الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة المدية

كلية العلوم

المجلس العلمي للكلية.

الرقم: 118 / ك ع / ج م / 2024. التاريخ: 19مارس 2024.

مستخرج من محضر اجتماع المجلس العلمي للكلية

تبعا لتقارير المتضمنة الموافقة على مطبوعة الدروس من تقديم الأستاذ **بوقعود عبد العالي** أستاذ محاضر قسم أ، كلية العلوم، جامعة المدية، بعنوان:

Vibration et ondes optiques – Partie 1.

صادق المجلس العلمي للكلية في الاجتماع رقم 03 المنعقد يوم الثلاثاء 19 مارس 2024، على مطبوعة الدروس المشار إليها أعلاه.

رئيس المجلس العلمي

رئيس المجلس العلمي لكلية العلوم

أ. أومونة مصطفى

جامعة يحي فارس بالمدية

المجلس العلمي

كلية العلوم

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة يحيى فارس - المدية -

Université Dr. Yahia Farés de Médéa

Faculté des sciences

Département des Sciences de la Matière

Spécialité :

L2 chimie

Polycopié

Vibrations et ondes optiques partie I- Vibrations des systèmes mécaniques : Cours et examens avec solutions

Préparé et présenté par :

Dr. BOUKAOUD Abdelali

Maître de conférences classe A-Faculté des sciences

Université de Médéa

Année universitaire 2023/2024

Préface

Ce polycopié, intitulé Vibrations et ondes optiques partie I- Vibrations des systèmes mécaniques : Cours et examens avec solutions, est le fruit d'une longue expérience dans l'enseignement des matières physique 01, physique 02 et physique 03 du tronc commun pour les domaines science de la matière et sciences et technologies. Il peut être considéré comme une suite très cohérente de mon premier polycopié destiné à la matière physique 01, ainsi que mes cours en ligne pour la matière physique 02. Les notions préalables déjà présentées par la même méthodologie assurent la compréhension des notions théoriques de façon homogène et organisée.

Le contenu du présent polycopié s'adresse principalement aux étudiants inscrits en 2éme année licence de la filière chimie, mais aussi aux étudiants de 2éme année licence qui suivent les filières suivantes: physique, Génie Civil, génie de procédé, génie électrique et génie mécanique.

À l'issue de ce cours, les étudiants seront capables d'établir un modèle mathématique basé sur les équations différentielles pour prédire phénomènes d'oscillations de faible amplitude pour un ou deux degrés de liberté. Le niveau de compréhension des étudiants peut être testé à l'aide des examens résolus. La plupart de ces examens ont été élaborés par l'auteur en s'appuyant sur son expérience dans l'enseignement de la matière physique 03.

J'exprime mes remerciements au Dr. Dehbaoui Mourad et au Dr. Mohamed Ahmed Amar d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Table des matières

Introduction *6*

1 Chapitre 1 : Introduction aux équations de Lagrange *7*

1.1 Définitions **7**

1.2 Degrés de liberté et Contraintes **7**

1.3 Energie cinétique d'un point matériel **9**

1.4 Moment d'inertie de quelques corps solide **9**

1.4.1 Changement d'axe de rotation (Théorème de Huygens ou théorème des axes parallèles) 11

1.5 Energie cinétique d'un corps solide **11**

1.5.1 Méthode directe 11

1.5.2 Méthode indirecte 12

1.6 Energie potentielle **14**

1.6.1 Énergie potentielle gravitationnelle: 14

1.6.2 Énergie potentielle élastique : 15

1.6.3 Énergie potentielle de torsion 16

1.7 Equilibre d'un système : **17**

1.8 Equations de Lagrange pour une particule **19**

1.8.1 Equations de Lagrange 19

2 Chapitre2 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants *20*

2.1 Introduction : pour quoi les équations différentielles ? **20**

2.2 Equation homogène **20**

3 Chapitre 3 : Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté *23*

Table des matières

3.1 Oscillations non amorties 23

3.1.1 Introduction :..... 23

3.1.2 Principe de moindre action 23

3.1.3 Equation du mouvement (exemple : pendule élastique) 24

3.1.4 Approximation de faibles oscillations (Amplitudes)..... 27

3.2 Oscillations amorties à un degré de liberté..... 29

3.2.1 Introduction..... 29

3.2.2 Amortisseur 30

3.2.3 Equation du mouvement d'un système amorti..... 30

3.2.4 Solution de l'équation du mouvement..... 31

3.2.5 Décrément logarithmique : 35

3.2.6 Energie mécanique d'un oscillateur amorti 35

3.2.7 Facteur de qualité..... 36

4 Chapitre 4. Oscillations forcées à un degré de liberté 38

4.1 Introduction..... 38

4.2 Équation du mouvement (masse-ressort-amortisseur) 39

4.3 Solution de l'équation du mouvement..... 40

4.3.1 Régime transitoire (début du mouvement→ $x_H(t)\neq 0$) 40

4.3.2 Régime permanent (solution homogène tend vers zéro)..... 40

4.3.3 Méthode des nombres complexes 41

4.4 Variation de l'amplitude en fonction de la pulsation 42

4.5 Variation de la phase en fonction de la pulsation 43

4.6 Analogie électrique 45

4.7 Puissance fournie et puissance dissipée 46

4.8 Impédance électrique et impédance mécanique..... 47

Table des matières

5 Chapitre 5 : Oscillations libres à deux degrés de liberté..... 49

5.1 Introduction :..... 49

5.2 Équations de Lagrange..... 49

6 Examens et solutions 53

Référence : 112

Introduction

Depuis son existence, l'homme a toujours cherché à comprendre les mouvements périodiques des corps célestes apparus dans le ciel. Un cas particulier de ces mouvements, est appartient aux mouvements oscillatoires (ou vibratoires). Le mouvement du pendule simple, décrit par un degré de liberté, est probablement le plus connu pour les systèmes mécaniques. Des systèmes plus complexes peuvent aussi exister et le degré de complexité des systèmes étudiés est fortement non seulement de nombre de degrés de liberté, mais aussi aux nombre des corps solides et les mouvements relatifs des uns par rapport aux autres.

Ce polycopié a été élaboré en se basant sur une méthodologie permettant aux étudiants à comprendre les phénomènes de vibrations, et de modéliser ces mouvements par des équations différentielles selon leurs natures. Des mouvements libres, amortis et forcés sont traités en détail. Des systèmes à un et à deux degrés de liberté sont aussi abordés avec un support mathématique solide basé sur les équations différentielles.

A la fin de polycopié des examens avec solutions sont présentés. La plupart de ces examens ont été inventés par l'auteur en utilisant son propre style.

En suivant le programme officiel distingué à la formation L2 chimie. le contenu de ce polycopié est structuré de la façon suivante:

Dans le premier chapitre, nous aborderons les notions mathématiques permettant de résoudre les équations différentielles.

Le deuxième chapitre sera réservé à l'étude des systèmes libres à un degré de liberté. Une application directe de l'équation de Lagrange est présentée.

Dans le troisième chapitre, nous traitons le cas des oscillations amortis en mentionnant les différents régimes possibles de vibrations qui peuvent exister.

L’étude de l'effet de la force extérieure sur l'équation du mouvement sera extensivement abordée dans le chapitre 4. La notion de résonance pour les systèmes mécaniques est aussi détaillée.

Dans le dernier chapitre, les systèmes à deux degrés de liberté seront étudiés afin de comprendre les modes propres de vibrations

1 Chapitre 1 : Introduction aux équations de Lagrange

1.1 Définitions

- La vibration est un phénomène physique oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre.
- La vibration d'un système peut être libre ou forcée.
- Un oscillateur est dit libre, s'il oscille sans interventions extérieures pendant son mouvement.
- Un oscillateur est dit forcé, s'il oscille avec interventions extérieures (forces extérieures)
- On appelle mouvement périodique un mouvement qui se répète dans une durée T, La durée T est appelée période.
- Le type de mouvement périodique se nomme oscillation ou mouvement oscillatoire.
- Tout système mécanique, incluant les machines industrielles les plus complexes, peut être représenté par des modèles simples formés d'un ressort, un amortisseur et une masse.

1.2 Degrés de liberté et Contraintes

- Le nombre de degrés de liberté d'un système physique est égal au nombre de coordonnées linéairement indépendantes nécessaire pour le décrire.
- Les coordonnées indépendantes sont appelées coordonnées généralisées .
- Une contrainte est une relation mathématique entres les coordonnées.

Exemple 1

Particule libre se déplace librement dans l'espace. la particule est libre donc, il n'y a pas de conditions sur son mouvement (ou pas de contraintes), dans ce cas il est indispensable de connaitre simultanément ses trois coordonnées x, y et z pour qu'on puisse la repérer, ces variables sont appelées **coordonnées généralisées.**

Exemple 2

Pendule de longueur ℓ, bougeant dans le plan. Ses coordonnées obéissent d'un coté à mouvement est dans la contrainte: $x^2 + y^2 = \ell^2$ .....(*) (ℓ étant la longueur du fil, ℓ est une constante car le fil est inextensible $z = 0$ (car le plan (xy)).

