $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

1.11.2 La loi de Bernoulli

Définitions 1.11.2 *Une variable aléatoire réelle X est de Bernoulli, si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles.*

$$P(X = k) = \begin{cases} p & si\ k = 1 \\ q & si\ k = 0\ . \end{cases} \tag{1.6}$$

On note $X \rightsquigarrow B(p)$.

théorème 2 *Soit X une variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p tel que : $0 < p < 1$. L'espérance, la variance et l'écart-type de X sont données par :*

- *L'espérance* $E(X) = p$.

- *La variance* $V(X) = p(1-p) = pq.$

- *L'écart-type* $\sigma = \sqrt{pq}.$

1.12 Loi binomial

Définitions 1.12.1 *Soit X une variable aléatoire discrète, on dit que X suit la loi binomial de paramètres n et p, notée $X \rightsquigarrow B(n,p)$, si sa fonction de masse est donnée par :*

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad pour \quad tout \quad x = 1, 2, \cdots n. \tag{1.7}$$

On note $X \rightsquigarrow B(n,p)$.

théorème 3 *Soit X une variable aléatoire suit la loi binomial de paramètre n et p, l'espérance et la variance de X sont données par :*

- *L'espérance* $E(X) = np.$

- *La Variance* $V(X) = np(1-p) = pq.$

1.13 Loi de poisson

Définitions 1.13.1 *Soit X une variable aléatoire discrète, on dit que X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$, si sa fonction de masse est donnée par :*

$$P(X = x) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k \geq 0.$$

théorème 4 *Soit X une variable aléatoire suit la loi de poisson de paramètre λ, l'espérance et la variance de X sont données par :*

- *L'espérance* $E(X) = \lambda.$

- *La variance* $V(X) = \lambda.$

1.14 La loi géométrique

Définitions 1.14.1 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p, noté $X \rightsquigarrow G(p)$, définit par la fonction de masse suivante :*

$$P_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \quad pour \ \ tout \ \ x = 1, 2, \cdots n.$$

théorème 5 *Soit X une variable aléatoire suit la loi de géométrique de paramètrep, l'espérance et la variance de X sont données par :*

- *L'espérance* $E(X) = \frac{1}{p}$.
- *La variance* $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

1.15 La variable aléatoire continue

Définitions 1.15.1 *Une variable aléatoire X qui peut prendre comme valeurs, tous les nombres réels d'un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.*

1.15.1 La densité

Définitions 1.15.2 *X une variable aléatoire continue, s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que :*

$$P(x \in B) = \int_B f_X(x)dx,$$

f est appelé densité de $X, \forall B \subseteq \mathbb{R}$.

Propriétés 1.15.1

1. $f_X(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\{x / f_X(x) > 0\} = X(\Omega)$ *fini ou dénombrable,*
3. $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) = 1$.

1.15.2 La fonction de répartition

Définitions 1.15.3 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une loi de probabilité $f_X(x)$, sa fonction de répartition est définie par :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

propriétés

- F est une fonction monotone croissante, c'est-à-dire :

$$F_X(a) \leq F_X(b) \qquad si \quad a \leq b.$$

- La limite de F_X à gauche est 0, et la limite à droite est 1 :

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

1.15.3 L'espérance mathématique

Définitions 1.15.4 *Soit X une variable aléatoire continue. On appelle espérance de X, le réel défini par :*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx.$$

La variance

Définitions 1.15.5 *Soit X une variable aléatoire ayant espérance $E(X)$. On appelle variance de X le réel :*

$$V(X) = E([X - E(X)]^2),$$

ou bien :

$$V(X) = E(X^2 - (E(X))^2.$$

1.16 Les lois de probabilités continues usuelles

1.16.1 La loi uniforme continue

Définitions 1.16.1 *La loi uniforme continue est une généralisation de la fonction rectangle à cause de la forme de sa fonction densité de probabilité. Elle est paramétrée par les plus petites et plus grandes valeurs a et b, sa densité est donnée par :*
pour tout réel x :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & si\ non\ . \end{cases} \tag{1.8}$$

théorème 6 *Soit X une variable aléatoire suit la loi uniforme, l'espérance et la variance de X sont données par :*

- *L'espérance* $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

- *La variance* $V(X) = (b-a)^2/12$.

1.16.2 La loi Exponentielle

Définitions 1.16.2 *Soit X une variable aléatoire continue, suit la loi exponentielle de paramètre $(\lambda > 0)$, sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geqslant 0, \quad \lambda > 0. \tag{1.9}$$

théorème 7 *Soit X une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $(\lambda > 0)$, alors L'espérance et la variance de X sont données par :*

- *L'espérance* $E(X) = 1/\lambda$.

- *La variance* $V(X) = 1/\lambda^2$.

