République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département de mathématiques et informatique



Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialtié : Analyse mathématique et applications

Sur la géométrie des solutions solitons de quelques EDPs non linéaires

Soutenu publiquement le 23/06/2024

Par : MOKDAD Kenza

devant le jury composé de

Mr. TABLENNEHAS K.	*M.C.B*	U. F.Y. Médéa	**Président**
Mr. KRIMI M.	*M.A.A*	U. F.Y. Médéa	**Encadreur**
Mr. HAOUES B.	*M.A.A*	U. F.Y. Médéa	**Examinateur**

Année universitaire : 2023-2024

Table des matières

Résumé **3**

Remerciements **4**

Dédicace **5**

Introduction **6**

I *Généralités* **7**

I.1 *Courbes paramétrés* 7

I.1.1 *Courbes paramétrés(paramétrage)* 7

I.1.2 *Vecteur tangent* 8

I.1.3 *Longeur d'arc* 8

I.1.4 *Abscisse curviligne* 9

I.2 *Quelques résultats sur les EDOs* 10

I.3 *Courbes planes* 15

I.3.1 *Vecteur normal* 15

I.3.2 *Courbure d'une courbe plane* 16

I.3.3 *Théorème fondamental des courbes dans* $\mathbb{R}^2$ 17

I.4 *Courbes dans* $\mathbb{R}^3$ 18

I.4.1 *Courbure* 18

I.4.2 *Vecteur normal* 19

I.4.3 *Vecteur binormal* 19

I.4.4 *Torsion d'une courbe dans* $\mathbb{R}^3$ 20

I.4.5 *Théorème fondamental des courbes dans* $\mathbb{R}^3$ 21

I.5 *Surfaces paramétrées* 23

I.5.1 *Surfaces paramétrées dans* $\mathbb{R}^3$ 23

I.5.2 *Plan tangent et vecteur normal* 24

I.5.3 *Surface oriente* 26

I.5.4 *Première Forme fondamentale* 26

I.5.5 *Application de Gauss* 26

I.5.6 *Endomorphisme de Weingarten* 27

I.5.7 *Deuxième forme fondamentale* 27

I.5.8 *Courbures* 28

II *Equations solitons.* 30
II.1 *Géométrie des solutions solitons* 31
II.2 *Surfaces pseudosphériques et transformations de Bäcklund* 33

III *Interprétation géométrique de l'équation de Schrödinger non linéaire.* 36
III.1 *L'équation de l'anneau de fumée et l'équation de Schrödinger non linéaire* 36
III.1.1 *De l'équation de l'anneau de fumée à l'équation de Schrödinger non linéaire* 38
III.1.2 *De l'équation de Schrödinger non linéaire à l'équation de l'anneau de fumée* 40

IV *Interprétation géométrique de l'équation de Sine-Gordon.* 42
IV.1 *Surfaces dans* $\mathbb{R}^3$ *avec* $K = -1$ *et l'équation de Sine-Gordon.* 42
IV.1.1 *Des surfaces pseudosphériques à l'équation de Sine-Gordon* . 42
IV.1.2 *De l'équation de Sine-Gordon aux surfaces pseudosphériques* . 45

Résumé

Ce travail illustre deux interprétations géométriques de deux équations solitons importantes : L'équation de Schrödinger non linéaire et l'équation de Sine-Gordon.l'outil essentiel s'appuie sur la géométrie différentielle classique des courbes et des surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Remerciements

Tous mes remerciements vont avant tout à ***ALLAH. Dieu*** *soit loué, qui ma donné force, patience et volonté malgré les obstacles.* ***"Merci beaucoup mon dieu".***

Je veux remercie mon encadreur ***Mr.Krimi****, pour son aide, ses conseils avisés et sa disponibilité tout au long de ce mémoire.Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et de me faire l'honneur de leur présence.*

Un grand merci à ***ma mère****,* ***mon père****, ma famille et mes amis pour leurs amour, aide, confiance, conseils et encouragement durant mes années des études et durant la réalisation de ce travail.*

Je remercie tous ceux qui ont cru en moi et m'ont permis de réaliser ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à ceux qui ont éclairé mon chemin

À mes chers parents, ma mère et mon père, *je vous exprime ma profonde gratitude pour votre amour inconditionnel, votre patience inépuisable et vos encouragements constants.*

À toute ma famille.

À mes frères et ma sœur.

À mes amis.

À tous les professeurs, qui ont marqué mon parcours scolaire et universitaire, du primaire à l'enseignement supérieur.

Introduction

Il est bien connu que certaines équations solitons admettent des interprétations géométriques intéressantes. Parmi les exemples les plus importants, on trouve :

• *L'interprétation géométrique de l'équation de Schrödinger non linéaire qui contrôle les courbures principales d'une courbe intégrable dans* $\mathbb{R}^3$ *solution de l'équation de l'anneau de fumée dans le cadre de la géométrie différentielle classique des courbes dans* $\mathbb{R}^3$*.*

• *L'interprétation géométrique de l'équation de Sine-Gordon par une surface pseusdophérique dans* $\mathbb{R}^3$*. Cette équation est liée aux équations de Gauss-Codazzi de la géométrie différentielle classique des surfaces dans* $\mathbb{R}^3$*. En effet, si la courbure de Gauss est constante et négative, l'équation de Sine-Gordon correspond aux équations de Gauss-Codazzi.*

Le mémoire est organisé comme suit, le chapitre un, donne une présentation des notions générales nécessaires à l'étude. Dans le chapitre deux on introduit les équations solitons. On étudie dans le chapitre trois l'interprétation géométrique de l'équation de Schrödinger non linéaire. Enfin, on s'intéresse à l'interprétation géométrique de l'équation de Sine-Gordon dans le chapitre quatre.

Chapitre I

Généralités

I.1 *Courbes paramétrés*

I.1.1 *Courbes paramétrés(paramétrage)*

***Définition* I.1.1.** *Une courbe paramétrée ou (un arc paramétré) est une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
L'image $\gamma(I)$ est appelée le support de la courbe paramétrée.

***Exemple* I.1.1.1. *Droite dans* $\mathbb{R}^2$**

La droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par les points $(1, 2)$ et $(2, -3)$ peut être paramétrée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + t \\ y(t) &= 2 - 3t \end{aligned}$$

Remarquons que $\gamma(0) = (1, 2)$ et $\gamma(1) = (2, -3)$. De plus, $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc, γ est un paramétrage régulier sur $\mathbb{R}$.

Exemple* I.1.1.2. *Cercle

Le cercle C de rayon 2 et de centre $(1, -1)$ est donné par l'équation :

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

On peut prendre le paramétrage suivant pour C :

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + 2\cos t \\ y(t) &= -1 + 2\sin t \end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} (x(t) - 1)^2 + (y(t) + 1)^2 &= (1 + 2\cos t - 1)^2 + (-1 + 2\sin t + 1)^2 \\ &= 4\cos^2 t + 4\sin^2 t \\ &= 4 \end{aligned}$$

I.1.2 *Vecteur tangent*

***Définition* I.1.2.** *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n (n = 2 \quad ou \quad n = 3)$ un arc paramétré et $t_0 \in [a,b]$*

1. $\gamma'(t)$ est appelée le vecteur tangent γ au point $\gamma(t)$.
*2. Un point $\gamma(t_0)$ est dit **singulier** si $\gamma'(t) = 0$ (où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$).*
*3. Un point $\gamma(t_0)$ est dit **régulier** si $\gamma'(t) \neq 0$*
*4. L'arc paramétré γ est dit **régulier**si tous ses points sont réguliers.*
*5. Si γ est de classe C^2, le point p=$\gamma(t_0)$ est dit **birégulier** si les deux vecteurs*

$$\gamma'(t_0) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = (x_1'(t_0), ..., x_n'(t_0))$$

$$\gamma''(t_0) = \frac{d^2\gamma}{d^2t}(t_0) = (x_1''(t_0), ..., x_n''(t_0))$$

*sont **linéairement indépendants** dans $\mathbb{R}^n$*
*6. L'arc paramétré γ est dit **birégulier** si γ est de classe C^2 et tous ses points sont birégulires .*

***Exemple* I.1.2.1.** *L'application $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$ est un paramétrage de la parabole de l'équation $y = x^2$. C'est un arc paramétré non régulier. En effet : $\gamma'(t) = (2t, 4t^3)$ pour $t = 0, \gamma'(0) = (0,0)$ donc le point $\gamma(0) = (0,0)$ est un point singulier d'où γ est non régulier sur $\mathbb{R}$.*

***Exemple* I.1.2.2.** *L'arc parammétré :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \quad = (t, 3t^2, 2t^3). \end{array}$$

est birégulier. En effet. En effet, $\gamma'(t) = (1, 6t, 6t^2)$ et $\gamma''(t) = (0, 6, 12t)$ sont des vecteurs non nuls et non colinéaires donc linéairement indépendants.

I.1.3 *Longeur d'arc*

Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^2$ (ou dans $\mathbb{R}^3$)

***Définition* I.1.3.** *La longueur de l'arc de C d'origine $\gamma(a)$ et d'extrémité $\gamma(t)$ est donnée par :*

$$L(\gamma) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt.$$

***Exemple* I.1.3.1.** *Soit un paramétrage d'un cercle C dans le plan*

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \quad == (r\cos t, r\sin t). \end{array}$$

pour $t = \pi$:

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{\pi} r dt = r\pi.$$

La longueur du support de γ (la circonférence du cercle) est :

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2r\pi.$$

I.1.4 *Abscisse curviligne*

***Définition* I.1.4.** *On appelle abscisse curviligne d'origine P= $\gamma(a)$ la fonction numérique définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : [a,b] & \longrightarrow & [0,L] \\ & t & \longmapsto & s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \end{array}$$

***Remarque* I.1.4.1.** *L'abscisse curviligne $s = s(t)$ est une fonction différentiable et croissante. En efet :*

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^t \|\gamma'(u)\| du = \|\gamma'(u)\| > 0$$

Donc $s = s(t)$ est une bijection de $[a,b]$ sur $[0,L]$. Son inverse est $t = t(s)$. De plus on a :

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

***Définition* I.1.5.** *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage d'une courbe C.*

L'arc γ est dit paramétrage par abscisse curviligne (par longueur d'arc ou à vitesse unitaire) noté p.a.c si $\gamma'(t)$ est un vecteur unitaire pour tout $t \in [a,b]$.

***Exemple* I.1.4.1.** *Soit un paramétrage d'une droite*

$$\gamma(t) = (1+t, 2-5t).$$

$\gamma'(t) = (1,-5)$. *Alors*

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{26} du = \sqrt{26} t.$$

la fonction inverse est

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{26}}$$

I.2 *Quelques résultats sur les EDOs*

***Proposition* I.2.1.** *Soient $e_1, \ldots, e_n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ des applications différentiables, et que $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ soit une base orthonormale (o.n.) de $\mathbb{R}^n$ pour tout $t \in [a,b]$. Alors :*

(1) Il existe une fonction matricielle $A(t) = (a_{ij}(t))$ telle que

$$e\prime_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) e_j(t)$$

(2) $a_{ij} = e'_j . e_i$
(3) $a_{ij} + a_{ji} = 0$, i.e., $A(t)$

***Preuve* I.2.0.1.** *Puisque $e_1, \ldots, e_n$ forment une base o.n de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire comme une combinaison linéaire de $e'_j(t)$ $e_1(t), \ldots, e_n(t)$. Ce que prouve (1). e_j $e_i . e_j = \delta_{ij}$ $e'_i . e_j + e_i . e'_j = 0$*
Il découle de la définition de produit matriciel que

$$(v_1, \ldots, v_n)\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_k x_k v_k,$$

Où $v_1, \ldots, v_n$ sont les vecteurs colonnes. Donc on écrire sous forme matricielle

$$g'(t) = g(t)A(t),$$

où

$$g(t) = (e_1(t), \ldots, e_n(t)),$$
$$A(t) = (a_{ij}(t)).$$

on note la i-ème colonne de A, on obtient le coefficient de e'_i et on garde la base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$.