On peut constater que x et y ne sont pas indépendants, à partir d'une valeur de x, on peut déduire les valeur de y et z.

$y^2 = \ell^2 + x^2$ et $z = 0$

Une seul coordonnée nous suffit de repérer la particule, donc le système à un degré de liberté et la coordonnée généralisée qui convient à ce système est **θ**.

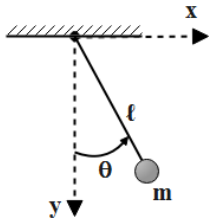


Figure 1-1. Pendule simple

- ***En choisissant d'utiliser les coordonnées généralisées (notées q) dans nos calculs, nous sommes sûrs de travailler avec des variables indépendantes.***
- ***Les dérivés des coordonnées généralisées par rapport au temps donnent ce qu'on appelle les vitesses généralisées.***

Cas général

- Pour N particules; la règle suivante est toujours valable :

Le nombre de degrés de liberté = 3 × Le nombre de particules – le nombre de contraintes

$$NDL = 3\times N - NC$$

Le nombre 3 représente le nombre des coordonnées nécessaire dans un espace à trois dimensions pour repérer chaque particule (dans un repère cartésienne, on parle des coordonnées x, y et z)

- **Pour les corps solides, la règle suivante est toujours valable.**

$$NDL = 6\times N - NC$$

Le nombre 6 représente le nombre de coordonnées nécessaires dans un espace à trois dimensions pour repérer chaque point de corps solide (3 coordonnées de déplacement (x_{cg}, y_{cg}, z_{cg}) pour repérer son centre de gravité, et trois angles de rotation autour trois axes passant par son centre de gravité pour repérer la position de chaque point de corps solide par rapport au centre de gravité (Φ, θ, Ψ).

1.3 Energie cinétique d'un point matériel

Un point matériel peut déplacer sur une ligne droite, et donc la coordonnée q décrit un déplacement. Dans ce cas, l'énergie cinétique d'un point matériel s'écrit sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 \tag{1-1}$$

Si par contre, le point matériel fait une rotation autour un axe fixe,

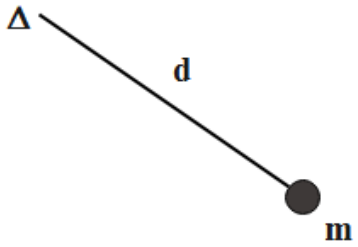


Figure 1-2. Moment d'inertie d'un pendule simple

La coordonnée q décrit un angle de rotation, et par conséquent

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} md^2\dot{q}^2 \tag{1-2}$$

md^2 a la dimension d'un ***moment d'inertie. C'est le moment d'inertie d'une masse ponctuelle qui se trouve à une distance d de l'axe de rotation.***

Exemple *: l'énergie cinétique de pendule simple :* $T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$

1.4 Moment d'inertie de quelques corps solide

a) Tige de longueur L et de masse m

$$\begin{aligned} I_{Ax} &= I_{Gx} = 0 \\ I_{Ay} &= I_{Az} = m\frac{L^2}{3} \\ I_{Gy} &= I_{Gz} = m\frac{L^2}{12} \end{aligned} \tag{1-3}$$

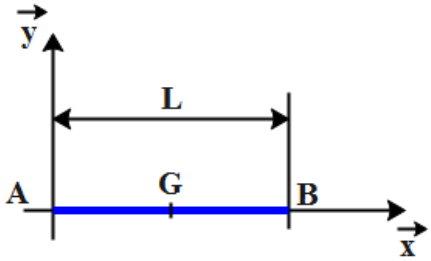


Figure 1-3. Tige homogène

b) Cercle de rayon R et de masse m

$$I_{Gx} = I_{Gy} = m\frac{R^2}{2} \qquad (1\text{-}4)$$

$$I_{Gz} = mR^2$$

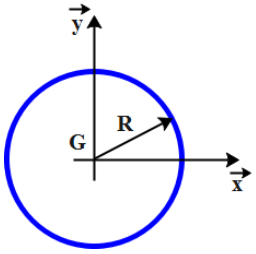


Figure 1-4. Cercle

c) Disque de rayon R et de masse m et cylindre pleine

$$I_{Gx} = I_{Gy} = m\frac{R^2}{4} \qquad (1\text{-}5)$$

$$I_{Gz} = m\frac{R^2}{2}$$

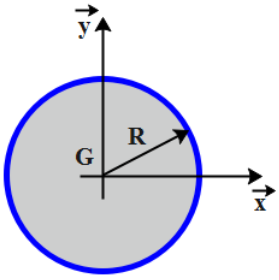


Figure 1-5. Disque

d) Sphère creuse de rayon R et de masse m

$$I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{2}{3}mR^2 \qquad (1\text{-}6)$$

e) Sphère pleine de rayon R et de masse m

$$I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{2}{5}mR^2 \tag{1-7}$$

1.4.1 Changement d'axe de rotation (Théorème de Huygens ou théorème des axes parallèles)

On passe du moment d'inertie autour d'une droite au moment d'inertie autour d'un axe parallèle mais passant par le centre de gravité *G* du solide (figure), et inversement, par la relation:

$$I = I_{/CG} + md^2 \tag{1-8}$$

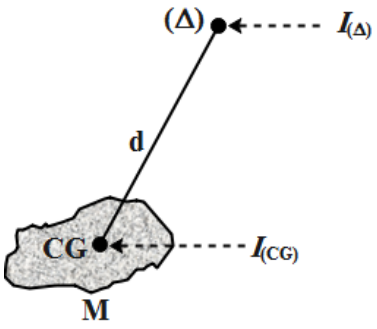


Figure 1-6. Rotation d'un corps solide par rapport à (Δ)

Exemple : *moment d'inertie d'une tige de langueur L et de masse M par rapport à un axe passant son extrémité.*

$$I_{/\Delta} = 1/3ML^2$$

1.5 Energie cinétique d'un corps solide

1.5.1 Méthode directe

On peut servir d'un calcul direct pour trouver l'expression de l'énergie totale d'un système.

$$T = \frac{1}{2}I_{/\Delta}\dot{q}^2 \tag{1-9}$$

$I_{/\Delta}$ est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe réel de rotation.

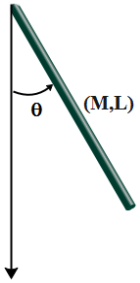


Figure 1-7. Tige homogène

Exemple : Calculer l'énergie cinétique d'un pendule formé d'une barre de langueur L et de masse homogène M tournant autour un axe passant par son extrémité.

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} ML^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} ML^2 \dot{\theta}^2$$

1.5.2 Méthode indirecte

En partant de la relation précédente de l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2} I_{/\Delta} \dot{q}^2$

En substituant le moment d'inertie par son expression $I_{/\Delta} = I_{/CG} + md^2$ dans l'expression de l'énergie cinétique, on obtient.

$$T = \frac{1}{2}\left(I_{/CG} + md^2\right)\dot{q}^2 = \frac{1}{2} m(d\dot{q})^2 + \frac{1}{2} I_{/CG}\dot{q} \qquad (1\text{-}10)$$

La vitesse linéaire du centre de gravité est donnée par $V_{cg} = d\dot{q}$

Nous obtenons donc : $T = = \underbrace{\frac{1}{2} m^2 V_{cg}{}^2}_{T_{tran}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{/CG}\dot{q}}_{T_{Rot}} = T = T_{tran} + T_{rot}$

$T_{tran} = \frac{1}{2} M V_{cg}{}^2$ est l'énergie cinétique de translation pure du centre de gravité.

$T_{Rot} = \frac{1}{2} I_{/cg} \dot{q}^2$ est l'énergie cinétique de rotation pure autour du centre de gravité.

L'énergie cinétique totale d'un système de points matériels est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation du centre de gravité T_{tran} et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre de gravité T_{rot}.

Exemple : Énergie cinétique d'un disque qui se déplace sans glissement sur une ligne droite.