1.17 La loi Gamma

Définitions 1.17.1 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi gamma, Pour $a, b > 0$, sa densité est définie par :*

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, \qquad avec \;\; \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

1.17.1 La loi bêta

Définitions 1.17.2 *Soit X une variable aléatoire suit la loi bêta de paramètre α et β, où $\alpha, \beta > 0$, sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)},$$

telle que

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \;\; et \;\; \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

théorème 8 *Soit X une variable aléatoire suit la loi bêta, l'espérance et la variance de X sont données par :*

- *L'espérance* $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
.
- *La variance* $V(X) = \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

1.17.2 La loi normale

Définitions 1.17.3 *Soit X une variable aléatoire suit la loi normale de paramètre u et σ^2 si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(\frac{x-u}{\sigma})^2}.$$

1.17.3 La loi normale centrée réduite

Définitions 1.17.4 *La loi normale centrée réduite est une loi normale de paramètre $m = 0$ et $\sigma = 1$. On la note par $X \rightsquigarrow N(0,1)$ et sa densité est définie par :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}. \tag{1.10}$$

Chapitre 2

Quelques exemples des polynômes d'Appell

Ce chapitre est consacré à une étude sur les polynômes d'Appell et ses propriétés dans le cas simple et le cas généralisé. Nous énumérons quelques relations reliant ce concept avec la combinatoire élémentaire. De plus, les résultats obtenus dans cette partie seront exploités et utilisant différents
approches, comme les fonctions génératrices, les formes explicites et les relations de récurrences. On présente ainsi plusieurs identités combinatoires. Pour des notions plus précises et détaillées, consulter les références[2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13].

2.1 Les nombres classiques

2.1.1 Les nombres de Cauchy

Les nombres de Cauchy ont les même propriétés que les nombres de Bernoulli de seconde espèce. On distingue deux types de ces nombres :
1. Les nombres de Cauchy de première espèce notés C_n.
2. Les nombres de Cauchy de deuxième espèce notés $\widehat{C}_n$.

2.1.1.1 Les nombres de Cauchy de première espèce

Les nombres de Cauchy de première espèce notés C_n, sont définis par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^1 (x)_n dx \\ &= \int_0^1 x(x-1)\cdots(x-n+1)dx \\ &= n! \int_0^1 \binom{x}{n} dx, \end{aligned}$$

satisfont les propriétés suivantes :

1. La forme explicite :

La forme explicite des nombres de Cauchy de première espèce est donnée par :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{s(n,k)}{k+1},$$

avec s(n,k) sont les nombres de Stirling de première espèce.

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Cauchy de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} C_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{ln(1+t)}.$$

3. Identité

Les nombres de Cauchy de première espèce satisfont l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} C_k = \frac{1}{n+1},$$

$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ sont les nombres de Stirling de seconde espèce.

4. Les premières valeurs des nombres de Cauchy de première espèce

Pour tout entier naturel, on donne les premières valeurs des nombres de Cauchy par :

- $C_0 = 1$,
- $C_1 = \frac{1}{2}$,
- $C_2 = \frac{-1}{12}$,
- $C_3 = \frac{1}{24}$.

2.1.1.2 Les nombres de Cauchy de seconde espèce

Les nombres de Cauchy de seconde espèce notés $\widehat{C_n}$, sont définis par l'intégrale :

$$\begin{aligned} \widehat{C_n} &= (-1)^n \int_0^1 (x)^n dx \\ &= (-1)^n \int_0^1 x(x+1)\cdots(x+n-1)dx \\ &= \int_0^1 (-x)(-x-1)\cdots(-x-n+1)dx \\ &= n! \int_0^1 \left(\begin{array}{c} -x \\ n \end{array} \right) dx, \end{aligned}$$

ces nombres satisfont les propriétés suivantes :

1. La forme explicite

La forme explicite des nombres de Cauchy de seconde espèce est donnée par :

$$\widehat{C}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{s(n,k)}{k+1}.$$

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Cauchy de seconde espèce $\widehat{C}_n$ est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} \widehat{C}_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{(1+t)ln(1+t)}.$$

3. Identité

Les nombres de Cauchy de seconde espèce satisfont l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \widehat{C}_k = \frac{(-1)^n}{(n+1)}.$$

4. Les premières valeurs des nombres de Cauchy de seconde espèce

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne les premières valeurs des nombres de Cauchy de seconde espèce par :

- $\widehat{C}_0 = 1$,
- $\widehat{C}_1 = -1/2$,
- $\widehat{C}_2 = -1/6$,
- $\widehat{C}_3 = -1/4$.