Théorème* I.2.1.** ***Théorème d'existence et d'unicité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $F : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse. on pose $t_0 \in I$ et $p_0 \in U$, alors il existe $\delta > 0$ et une unique et lisse $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow U$ avec x est une solution de problème de valeur initial suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = p_0 \end{cases} \tag{I.1}$$

Soit $gl(n)$ l'espace de tout les matrices réelles. C une matrice dite orthogonale si $C^t C = I$. Il découle de la définition du produit matriciel que :

***Proposition* I.2.2.** *On suppose $A(t) = (a_{ij}(t))$ est symétrique oblique pour tout t. Si $C \in gl(n)$ est une matrice orthogonale, $t_0 \in (a,b)$, $g : (a,b) \longrightarrow gl(n)$ est la solution de*

$$g'(t) = g(t)A(t),$$
$$g(t_0) = C$$

Alors $g(t)$ est orthogonale pour tout $t \in (a,b)$.

***Preuve* I.2.0.2.** *Donner $y = g^t g$. on calcul la dérivée y' pour obtenir*

$$y' = (g^t)'g + g^t g' = (g')^t g + g^t g' = (gA)^t g + g^t(gA) = A^t y + yA$$

Puisque la fonction constante $y(t) = I$ est une solution verfiante les conditions initiales $y(t_0) = I$, il découle de l'unicité des solutions de l'EDO (Théorème 1.2.1) que $y(t) = I$ pour tout $t \in (a,b)$

Ensuite, nous décrivons les repères parallèles. Soit (e_1, ξ_1, ξ_2) un repère orthonormé régulier le long de α tel que $e_1 = \tilde{\alpha}$.Alors, par la proposition (1.2.1), il existe trois fonctions régulières f_1, f_2, f_3 telles que

$$(e_1, \xi_1, \xi_2)' = (e_1, \xi_1, \xi_2)\begin{pmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ f_1 & 0 & -f_3 \\ f_2 & f_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous voulons changer le repère normal orthonormé (ξ_1, ξ_2) en (v_1, v_2) de sorte que l'entrée 23 de la matrice de coefficients de (e_1, v_1, v_2) soit nulle. Pour ce faire, on tourne le repère normal $\xi_1(t), \xi_2(t)$ par un angle $\beta(t)$:

$$\begin{cases} v_1(t) = \cos\beta(t)\xi_1 + \sin\beta(t)\xi_2 \\ v_2(t) = -\sin\beta(t)\xi_1 + \cos\beta(t)\xi_2 \end{cases}$$

On veut choisir β de sorte que $v_1' \cdot v_2 = 0$. Mais

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= \beta'(-\sin\beta\xi_1 + \cos\beta\xi_2)\cdot(\sin\beta\xi_1 + \cos\beta\xi_2) + (\cos\beta\xi_1' + \sin\beta\xi_2')\cdot(\sin\beta\xi_1 + \cos\beta\xi_2) \\ &= \beta' + (\cos^2\xi_1' \cdot \xi_2 - \sin^2\beta\xi_2' \cdot \xi_1) \\ &= \beta' + f_3 \end{aligned}$$

Donc si on choisit $\beta(t)$ tel que

$$\beta' = -f_3, \tag{I.2}$$

Alors le nouveau repère orthonormé (e_1, v_1, v_2) satisfait

$$(e_1, \xi_1, \xi_2)' = (e_1, \xi_1, \xi_2)\begin{pmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Où

$$\begin{cases} k_1 = e_1' \cdot v_1 = e_1' \cdot (\cos\beta\xi_1 + \sin\beta\xi_2) = f_1\cos\beta + f_2\sin\beta, \\ k_2 = e_1' \cdot v_1 = -f_1\sin\beta + f_2\cos\beta \end{cases}$$

Le repère orthonormé (e_1, v_1, v_2) est appelé un repère parallèle le long α. La raison de ce nom est que la composante normale de la dérivée du champ de vecteurs normaux est nulle. Les fonctions k_1, k_2 sont appelées les courbures principales le long de α, respectivement. Cependant, le choix du repère parallèle n'est pas unique car β n'a besoin que de satisfaire (I.2), donc on peut remplacer β par β plus une constante θ_0. Si on fait tourner(v_1, v_2) par une rotation constante θ_0 pour obtenir $(\tilde{v_1}, \tilde{v_2})$, alors $(e_1, \tilde{v_1}, \tilde{v_2})$ est encore parallèle. Mais la courbure principale $\tilde{k_1}$ le long de $\tilde{v_1}$ est

$$\tilde{k_1} = e_1' \cdot \tilde{v_1} = e_1' \cdot (\cos\theta_0 v_1 + \sin\theta_0 v_2) = cos\theta_0 k_1 + \sin\theta_0 k_2$$

un calcul similaire donne

$$\tilde{k_2} = -\sin\theta_0 k_1 + \cos\theta_0 k_2$$

On note la dérivée secondaire

$$\alpha'' = e_1' = k_1 v_2 + k_2 v_2 = \tilde{k}_1 \tilde{v}_1 + \tilde{k}_2 \tilde{v}_2.$$

Donc on a

***Proposition* I.2.3.** *Soit α une courbe dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par la longueur d'arc, (v_1, v_2) un repère parallèle le long de α, et k_1, k_2 les courbes principales par rapport à v_1, v_2 respectivement. Alors $\alpha'' = k_1 v_1 + k_2 v_2$*

***Corollaire* I.2.1.** *Soit (v_1, v_2) un repère parallèle normal pour α, k_1, k_2 les courbes principales correspondantes, (e_1, e_2, e_3) le repère de Frenet, et k, τ la courbe de torsion de α. Alors*

(1) il existe $\beta(t)$ telle que $v_1 = \cos\beta e_2 + \sin\beta e_3$, $v_2 = -\sin\beta e_2 + \cos\beta e_3$, et $\beta' = -\tau$,
(2) $k_1 = k\cos\beta$, $k_2 = -k\sin\beta$.

***Preuve* I.2.0.3.** *Utiliser $\xi_1 = e_2$, $\xi_2 = e_3$ dans le calcul avant la proposition Etant donné que $f_1 = k$, $f_2 = 0$ et $f_3 = \tau$, les équations impliquent le corollaire.*

Théorème de Frobenius

Le théorème de Frobenius, également connu sous le nom de théorème de compatibilité, est un théorème fondamental en mathématiques qui traite de l'existence de solutions aux systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) du premier ordre. Il a été démontré par Ferdinand Georg Frobenius en 1879. Le théorème de Frobenius établit que certaines conditions de compatibilité sont satisfaites si et seulement si, un système d'EDO du premier ordre possède une solution de classe C^∞ dans un voisinage d'un point donné. Ces conditions de compatibilité sont exprimées sous la forme d'équations différentielles partielles (EDP) que les coefficients du système d'EDO doivent satisfaire.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et A, B; $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe C^∞. Considérons le système d'EDP de premier ordre suivant pour $u : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u(x, y)), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = B(x, y, u(x, y)), \end{cases} \tag{I.3}$$

Le théorème de Frobenius donne une condition nécessaire et suffisante pour que le système d'EDP (I.3) de premier ordre soit soluble. Nous aurons besoin d'utiliser ce théorème de manière extensive dans l'étude de l'évolution des courbes et des surfaces dans $\mathbb{R}^3$. On verra d'après la preuve de ce théorème que, bien qu'il s'agisse d'une EDP, l'algorithme de construction des solutions de cette EDP consiste à résoudre un système d'EDO en variable x et à résoudre une famille de systèmes d'EDO en variables y. La condition donnée dans le théorème de Frobenius garantit que ce processus produit une solution de l'EDP de premier ordre.

Condition de compatibilité :

Si le système (I.3) admet une solution différentiable $u(x, y)$, alors les dérivées mixtes $u_{xy} = u_{yx}$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} u_{xy} = (u_x)_y = (A(x, y, u(x, y)))_y = A_y + A_u u_y = A_y + A_u B \\ = (u_y)x = (B(x, y, u(x, y)))_x = B_x + B_u u_x = B_x + B_u A \end{aligned}$$

Donc A, B doivent satisfaire la condition de compatibilité :

$$A_y + A_u B = B_x + B_u A$$

De plus, c'est aussi une condition suffisante pour que le système (I.3) soit soluble :

***Théorème* I.2.2.** *Soient $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ et $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles ouverts, $A = (A_1, \ldots, A_n)$, $B = (B_1, \ldots, B_n)$:$U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des applications différentiables, $(x_0, y_0) \in U_1$ et $p_0 \in U_2$. Alors, le système différentiel du premier ordre suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u(x, y)), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = B(x, y, u(x, y)), \\ u(x_0, y_0) = p_0, \end{cases} \tag{I.4}$$

possède une solution différentiable pour u dans un voisinage de (x_0, y_0) si et seulement si

$$(A_i)_y + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial u_i} B_j = (B_i)_x + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial u_i} A_j, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{I.5}$$

***Preuve* I.2.0.4.** *Si u est une solution différentiable de (I.4) , alors $(u_x)_y = (u_y)_x$ implique que la condition de compatibilité (I.5) doit être vérifiée.*
Réciproquement, supposons que A, B satisfont (I.5) . Pour résoudre (I.4) , nous procédons comme suit :
L'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires, théorème (2.2.1), impliquent qu'il existe des solutions différentiables $\alpha : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dx} = A(x, y_0, \alpha(x)), \\ \alpha(x_0) = p_0. \end{cases} \tag{I.6}$$

Pour chaque $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, soit $\beta^x(y)$ la solution unique de

$$\begin{cases} \frac{d\beta^x}{dy} = B(x, y, \beta^x(y)), \\ \beta^x(y_0) = \alpha(x). \end{cases} \tag{I.7}$$

définissons $u(x, y) = \beta^x(y)$. Par construction, u satisfait la deuxième équation de (I.4) et $u(x_0, y_0) = p_0$. Il reste à prouver que u satisfait la première équation de (I.4) . Pour ce faire, nous calculons la dérivée en y de $z(x, y) = u_x - A(x, y, u(x, y))$ pour obtenir

$$\begin{aligned} z_y &= u_x - A(x, y, u)_y = u_{xy} - A_y - A_u u_y = (u_y)_x - (A_y + A_u B) \\ &= (B(x, y, u))_x - (A_y + A_u B) = B_x + B_u u_x - (A_y + A_u) \\ &= B_x + B_u u_x - (B_x + B_u A) = B_u(u_x - A) = B_u(x, y, u(x, y))_z \end{aligned}$$

Cela prouve que z est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$z_y(x, y) = B_u(, y, z)z(x, y). \tag{I.8}$$

Mais

$$z(x, y_0) = u_x(x, y_0) - A(x, y_0, u(x, y_0)) + \alpha'(x) - A(x, y_0, \alpha(x)) = 0.$$

Puisque la fonction constante zéro est également une solution de (I.8) avec 0 données initiales, par l'unicité des solutions d'EDO (2.2.1) nous avons $z = 0$, i.e., u u satisfait la deuxième équation de (I.4).