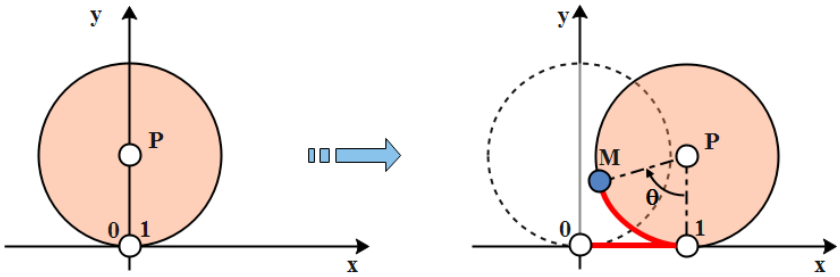


Figure 1-8. Disque en translation et rotation

$$T = T_{tran} + T_{Rot}$$

La condition de roulement sans glissement nous donne : $x = \overline{OI} = \overset{\frown}{IM} = R\theta$,et la vitesse du centre de gravité : $V_{cg} = \frac{dx}{dt} = R\dot{\theta}$

$$T_{Tran} = \frac{1}{2}MV^{2}_{cg} = \frac{1}{2}MR^{2}\theta^{2}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_{/cg}\dot{\theta}$$

Avec $I_{/cg}$ est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe qui passe par son centre de gravité.

$$I_{/cg} = \frac{1}{2}MR^{2}$$

$$T = \frac{1}{2}MR^{2}\dot{\theta}^{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^{2})\dot{\theta}^{2} = \frac{3}{4}MR^{2}\dot{\theta}^{2}$$

Exemple 2

Calculer l'énergie cinétique d'une tige par rapport à un axe passant par son extrémité en utilisant le calcul direct et le calcul indirect.

a) **Calcul direct :** L'énergie cinétique de la tige $T = \frac{1}{2}I_{/\Delta}\dot{\theta}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^{2}\right)\dot{\theta}^{2} = \frac{1}{6}ML^{2}\dot{\theta}^{2}$

b) **Calcul indirect :** le mouvement peut être décomposé en une translation du centre de gravité plus une rotation autour du centre de gravité :

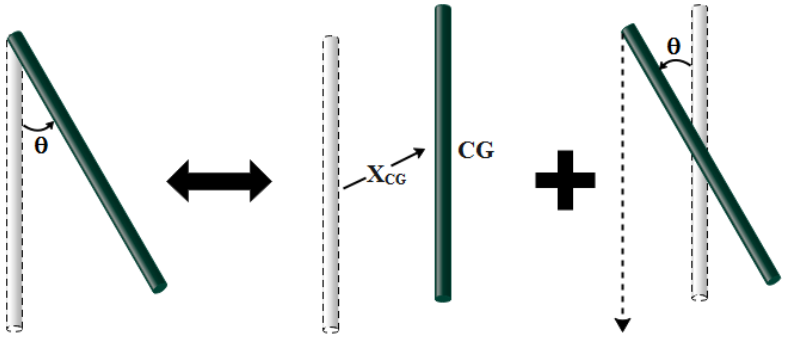


Figure 1-9. La composition du mouvement d'une tige

$$T = T_{tran} + T_{Rot}$$

La masse étant homogène, son centre de gravité se trouve au milieu

$$T_{tran} = \frac{1}{2} M (\frac{L}{2})^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{8} ML^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique du mouvement relatif autour du centre de gravité :

$$T_{Rot} = \frac{1}{2} I_{/cg} \dot{\theta}^2$$

Où $I_{/cg}$ est le moment d'inertie de la barre par rapport au centre de gravité.

$$I_{/cg} = \int dm\, l^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda dl\, l^2 = \lambda \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$

Donc l'énergie cinétique de la barre est :

$$T = (\frac{1}{8} + \frac{1}{24}) ML^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} ML^2 \dot{\theta}^2$$

Remarque

Évidemment le choix de la méthode de calcul dépend de la complexité du système étudié.

Pour les systèmes constitués des disques en mouvements, il est préférable d'utiliser la méthode indirecte.

1.6 Energie potentielle

1.6.1 Énergie potentielle gravitationnelle:

C'est l'énergie due au champ gravitationnel, et cette énergie est dépond d'un choix arbitraire du niveau zéro de l'énergie potentielle.

- **Centre de gravité est au-dessus du niveau V=0**

$$V = mgh + C \tag{1-11}$$

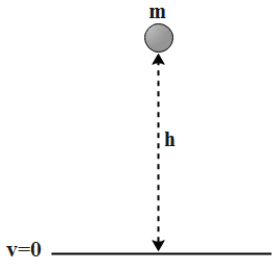


Figure 1-10. Energie potentielle gravitationnelle

C est une constante que l'on peut déterminer à partir d'un choix arbitraire de niveau zéro de l'énergie potentielle.

h est la hauteur de la masse par rapport au niveau zéro de l'énergie potentielle.

Pour h=0, nous avons choisi V=0, et donc C=0.

- **Centre de gravité est au-dessous du niveau V=0**

$$V = -mgh + C \tag{1-12}$$

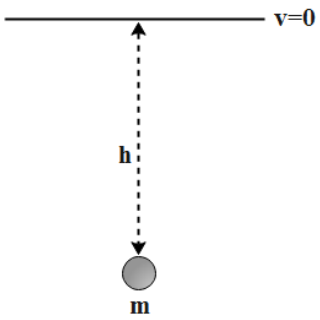


Figure 1-11. Energie potentielle gravitationnelle

Le signe – s'ajoute car le centre de gravité de la masse est au-dessous du niveau zéro V=o.

Dans ce cas aussi la constante C=0 lorsque $h=o$.

Remarque

Dans les calculs la constate *C* disparaitra par dérivation par rapport au temps ou par soustraction, car on ne s'intéresse généralement qu'à la différence entre les énergies potentielles associées à deux points de l'espace.

1.6.2 Énergie potentielle élastique :

C'est l'énergie potentielle emmagasinée dans un ressort, en allongeant ou en compressant ce dernier par rapport à sa langueur à vide.

V= ½ K (allongement ou compression)^2 + C

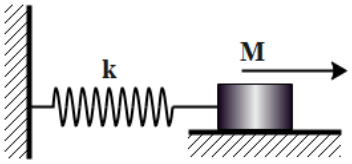


Figure 1-12. Pendule oscillant horizontal

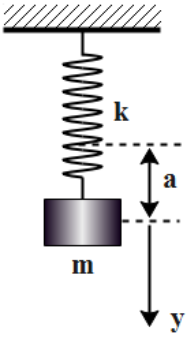


Figure 1-13. Pendule oscillant vertical

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 + C \tag{1-13}$$

$$V = \frac{1}{2}K(y+a)^2 + C$$

*K : est la constante de raideur de ressort (*N/m)

a : est l'allongement du ressort jusqu'à la position d'équilibre.

1.6.3 Énergie potentielle de torsion

$$V = \frac{1}{2}C\theta^2 \tag{1-14}$$

C (N/rad) est une constante de torsion

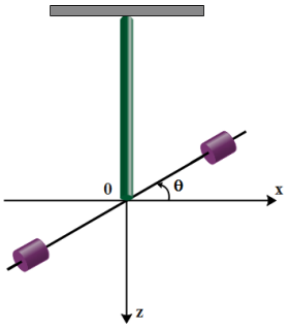


Figure 1-14. Mouvement du torsion

L'énergie potentielle d'un système oscillatoire linéaire est proportionnelle au carré de la variable ***q***, soit :

$$V = \frac{1}{2}Kq^2 \tag{1-15}$$

Cas des systèmes conservatifs

1.7 Equilibre d'un système :

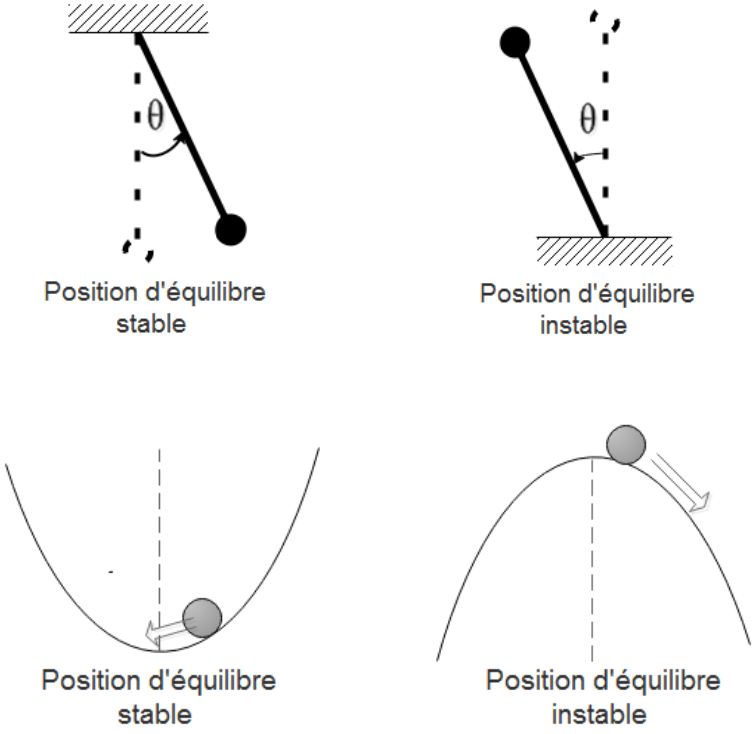
On dit qu'un système est dans un état d'équilibre si la force résultante exercée sur le système est nulle $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Le système est alors soit au repos, soit il effectue un mouvement rectiligne uniforme (c'est le principe d'inertie, voir le cours physique 01 chapitre 03).