2.1.2 Les nombres d'Hermit

Les nombres d'Hermit notés H_n, sont définis par :

1. La forme explicite

La forme explicite des nombres d'Hermit est donnée par :

$$H_n = \frac{2^n \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-n))},$$

alors :

$$H_n = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ n\ impaire \\ \frac{(-1)^{n/2} n!}{\left(\frac{1}{2}n\right)!} & si\ n\ pair. \end{array} \right.$$

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des nombres d'Hermit H_n est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} H_n \frac{t^n}{n!} = e^{-t^2}.$$

3. La relation de récurrence

Puisque $H_0 = 1$ et $H_1 = 0$, la relation de récurrence des nombres d'Hermit H_n est donnée par :

$$H_n = -2(n-1)H_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

4. Les premières valeurs des nombres d'Hermit

- $H_0 = 1$,
- $H_1 = 0$,
- $H_2 = -2$,
- $H_3 = 0$,
- $H_4 = 12$,
- $H_5 = 0$,
- $H_6 = -120$.

2.1.3 Les nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli notés B_n, construisent une suite des nombres rationnels. Ils ont initialement été étudiés en cherchant à calculer les sommes de type $\sum_{i=1}^{n} i^k$ ou n et k sont deux entières positifs.
Dans cette partie, nous allons découvrir les importants résultats concernant ces nombres, en citant les nombres de Bernoulli classiques avec $B_1 = 1/2$ ou $B_1 = -1/2$.

2.1.3.1 Les nombres de Bernoulli avec $B_1 = 1/2$

Les nombres de Bernoulli avec $B_1 = 1/2$ sont définis par :

1. La forme explicite

On peut calculer ces nombres explicitement par la relation :

$$B_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\},$$

avec $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ sont les nombres de Stirling de second espèce.

On peut définir aussi par :

$$B_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) i^n.$$

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Bernoulli B_n avec $B_1 = 1/2$ est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{te^t}{e^t - 1}.$$

3. La relation de récurrence

On a la formule de récurrence suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right) B_k = n+1, \quad pour \quad n \geq 0.$$

4. Les premières valeurs des nombres de Bernoulli avec $B_1 = 1/2$

- $B_0 = 1$,
- $B_1 = 1/2$,
- $B_2 = 1/6$,
- $B_3 = 0$,
- $B_4 = -1/30$,
- $B_5 = 0$.

2.1.3.2 Les nombres de Bernoulli avec $B_1 = -1/2$

Depuis Euler, les nombres de Bernoulli avec $B_1 = -1/2$ sont définis par :

1. La forme explicite

On peut calculer explicitement ces nombres par la formule :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}.$$

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Bernoulli avec $B_1 = -1/2$ est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

3. La relation de récurrence

On définit ces nombres par la relation de récurrence pour $B_0 = 1$:

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right) B_k, \quad n \geq 1.$$

4. Les premières valeurs des nombres de Bernoulli avec $B_1 = -1/2$

- $B_0 = 1$,
- $B_1 = -1/2$,
- $B_2 = 1/6$,
- $B_3 = 0$,
- $B_4 = -1/30$,
- $B_5 = 0$.

5. Les propriétés des nombres de Bernoulli

- $\forall p \in \mathbb{N}^*, B_{2p+1} = 0$,
- $\forall p \in \mathbb{N}, B_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} B_k$.

2.1.4 Les nombres d'Euler

Les nombres d'Euler sont des constantes importantes, qu'on retrouve dans des nombreux contextes et qui constitue la base des logarithmes naturels. Ils forment une suite des entiers, notés E_n. Sont définis par :

1. La forme explicite

Les deux formules suivantes expriment les nombres d'Euler en termes de nombres de Stirling de second espèce.
Pour tout $n \geq 1$, on donne la première relation par :

$$E_n = 2^{2n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \left(3 \left(\frac{1}{4} \right)^k - \left(\frac{3}{4} \right)^k \right),$$

et on donne :

$$E_{2n} = -4^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} 2n \\ k \end{array} \right\} \left(\frac{3}{4} \right)^k, \quad n \geq 1.$$

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des nombres d'Euler E_n est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} E_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \quad (t < \pi).$$

3. La relation de récurrence

Les nombres d'Euler ont une formule de récurrence, s'écrit sous la forme :

$$(E+1)^n + (E-1)^n = 0, \quad E_0 = 1,$$

en notation symbolique ($E_n \equiv E^n$).

3. Les premières valeurs des nombres d'Euler

Les nombres d'Euler d'indice impair sont tous nuls alors on donne :

- $E_0 = 1$,
- $E_2 = -1$,
- $E_4 = 5$,
- $E_6 = -61$,
- $E_8 = 1385$,
- $E_{10} = -50521$,
- $E_{12} = 2702765$.