***Remarque* I.2.0.2.** *La preuve de théorème (2.2.1) donne un algorithme pour construire une solution numérique de l'équation (I.4). L'algorithme est suivant :*
• *Résolvez d'abord l'EDO (I.6) sur les lignes horizontales $y = y_0$ par une méthode numérique (par exemple Runge-Kutta) pour obtenir $u(x_k, y_0)$ pour $x_k = x_0 + k\epsilon$ où ϵ est le pas de temps dans la méthode numérique.*
• *Ensuite résolvez le système d'EDO (I.7) sur la ligne verticale 2=2n pour chaque n pour obetenir la valeur $u(x_n, y_m)$.*

***Corollaire* I.2.2.** *Soit U_0 un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U_0$, $C \in gl(n)$, et $P, Q : U_0 \to gl(n)$ application lisse. Alors le problème de valeur initial suivant*

$$\begin{cases} g_x = gP, \\ g_y = gQ, \\ g(x_0, y_0) = C \end{cases} \tag{I.9}$$

a une solution $gl(n)$ différentiable à valeurs dans un voisinage de (x_0, y_0) si et seulement si

$$P_y - Q_x = [P, Q] + PQ - QP \tag{I.10}$$

***Preuve* I.2.0.5.** *Ce corollaire découle du théorème (2.2.1) avec $A(x,y,u) = uP(x,y)$ et $B(x,y,u) = uQ(x,y)$. On peut également calculer les dérivées mixtes directement comme suite :*

$$\begin{aligned}(g_x)_y = (gP)_y = g_yP + gP_y = gQP + gP_y = g(QP + P_y),\\ = (g_y)_x = (gQ)8x = g_xP + gP_x = gPQ + gQ_x = g(PQ + Q_y).\end{aligned}$$

Donc la condition de compatibilité est

$$QP + P_y = PQ + Q_x$$

qui est (I.10)

I.3 *Courbes planes*

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré par abscisse curviligne, nous noterons $T(s)$ son vecteur tangent $\gamma'(s)$, qui dans ce cas est un vecteur unitaire.

***Définition* I.3.1.** *Soit $\gamma :\longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré p.a.c. On définit le vecteur normal au point $\gamma(s)$:*

$$n(s) = J \times T(s), où \;\; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

remarquons que $\|n(s)\| = 1$.

Exemple* I.3.0.2.** ***Un paramétrage d'un cercle :

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longrightarrow & \gamma(s) \;\; = (r\cos\dfrac{s}{r}, r\sin\dfrac{s}{r}) \end{array}$$

$$T(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}) \;\; et \;\; n(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}).$$

Cette définition est réalisée de telle manière que la famille $\{T(s), n(s)\}$ forme une base orthonormée positivement orientée de $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes, le vecteur $n(s)$ est obtenu à partir de $T(s)$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihoraire.

I.3.1 *Vecteur normal*

***Définition* I.3.2.** *Soit C une courbe lisse tridimensionnelle représentée par un n intervalle ouvert I. Si $T(t) \neq 0$, alors le vecteur normal de l'unité principale au point t est défini comme étant.*

$$N(t) = \frac{T(t)}{||T(t)||}$$

I.3.2 *Courbure d'une courbe plane*

Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré p.a.c pour $s \in I$, on a :

$$< T(s), T(s) >= \|T(s)\| = 1$$

dérivons cette équation :

$$< T'(s), T(s) > + < T(s), T'(s) = 2 < T'(s), T(s) >= 0$$

Ainsi, les deux vecteurs $T(s)$ et $T'(s)$ sont perpendiculaires. Par conséqent $T'(s)$ est un multiple du vecteur normal $n(s)$,d'où :

$$T'(s) = \kappa(s).n(s).$$

***Exemple* I.3.2.1.** *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré p.a.c. La fonction*

$$\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

est appelée la courbure de γ
Soit le paramétrage d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r :

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longrightarrow & \gamma(s) = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}) \end{array}$$

remarquons que $\|T(s)\| = \|(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})\| = 1$, c-à-d γ est paramétré p.a.c, de plus $n(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$, on a :$T'(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}) = \frac{1}{r} \times n(s)$, d'où $\kappa(s) = \frac{1}{r}$.

***Remarque* I.3.2.1.** *On peut calculer la courbure par :*

$$\kappa(s) =< T'(s), n(s) >= det(\gamma'(s), \gamma''(s))$$

***Proposition* I.3.1.** Soit γ un arc paramétré régulier. La courbure de γ au point $\gamma(t)$ est :

$$\kappa(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Preuve. Voir ([2])

***Exemple* I.3.2.2.**

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

$$\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \quad et \quad \gamma''(t) = (-r\cos t, -r\sin t)$$

on obtient :

$$\kappa(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

I.3.3 *Théorème fondamental des courbes dans* $\mathbb{R}^2$

***Théorème* I.3.1.** *1. Soit $\kappa : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in (a,b)$, et u_1, u_2 une base orthogonale fixée de $\mathbb{R}^2$, il existe une unique courbe $\gamma(0) = p_0$ définie au voisinage de t_0 paramétrée par abscisse curviligne telle que, $\gamma(0) = p_0$, $\alpha'(0) = u_1$, et $k(t)$ est sa fonction de courbure.*

2. Soit γ, $\tilde{\gamma} : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un courbe de classe C^∞ paramétré par abscisse curviligne. Si γ et $\tilde{\gamma}$ ont la même fonction de courbure, alors il existe un mouvement rigide T pour que $\tilde{\gamma}(t) = T(\gamma(t))$ pour tout t.

***Preuve* I.3.3.1.** *(1) Pour construire la courbe γ, nous devons résoudre*

$$\begin{cases} \gamma(0) = p_0, \\ e_1(0) = u_1, \\ e_2(0) = u_2 \end{cases} \tag{I.11}$$

avec les conditions initiales suivantes : $\gamma(0) = p_0$, $e_1 = u_1$, $e_2 = u_2$.
Soit $F : (a,b) \times (\mathbb{R}^2)^3 \to (\mathbb{R}^2)^3$ l'application définie par :

$$F(t, y_0, y_1, y_2) = (y_1, k(t)y_2, -k(t)y_3).$$

Il découle du théorème (1.2.1) qu'il existe une solution unique avec les conditions initiales $(y_0, y_1, y_2)(0) = (p_0, u_1, u_2)$.

Comme $\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique,*
et

$$(y_1, y_2)' = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

il découle de la proposition(1.2.3) que $y_1(t), y_2(t)$ forment une base orthonormée pour chaque t.

(2) Soit $e_1 = \gamma'$, e_2 le vecteur normal unitaire pour α telle que $\det(e_1, e_2) = 1$, et $\tilde{e}_1 = \tilde{\alpha}'$, $\tilde{e}_2$ le vecteur normal unitaire pour $\tilde{\gamma}$ telle que $\det(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = 1$. Par hypothèse α et $\tilde{\gamma}$ ont la même fonction de courbure k_1. Donc, les deux (α, e_1, e_2) et $(\tilde{\gamma}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ satisfont la même équation différentielle

$$y_0' = y_1, y_1' = ky_2, y_2' = -ky_1.$$

Soit h la rotation constante

$$h = (\tilde{e}_1(0), \tilde{e}_2(0))(e_1(0), e_2(0))^{-1},$$

et T le mouvement rigide

$$T(v) = \tilde{\gamma}(0) - h(\gamma(0)) + hv.$$

Fixer $\beta(t) = T(\gamma(t))$. *Alors* $\beta(0) = \tilde{\gamma}(0)$ *et* $\beta' = he_1$. *Puisque* h *est la rotation ,*he_2 *est l'unitaire normale de* β *et* (he_1, he_2) *est un o.n repère local le long de* β. *Par définition de* h, *on a* $h(e_i(0)) = \tilde{e_i}(0)$ *pour* $i = 1, 2$. *Mais*

$$\begin{cases} \beta' = he_1 \\ (he_1)' = h(e_1') = h(ke_2) = kh(e_2) \\ (he_2)' = h(e_2') = h(ke_1) = kh(e_1) \end{cases}$$

Donc α *et* β *sont les solutions du problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = ky_2 \\ y_2' = -ky_1 \\ (y_0, y_1, y_2)(0) = (\alpha'(0), \tilde{e}_1(0), \tilde{e}_2(0)) \end{cases}$$

I.4 *Courbes dans* $\mathbb{R}^3$

I.4.1 *Courbure*

***Définition* I.4.1.** *Soit* $\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *un arc paramétré p.a.c. La fonction*

$$\begin{array}{rccl} \kappa & : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \kappa(s) \quad = \|T'(s)\| \end{array}$$

est appelée la courbure de γ *au point* $\gamma(s)$.

***Exemple* I.4.1.1.** *1. La droite dans* $\mathbb{R}^3$ *passant par* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$ *et* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ *peut être paramétrer par*

$$\gamma(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1) + t(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t, 1)$$

Remarquons que $\gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
Puisque $\|\gamma'(t)\| = 1$, *Alors*

$$\kappa(s) = \|\gamma''(t)\| = \|(0, 0, 0)\|$$

2.L'hélice circulaire est une courbe paramétrée par :

$$\gamma(t) = (\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$\gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}} sin(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

donc γ *est p.a.c*

$$\gamma''(t) = (-\frac{1}{2} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2} sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$$

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2}$$

I.4.2 *Vecteur normal*

***Définition* I.4.2.** *Soit $y : I \to \mathbb{R}^3$ un arc paramétré p.a.c. Si $k(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$, on définit le vecteur normal de y au point $y(s)$ par :*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{|||T'(s)||} = \frac{T'(s)}{k(s)}$$

***Exemple* I.4.2.1.** *Considérons l'arc paramétré $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ défini par :*

$$\gamma(s) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{s}{\sqrt{2}})$$

On peut vérifier que γ est p.a.c. On a alors :

$$\gamma'(s) = (-\frac{1}{2}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$\gamma''(s) = (-\frac{1}{2^2}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2^2}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$$
$$\kappa(s) = ||\gamma''(s)|| = \frac{1}{2}$$

D'après la définition du vecteur normal, on obtient :

$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} = \left(-\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0\right)$$

***Remarque* I.4.2.1.** *Le vecteur $N(s)$ est un vecteur unitaire pour tout $s \in I$. De plus, et puisque $T(s) \cdot T(s) = 0$, alors $T(s)$ et $N(s)$ sont perpendiculaires. Il s'ensuit que $B(s) = T(s) \times N(s)$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $T(s)$ et à $N(s)$.*

I.4.3 *Vecteur binormal*

***Définition* I.4.3.** *Le vecteur $\mathbf{B}(s)$ est appelé le vecteur binormale de $\mathbf{y}$ au point $\mathbf{y}(s)$. Par conséquent, le triplet $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ au point $\mathbf{y}(s)$ pour tout $s \in I$, cette base mobile est appelée repère (ou trièdre) de Frenet (ou trièdre de Frenet).*

***Remarque* I.4.3.1.** *Le trièdre de Frenet est défini seulement pour les valeurs de s vérifiant $k(s) \neq 0$.*

Passons maintenant à la courbure des paramétrages réguliers pas forcement paramétrées par abscisse curviligne.