Pour un système conservative $\vec{F} = -\overrightarrow{gradV}$, à la position d'équilibre (q_0) la force est nulle :

$$F = 0 \Longrightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q0} = 0 \tag{1-16}$$

Cette position correspond à une position d'équilibre stable lorsque : $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q}\right|_{q0} \geq 0$

Ou une position d'équilibre instable lorsque : $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q}\right|_{q0} \leq 0$



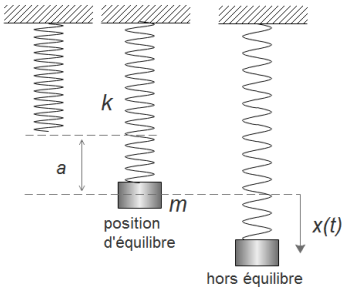
Dans l'exemple 1, l'expression de l'énergie potentielle s'écrit :

$V = -mg\cos(\theta)$, à l'équilibre $\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ donc $mg\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

$\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial^2 q}\right|_{\theta=0} = mg\cos(0) \geq 0$ ***Équilibre stable***.

$\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial^2 q}\right|_{\theta=\pi} = mg\cos(\pi) \leq 0$ ***Équilibre instable***.

Pendule oscillant vertical



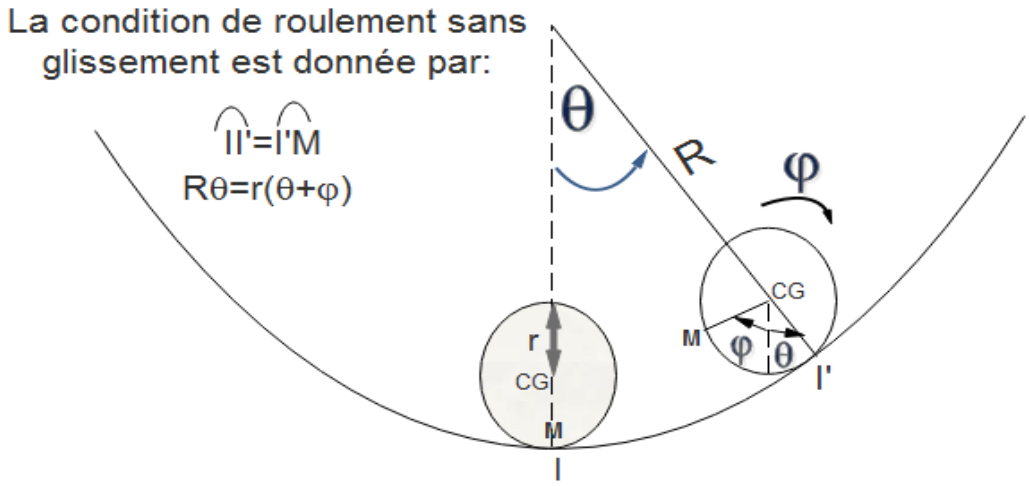
$$V = -Mgx + \frac{1}{2}K(a+x)^2 \tag{1-17}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2}Kx^2 + (mg - ka)x + C$$

À l'équilibre

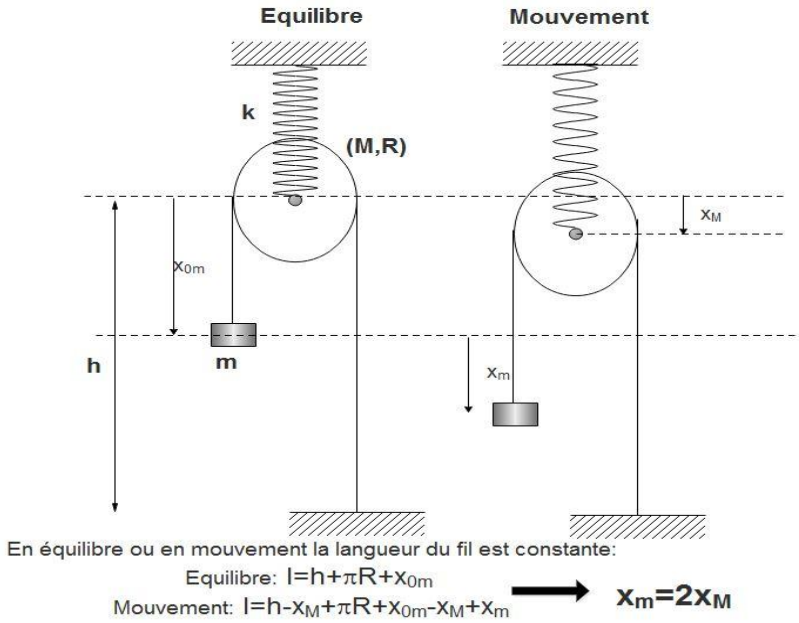
$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 \Longrightarrow (mg - ka) = 0 \tag{1-18}$$

C'est la condition d'équilibre de ce système



Exercice

Déterminer en fonction de θ les énergies cinétique et potentielle du système suivant :



1.8 Equations de Lagrange pour une particule



Joseph-Louis Lagrange

1707-1813

Mathématicien, Mécanicien et Astronome Italien

1.8.1 Equations de Lagrange

Vers 1756, Lagrange a inventé la fonction de Lagrange qui vérifie les équations de Lagrange, puis il a développé la mécanique analytique.

Les équations de Lagrange pour une particule est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad (1\text{-}19)$$

Remarque

Cette relation est valable pour tous les systèmes conservatifs non forcés.

2 Chapitre2 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

2.1 Introduction : pour quoi les équations différentielles ?

- Les oscillations linéaires des systèmes peuvent être décrites mathématiquement par des équations différentielles.
- Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une variable dépendante x et ses dérivés par rapport au temps :

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad (2\text{-}1)$$

$$avec: \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad et \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$f(t) \quad est\ une\ fonction\ du\ temps$$

Les coefficients λ et ω_0 sont des constantes réelles positives

2.2 Equation homogène

Une équation différentielle homogène est une équation sans second membre $f(t) = 0$.

Dans ce module, on va s'intéresser aux équations de type :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad et \quad \ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Commençons d'abord par l'équation du type :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

On cherche une solution de la forme

$$x(t) = Ae^{rt}\ ou\ Aet\ r\ sont\ des\ constantes \implies \dot{x}(t) = Are^{rt} \quad et \quad \ddot{x}(t) = Ar^2e^{rt}$$

De l'équation (2-3), on déduit l'équation caractéristique

$r^2 + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = i\omega_0$ et $r_2 = -i\omega_0$

La solution générale $x(t)$ est alors une combinaison linéaire des deux solutions :

$$x_1(t)\ A_1e^{i\omega_0 t} \implies x(t)\ A_1e^{i\omega_0 t} + A_1e^{-i\omega_0 t} \qquad (2\text{-}4)$$

Ou, A_1 et A_2 sont deux constantes qui sont déterminées à partir de deux conditions initiales.

Pour obtenir une forme simplifiée, on choisit d'utiliser deux constantes C et ϕ qui sont reliées à A_1 et A_2 par les relations : $A_1 = \frac{1}{2}Ce^{i\varphi}$ et $A_2 = \frac{1}{2}Ce^{-i\varphi}$

On obtient la solution : $x(t)$ $\frac{C}{2}($ $\underbrace{e^{i(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-i(\omega_0 t+\varphi)}}_{2\cos(\omega_0 t+\varphi)}$ $)$

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{2-5}$$

Cette solution générale peut également se décomposer sur la base de ces deux solutions :

$$x(t) - B_1\cos(\omega_0 t) + B_2\sin(\omega_0 t) \tag{2-6}$$

Ou le module C est $C = \sqrt{B_1^2\, B_2^2}$ et $\tan(\varphi) = -\frac{B_2}{B_1}$

Exemple : Résoudre l'équation : $\ddot{x} + 16\,x = 0$

$$\ddot{x} + \underbrace{(4)^2}_{\omega_0=4}\, x = 0$$

$$x(t) = A\cos(4t + \varphi)$$

Remarque : les équations différentielles du type : $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$

Permettent de décrire les mouvements oscillatoires non forcées et non amorties

- **Equation homogène du type :** $\ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

On cherche une solution de la forme $x(t) = Ce^{rt}$

De l'équation du mouvement on déduit l'équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

La solution dépend du discriminant réduit $\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2$

On distingue trois cas possibles, selon que λ est supérieure, inférieure ou égale à 0.