2.2 Les polynômes d'Appell

Les polynômes d'Appell forment une classe de polynômes sur le corps des nombres complexes, qui contient des nombreux polynomiaux classiques. Ils ont été introduits pour la première fois par Paul Emille Appell en 1880, qui s'est intéressé aux suites des polynômes $(A_n(x); n \in \mathbb{N})$, vérifiant les conditions suivantes :

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le degré de polynôme $A_n(x)$ est égal à n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes d'Apell $A_n(x)$ de variable réelle x, caractérisée par :

$$\frac{d}{dx}A_n(x) = nA_{n-1}(x) \quad et \quad \frac{d}{dx}A_0(x) = 0.$$

3. Si $n = 0$, alors $A_0(x) \neq 0$.

Définitions 2.2.1 *: Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite des nombres réels ou complexe. La suite $(A_n)_{n\geq 0}$ des polynômes d'Appell associée à $(a_n)_{n\geq 0}$ est définie par la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geq 0} A_n(x)\frac{t^n}{n!} = f(t)e^{xt},$$

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Cette définition montre que le polynôme d'Appell $A_n(x)$ associé à la suite a_n, peut être définie explicitement par :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} x^k.$$

propriétés

1. La formule de translation :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x) y^{n-k}.$$

2. La formule de différence :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\Delta A_n(x) = A_n(x+1) - A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k(x).$$

Par la suite, nous présentons quelques exemples classiques des polynômes d'Appell, en particulier les polynômes d'Hermit , Bernoulli, Cauchy, Apostol-Euler et les polynômes d'Euler, dans le cas simple et dans le cas généralisé.

2.2.1 Les polynômes de Cauchy

Les polynômes de Cauchy notés $C_n(x)$, sont définis par :

1. La forme explicite

La forme explicite des polynômes de Cauchy est donnée par :

$$C_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(n-1,k)}{(k+1)} x^{k+1} + C_n(0), \quad n \geq 1,$$

on peut définir aussi par :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_k(x)_{n-k}.$$

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Cauchy est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} C_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{ln(1+t)}. \tag{2.1}$$

3. La relation de récurrence

Les polynômes de Cauchy satisfont la relation de récurrence suivante :

$$C_n(x+1) - C_n(x) = C_{n-1}(x),$$

ou équivalent :

$$\Delta C_n(x) = C_{n-1}(x).$$

4. Les premières valeurs des polynômes de Cauchy

- $C_0(x) = 1$,
- $C_1(x) = x + \frac{1}{2}$,
- $C_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}$,
- $C_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}$,
- $C_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{19}{720}$.

5. Autres propriétés des polynômes de Cauchy

- $C_n(0) = C_n$,
- $C_n(-1) = (-1)^n C_n$,
- $C_{2n+1}(n - \frac{1}{2}) = 0$,
- $C_{2n}(n - 1 + y) = C_{2n}(n - 1 - y)$.

2.2.2 Les polynômes d'Hermit

Les polynômes de Hermite sont les polynômes nommés en l'honneur de Charles Hermite, on été définis par Pierre-Simon Laplace en 1810 et ont été surtout étudiés par Joseph-Louis Lagrange lors de ses travaux sur les probabilités.
Les polynômes d'Hermit sont une séquence polynômiale orthogonale classique, notés $H_n(x)$, ont les propriétés suivantes :

1. La forme probabiliste

La forme probabiliste des polynômes d'Hermit est donnée par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{\frac{-x^2}{2}}}{dx^n}.$$

2. La forme physique

Les polynômes d'Hermit ont une forme physique donnée par :

$$\widehat{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n},$$

avec

$$\widehat{H}_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n(\sqrt{2}x).$$

3. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes d'Hermit $H_n(x)$ est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{xt-\frac{t^2}{2}}. \tag{2.2}$$

4. La relation de récurrence

Les polynômes d'Hermit sont obtenus à partir la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= xH_n(x) - H_n^{'}(x) \\ &= xH_n(x) - nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

5. Les premières valeurs des polynômes d'Hermit

- $H_0(x) = 1$,
- $H_1(x) = 2x$,
- $H_2(x) = 4x^2 - 2$,
- $H_3(x) = 8x^3 - 12x$,
- $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$,
- $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$,
- $H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$.

6. Autres propriétés des polynômes d'Hermit

- $H_n^{'}(x) = nH_{n-1}(x)$,
- $H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} x^k H_{n-k}(y)$,
- $H_n(-x) = (-1)^n H_n$.

2.2.3 Les polynômes de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli du nom Bernoulli, combinent les nombres de Bernoulli et les coefficient binomiaux. Sont l'unique suite des polynômes notés $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, qui vérifiée les propriétés suivantes :

1. La forme explicite

La forme explicite des polynômes de Bernoulli est donnée par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_k x^{n-k}.$$

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bernoulli est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}. \tag{2.3}$$

3. La relation de récurrence

IL existe une unique suite de polynômes $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$, définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n^{'}(x) = nB_{n-1}(x) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(x)dx = 0. \end{cases}$$

4. Les premières valeurs des polynômes de Bernoulli

Voici les premières valeurs des polynômes de Bernoulli que Lehonard Euler a obtenu :

- $B_0(x) = 1$,
- $B_1(x) = x - 1/2$,
- $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$,
- $B_3(x) = x^3 - 3/2x^2 + 1/2x$,
- $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1/30$,
- $B_5(x) = x^5 - 5/2x^4 + 5/3x^3 - 1/6x$.