***Proposition* I.4.1.** *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un arc paramétré régulier. Alors sa courbure est donnée par :*

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma(t) \bigwedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

***Exemple* I.4.3.1.** *L'hélice circulaire d'axe* (z, z') *est paramétrée par :*

$$y(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

où a, b *sont des réels non nuls.*

$$y'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

$$||y'(t)|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ceci montre que y *est régulier, mais n'est pas p.a.c.*

$$y''(t) = (-a\cos(t), -a\sin(t), 0) \tag{I.12}$$

et

$$y'''(t) = (a\sin(t), -a\cos(t), 0) \tag{I.13}$$

il s'ensuit :

$$\kappa(t) = \frac{\|(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)\|_2}{\|(-a\sin(t), a\cos(t), b)\|_3} = \frac{(a^2b^2 + a^4)^{1/2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{I.14}$$

I.4.4 *Torsion d'une courbe dans* $\mathbb{R}^3$

Dans cette sous-section, on introduit une fonction qui mesure le taux de changement de la direction du vecteur binormal $B(s)$ *en un point* $\gamma(s)$*.*

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée p.a.c. et* $s \in I$ *tel que* $k(s) \neq 0$*, soit* $\{T(s), N(s), B(s)\}$ *le tièdre de Frenet au point* $\gamma(s)$*.*

Par dérivation de l'équation $B(s) = T(s) \bigwedge N(s)$*, on obtient :*

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s)$$

$$B'(s) = k(s)N(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s)$$

puisque $N(s) \wedge N(s) = 0$*, on a :*

$$B'(s) = T(s) \wedge N'(s),$$

il est claire que $B'(s)$ *et* $T(s)$ *sont perpendiculaires en* $\gamma(s)$*. Mais aussi à* $B(s)$*, par conséquent* $B'(s)$ *est parallèle à* $N(s)$*, d'où*

$$B'(s) = \tau(s) \cdot N(s).$$

***Définition* I.4.4.** *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un arc paramétré p.a.c. tel que $k \neq 0$ sur I. La fonction numérique*

$$\tau : I \to \mathbb{R}$$

est appelée la torsion de γ au point $\gamma(s)$.

***Exemple* I.4.4.1.** *Considérons l'exemple de l'hélice circulaire :*

$$\gamma(t) = (\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$\gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}}), donc ||\gamma'(t)|| = 1$$

donc γ est p.a.c. Calculons d'abords $N(s)$:

$$\gamma''(s) = (-\frac{1}{2}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$$

$$k(s) = ||\gamma''(s)|| = \frac{1}{2}$$

$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} = (-cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$$

Calculons $B(s)$:

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

$$B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), -cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), 1)$$

enfin,

$$B'(s) = \frac{1}{2}(-cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$$

$$\tau(s) = < B'(s), N(s) >$$

$$T(s) = \frac{1}{2}.$$

***Proposition* I.4.2.** *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un arc paramétré p.a.c. tel que $k \neq 0$ sur I, alors le tracé de y est contenu dans un plan (une courbe plane) si et seulement si la torsion $T = 0$ sur I.*

***Preuve* I.4.4.1.** *Remarquer que la fonction i mesure le taux de changement du vecteur binormale, c'est-à-dire, $\tau(s) = 0$ en $\tau(s)$ est équivalent à $B(s)$ est constant.*

I.4.5 *Théorème fondamental des courbes dans* $\mathbb{R}^3$

***Théorème* I.4.1.** *1. Etant donné des fonctions régulières k, $\tau : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $t_0 \in (a, b)$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$ et (u_1, u_2, u_3) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ en p_0 , il existe $\delta > 0$ et une courbe $\alpha : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par abscisse curviligne telle que $\alpha(0) = p_0$,et (u_1, u_2, u_3) est le repère de Frenet de α à $t = t_0$.*

2. *supposons que* $\alpha, \tilde{\alpha} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *sont des courbes paramétrées par abscisse curviligne, et* $\alpha, \tilde{\alpha}$ *ont la même fonction torsion* τ*. Alors, il existe un mouvement regide* T *tel que* $\tilde{\alpha} = T(\alpha)$

***Preuve* I.4.5.1.** *Ce théorème peut être prouvé exactement de la même manière que théorème (1.3.3) en appliquent le théorème d'existence et d'unicité (1.2.1) à la solution de l'EDO sur la fonction* F *définie par :*

$$F(t, y_0, y_1, y_2) = (y_1, k(t)y_2, -k(t)y_1 + \tau(t)y_3, -\tau(t)y_2).$$

Ensuite, nous décrivons les repères parallèles. Soit (e_1, ξ_1, ξ_2) *un repère orthonormé régulier le long de* α *tel que* $e_1 = \tilde{\alpha}$*.Alors, par la proposition (1.2.1), il existe trois fonctions régulières* f_1, f_2, f_3 *telles que*

$$(e_1, \xi_1, \xi_2)' = (e_1, \xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ f_1 & 0 & -f_3 \\ f_2 & f_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous voulons changer le repère normal orthonormé (ξ_1, ξ_2) *en* (v_1, v_2) *de sorte que le coefficient d'entrée 23 de la matrice de coefficients de* (e_1, v_1, v_2) *soit nulle. Pour ce faire, on tourne le repère normal* $\xi_1(t), \xi_2(t)$ *par un angle* $\beta(t)$ *:*

$$\begin{cases} v_1(t) = \cos\beta(t)\xi_1 + \sin\beta(t)\xi_2 \\ v_2(t) = -\sin\beta(t)\xi_1 + \cos\beta(t)\xi_2 \end{cases}$$

On veut choisir β *de sorte que* $v_1' \cdot v_2 = 0$*. Mais*

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= \beta'(-\sin\beta\xi_1 + \cos\beta\xi_2) \cdot (\sin\beta\xi_1 + \cos\beta\xi_2) + (\cos\beta\xi_1' + \sin\beta\xi_2') \cdot (\sin\beta\xi_1 + \cos\beta\xi_2) \\ &= \beta' + (\cos^2\xi_1' \cdot \xi_2 - \sin^2\beta\xi_2' \cdot \xi_1) \\ &= \beta' + f_3 \end{aligned}$$

Donc si on choisit $\beta(t)$ *tel que*

$$\beta' = -f_3, \tag{I.15}$$

Alors le nouveau repère orthonormé (e_1, v_1, v_2) *satisfait*

$$(e_1, \xi_1, \xi_2)' = (e_1, \xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Où

$$\begin{cases} k_1 = e_1' \cdot v_1 = e_1' \cdot (\cos\beta\xi_1 + \sin\beta\xi_2) = f_1\cos\beta + f_2\sin\beta, \\ k_2 = e_1' \cdot v_1 = -f_1\sin\beta + f_2\cos\beta \end{cases}$$

Le repère orthonormé (e_1, v_1, v_2) *est appelé un repère parallèle le long* α*. La raison de ce nom est que la composante normale de la dérivée du champ de vecteurs normaux est nulle. Les fonctions* k_1, k_2 *sont appelées les courbures principales le*

long de α, respectivement. Cependant, le choix du repère parallèle n'est pas unique car β n'a besoin que de satisfaire (1.14), donc on peut remplacer β par β plus une constante θ_0. Si on fait tourner(v_1, v_2) par une rotation constante θ_0 pour obtenir $(\tilde{v_1}, \tilde{v_2})$, alors $(e_1, \tilde{v_1}, \tilde{v_2})$ est encore parallèle. Mais la courbure principale $\tilde{k_1}$ le long de $\tilde{v_1}$ est

$$\tilde{k_1} = e_1' \cdot \tilde{v_1} = e_1' \cdot (\cos\theta_0 v_1 + \sin\theta_0 v_2) = cos\theta_0 k_1 + \sin\theta_0 k_2$$

un calcul similaire donne

$$\tilde{k_2} = -\sin\theta_0 k_1 + \cos\theta_0 k_2$$

On note la dérivée secondaire

$$\alpha'' = e_1' = k_1 v_2 + k_2 v_2 = \tilde{k}_1 \tilde{v}_1 + \tilde{k}_2 \tilde{v}_2.$$

Donc on a

***Proposition* I.4.3.** *Soit α une courbe dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par abscisse curviligne, (v_1, v_2) un repère parallèle le long de α, et k_1, k_2 les courbes principales par rapport à v_1, v_2 respectivement. Alors $\alpha'' = k_1 v_1 + k_2 v_2$*

***Corollaire* I.4.1.** *Soit (v_1, v_2) un repère parallèle normal pour α, k_1, k_2 les courbes principales correspondantes, (e_1, e_2, e_3) le repère de Frenet, et k, τ la courbe de torsion de α. Alors*
(1) il existe $\beta(t)$ telle que $v_1 = \cos\beta e_2 + \sin\beta e_3$, $v_2 = -\sin\beta e_2 + \cos\beta e_3$, et $\beta' = -\tau$,
(2) $k_1 = k\cos\beta$, $k_2 = -k\sin\beta$.

preuve. *Utiliser $\xi_1 = e_2$, $\xi_2 = e_3$ dans le calcul avant la proposition Etant donné que $f_1 = k$, $f_2 = 0$ et $f_3 = \tau$, les équations impliquent le corollaire.*

I.5 *Surfaces paramétrées*

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. On utilisera (u, v) comme coordonnées dans l'espace des paramètres U et (x, y, z) comme coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

I.5.1 *Surfaces paramétrées dans* $\mathbb{R}^3$

***Définition* I.5.1.** *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. Une application lisse :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \longrightarrow & \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \sigma(u, v) \end{array}$$

est dite un ***paramétrage d'une surface****(ou une* ***surface paramétrée*** *)dans $\mathbb{R}^3$ si*
$\sigma_u \times \sigma_v(u, v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $(u, v) \in U$. $\sigma(U)$est appelée le support de σ.

***Remarque* I.5.1.1.** *La condition $\sigma_u \times \sigma_v(u,v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ est équivalente à l'une des deux assertions suivantes :*

1. *La matrice Jacobienne de σ est de **rang 2** en chaque point de U,*
2. *les deux vecteur σ_t et σ_v sont linéairement indépendants pour tout $(u,v) \in U$.*

Exemple* I.5.1.1.** ***Le plan définit par l'équation cartésienne :

$$3x + 2y - z = 0$$

De l'équation découle

$$z = 3x + 2y$$

posons $x = u$ et $y = v$ on obtient un paramétrage de ce plan :

$$\begin{array}{rccccc} \sigma & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \\ & (u,v) & & \longmapsto & \sigma(u,v) & = (u,v,3u+2v) \end{array}$$

Exemple* I.5.1.2.** ***Graphe d'une fonction lisse
Soit la fonction lisse

$$\begin{array}{rccccc} f & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (x,y) & & \longmapsto & f(x,y) & = z \end{array}$$

Considérons le graphe Γ_f de

$$\begin{array}{rccccc} \sigma & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \\ & (x,y) & & \longmapsto & \sigma(x,y) & = (x,y,f(x,y)) \end{array}$$

l'application σest un paramétrage de la surface $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$. En effet, l'application σ de U
dans $\mathbb{R}^3$ vérifie pour tout $(u,v) \in U$:

$$\sigma_u \times \sigma_v(u,v) = (-f_u, -f_v, 1)(u,v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

I.5.2 *Plan tangent et vecteur normal*

Plan tangent à une surface

Soit $\sigma = \sigma(u,v)$ un paramétrage d'une surface $S = \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3$ et

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : [a,b] & \longrightarrow & U \subset \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (u(t), v(t)) \end{array}$$

un paramétrage régulier d'une courbe C. Considérons maintenant

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u(t), v(t)) & \longmapsto & \sigma(u(t), v(t)) = \sigma(\gamma(t)) = \rho(t) \end{array}$$

l'image de C sur $S = \sigma(U)$. L'application $\rho = \sigma \circ \gamma$est de C^∞ car c'est la composée de deux applicationsde C^∞, de plus $\frac{d\rho}{dt}(t) \neq 0$ pour tout t.