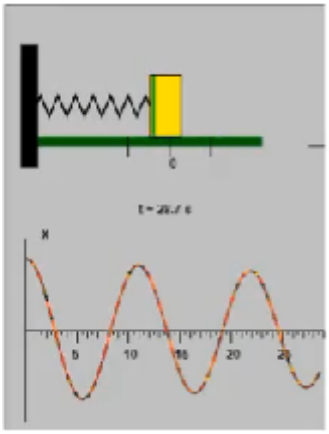


Figure 2-1. Pendule oscillant

Premier cas $\Delta < 0$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\omega'$$

Tel que : $\omega' = \sqrt{\omega_1^2 - \lambda^2}$ est la **pseudo-pulsation.**

La solution générale est **pseudopériodique** (voir le graphe ci-dessous), elle est de la forme

$$x(t) = (\underbrace{C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}}_{C\cos(\omega' t - \varphi)})e^{-\lambda t} = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi)$$

La pseudo-pulsation du mouvement est plus petite que la pulsation du système non amorti.

$\omega' < \omega_0$

On parle de régime pseudopériodique car le mouvement a une certaine régularité, car le temps qui s'écoule entre deux maxima successifs (pseudo-période T/) est constant (figure 2-2).

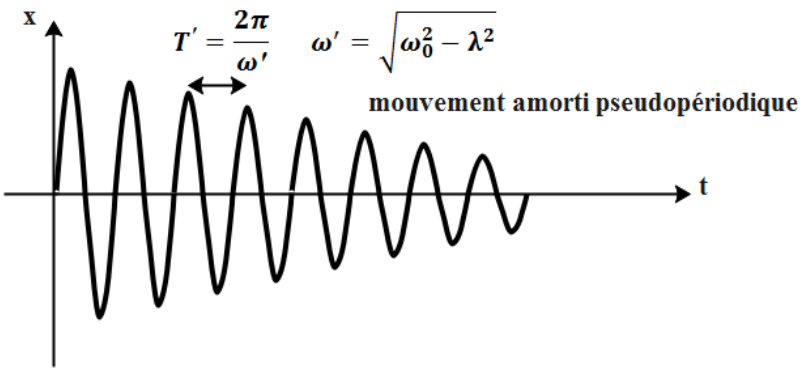


Figure 2-2. Variation de x en fonction de T pour un mouvement pseudopériodique

Exemple : résoudre l'équation différentielle suivante

L'équation peut être écrite sous la forme :

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 18x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 9x = 0$$

$$\ddot{x} + 2(1)\dot{x} + (3)^2 x = 0$$

$$\lambda = 1 \ et \ \omega_0 = 3$$

$$\Delta' = 1^2 - 3^2 < 0$$

Donc la solution est de la forme

$$x = A\ell^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi)$$

Avec $\lambda = 1 \ et \ \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$

Alors on obtient : $x = A\ell^{-t}\cos(\sqrt{8}\,t + \varphi)$

3 Chapitre 3 : Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

3.1 Oscillations non amorties

3.1.1 Introduction :

On a vu dans le chapitre précédent le formalisme mathématique qui nous permit de calculer les énergies cinétique et potentielle d'un corps solide, mais notre objectif final consiste à savoir la position, la vitesse et l'accélération de chaque point de ce corps par rapport à un repère choisi en résolvant l'équation différentielle du mouvement. Pour aboutir à un tel objectif trois méthodes sont généralement utilisées :

a) L'application de la 2 ième loi de Newton (voir le cours physique 01).

b) L'application du principe de la conservation de l'énergie totale ou l'énergie mécanique, cette méthode n'est applicable que pour les systèmes isolés, où toutes les forces sont conservatives (voir le cours physique 01).

c) L'application d'un formalisme mathématique extrêmement efficace appelé le formalisme de Lagrange, et c'est à ce formalisme que nous allons nous intéresser dans ce chapitre).

3.1.2 Principe de moindre action

Ce principe révéla toute sa valeur grâce aux travaux d'Euler, Lagrange, Jacobi et Helmholtz.

Un système physique évolue d'une configuration caractérisée par un ensemble de valeurs de coordonnées à l'instant t_1 vers une configuration caractérisée par un ensemble de valeurs de coordonnées à l'instant t_2, de telle façon que l'intégrale.

$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1,...,q_N,\dot{q}_1,...,\dot{q}_N)dt$ prend la plus petite valeur possible.

S et **L** s'appellent action et fonction de Lagrange, respectivement

Avec $L(q_i,\dot{q}_i) = T - V$ est appelé le Lagrangien de système.

Où T et V sont les énergies cinétique et potentielle du système.



Leonhard Euler (1707-1783)
Mathématicien et Physicien
Suisse

Remarques :

- *En mécanique, le principe de moindre action affirme qu'un corps prend la direction qui lui permet de dépenser le moins d'énergie dans l'immédiat.*
- *Lorsqu'on laisse le principe de moindre action conduit notre voiture, il va sans doute forcer la voiture de prendre la trajectoire de telle sorte que la consommation en carburant soit minimale.*
- *La trajectoire que suit un corps est celle qui permet la transformation instantanée de l'énergie cinétique en énergie potentielle la plus petite possible.*
- *Souvenez vous mes étudiants, le meilleur moyen pour forcer quelqu'un à faire quelque chose, c'est bien de le convaincre, (c'est une autre manifestation du principe de moindre action dans la vie).*

Vers 1756, Lagrange a inventé la fonction de Lagrange qui vérifie les équations de Lagrange, puis il a développé la mécanique analytique.



Joseph-Louis Lagrange

1707-1813

Mathématicien, Mécanicien et Astronome Italien

Les équations de Lagrange d'un système un N degrés de libertés sont données par :

- $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ i=1,2,…, N.

3.1.3 Equation du mouvement (exemple : pendule élastique)

Une masse ponctuelle *m* suspendue à un ressort vertical de constante de raideur K. La position d'équilibre correspond à x=0.

Le Lagrangien du système $L=T-V$

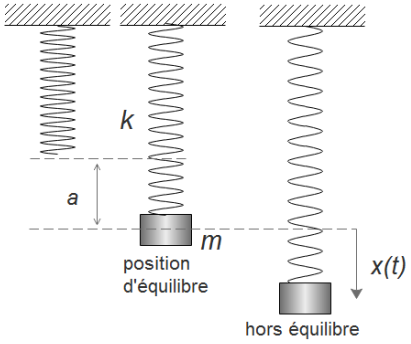


Figure 3-1. Pendule oscillant vertical

- ***Energie cinétique***

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{3-1}$$

- ***Energie potentielle***

$$V = V_m + V_K = -mgx + \frac{1}{2}K(a+X)^2 \tag{3-2}$$

A l'équilibre

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 \Longrightarrow (mg - ka) = 0 \tag{3-3}$$

En incérant la condition d'équilibre dans l'expression de *V*, on obtient :

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 + C \tag{3-4}$$

Le Lagrangien *L* est donné par la relation $L=T-V$.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 + C) \tag{3-5}$$

Pour un système à un degré de liberté l'équation du mouvement est $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

On trouve une équation différentielle linéaire de 2$^{\text{ième}}$ degré et sans second membre (homogène).

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3-6}$$

L'étude mathématique des équations différentielles permet de montrer que la forme générale de la solution est :

$x(t) = Ae^{rt}$ Où A et r sont des constantes $\Rightarrow$ $\dot{x}(t) = Are^{rt}$ *et* $\ddot{x}(t) = Ar^2e^{rt}$

En substituant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation caractéristique et sa solution donnera les valeurs de *r:*

$r^2 + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = i\omega_0$ *et* $r_2 = -i\omega_0$

La solution générale x(t) est alors une combinaison linéaire des deux solutions :

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} \quad et \quad x_2(t) = A_2 e^{-i\omega_0 t} \quad \Rightarrow\Rightarrow x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_1 e^{-i\omega_0 t}$$

Où, A_1 et A_2 sont deux constantes qui sont déterminées à partir de deux conditions initiales. Pour obtenir une forme simplifiée on choisit d'utiliser deux constantes C et φ qui sont reliées à A_1 et A_2 par les relations :

$$A_1 = \frac{1}{2} C e^{i\varphi} \quad et \quad A_2 = \frac{1}{2} C e^{-i\varphi}$$

On obtient la solution : $x(t) = \frac{C}{2}\left(\underbrace{e^{i(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-i(\omega_0 t+\varphi)}}_{2\cos(\omega_0 t+\varphi)} \right)$

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{3-7}$$

Cette solution générale peut également se décomposer sur la base de ces deux solutions :

$$x(t) = B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t) \tag{3-8}$$

où le module C est $C = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ et $\tan(\varphi) = -\frac{B_2}{B_1}$.