5. Autres propriétés des polynômes de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli vérifient les identités suivantes :

- $\forall n \geq 0, B_n(0) = B_n(1)$,
- $\forall p \in \mathbb{N}, B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = 0$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

2.2.4 Les polynômes d'Euler

Les polynômes d'Euler sont les polynômes réels de degré n, notés $E_n(x)$, sont définis par :

1. La forme explicite

On note E_k le k-ième nombre d'Euler, alors la forme explicite des polynômes d'Euler $E_n(x)$ est donnée par :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) E_k x^{n-k},$$

ou par la relation suivante pour tout $(n \geq 0)$:

$$E_n(x) = \sum_{k=0} n \binom{n}{k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \frac{E_k}{2^k}.$$

2. La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes d'Euler $E_n(x)$ est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1}. \tag{2.4}$$

Remarque 5 *: Les valeurs de $x = 1/2$ définissent les nombres d'Euler, on donne la relation suivante :*

$$E_n = 2^n E_n(1/2).$$

3. Les premières valeurs des polynômes d'Euler

- $E_0(x) = 1$,
- $E_1(x) = x - 1/2$,
- $E_2(x) = x^2 - x$,
- $E_3(x) = x^3 - 3/2x^2 + 1/4$,
- $E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x$.

4. Autres propriétés des polynômes d'Euler

Les polynômes d'Euler satisfont les identités suivantes :

- $E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n$,
- $E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$,
- $E_n^{'}(x) = nE_{n-1}(x)$.

2.2.5 Les polynômes d'Apostol-Euler

Les polynômes $d'Apostol-Euler$ notés $E_n(x,\lambda)$, on d'abord été définis par Apostol lorsqu'il a étudié les fonctions Lipschitz-Lerch Zeta, sont définis par :

1. La fonction génératrice

Pour un paramètre arbitraire réel ou complexe λ, les polynômes d'Apostol-Euler sont définis par la fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0} E_n(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{1+\lambda(e^t-1)}, \quad (|t+\log\lambda| < \pi). \tag{2.5}$$

2. La forme explicite

On note $E_n(\lambda) = E_n(0,\lambda)$ le n-ième nombres d'Apostol-Euler. Par conséquent, l'expression permet d'obtenir la convolution binomiale suivante :

$$E_n(x,\lambda) = \sum_{k=0} \binom{n}{k} x^k E_{n-k}(\lambda).$$

3. Autres propriétés des polynômes d'Apostol-Euler

D'après les travaux mentionnés, nous pouvons voir que les polynômes d'Apostol-Euler ont des nombreuses propriétés intéressantes et utiles donnée par :

- $E_n(x+y,\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x,\lambda)E_{n-k}(y,\lambda)$,
- $\frac{\lambda}{2}E_n^2(x+1,\lambda) = xE_n(x,\lambda) - E_{n+1}(x,\lambda)$,
- $E_n^2(x,\lambda) = 2E_{n+1}(x,\lambda) - (x-1)2E_{n+}(x,\lambda)$.

2.3 La généralisation des polynômes d' Appell

Dans cette parti, on établit quelques identités combinatoires pour les polynômes d'Appell généralisés, en utilisant la fonction génératrice.

Définitions 2.3.1 *: Soit α un nombre réel, les polynômes d'Appell d'ordre α sont les polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ de degré n, notés $A_n^{(\alpha)}(x)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :*

$$(f(t))^\alpha e^{xt} = \sum_{n\geq 0} A_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!},$$

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Nous présentons l'identité de convolution pour les polynômes d'Appell $A_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre α de degré n par :

Définitions 2.3.2 *: Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ et $A_n^{(\alpha)}(x)$ un polynôme d'Appell d'ordre α, alors :*

$$A_n^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k^{\alpha}(x) A_{n-k}^{\beta}(y).$$

Conséquence 1 :

Posons $\beta = 0$ et $y = 1$ dans la formule précédant, on obtient :

$$A_n^{(\alpha)}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k^{\alpha}(x).$$

Le résultat suivant donne une forme explicite pour les polynômes d'Appell d'ordre α de degré n, en termes des polynômes de Bernoulli et d'Euler comme suite :

Définitions 2.3.3 *: Soit $A_n^{(\alpha)}(x)$ un polynôme d'Appell d'ordre α et de degré n, alors :*
La formule de convolution en termes des polynômes de Bernoulli est donnée par :

$$A_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j+1} \binom{n}{j} \binom{j+1}{k} A_{n-j}^{\alpha}(y) \right] B_k(x).$$

La formule de convolution en termes des polynômes d'Euler est donnée par :

$$A_n^{(\alpha)}(x+y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} A_{n-k}^{\alpha}(y) + \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j+1} \binom{n}{j} \binom{j}{k} A_{n-j}^{\alpha}(y) \right] E_k(x),$$