***Définition* I.5.2.** *Soit $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul et S une surface de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur v est tangent S en un point $p \in S$ s'il existe une courbe sur S passant par p et et paramétrée par β telle que $\frac{d\beta}{dt}(t) \neq v$. Si $\beta(t) = \sigma(u(t), v(t))$, alors*

$$\frac{d\beta}{dt}(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \sigma_u\frac{du}{dt} + \sigma_v\frac{dv}{dt} = \sigma_u u' + \sigma_v v'$$

d'où la définition :

***Définition* I.5.3.** *Soit $p = \sigma(u, v) \in S$. l'espace tangent à S au point p, noté T_pS est le plan engendré par les deux vecteurs $\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v)$. Pour un point $x \in T_pS$, alors : $x = p + \sigma_u(u, v) + \sigma_v(u, v)$.*

***Exemple* I.5.2.1.** *Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Par l'exemple précédent, le graphe $\Gamma_f = \{(x, y, x^2 + y^2)|(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$est une surface paramétrée par :*

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\sigma_u(u, v) = (1, 0, 2u), \sigma_v(u, v) = (0, 1, 2v)$$

et

$$\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) = (-2u, -2v, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

pour $p = \sigma(0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} T_pS &= Vect\{\sigma_t(0, 0), \sigma_v(0, 0)\} \\ &= Vect\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Vecteur normal

***Définition* I.5.4.** *Soit*

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \longrightarrow & S = \sigma(U) \in \mathbb{R}^3 \\ & (t, v) & \longmapsto & \sigma(u, v) \end{array}$$

une surface paramétrée régulière. Pour $p = \sigma(u, v) \in U$ le vecteur $\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)$ est un vecteur non nul, orthogonal au plan tangent T_pS, on obtient le vecteur unitaire correspondant en prenant

$$n(u, v) = \frac{\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)}{\|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\|}$$

il est appelé le vecteur normal unitaire de S au point $p = \sigma(u, v)$.

***Exemple* I.5.2.2.** *Considérons $S = \{(u, v, f(u, v))|(u, v) \in \mathbb{R}^2\}$*
Si $p = \sigma(u, v) \in S$, alors : $\sigma_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v)), \sigma_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v)$ et

$$n(u, v) = \frac{\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)}{\|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\|} = \frac{(-f_t, -f_v, 1)}{\|(-f_t, -f_v, 1)\|} = \frac{(-f_t, -f_v, 1)}{\sqrt{f_v^2 + f_v^2 + 1}}$$

***Exemple* I.5.2.3.** *Pour* $S = \{(x, y, z) \in S^2 | z > 0\}$ *paramétrée par :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & U = B(0,1) & \longrightarrow & S = \sigma(U) \in \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}) \end{array}$$

où $B(0,1)$ *est la boule ouverte de* $\mathbb{R}^2$*. Le vecteur normal au point* $p = \sigma(u,v)$ *est :*

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}).$$

I.5.3 *Surface oriente*

***Définition* I.5.5.** *Soit* S *une surface régulière de* $\mathbb{R}^3$*. Un champ de vecteurs normal sur* S *est une application vectorielle de classe* C^∞

$$n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tel que pour tout $p \in S, n(p) \in (T_pS)^\perp$ *le plan orthogonal* $\tilde{A}$ (T_pS)

Définition* I.5.6.** *Une surface réguliée de* $\mathbb{R}^3$ *est* ***orientée *si elle admet un champ de vecteurs normales unitaires global de classe* C^∞*.*

I.5.4 *Première Forme fondamentale*

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ *une surface paramétrée par :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) \end{array}$$

la première forme fondamentale de S *au point* $p = \sigma(u,v)$ *est la restriction du produit scalaire de* $\mathbb{R}^3$ *à* T_pS *l'espace tangent de* S *en* p*, c'est donc la forme bilinéaire symétrique définie positive donnée par :*

$$\begin{array}{rccc} I_p : & T_pS \times T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & I_p(u,v) = \langle u, v \rangle . \end{array}$$

où $\langle ., . \rangle$ *est le produit scalaire de* $\mathbb{R}^3$ *et*

$$I_p(u,v) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

où $E = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)^2, F = \frac{\partial \sigma}{\partial u}.\frac{\partial \sigma}{\partial v},$ *et* $G = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)^2$

I.5.5 *Application de Gauss*

Soit S *une surface orientée et paramétrée par :*

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

un paramétrage régulière, $p = \sigma(u,v)$ *un point de* S*.*

***Définition* I.5.7.** *L'application de Gauss de* S *est est l'application définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \nu : & S & \longrightarrow & S^2 \\ & p & \longmapsto & \nu(p) = n_p(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} \end{array}$$

Où S^2 *est la sphère unité.*

I.5.6 *Endomorphisme de Weingarten*

Soit S une surface orientée et paramétrée par :

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

un paramétrage régulière, $p = \sigma(u, v)$ un point de S.

***Définition* I.5.8.** *L'endomorphisme de Weingarten est l'applicatin linéaire W_p définie par :*

$$\begin{array}{rccl} W_p : & T_pS & \longrightarrow & T_pS \\ & X & \longmapsto & W_p(X) = -d\nu_p(X). \end{array}$$

où $d\nu_p(X)$ la différentielle de l'application de Gauss

I.5.7 *Deuxième forme fondamentale*

Soit $p = \sigma(u, v)$. La forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rccl} II_p : & T_pS \times T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \longmapsto & II_p(X, Y) = \langle W_p(X), Y\rangle = -\langle d\nu_p(X), Y\rangle \end{array}$$

est appelée la deuxième forme fondamentale de σ en p.
On peut l'écrire sous la forme :

$$II_p(X, Y) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

où $L = \frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}.n(u, v)$, $M = \frac{\partial^2\sigma}{\partial u.\partial v}.n(u, v)$ *et* $N = \frac{\partial^2\sigma}{\partial v^2}.n(u, v)$

***Proposition* I.5.1.** *Pour tout $p \subset S$, l'endomorphisme de Weingarten est une forme bilinéaire symétrique pour le produit scalaire euclidien.*

Soient $W_p, I_p, et\ II_p$ respectivement, les matrices de l'endomorphisme de Weingarten, la première et la deuxième forme fondamentale de S au point $p = \sigma(u, v)$ écritent dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$, alors :

$$W_p(X) = I_p^{-1}(X).II_p(X)$$

***Preuve* I.5.7.1.** *On sait que $dn_p \in T_pS$, alors $n_u(u, v)$ et $n_v(u, v)$ s'écrivent dans la base*
$(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$ de T_pS sous la forme :

$$\begin{pmatrix} n_u \\ n_v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix}}_{W_p} \begin{pmatrix} \sigma_u \\ \sigma_v \end{pmatrix}$$

Où W_p est la matrice de l'endomorphisme de Weingarten dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$.

Les matrices des deux formes fondamentales écrivent dans la base $(\sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v))$ *sont :*

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, II_p = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$\forall X, Y \in T_pS : II_p(X,Y) =< W_p(X), Y >$$

$$= (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

$$= (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix}$$

donc on a :

$$det(W_m) = \frac{det(II_m)}{det(I_m)} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

et

$$tr(W_m) = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}$$

I.5.8 *Courbures*

L'endomorphisme de Weingarten W_p *étant symétrique donc diagonalisable dans la base orthonormale* (V_1, V_2) *de* T_pS*, où* V_1, V_2 *sont les vecteurs propres de* W_p *associés respectivement aux valeurs propres* k_1, k_2*.*

Définition* I.5.9.** *On appelle* k_1 *et* k_2*.* ***Les courbures principales *de* S *en* $p = \sigma(u,v)$

***Remarque* I.5.8.1.** *Si* $k_1 = k_2 = k$*, alors* $W_p(X) = kX$*. Si* $k_1 \neq k_2$*, les deux vecteurs propres sont appelés directions principales de* S *en* $p = \sigma(u,v)$*.*

Définition* I.5.10.** ***La courbure de Gauss *de* S *en* $p = \sigma(u,v)$ *est :*

$$K(p) = k_1(p).k_2(p) = det(W_p)$$

Définition* I.5.11. *La courbure moyenne *de S en $p = \sigma(u, v)$ est :*

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = \frac{1}{2}tr(W_p)$$

Chapitre II

Equations solitons.

Une onde solitaire est une onde progressive de la forme $u(x,t) = f(x-ct)$ *pour une certaine fonction* f *de classe* C^∞ *qui décroît rapidement à l'infini. Il est relativement facile de trouver des équations d'ondes non linéaires qui admettent des solutions d'ondes solitaires. Par exemple,*

$$u_{tt} - u_{xx} = u(2u^2 - 1)$$

a une famille de solutions d'ondes solitaires

$$u(x,t) = sech(x\ \cosh\ \theta + t\ \sinh\ \theta),$$

paramétrisées par ($\theta \in \mathbb{R}$.*) Mais on ne s'attend pas à ce que la "somme" de deux solutions de ce type soit encore une solution. Cependant, la classe spéciale des équations soliton, qui fait l'objet de ce mémoire, possède une forme de superposition non linéaire. Une solution n-soliton est une solution qui est asymptotique à une somme non triviale de n ondes solitaires* ($\sum_{i=1}^{n} f_i(x - c_i t)$) *lorsque* ($t \to -\infty$) *et à la somme des mêmes ondes* ($\sum_{i=1}^{n} f_i(x - c_i t + r_i)$) *avec des déphasages non nuls* r_i *lorsque* $t \to -\infty$*. En d'autres termes, après une interaction non linéaire, les ondes solitaires individuelles se traversent, en conservant leurs vitesses et leurs formes, mais avec des déphasages. Les équations avec des solutions multisolitons sont très rares ; ces équations sont appelées équations soliton.*

Par exemple l'équation de Korteweg-de Vries

$$q_t = -(q_{xxx} + 6qq_x)$$

est un exemple bien connu d'équation soliton. Si $q(x,t) = f(x-ct)$ *résout* KdV*, alors* $f''' + 6ff' - cf' = 0$*. La condition asymptotique sur f,* $|x| \to 0\ f(x) = 0$*, implique que* $f(x) = \frac{f}{2} sech^2(\frac{\sqrt{x}}{2}x)$*. Donc*

$$q(x,t) = \frac{c}{2} sech^2(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct))$$

est une famille de solutions d'ondes solitaires pour KdV *paramétrées par* $c \in \mathbb{R}$

En mécanique classique, un système hamiltonien en 2 dimensions est appelé intégrable s'il possède n constantes du mouvement indépendantes dont les parenthèses de Poisson sont toutes nulles.

Le concept d'intégrabilité complète peut être étendu à des dimensions infinies ou à des équations aux dérivées partielles (EDP), mais il ne constitue qu'une partie de la riche structure que l'on trouve dans la classe des équations "complètement intégrables" ou "soliton". Ces équations sont mieux décrites par leurs prototypes : KdV, Schrödinger non linéaire et l'équation de sine-Gordon (SGE). Les phénomènes qui ont été identifiés incluent :

- *solutions multisolitons,*
- *formulations hamiltoniennes,*
- *une hiérarchie de flux commutatifs décrits par des équations aux dérivées partielles,*
- *formulation en termes d'une paire de Lax d'opérateurs,*
- *une théorie de la diffusion,*
- *transformations de diffusion inverse,*
- *la propriété de Painlevé,*
- *une description géométrique algébrique des solutions périodiques en variable spatiale,*
- *solutions algébriques formelles en termes de données de groupe en boucle.*

II.1 *Géométrie des solutions solitons*

La plupart des exposés de la théorie des solitons retracent l'histoire de l'équation de Korteweg de Vries (KdV), en commençant par l'observation physique d'une onde d'étrave par S. Russell dans un canal en 1834. Les équations ont été écrites pour la première fois par Boussinesq en 1871, puis en 1895 par Korteweg et de Vries. En plus de décrire les ondes marines, l'équation KdV apparaît également comme une limite universelle des vibrations en réseau lorsque l'espacement tend vers zéro. Les expériences numériques surprenantes de Fermi, Pasta et Ulam en 1955 sur un réseau anharmonique, et l'explication ingénieuse de Zabusky et Kruskal en 1965 en termes de solitons de l'équation KdV ont été rapidement suivies d'un article révolutionnaire de Gardner, Greene, Kruskal et Miura [3], qui a introduit la méthode de résolution de KdV en utilisant la transformée de diffusion inverse pour l'opérateur de Hill. Cela nous amène à l'ère moderne. Cependant, il existe un autre cercle d'idées qui trouve son origine en géométrie.