La forme de la solution $x(t) = Ccos(\omega 0t + \varphi)$ est la plus utilisée dans les livres de physique. La variation de x(t) en fonction du temps est représentée sur la figure :

Les constantes C et φ sont déterminées à partir de deux conditions initiales :

Pour les conditions initiales :

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C\cos(\varphi) \\ \dot{x}_0 = -\omega_0 C\sin(\varphi) \end{cases} \tag{3-9}$$

On trouve :

$$C = \left[x_0{}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \right)$$

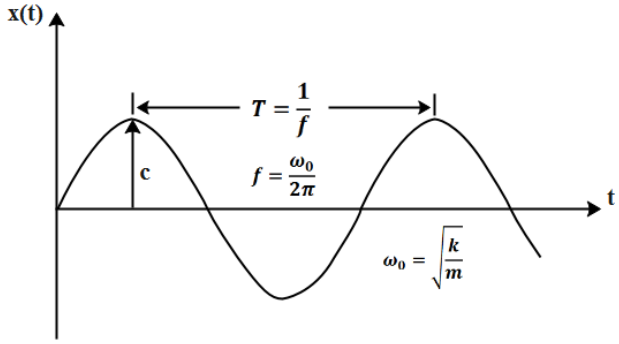


Figure 3-2. Variation de x en fonction de t

3.1.4 Approximation de faibles oscillations (Amplitudes)

Lorsqu'on se limite dans le cas des faibles oscillations, nous appliquons le théorème de Taylor :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$$

$$\sin\theta = \sin 0 + \theta\cos 0 + \frac{\theta^2}{2!}(-\sin 0) + \frac{\theta^3}{3!}(\cos 0)\ldots \quad (3\text{-}10)$$

$$\cos\theta = \cos 0 + \theta(-\sin 0) + \frac{\theta^2}{2!}(-\cos 0) + \frac{\theta^3}{3!}(\sin 0)\ldots$$

Généralement dans nos calculs, pour la fonction sinus on se limite au deuxième terme.

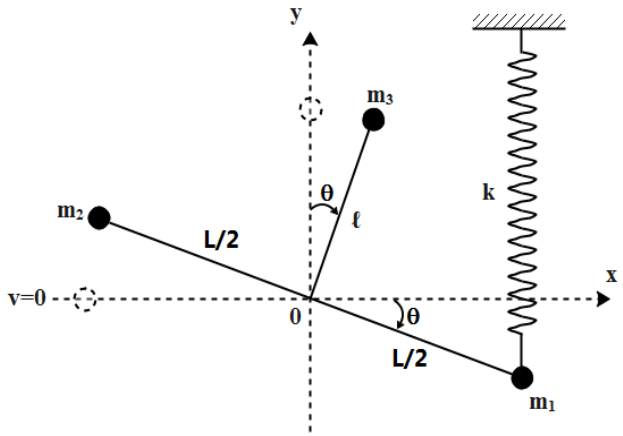
Exemple

$$\theta << \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \qquad \theta << \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \qquad \sin(2°) = \sin(0.034888rad) \approx 0.034880$$

Exemple d'application

EFS 2016

Le système ci-contre, est constitué de deux tiges perpendiculaires et de masses négligeables. m_1 m_2 et m_3 sont des masses ponctuelles, m_1 est reliée à m_2 par la tige de langueur L, m_3 est fixée à l'une des extrémités de la tige de langueur ℓ. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe fixe passant par O. Un ressort de constante de raideur k est attaché à la masse m_1. À l'équilibre $\theta=0$, le ressort est déformé par $\Delta\ell$.



1) Déterminer la condition d'équilibre et la condition de stabilité à partir de l'énergie potentielle.
2) Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.
3) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.
4) Etablir l'équation différentielle du mouvement. Discuter la solution de l'équation différentielle.

Solution

1) Énergie potentielle

$$V = V_{m1} + V_{m2} + V_{m3} + V_K = -m_1 g \frac{L}{2}\sin(\theta) + m_2 g \frac{L}{2}\sin(\theta) + m_3 g \ell \cos(\theta) + \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\theta + \Delta\ell\right)^2$$

$$\sin(\theta) \approx \theta \qquad \cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{kL^2}{4} - m_3 g \ell\right]\theta^2 + \left[m_2 g \frac{L}{2} + k\frac{L}{2}\Delta\ell - m_1 g \frac{L}{2}\right]\theta + C$$

- **Condition d'équilibre :**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow m_2 g \frac{L}{2} + k\frac{L}{2}\Delta\ell - m_1 g \frac{L}{2} = 0$$

- **Condition de stabilité**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right] > 0 \Rightarrow \frac{kL^2}{4} - m_3 g\,\ell > 0$$

2) Expression simplifiée de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{kL^2}{4} - m_3 g\,\ell\right]\theta^2 + C$$

3) Énergie cinétique

$$T = T_{m1} + T_{m2} + T_{m3} = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_3\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_3\ell^2\right]\dot{\theta}^2$$

4) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^{\cdot\cdot} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{\frac{kL^2}{4} - m_3 g\,\ell}{m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_3\ell^2}\right)}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

Solution de l'équation du mouvement

-Lorsque l'équilibre est stable, la solution est : $\theta(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

-Lorsque l'équilibre est instable, la solution est : $\theta(t) = B_1 e^{\omega_0 t} + B_2 e^{-\omega_0 t}$

3.2 Oscillations amorties à un degré de liberté

3.2.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous n'avons pas pris en compte les forces de frottement qui sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique. En réalité, un pendule simple en mouvement revient à sa position d'équilibre après un certain temps à cause de la dissipation de son énergie mécanique sous forme de chaleur. Par simple intuition, on réalise que le pendule provoque des frottements avec son environnement (air ou autre fluide).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux cas simples, où la perte d'énergie est due à des frottements visqueux pour lesquels les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse.

3.2.2 Amortisseur

Un amortisseur est un dispositif servant à amortir le mouvement, il est constitué d'un élément (ou deux éléments) mobile à l'intérieur d'un récipient contenant un fluide visqueux.

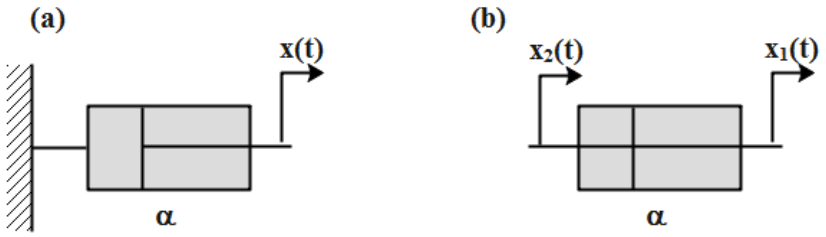


Figure 3-3. Amortisseur

Si le corps se déplace avec de faible vitesse, la force de frottement est donnée par :

-Cas (a) $f_f = -\alpha\dot{x}$ ($\dot{x}$ est la vitesse relative de la partie mobile de l'amortisseur par rapport à la partie fixe.

- Cas (b) $f_f = -\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ est la vitesse relative des deux parties mobiles de l'amortisseur l'une par rapport à l'autre.

Où α est appelé ***coefficient de frottement***. L'unité de α peut être déterminée à l'aide de l'équation aux dimensions : $[\alpha] = \dfrac{\lfloor f_f \rfloor}{[v]} = \dfrac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$

Dans le cas (a), la force e frottement peut être écrite comme la dérivée par rapport à la vitesse d'une fonction qu'on appelle **fonction de dissipation D**.

$$f_f = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \Longrightarrow D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \tag{3-11}$$

3.2.3 Equation du mouvement d'un système amorti

L'équation de Lagrange d'un système amorti à un degré de liberté est donnée par :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}_{ma} \underbrace{-\frac{\partial L}{\partial x}}_{\sum f_{conservative}} = \underbrace{-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}}_{\sum f_{frottement}} \Leftrightarrow ma = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial x}}_{\sum f_{conservative}} + \sum f_{frottement} \quad car \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial (T-V)}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$ma = \sum f_{conservative} + \sum f_{frottement} = \sum f_{extérieure}$$

C'est la 2^{ieme} loi de Newton

Exemple (pendule élastique)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x} \qquad V = \frac{1}{2}kx^2 \qquad D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

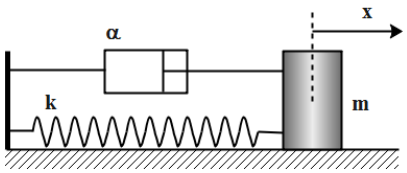


Figure 3-4. Pendule vertical

On obtient l'équation du mouvement suivante :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

Ou bien :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^{\,2}x = 0$$

où λ est appelé le **facteur d'amortissement,** avec $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$, et ω_0 est la pulsation propre du système, $\omega_0^{\,2} = \frac{k}{m}$.

On remarque que λ est homogène à l'inverse d'un temps et son unité est s^{-1}. Plus λ est grand, plus l'amortissement est important et plus l'oscillateur s'arrête vite.