Remarque 6 *: Pour $\alpha = 1$ on trouve une formule explicite pour les polynômes d'Appell $A_n(x)$ en termes des polynômes de Bernoulli et d'Euler :*

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j+1} \binom{n}{j} \binom{j+1}{k} A_{n-j}(y) \right] B_k(x).$$

$$A_n(x+y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} A_{n-k}(y) + \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j+1} \binom{n}{j} \binom{j}{k} A_{n-j}(y) \right] E_k(x).$$

2.3.1 Les polynômes de Cauchy généralisés

La fonction génératrice

Les polynômes de Cauchy généralisés $C_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante :

$$\sum_{n\geq 0} C_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{ln(1+t)}\right)^{\alpha} e^{xt}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.6}$$

2.3.2 Les polynômes d'Hermite généralisés

La fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Hermite généralisés $H_n^{(\alpha)}(x)$ est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} H_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = e^{xt-\alpha\frac{t}{2}}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.7}$$

2.3.3 Les polynômes de Bernoulli généralisés

La fonction génératrice

Les polynômes de Bernoulli d'ordre α sont les polynômes réels de degré n, introduits par Norland, notés $B_n^{(\alpha)}(x)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t^{\alpha}e^{xt}}{(e^t-1)^{\alpha}}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.8}$$

Les propriétés des polynômes de Bernoulli généralisés

- $B_0^{(\alpha)}(x) = 1$,
- $(B_n^{(\alpha)}(x))' = nB_{n-1}^{(\alpha)}(x)$,
- $B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x)B_{n-k}^{(\beta)}(y)$,
- $B_n^{(\alpha)}(x+1) - B_n^{(\alpha)}(x) = nB_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)$,
- $B_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(y)x^{n-k}$.

2.3.4 Les polynômes de Euler généralisés

La fonction génératrice

Les polynômes d'Euler d'ordre α sont les polynômes réels de degré n, introduits par Norland, notés $E_n^{(\alpha)}(x)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.9}$$

Les propriétés des polynômes d'Euler généralisés

- $E_0^{(\alpha)}(x) = 1$,
- $\left(E_n^{(\alpha)}(x)\right)' = nE_{n-1}^{(\alpha)}(x)$,
- $E_n^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k^{(\alpha)}(x)E_{n-k}^{(\beta)}(y)$,
- $E_n^{(\alpha)}(x+1) - E_n^{(\alpha)}(x) = nB_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)$,
- $E_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k^{(\alpha)}(y)x^{n-k}$.

2.3.5 Les polynômes d'Apostol-Euler généralisés

La fonction génératrice

Les polynômes d'Apostol-Euler d'ordre α sont les polynômes réels de degré n, introduits par Luo, notés $E_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0} E_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1}{1+\lambda(e^t-1)}\right)^{\alpha} e^{xt}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.10}$$

Chapitre 3

La représentation probabiliste des polynômes d'Appell

Dans ce chapitre, nous donnons la représentation probabiliste pour les polynômes d'Appell et les polynômes d'Appell généralisés, à partir de la fonction génératrice de ces polynômes.
La fonction génératrice exponentielle des polynômes d'Appell généralisés s'écrit sous la forme générale :

$$\sum_{n\geq 0} A_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = f(t)^\alpha e^{xt}, \tag{3.1}$$

où :

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Maintenant nous donnons la représentation probabiliste :

$$\sum_{n\geq 0} A_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{(E(e^{tY}))^\alpha}, \tag{3.2}$$

avec Y est une variable aléatoire suit une loi de probabilité.

Alors, on cherchons la loi de probabilité qui s'accorde avec chaque polynômes d'Appell. Pour plus détails consulter les références [1, 12].

3.1 La représentation probabiliste des polynômes d' Appell dans le cas $\alpha = 1$

3.1.1 La représentation probabiliste des polynômes de Cauchy

On considère les polynômes de type Cauchy, définis par leur fonction génératrice exponentielle, donnée dans (2.1).

Théorème 3.1.

Soient X et Y deux variables aléatoires continues et indépendantes, telle que X suit la loi exponentielle de paramètre 1, sa fonction de densité est donné dans (1.9), et soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 0]$, sa densité est donné dans (1.8).
Les polynômes de Cauchy ont une représentation probabiliste s'écrit sous la forme :

$$\sum_{n\geq 0} C_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{E(e^{tXY})}.$$