Un thème central de la géométrie du XIXe siècle était la théorie locale des surfaces dans $\mathbb{R}^3$, que nous pouvons considérer comme la préhistoire des constructions modernes en théorie des solitons. L'EGS est apparue d'abord à travers la théorie des surfaces de courbure de Gauss constante -1 dans $\mathbb{R}^3$, et l'équation des 3 ondes réduites peut être trouvée dans les travaux de Darboux sur les systèmes triplement orthogonaux de $\mathbb{R}^3$. En 1906, un élève de Levi-Civita, da Rios, a écrit un mémoire

de maîtrise dans lequel il modélisait le mouvement d'un vortex mince par le mouvement d'une courbe se propageant dans $\mathbb{R}^3$ *le long de sa binormale. Ce n'est que beaucoup plus tard, en 1971, que Hasimoto a montré l'équivalence de ce système avec l'équation de Schrödinger non linéaire* $q_t = \frac{i}{2}(q_{xx} + 2|q|^2 q)$. *Ces équations ont été redécouvertes indépendamment de leur histoire géométrique. La principale contribution des géomètres classiques réside dans leurs méthodes de construction de solutions explicites de ces équations plutôt que dans leur découverte des équations elles-mêmes.*

Quelques notions de base de géométrie classique des surfaces sont nécessaires pour décrire les problèmes géométriques. Soit M *une surface dans* $\mathbb{R}^3$. *La première forme fondamentale* I *est la métrique induite sur les plans tangents de* M, *c'est-à-dire,*

$$I(v, x) = < v, x >$$

le produit scalaire de v, w *dans* $\mathbb{R}^3$ *Le négatif de la normale unitaire* e_3 *est une application de* M *à la sphère unité* S^2 *de* $\mathbb{R}^3$.*Son différentiel* A *en un point applique l'espace tangent en ce point à lui-même et est donné par une application symétrique par rapport à* I.

A *est appelé l'opérateur de forme.La deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire canonique définie par* A, *c'est-à-dire* $\Pi(v, x) = A(v)w$. *Si* v *est un vecteur tangent unitaire en* p *alors* $\Pi(v, x)$ *est la courbure de la courbe plane* o *en* p, *où* o *est l'intersection de* M *et du plan engendré par* v *et la droite normale en* p.

Dans les régions où les courbures principales ne sont jamais égales, il est possible de choisir des coordonnées de ligne de courbure, qui sont des coordonnées le long des directions propres de A, *ou les directions de courbure principale si la courbure gaussienne est négative, il est possible de choisir des coordonnées asymptotiques, qui sont des coordonnées le long des directions* v *dans lesquelles* $\Pi(v, v) = 0$. *Les calculs sont beaucoup plus faciles dans ces systèmes de coordonnées spéciaux, et c'est le choix de ces systèmes de coordonnées spéciaux qui relie la géométrie spéciale à des équations aux dérivées partielles intéressantes.*
Le théorème fondamental des surfaces est basé sur une condition de compatibilité pour les équations différentielles ordinaires à deux variables indépendantes qui est la même condition de courbure nulle. Si A *et* B *sont des matrices* $n \times n$ *dépendant de deux variables* x *et* y, *alors la paire d'équations*

$$V_x = VA, \qquad V_y = VB \tag{II.1}$$

peut être résolu pour les applications matricielles $n \times n$ V *pour toutes les valeurs initiales exactement lorsque*

$$A_y - B_x = [A, B]. \tag{II.2}$$

Ici $[A, B] = AB - BA$ *Cette condition vient de l'exigence* $V_{xy} = V_{yx}$ *Nous appellerons (II.2) la condition de compatibilité pour (II.1).*

On obtient un tel système si on choisit une paramétrisation $X(x, y)$ pour une surface dans $\mathbb{R}^3$ et $E = (e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormal local tel que $e_3(x, y)$ soit normal à Mat $X(x, y)$ Notez que $E(x, y)$ appartient au groupe $O(3)$ des matrices orthogonales 3×3. Alors

$$X_x = E \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_y = E \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_x = EP. \qquad E_y = EQ,$$

où p et q sont des fonctions matricielles $2 \times 1-$ et P et Q sont des fonctions à valeurs dans $so(3)$ (ici $so(3)$) est l'espace des matrices réelles 3×3 antisymétriques). De plus, p. q. P et Q peuvent être exprimés en termes de coefficients de I et II. En posant

$$V = \begin{pmatrix} E & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$V_x = VA \qquad V_y = VB,$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} p & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} q & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La condition de compatibilité pour le système de premier ordre ci-dessus pour X et E est appelée les équations de Gauss-Codazzi. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre impliquant six fonctions (les coefficients de I et II).Comme nous le verrons plus tard,le nombre de fonctions impliquées dans les équations de Gauss-Codazzi peut être réduit par des choix de coordonnées spéciaux.Le théorème fondamental des surfaces dit que deux formes fondamentales qui satisfont les équations de Gauss et de Codazzi déterminent une surface dans $\mathbb{R}^3$ à des mouvements rigides près.

II.2 *Surfaces pseudosphériques et transformations de Bäcklund*

L'une des contributions importantes des géomètres classiques est l'étude des surfaces pseudosphériques, qui a conduit aux équations géométriques des surfaces (EGS). Une surface pseudosphérique est une surface de courbure gaussienne -1 dans $\mathbb{R}^3$.Une telle surface a un ensemble spécial de coordonnées asymptotiques dans lesquelles les deux formes fondamentales sont

$$I = dx^2 + cos\ q(dx\ dt + dt\ dx) + dt^2,$$

$$II = sin\ q(dx\ dt + dt\ dx),$$

où q est l'angle entre les courbes z et t. Avec ce choix particulier de coordonnées, les équations de Gauss-Codazzi se résument à une seule équation en q

$$q_{xt} = sin\ q \qquad (SGE)$$

Le théorème fondamental des surfaces nous donne une correspondance locale entre les solutions de l'EGS et les surfaces de courbure gaussienne constante 1 dans $\mathbb{R}^3$. *L'idée des transformations de Bäcklund vient d'une construction sur des surfaces pseudosphériques appelée congruence de droites. Une congruence de lignes dans* $\mathbb{R}^3$ *est une famille de lignes biparamétriques*

$$L(u,v)) : (x(u,v) + \tau\xi(u,v) \qquad -\infty < \tau < \infty$$

Une surface M *donnée par* $Y(u,v) = x(u,v) + t(u,v)\xi(u,v)$ *pour une fonction lisse* t *est appelée surface focale de la congruence de lignes si la ligne* $L(u,v)$ *est tangente à Mat* $Y(u,v)$ *pour tous* (u,v). *Par conséquent,* $\xi(u,v)$ *se trouve dans le plan tangent de* M *à* $Y(u,v)$, *qui est engendré par* $x_u + t_u\xi + t\xi_u$ *et* $x_v + t_v\xi + t\xi_v$. *Cela implique que* t *satisfait l'équation quadratique suivante :*

$$det(\xi, x_u + tx_u, x_v + t\xi_v) = 0$$

En général, cette équation quadratique a deux solutions distinctes pour t. *Par conséquent, génériquement, chaque congruence de lignes a deux surfaces focales,* M *et* M^*. *Cela donne lieu à un difféomorphisme* $l : M \to M^*$ *tel que la ligne reliant* p *et* $p = l(p)$ *est tangente à la fois à* M *et* M^*. *Nous appellerons également* l *la congruence de lignes.*

Une congruence de lignes $l : M \to M^*$ *est dite pseudosphérique à constante 0 si l'angle entre la normale de Mat pand la normale de* M^* *à* $p = l(p)$ *est* 0 *et la distance entre* p *et* p^* *est* $\sin\ \theta$ *pour tous* $p \in M$.

En 1883, A. Bäcklund a montré que si l *est une congruence de droites pseudosphériques, alors* M *et* M^* *sont tous deux pseudosphériques, et l'application sur les lignes asymptotiques. Cependant, les transformations proviennent de la démonstration que cette construction peut toujours être réalisée. Pour toute surface pseudosphérique* M, *une constante* θ *et un vecteur unitaire* $v_0 \in TMp_0$ *qui n'est pas une direction principale, il existe une surface unique* M^* *et une congruence pseudosphérique* $l : M \longrightarrow M^*$ *avec une constante telle que* $p_0p_0^* = (sin\theta)v_0$. *Analytiquement, cela est équivalent à l'affirmation que si* q *est une solution de l'équation de Sine-Gordon (SGE), alors le système surdéterminé d'équations différentielles ordinaires suivant est résoluble pour* q^*

$$\begin{cases} q_x^* = q_x + 4\sin(\frac{q^*+q}{2}) \\ q_t^* = -q_t + \frac{2}{s}\sin(\frac{q^*-q}{2}) \end{cases}$$

où $s = \tan(\frac{\theta}{2})$. *De plus, une solution* q^* *est encore une solution de SGE. Nous appellerons à la fois* l *et la transformation de* q *à* q^* *une transformation de Bäcklund. Cette description des transformations de Bäcklund nous donne un algorithme pour générer des familles de solutions de l'EDP en résolvant une paire d'équations différentielles ordinaires. La procédure peut être répétée, mais le miracle est qu'après la première étape, la procédure peut être réalisée algébriquement. C'est le théorème de permutabilité de Bianchi.*

Soient $l_i : M_0 \longrightarrow M_i$ *deux congruences pseudosphériques avec des angles* θ_i *respectivement et avec* $\sin\theta_1^2 \neq \sin\theta_2^2$. *Alors il existe une construction algébrique d'une surface unique* M_3 *et de congruences pseudosphériques* $\tilde{l}_1 : M_2 \longrightarrow M_3$ *avec des angles* θ_1 *et* θ_2 *respectivement telles que* $\tilde{l}_2 l_1 = \tilde{l}_1 l_2$.

Chapitre III

Interprétation géométrique de l'équation de Schrödinger non linéaire.

III.1 *L'équation de l'anneau de fumée et l'équation de Schrödinger non linéaire*

En 1906, un étudiant diplômé de Levi-Civita, da Rios, a écrit un mémoire de master dans lequel il modélisait le mouvement d'un vortex mince dans un fluide visqueux par le mouvement d'une courbe se propageant dans $\mathbb{R}^3$ *selon :*

$$\gamma_t = \gamma_x \times \gamma_{xx}. \tag{III.1}$$

C'est ce qu'on appelle l'équation de l'anneau de fumée ou équation de Smoke ring.