3.2.4 Solution de l'équation du mouvement

On cherche une solution de la forme

$$x(t) = Ce^{rt} \tag{3-12}$$

De l'équation du mouvement on déduit l'équation caractéristique

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \tag{3-13}$$

La solution dépend du discriminant réduit $\Delta = \lambda^2 - \omega_0^{\,2}$. On distingue trois cas possibles, selon que λ est supérieure, inférieure ou égale à ω_0.

- **Premier cas :** ***Amortissements grands (système suramorti ou apériodique)*** **:** $\lambda > \omega_0$

Dans ce cas, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles et négatives :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \tag{3-14}$$

La solution générale x(t) s'écrit comme combinaison linéaire des solutions correspondantes à chacune des valeurs de *r*:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{3-15}$$

Les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées à partir de deux conditions initiales. Puisque les valeurs r_1 et r_2 sont négatives, la solution $x(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Ce type de mouvement est appelé mouvement **amorti apériodique.**

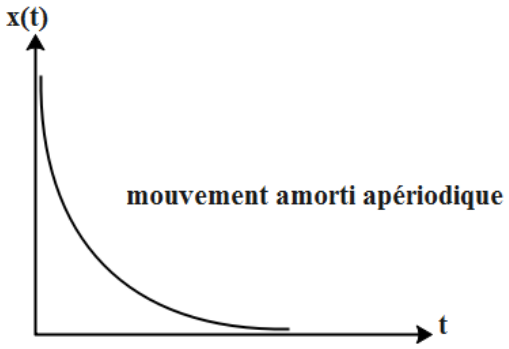


Figure 3-5. Variation de x(t) en fonction de t

- **Deuxième cas : *Amortissement critique***

$\lambda = \omega_0$ L'équation caractéristique possède une racine double : $r_1 = r_2 = \lambda$

La solution générale s'écrit: $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}$

Démonstration

On fait le changement de variable suivant :

$$y(t) = \dot{x} + \lambda x \Longrightarrow \frac{d}{dt}y(t) = \ddot{x} + \lambda\dot{x} \tag{3-16}$$

L'équation différentielle devient :

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \lambda(\dot{x} + \lambda x) = 0}^{\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x=0} \quad car \quad \lambda^2 = \omega_0^{\,2}$$

Pour résoudre cette équation, nous cherchons les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = 0 \\ y(t) = \dot{x} + \lambda x \end{cases} \tag{3-17}$$

De l'équation (3-17), on trouve

$$y(t) = C_2 e^{-\lambda t} \tag{3-18}$$

La solution de la deuxième équation du système s'écrit : $x(t) = C(t)e^{-\lambda t}$.

En injectant cette solution dans l'équation différentielle de x(t), on tire que

$\dfrac{dC}{dt} = C_2$. D'où $C(t) = C_1 + C_2 t$

C'est-à-dire que la solution générale est $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}$

Dans ce cas, le mouvement est aussi apériodique. Cet état du système **s'appelle état critique.**

Remarque

Dans l'état critique ***x(t)*** *tend vers* ***0*** *plus vite que l'état apériodique (amortissements grands).*

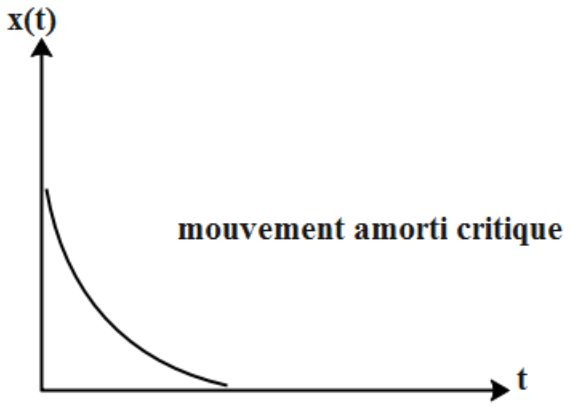


Figure 3-6. Variation de x(t) en fonction de t

- **Troisième cas :** $\lambda < \omega_0$ ***Amortissements faibles*** **(système sous-amorti ou pseudopériodique**）

L'équation caractéristique admet deux racines complexes :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \equiv -\lambda \pm i\omega' \tag{3-19}$$

$\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \lambda^2}$ est la ***pseudo-pulsation.***

La solution générale est **pseudopériodique** (voir le graphe ci-dessous), elle est de la forme :

$$x(t) = \left(\underbrace{C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}}_{C\cos(\omega' t+\varphi)}\right) e^{-\lambda t} = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi) \tag{3-20}$$

La pseudo-pulsation du mouvement est plus petite que la pulsation propre du système non amorti. $\omega' < \omega_0$.

On parle de régime pseudopériodique car le mouvement a une certaine régularité, car le temps qui s'écoule entre deux maxima successifs (pseudo-période T') est constant (figure).

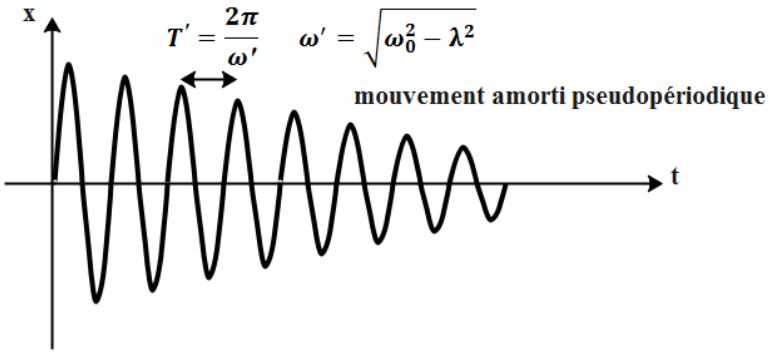


Figure 3-7. Variation de x en fonction de t

Conditions initiales

$$\begin{cases} x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -C\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi) - C\omega' e^{-\lambda t}\sin(\omega' t + \varphi) \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = C\cos\varphi = x_0 & (A) \\ \dot{x}(0) = -C\lambda\cos(\varphi) - C\omega'\sin(\varphi) = \dot{x}_0 & (B) \end{cases} \qquad (3\text{-}21)$$

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \Rightarrow \sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{C^2}}$$

$$\begin{cases} (A) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x_0}{C} \\ (B) \Rightarrow -C\lambda\cos(\varphi) - C\omega'\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x_0}{C} \\ -\lambda x_0 - \sqrt{C^2}\omega'\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{C}\right)^2} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$(B) \Rightarrow -\lambda x_0 - \omega'\sqrt{C^2 - x_0^2} = \dot{x}_0$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega'} + \frac{\lambda x_0}{\omega'}\right)^2 + {x_0}^2}$$

$$\frac{(B)}{(A)} \Rightarrow \frac{-C\lambda\cos(\varphi) - C\omega'\sin(\varphi)}{C\cos\varphi} = \frac{\dot{x}_0}{x_0} \Rightarrow -\lambda - \omega'\tan(\varphi) = \frac{\dot{x}_0}{x_0}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{-1}{\omega'}\left[\frac{\dot{x}_0}{x_0} + \lambda\right]$$

3.2.5 Décrément logarithmique :

On définit le décrément logarithmique D_{ln} qui représente la décroissance de l'amplitude à une seule période

$$D_{\ln} = \ln(\frac{x(t)}{x(t+T')}) = \lambda T'$$

$$D_{\ln} = \ln(\frac{x(t)}{x(t+T')}) = \ln \frac{Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi)}{Ce^{-\lambda(t+T)}\cos(\omega'(t+T')+\varphi)} = \lambda T' \qquad \text{car } T' = \frac{2\pi}{\omega'}$$

$\boldsymbol{T'}$ est la pseudo-période du système.