Démonstration

On veut calculer d'abord :

$$\begin{aligned} E(e^{tXY}) &= \int_{-1}^{0} E(e^{tXY}/Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-1}^{0} E(e^{tyX}/Y = y) dy \\ &= \int_{-1}^{0} E(e^{tyX}) dy, \end{aligned}$$

puisque on a $f_Y(y) = 1$ et X et Y sont indépendants, maintenant calculons $E(e^{tyX})$

$$\begin{aligned} E(e^{tyX}) &= \int_{0}^{+\infty} e^{tyx} f_X(x) dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{tyx} \exp(-x) dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1-ty)} dx \\ &= \frac{-1}{1-ty} e^{-x(1-ty)}|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-ty}, \end{aligned}$$

maintenant on calcule :

$$\begin{aligned} E(e^{tXY}) &= \int_{-1}^{0} E(e^{tyX}) dy \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-ty} dy \\ &= \frac{1}{-t} \int_{0}^{1} \frac{-t}{1-ty} dy \\ &= \frac{1}{-t} \ln(1-ty)|_{-1}^{0} \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t}, \end{aligned}$$

alors :

$$E(e^{tXY}) = \frac{\ln(1+t)}{t}. \tag{3.3}$$

3.1.2 La représentation probabiliste des polynômes d'Hermit

On a H_n la suite des polynômes d'Hermit, qui est définie par la fonction génératrice exponentielle dans (2.2).

Théorème 3.2.

Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi normale centrée réduit, sa densité est donnée par (1.10).
La représentation probabiliste des polynômes d'Hermit peut donner par la forme suivante :

$$\sum_{n\geq 0} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{E(e^{tX})}.$$

Démonstration

On calcule :

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{t^2}{2}} dx, \end{aligned}$$

faisons un changement de variable : $x - t = y$, on trouve : $dx = dy$,
le dernier égalité devient :

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}y^2 + \frac{t^2}{2}} dy \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}y^2} dy \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}, \end{aligned}$$

alors :

$$E(e^{tX}) = e^{\frac{t^2}{2}}. \tag{3.4}$$

3.1.3 La représentation probabiliste des polynômes de Bernoulli

On considère les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$, définis par la fonction génératrice exponentielle, donnée dans (2.3)

Théorème 3.3.

Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0.1], sa densité est donné dans (1.8).
Ces polynômes de Bernoulli ont une représentation probabiliste s'écrit comme étant :

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{E(e^{tX})}.$$

Démonstration

On veut calculer :

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \int_0^1 e^{tx}.1dx \\ &= \frac{1}{t} e^{tx}|_0^1 \\ &= \frac{e^t - 1}{t}, \end{aligned}$$

alors :

$$E(e^{tX}) = \frac{e^t - 1}{t}. \tag{3.5}$$

3.1.4 La représentation probabiliste des polynômes d'Euler

On a E_n la suite des polynômes d'Euler, définit par la fonction génératrice exponentielle qui est donnée dans(2.4).

Théorème 3.4.

Soit X une variable aléatoire discrète, telle que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $(p = 1/2)$, sa fonction de masse est donnée par (1.6).
La représentation probabiliste des polynômes d'Euler s'écrit comme suite :

$$\sum_{n\geq 0} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{E(e^{tX})}.$$

Démonstration

On va calculer :

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \sum_{x=0}^{1} e^{xt}P(X=x) \\ &= P(X=0) + e^t P(X=1) \\ &= 1 - p + pe^t \\ &= 1 + p(e^t - 1), \quad pour\ p = 1/2 \\ &= 1 + 1/2(e^t - 1) \\ &= 1 + 1/2e^t - 1/2 \\ &= \frac{e^t + 1}{2}, \end{aligned}$$

alors :

$$E(e^{tX}) = \frac{e^t + 1}{2}. \tag{3.6}$$

3.1.5 La représentation probabiliste des polynômes d'Apostol-Euler

On considère les polynômes de type Apostol-Euler $E_n(x, \lambda)$, la fonction génératrice exponentielle de ces polynômes est donnée dans(2.5).

Théorème 3.5.

Soit X une variable aléatoire discrète, telle que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, sa fonction de masse est donnée dans (1.6).
La représentation probabiliste de ces polynômes donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} E_n(x,p)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{E(e^{tX})}.$$

Démonstration

On calcule :

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \sum_{x=0}^{1} e^{tx} P(X = x) \\ &= P(X = 0) + e^{t} P(X = 1) \\ &= 1 - p + pe^{t} \\ &= 1 + p(e^{t} - 1), \end{aligned}$$

alors :

$$E(e^{tX}) = 1 + p(e^{t} - 1). \tag{3.7}$$

3.2 La représentation probabiliste des polynômes d' Appell généralisés

3.2.1 La représentation probabiliste des polynômes de Cauchy généralisés

corollaire 3.2.1 *On considère les polynômes de Cauchy généralisés $C_n^{(\alpha)}(x)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geq 0} C_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{tx}}{(E(e^{tXY}))^{\alpha}}, \tag{3.8}$$

Démonstration

d'aprés la formule (3.3) et (3.8), on déduit la représentation probabiliste des polynomes de Cauchy généralisés :

$$\sum_{n\geq 0} C_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{ln(1+t)}\right)^{\alpha} e^{tx}.$$