***Proposition* III.1.1.** *Si* $\gamma(x,t)$ *est une solution de l'équation de anneau de fumée et* $||\gamma_x(x,0)|| = 1$ *pour tout* x*, alors* $||\gamma_x(x,t)|| = 1$ *pour tout* (x,t)*.*
En d'autres termes, si $\gamma(\cdot,0)$ *est paramétré par la longueur d'arc, alors* $\gamma(\cdot,t)$ *est également pour tout* t*.*

***Preuve* III.1.0.1.** *Il suffit de prouver que* $(\gamma_x \cdot \gamma_x)_t = 0$*). Pour ce faire, nous calculons directement pour obtenir*

$$\begin{aligned}(\gamma_x \cdot \gamma_x)_t &= 2\gamma xt \cdot \gamma_x = 2(\gamma_t)x \cdot \gamma x = 2(\gamma_x \times \gamma_{xx})x \cdot \gamma x \\ &= 2(\gamma_{xx} \times \gamma_{xx} + \gamma_x \times \gamma_{xxx}) \cdot \gamma_x = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour une solution γ *de (III.1) nous pouvons supposer que* $\gamma(\cdot,t)$ *est paramétré par la longueur d'arc pour tout* t*. Ensuite, nous expliquons l'interprétation géométrique de l'équation d'évolution (III.1) sur l'espace des courbes dans* $\mathbb{R}^3$*.*
Soit $(e_1, e_2, e_3)(\cdot,t)$ *le repère de Frenet de la courbe* $\gamma(\cdot,t)$*. Puisque* $\gamma_x = e_1$ *et* $\gamma_{xx} = (e_1)x = \kappa e_2$*, le flot de courbes devient*

$$\gamma_t = ke_1 \times e_2 = ke_3$$

En d'autres termes, le flot de courbe (III.1) se déplace dans la direction de vecteur binormal avec une vitesse croissante uniforme. Si nous utilisons un repère parallèle (e_1, v_1, v_2)*, alors*

$$\kappa e_3 = \kappa(\sin\beta v_1 + \cos\beta v_2) = -\kappa_2 v_1 + k_1 v_2.$$

Où κe_1 *et* κe_2 *sont les composantes tangentielles de la vitesse.Ainsi, le flux de courbe (III.1) devient :*

$$\gamma_t = -k_2 v_1 + k_1 v_2. \tag{III.2}$$

Par la proposition(1.4.3) , $\alpha'' = -k_2 v_1 + k_1 v_2$*., donc l'équation ci-dessus peut être considérée comme :*

$$\gamma_t = J_t(\alpha'') = J_t(k_1 v_1 + k_2 v_2), \tag{III.3}$$

Où J_t est la rotation de $\frac{\pi}{2}$ sur le plan normal à $\alpha(t)$.

Remarque. *le repère parallèle* (v_1, v_2) *n'est pas unique.*
Puisque $\alpha'' = k_1 v_1 + k_2 v_2$ *et que la rotation de* $\frac{\pi}{2}$ *dans le plan normal est indépendante du choix du repère parallèle, le membre de droite de l'équation (III.3) est indépendant du choix du repère parallèle.*

Ensuite, nous voulons dériver l'équation d'évolution des courbures principales pour $\gamma(\cdot, t)$ *pour une solution de l'équation des anneaux de fumée. Nous montrerons qu'elles évoluent selon l'équation de Schrödinger non linéaire, qui est la même équation que celle qui modélise le mouvement d'une enveloppe d'onde se propageant dans une fibre optique :*

$$q_t = i(q_{xx} + \frac{1}{2}|q|^2 q). \tag{III.4}$$

L'équation de Schrödinger non linéaire est l'une des équations modèles des solitons. En particulier, le problème de Cauchy avec des données initiales à décroissance rapide ou des données périodiques a une existence à long temps, et il existe une infinité de solutions solitons explicites.

Dans les années 1970, Hasimoto a montré que si γ *est une solution de l'équation des anneaux de fumée (III.1), alors* $q = k\ exp(\int \tau dx)$ *est une solution l'équation de Schrödinger non linéaire. On explique ci-dessous l'équivalence entre l'équation de l'anneau de fumée et l'équation de Schrödinger non linéaire.*

III.1.1 *De l'équation de l'anneau de fumée à l'équation de Schrödinger non linéaire*

Supposons que γ soit une solution de (III.1) Choisissez un repère parallèle

$$(e_1, v_1, v_2)(\cdot, t)$$

pour chaque courbe $\gamma(\cdot, t)$. Soient $k_1(\cdot, t)$ et $k_2(\cdot, t)$ les courbures principales de $\gamma(\cdot, t)$ le long de $v_1(\cdot, t)$ et $v_2(\cdot, t)$ respectivement. Alors on a

$$(e_1, v_1, v_2)_x = (e_1, v_1, v_2) \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{III.5}$$

Nous voulons calculer l'évolution de (e_1, v_1, v_2), c'est-à-dire (e_1, v_1, v_2). Nous calculons d'abord

$$\begin{aligned} (e_1)_t = (\gamma_x)_t = (\gamma_t)_x &= (-k_2 v_1 + k_1 v_2)_x \\ &= -(k_2)_x v_1 - k_2 (v_1)_x + (k_1)_x v_2 + k_1 (v_2)_x \\ &= -(k_2)_x v_1 - k_2(-k_1 e_1) + (k_1)_x v_2 + k_1(-k_2 e_1) \\ &= -(k_2)_x v_1 + (k_1)_x v_2 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Puisque (e_1, v_1, v_2) est o.n., par la proposition, il existe une fonction u telle que

$$(e_1, v_1, v_2)_t = (e_1, v_1, v_2) \begin{pmatrix} 0 & (k_2)_x & -(k_1)_x \\ -(k_2)_x & 0 & -u \\ (k_1)_x & u & 0 \end{pmatrix},$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{cases} (e_1)_t = -(k_2)_x v_1 + (k_1)_x v_2, \\ (v_1)_t = (k_2)_x e_1 + u v_2, \\ (v_2)_t = -(k_1)_x e_1 - u v_1 \end{cases}$$

Nous affirmons que

$$u_x = -\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)_x$$

Pour le prouver, nous calculons

$$\begin{aligned} (v_1)_{xt} \cdot v_2 &= (-k_1 e_1)_t \cdot v_2 = -k_1 (e_1)_t \cdot v_2 \\ &= -k_1(-(k_2)_x v_1 + (k_1)_x v_2) \cdot v_2 = -k_1 (k_1)_x v_2 \\ &= (v_1)_{tx} \cdot v_2 \\ &= ((k_2)_x e_1 + u v_2)_x \cdot v_2 = (k_2)_x (e_1)_x \cdot v_2 + u_x \\ &= (k_2)_x (k_1 v_1 + k_2 v_2) \cdot v_2 + u_x = (k_2)_x k_2 + u_x \end{aligned}$$

Cela prouve la réclamation. Par conséquent

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) + c(t).$$

pour une fonction lisse $c(t)$. On se souvient que pour chaque t fixé, on peut faire tourner $(v_1, v_2)(., t)$ d'un angle constant $\theta(t)$ vers un autre repère normal parallèle $(\tilde{v_1}, \tilde{v_2})$ de $\gamma(t)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \tilde{v_1}(x,t) = \cos\theta(t) v_1(x,t) + \sin\theta(t) v_2(x,t), \\ \tilde{v_2}(x,t) = -\sin\theta(t) v_1(x,t) + \cos\theta(t) v_2(x,t). \end{cases}$$

Un calcul direct montre que :

$$\tilde{u} = (\tilde{v_1})_t \cdot \tilde{v_2} = u + \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) + c(t) + \theta'(t).$$

Si l'on choisit θ de sorte que $\theta' = -c$, alors le nouveau repère parallèle satisfait

$$(e_1, \tilde{v_1}, \tilde{v_2})_t = (e_1, \tilde{v_1}, \tilde{v_2}) \begin{pmatrix} 0 & (k_2)_x & -(k_1)_x \\ (k_2)_x & 0 & \frac{k_1^2+k_1^2}{2} \\ -(k_1)_x & -\frac{k_1^2+k_1^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc démontré la première partie du théorème suivant

***Théorème* III.1.1.** *Soit $\gamma(x,t)$ une solution de l'équation de l'anneau de fumée et $\| \gamma_x(x,0) \| = 1$ pour tout x. Alors*
(1) Il existe un repère normal parallèle $(v_1, v_2)(\cdot, t)$ pour chaque courbe $\gamma(\cdot, t)$ de sorte que

$$\begin{cases} g_x = g \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ g_t = g \begin{pmatrix} 0 & (k_2)_x & -(k_1)_x \\ (k_2)_x & 0 & \frac{k_1^2+k_1^2}{2} \\ -(k_1)_x & -\frac{k_1^2+k_1^2}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{III.7}$$

où $g = (e_1, v_1, v_2)$ et $k_1(\cdot, t)$ et $k_2(\cdot, t)$ sont les courbures principales de $\gamma(\cdot, t)$ par rapport à $v_1(\cdot, t)$,$v_2(\cdot, t)$ respectivement,
(2) $q = k_1 + ik_2$ est une solution de l'équation de Schrödinger non linéaire (III.4)

***Preuve* III.1.1.1.** *Pour (2), nous utilisons (III.7) pour calculer l'évolution de $(k_1)_t$ et $(k_2)_t$.*

$$\begin{aligned} (k_1)_t = ((e_1)_x \cdot v_1)_t &= (e_1)_{xt} \cdot (v_1) + (e_1)_x \cdot (v_1)_t \\ &= (e_1)_{xt} \cdot (v_1) + (k_1) v_1 + k_2 (v_2) \cdot \left((k_2)_x e_1 - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \right) \\ &= (-(k_2)_x v_1 + (k_1)_x v_2)_x \cdot v_1 - k_2 (\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}) \\ &= -(k_2)_{xx} - k_2 (\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}) \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne :

$$(k_2)_t = (-(k_1)_{xx} + \frac{k_1(k_1^2 + k_2^2)}{2}$$

Soit $q = k_1 + ik_2$. *Alors on a*

$$q_t = i\left(q_{xx} + \frac{q^2}{2}q\right)$$

III.1.2 *De l'équation de Schrödinger non linéaire à l'équation de l'anneau de fumée*

La converse du théorème (3.3.1) est également vraie. Étant donné une solution $q = k_1 + ik_2$, *puis résoudre un autre système d'EDP du premier ordre*

$$\begin{cases} \gamma_x = e_1, \\ \gamma_t = -k_2 e_1 + k_1 e_2. \end{cases} \tag{III.8}$$

Alors $\gamma(x,t)$ *satisfait l'équation de Schrödinger non linéaire (III.1). Nous sommes maintenant prêts à prouver la converse du théorème.*
Soit $q = k_1 + ik_2$ *une solution de l'équation de Schrödinger non linéaire. Pour construire une solution* $\gamma(x,t)$ *de l'équation de Schrödinger non linéaire (III.1), nous devons résoudre deux systèmes d'EDP du premier ordre (III.7) et (III.8). Le système (III.7) est de la forme (4.7). Par le corollaire 2.4.2, la condition de compatibilité est (III.9), c'est-à-dire*

$$P_t - Q_t = [P, Q] \tag{III.9}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & (k_2)_x - (k_1)_x & \\ -(k_2)_x & 0 & \\ (k_1)_x & & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.10}$$

Comme P, Q *sont antisymétriques,*

$$[PQ]^t = (PQ - QP)^t = (Q^tP^t - P^tQ^t) = (QP - PQ) = -[PQ].$$

Par conséquent, $[PQ]$ *est antisymétrique. Nous devons donc uniquement vérifier les entrées 21, 31 et 32 de (III.9). Un calcul direct montre que (III.9) est vrai si et seulement si*

Il s'agit de l'équation l'équation de Schrödinger non linéaire pour $q = k_1 + ik_2$.
Donc, d'après le corollaire 24.2, étant donné une matrice orthogonale constante (u_1^0, u_2^0, u_3^0), *il existe une solution unique* $g = (e_1, v_1, v_2)$ *pour le système (III.8) avec des données initiales* $g(0) = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$. *Pour construire la solution* γ *pour l'équation de Schrödinger non linéaire, il faut résoudre (III.8). La condition de compatibilité pour (III.8) est donnée par* $\gamma_{xt} = \gamma_{tx}$, *qui est*

$$(e_1) = (-k_2 v_1 + k_1 v_2).$$

Cela est vrai car (e_1, v_1, v_2) *satisfait (III.7). Nous effectuons ce calcul direct :*

$$\begin{aligned}(e_1)_t &= (-k_2)_x v_1 + (k_1)_x v_2 = (-k_2 v_1 + k_1 v_2)_x \\ &= -(k_2)_x v_1 - k_2 (v_1)_x + (k_1)_x v_2 + k_1 (v_2)_x \\ &= -(k_2)_x v_1 - k_2(-k_1 e_1) + (k_1)_x v_2 + k_1(-k_2 e_1) \\ &= -(k_2)_x v_1 + (k_1)_x v_2\end{aligned}$$

En d'autres termes, nous avons prouvé la converse du théorème (3.3.1)

Chapitre IV

Interprétation géométrique de l'équation de Sine-Gordon.

IV.1 *Surfaces dans $\mathbb{R}^3$ avec $K = -1$ et l'équation de Sine-Gordon.*

Dans ce chapitre, on montre l'existence de coordonnées de ligne de courbure de Tchbyshef pour les surfaces de $\mathbb{R}^3$ avec $K = -1$ et on montre également qu'il existe une correspondance bijective entre les solutions de l'équation de sine-Gordon

$$q_{x_1x_1} - q_{x_2x_2} = \sin q \cos q.$$

et les surfaces de $\mathbb{R}^3$ avec $K = -1$ à une mouvement rigide.

IV.1.1 *Des surfaces pseudosphériques à l'équation de Sine-Gordon*

***Théorème* IV.1.1.** *Si M une surface dans $\mathbb{R}^3$ a une courbure de gauss $K = -1$, alors il existe localement un paramétrage par les lignes de courbure tel que les deux formes fondamentale sont données par :*

$$I = \cos^2 q \ dx_1^2 + \sin^2 q \ dx_2^2$$

$$II = \sin q \cos q(dx_1^2 - dx_2^2)$$

Pour une certaine fonction q. De plus, l'équation de Gauss-Codazzi est l'équation de Sine-Gordon sont équivalentes

$$q_{x_1x_1} - q_{x_2x_2} = \sin q \cos q.$$

***Preuve* IV.1.1.1.** *Puisque $K = k_1k_2 = -1$, k_1 n'est jamais égale à k_2.*
$k_1 = \frac{l_11}{g_11}$ $k_2 = \frac{l_22}{g_22}$ $K = \frac{l_1 1 g_1 1}{l_2 2 g_2 2}$
Il existe donc localement un paramétrage par les lignes de courbure .On peut donc supposer que :

$$I = A_1^2 dx_1^2 + A_2^2 dx_2^2,$$

$$II = l_{11}dx_1^2 + l_{22}dx_2^2.$$

Puisque $K = k_1k_2, k_1 = -1$, *il existe une fonction* q *telle que :*

$$k_1 = \tan q, \quad k_2 = -\cot q$$

$(q = tan^{-1}k_1)$, *alors* $k_1 = \frac{l_{11}}{A_1^2}$, $k_2 = \frac{l_{22}}{A_2^2}$, *donc*

$$r_1 = \frac{l_{11}}{A_1} = k_1A_1 = \tan q\ A_1$$

$$r_2 = \frac{l_{22}}{A_2} = k_2A_2 = -\cot q\ A_2$$

On utilise la première équation de $Gauss - Codazzi$ *pour démontrer que est une fonction de* x_1 *seule.Il suffit de démontrer* $(\frac{A_1}{l_{22}})_{x_2} = 0$ *que .Mais d'après la deuxième équation de* $Gauss - Codazzi$, *on a :*

$$(r_1)_{x_2} = (A_1 \tan q)_{x_1} = (A_1)_{x_2} \tan q + A_1 \sec^2 q\ q_{x_2}$$
$$= \frac{(A_1)_{x_2}}{A_2} r_2 = -\frac{(A_1)_{x_2}}{A_2} A_2 \cot q = -(A_1)_{x_2} \cot q.$$

Ainsi,

$$(A_1)_{x_2}(\tan q + \cot q) = -A_1 \sec^2 q\ q_{x_2},$$

Avec $\tan q + \cot q = \frac{1}{\sin q \cos q}$, *on obtient donc*

$$\frac{(A_1)_{x_2}}{A_1} = -\frac{\sin q}{\cos q} q_{x_2}.$$

Ceci implique que $(ln\ A_1 - ln\ cos\ q)_{x_2} = 0$, *donc* $(ln\frac{A_1}{\cos q})_{x_2} = 0$.*Il découle que* $ln\frac{A_1}{\cos q}$ *est une fonction à une variable* c_1.*On a donc démontré que :*

$$\frac{A_1}{cos\ q} = e^{c_1(x_1)}.$$

De même façon ,on utilise la troisième équation de $Gauss - Codazzi$ *pour conclure que :*

$$\frac{A_2}{sin\ q} = e^{c_2(x_2)}.$$

Pour certaine fonction à une variable c_2.
On définie $\tilde{x}_i$ *comme une fonction de* x_i *seule pour* $i = 1, 2$ *telle que :*

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dx_1} = e^{c_1(x_1)}$$
$$\frac{d\tilde{x}_2}{dx_2} = e^{c_2(x_2)}$$

$$\tilde{g}_{ij} = f_{\tilde{x}_i} \cdot f_{\tilde{x}_i} = e^{-c_i(x_i)-c_j(x_j)} g_{ij}$$

Alors la transformation $(x_1, x_2) \longmapsto (\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$ *est un difféomorphisme local, et il existe un inverse local, c'est-à-dire que l'on peut écrire* x_1, x_2 *comme fonctions de* $\tilde{x_1}, \tilde{x_2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x_i}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{d\tilde{x_i}} = f_{x_i}\exp^{-c_i(x_i)}$$

et

$$\tilde{g}_{ij} = f_{\tilde{x}_i} \cdot f_{\tilde{x}_i} = e^{-c_i(x_i)-c_j(x_j)}g_{ij}$$

Calcul des formes fondamentales

On calcul ensuite les deux formes fondamentales dans les coordonnées $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$. *En utilisent et , on obtient :*

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{11} &= g_{11}e^{-2c_1(x_1)} = A_1^2 e^{-2c_1(x_1)} = \left(\frac{A_1}{e^{c_1(x_1)}}\right)^2 = \cos^2 q \\
\tilde{g}_{12} &= 0 \\
\tilde{g}_{12} &= g_{22}e^{-2c_2(x_2)} = A_2^2 e^{-2c_2(x_2)} = \left(\frac{A_2}{e^{c_2(x_2)}}\right)^2 = \sin^2 q
\end{aligned}$$

On remplace $\tilde{g}_{11}$, $\tilde{g}_{12}$, $\tilde{g}_{12}$ *dans*

$$I = \tilde{g}_{11}d\tilde{x_1^2} + 2\tilde{g}_{12}d\tilde{x_1}d\tilde{x_2} + \tilde{g}_{22}d\tilde{x_2}$$

On obtient :

$$I = \cos^2 q d\tilde{x}_1^2 + \sin^2 q d\tilde{x}_2^2$$

Calcul de deuxième forme fondamentale

Pour calculer Π *, on note que :*

$$\begin{aligned}
\tilde{l}_{11} &= k_1\tilde{A}_1^2 = \tan q \cos^2 q = \sin q \cos q \\
\tilde{l}_{12} &= 0 \\
\tilde{l}_{22} &= k_2\tilde{A}_2^2 = -\cot q \sin^2 q = -\sin q \cos q
\end{aligned}$$

On remplace $\tilde{l}_{11}$, $\tilde{l}_{12}$, $\tilde{l}_{12}$ *dans*

$$\Pi = \tilde{l}_{11}d\tilde{x_1^2} + 2\tilde{l}_{12}d\tilde{x_1}d\tilde{x_2} + \tilde{l}_{22}d\tilde{x_2}$$

Donc

$$\Pi = \sin q \cos q \left(d\tilde{x}_1^2 - d\tilde{x}_2^2\right)$$

Où g_{ij} *et* $\tilde{l_{ij}}$ *sont les coefficients des formes fondamentales dans les coordonnées* $(x_1, x_2)et(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$ *respectivement.*

Vérification de l'équation de Gauss-Codazzi

Pour vérifier l'équation de Gauss-Codazzi, on calcule :

$$\tilde{r_1} = \frac{\tilde{l}_{11}}{\tilde{A}_1} = \frac{\sin q \cos q}{\cos q} = \sin q$$
$$\tilde{r_2} = \frac{\tilde{l}_{22}}{\tilde{A}_2} = \frac{-\sin q \cos q}{\sin q} = -\cos q$$

$$\frac{(A_1)_{x_2}}{A_2} = -\frac{\sin q q_{x_2}}{\sin q} = -q_{x_2}$$
$$\frac{(A_2)_{x_1}}{A_1} = \frac{\cos q q_{x_1}}{\cos q} = q_{x_1}$$

Les équations de Gauss-Codazzi (la deuxième et la troisième équations de Gauss-Codazzi ne donnent aucune condition supplémentaire sur q)
La première équation de Gauss-Codazzi donne l'équation de Sine-Gordon. En conséquence du théorème fondamental des surfaces, nous avons

IV.1.2 *De l'équation de Sine-Gordon aux surfaces pseudosphériques*

***Théorème* IV.1.2.** *Soit O un disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$, et $q : O \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation de Sine-Gordon telle que $q(x_1, x_2) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Alors, étant donné $x_0 \in O$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$ et une base orthonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ de, il existe une surface unique $f : O \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que ses formes fondamentales sont*

$$I = cos^2 q \; dx_1^2 + sin^2 q \; dx_2^2$$

$$II = \sin q \cos q (dx_1^2 - dx_2^2)$$

et

$$f(x_0) = p_0, f_{x_1}(x_0) = \cos q(x_0) v_1, f_{x_2}(x_0) = \sin q(x_0) v_1$$

En d'autres termes, nous avons prouvé qu'il existe une correspondance bijective entre les solutions de SGE dont l'image se trouve dans l'intervalle et une surface dans $\mathbb{R}^3$ avec $K = -1$ modulo les mouvements rigides.

Bibliographie

[1] *Bär.C. Elementary Differential Geometry. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.*

[2] *Boris, T. Courbes et surfaces, cours. Université Joseph-Fourier, Grenoble I, 2024.*

[3] *Dean, A. J., and Derman, E. Soliton solutions of the Painlevé-II equation. Physica D : Nonlinear Phenomena, 1982.*

[4] *Do Carmo, M. Differential geometry of curves and surfaces. Prentice Hall. 1976.*

[5] *Kambe, T. Geometrical theory of fluid flows and dynamical systems. In Advanced Series in Nonlinear Dynamics. World Scientific, 2004.*

[6] *Lax, P. D. Nonlinear integrable systems. Springer-Verlag, New York, 1990.*

[7] *O'Neill, B. Elementary Differential Geometry, 2ne Edition. Academic Press, 2006.*

[8] *Pressley, A. N. Elementary Differential Geometry, 2nd Edition. Springer, 2010.*

[9] *Terng, C.-L., and Kaen.U, Geometry of solitons, Notices of the American Mathematical Society, 2000.*

[10] *Terng, C.-L. Lecture Notes on Curves and Surfaces in $\mathbb{R}^3$. Preliminary version and in progress, 2OO3.*

[11] *Terng, C-L. Lecture notes on Curves and Surfaces, Part I. Winter quarter. Department of Mathematics, University of California at Irvine, 2005.*

[12] *Terng, C. L. Lecture Notes on Curves and Surfaces in $\mathbb{R}^3$, Part II. Department of Mathematics, University of California at Irvine, 2005.*