3.2.2 La représentation probabiliste des polynômes d'Hermit généralisés

corollaire 3.2.2 *On considère les polynômes d'Hermit généralisés $H_n^{(\alpha)}(x)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geq 0} H_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{tx}}{(E(e^{tX}))^{\alpha}}, \tag{3.9}$$

Démonstration

d'après la formule (3.4) et (3.9), on déduit la représentation probabiliste des polynômes d'Hermit généralisés :

$$\sum_{n\geq 0} H_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{tx}}{(e^{t^2/2})^{\alpha}}.$$

3.2.3 La représentation probabiliste des polynômes de Bernoulli généralisés

corollaire 3.2.3 *On considère les polynômes de Bernoulli généralisés $B_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre réel α, définis par leurs fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{tx}}{(E(e^{tX}))^{\alpha}}, \tag{3.10}$$

Démonstration

d'après les deux formules (3.5) et (3.10), on déduit la représentation probabiliste des polynômes de Bernoulli généralisés :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t^{\alpha}e^{xt}}{(e^t-1)^{\alpha}}.$$

3.2.4 La représentation probabiliste des polynômes d'Euler généralisés

corollaire 3.2.4 *On considère les polynômes d'Euler généralisés $E_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre réel α, définis par leur fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{tx}}{(E(e^{tX}))^{\alpha}}, \tag{3.11}$$

Démonstration

d'après les deux formules (3.6) et (3.11), on déduit la représentation probabiliste des polynômes d'Euler généralisés :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{e^t+1}{2}\right)^{\alpha} e^{tx}.$$

3.2.5 La représentation probabiliste des polynômes d'Apostol-Euler généralisés

corollaire 3.2.5 *On considère les polynômes d'Apostol-Euler généralisés* $E_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$ *d'ordre réel* α*, définis par leur fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x,p)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{tx}}{(E(e^{tX}))^{\alpha}}, \tag{3.12}$$

Démonstration

d'après la formule (3.7) et (3.12), on déduit la représentation probabiliste des polynômes d'Apostol-Euler généralisés :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x,p)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{tx}}{(1+p(e^t-1))^{\alpha}}.$$

Conclusion

Cette mémoire représente une modeste contribution reliant les polynômes de types Appell avec les probabilités.
Au cours de cette mémoire, nous avons abouti à établir certaines propriétés importantes sur les nombres classiques. D'autre part, nous sommes données une étude sur les polynômes d'Appell. Plus précisément, nous sommes définies quelques propriétés des polynômes d'Appell et des polynômes d'Apell généralisés. Dernièrement, nous avons trouvé une application probabiliste du polynômes d'Appell et des polynômes d'Appell généralisés.

Bibliographie

[1] B. Q. Ta, Probabilistic approach to Appell polynomials, Expo. Math. 33 (2015), no.3, 269-294.

[2] D. S. Kim, T. Kim, D. V. Dolgy, and S.-H. Rim, Some new identities of Bernoulli, Euler and Hermite polynomials arising from umbral calculs, Adv. Diffrence Equ. (2013), no. 1, 806-829.

[3] G. B. Djorgjevic and G. V. Milovanovic. Special classes of polynomials. University of Nis, Faculty of Technology LesKovac, 2014.

[4] G. Bretti, P. Natalini and P. E. Ricci, Generalization of Bernoulli and Appell polynomials, Abstr. Appl. Anal. 7 (2004), 613-623.

[5] G. Dattoli, S. Lorenzutta, and D. Sacchetti, Integral representations of new famillies of polynomials, Ital. J. Pure Appl. Math. 15 (2004), 19-28.

[6] H. M. Srivastava and P. G.Todorov, an explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials, j. Math. Anal. Appl. 130 (1988), no. 2, 509-513.

[7] J. A. Adell and A. LeKuona, Binomial convolution and transformations of Appell polynomials, J. Math. Anal. Appl. 456 (2017), no. 1, 16-33.

[8] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the first and second Kind-II. Fibonacci Quart., 18 :242-257, 1980.

[9] L. Comtet, Advanced Combinatorics, The Art of Finite and Infinite Expansions revised and enlarged edition, D. Reidel publishing Co. Dordrecht and Boston, 1974.

[10] Rosen, Kenneth H., and Kamala Krithivasan. Discrete mathematics and its applications : with combinatorics and graph theory. Tata McGraw-Hill Education, 2012.

[11] S. Khan and M. Riyasat, A determinantal approch to Sheffer-Appell miality principle, J. Math. Anal. Appl. 412 (2015),no.1, 806-829.

[12] T. Arakawa, T. Ibukiyama, and M. Kaneko. Bernoulli numbers and zeta functions. Spriger Monograph in Mathematics. Springer, Tokyo, 2014. With an appendix by Don Zagir.

[13] W. Wang. C. Jia and T. Wang, Some results on the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, Comput. Math. Appl. 55 (2008). no. 6,1322-1332.