Après ***n*** pseudo période T\, le décrément logarithmique est donné par :

$$D_{ln} = \frac{1}{n}\ln(\frac{x(t)}{x(t+nT')}) = \lambda T' \tag{3-22}$$

Réciproquement, on peut déterminer la pseudo-période T' en fonction du décrément logarithmique $D_{\ln}$:

$$\left.\begin{aligned}\omega'^2 &= \omega_0{}^2 - \lambda^2 \\ D_{\ln} &= \lambda T'\end{aligned}\right\} \Rightarrow T' = T_0\sqrt{1+\frac{D_{\ln}{}^2}{4\pi^2}}$$

3.2.6 Energie mécanique d'un oscillateur amorti

L'énergie mécanique du pendule élastique est la somme des énergies cinétique et potentielle.

$$E = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{3-23}$$

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi) \quad et \quad \dot{x}(t) = -C\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi) - C\omega' e^{-\lambda t}\sin(\omega' t+\varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -Ce^{-\lambda t}\underbrace{\left[\lambda\cos(\omega' t+\varphi)+\omega'\sin(\omega' t+\varphi)\right]}_{A\sin(\omega' t+\varphi+\alpha)} \quad avec \quad A = \sqrt{\lambda^2+\omega'^2} = \omega_0 \quad et \quad \tan\alpha = \frac{\lambda}{\omega'}$$

$$\text{On trouve donc : } \dot{x}(t) = -C\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega' t+\varphi+\alpha)$$

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\cos^2(\omega' t+\varphi) + \frac{1}{2}mC^2\left(\frac{K}{m}\right)e^{-2\lambda t}\sin^2(\omega' t+\varphi+\alpha)$$

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[\cos^2(\omega' t+\varphi)+\sin^2(\omega' t+\varphi+\alpha)\right] = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1-\sin^2(\omega' t+\varphi)+\sin^2(\omega' t+\varphi+\alpha)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1+\left(\sin(\omega' t+\varphi+\alpha)+\sin\ (\omega' t+\varphi)\right)\left(\sin(\omega' t+\varphi+\alpha)-\sin(\omega' t+\varphi)\right)\right]$$

On utilise les formules trigonométriques: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ et $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$E=\frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1+\left(2\sin(\omega' t+\varphi+\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(2\cos(\omega' t+\varphi+\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\alpha}{2})\right)\right]$$

$$E=\frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1+\left(\underbrace{2\sin(\omega' t+\varphi+\frac{\alpha}{2})\cos(\omega' t+\varphi+\frac{\alpha}{2})}_{\sin 2(\omega' t+\varphi+\frac{\alpha}{2})}\right)\underbrace{\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\alpha}{2})\right)}_{\sin\alpha}\right]$$

Nous obtenons l'expression finale de l'énergie mécanique.

$$E=\frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1+\sin\alpha\times\sin 2\,(\omega' t+\varphi+\frac{\alpha}{2}\right] \tag{3-24}$$

3.2.7 Facteur de qualité

On appelle facteur de qualité *Q* le rapport entre l'énergie mécanique et la perte d'énergie dans une pseudo période.

$$Q=2\pi\frac{E(t)}{E(t)-E(t+T')} \tag{3-25}$$

Q est une grandeur physique sans dimension.

On a :

$$E(t+T')=\frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda(t+T')}\left[1+\sin\alpha\times\sin 2(\omega'\underbrace{(t+T')}_{t+\frac{2\pi}{\omega'}}+\varphi+\frac{\alpha}{2})\right]$$

Nous calculons l'énergie perdue dans une pseudo période :

$$\text{E(t)-E(t+T')}=\frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1+\sin\alpha\times\sin 2(\omega' t+\varphi+\frac{\alpha}{2})\right]\left[1-e^{-2\lambda T'}\right]$$

Nous trouvons donc :

$$Q=2\pi\frac{E(t)}{E(t)-E(t+T')}=\frac{2\pi}{1-e^{-2\lambda T'}} \tag{3-26}$$

Dans le cas des faibles amortissements : $\lambda<<\omega'=\sqrt{\omega_0{}^2-\lambda^2}\approx\omega_0$

$$e^{\varepsilon}=1+\varepsilon\Rightarrow e^{-2\lambda T'}\approx e^{-2\lambda\frac{2\pi}{\omega_0}}\approx 1-4\pi\frac{\lambda}{\omega_0}$$

On trouve finalement l'expression du facteur de qualité dans le cas des faibles amortissements :

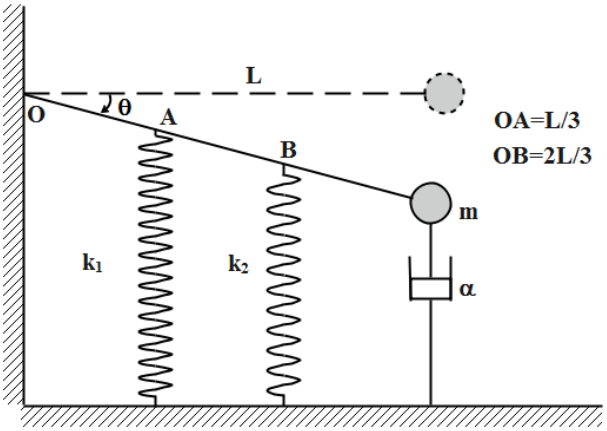
$$Q=\frac{\omega_0}{2\lambda} \tag{3-27}$$

Ce facteur est d'autant plus grand que l'amortissement est faible, et il est d 'une très grande importance pour les ingénieures, parce qu'une grande valeur de Q (amortissement faible), peut provoquer la destruction des bâtiments et des ouvrages d'art comme les ponts (voir le prochain chapitre : phénomène de résonance).

Exemple d'application

Pour le système ci-contre

1) Donner la condition d'équilibre si l'équilibre correspond à θ=0.
2) Trouver l'équation différentielle du mouvement



Solution

$$V_{k_1} = \frac{1}{2}k_1(a_1 + d_1\theta)^2 \qquad d_1 = \frac{L}{3}$$

$$V_{k_{k_1}} = \frac{1}{2}k_2(a_2 + d_2\theta)^2 \qquad d_2 = \frac{2L}{3}$$

$$V_m = -mgL\theta$$

Condition d'équilibre

$$k_1 d_1 a_1 + k_2 d_2 a_2 = mgL$$

$$V = \frac{1}{2}k_1(d_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(d_2\theta)^2 = \frac{1}{18}L^2(k_1 + 4k_2)\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$$

Equation du mouvement

$$mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + \frac{1}{9}L^2(k_1 + 4k_2)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{(k_1 + 4k_2)}{9m}$$

4 Chapitre 4. Oscillations forcées à un degré de liberté

4.1 Introduction

Si l'on veut que les oscillations se maintiennent avec la même amplitude, il faut continuellement fournir au système une quantité d'énergie égale à celle perdue à cause des forces de frottements, autrement dit, il faut appliquer une fore extérieure, et les oscillations dans ce cas sont appelées oscillations forcées.

En général, on définit une oscillation forcée, tout système en mouvement soumis à l'action d'une force extérieure F(t) variable.

Exemple : mouvement sismique

Un immeuble modélisé par un système masse-ressort subit à un mouvement sismique sinusoïdal de la forme : $xs(t)=acos(\Omega t)$, à cause de la propagation de ce mouvement une force $F(t)=F_0cos(\Omega t)$ est appliquée à la masse m

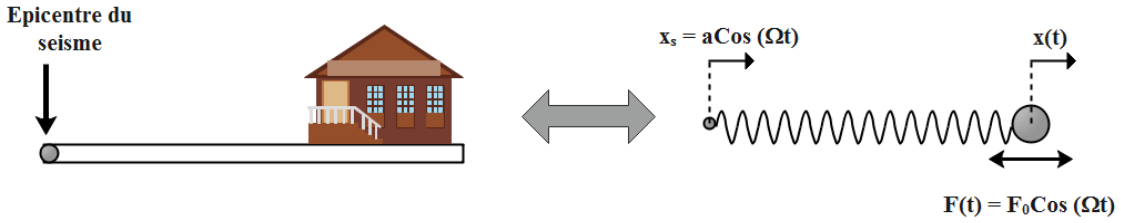


Figure 4-1. Analogie système masse-ressort à un mouvement sismique

.

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{4-1}$$

Energie potentielle

$$V = \frac{1}{2}k(x - x_s)^2 \tag{4-2}$$

L'équation du mouvement de ce système s'écrit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F(t) \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) \tag{4-3}$$

4.2 Équation du mouvement (masse-ressort-amortisseur)

L'équation du mouvement d'un système forcé est donnée par l'équation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_q(t) \tag{4-4}$$

Où, $F_q(t)$ est appelée la force généralisée, elle est donnée par la relation.

$$F_q(t) = \overrightarrow{F(t)}.\frac{\overrightarrow{dr}}{dq} \tag{4-5}$$

- $\vec{r}$ est le vecteur qui repère le point d'application de la force extérieure.
- Lorsque ***q*** décrit un déplacement, la force généralisée est la force extérieure appliquée au système.
- Lorsque ***q*** décrit une variable de rotation (angle), la force généralisée dans ce cas est le moment de la force extérieure appliquée au système.

<u>Exemple</u> : Pendule élastique horizontal

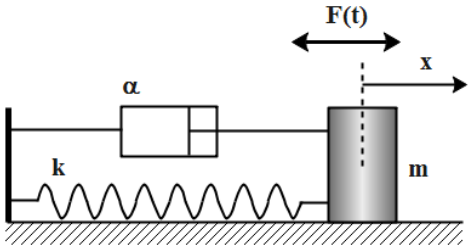


Figure 4-2. Système forcé

L'équation du mouvement de ce système est :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \tag{4-6}$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad et \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'équation différentielle (4-6) est linéaire non homogène (avec second membre) à coefficients constants.

4.3 Solution de l'équation du mouvement

La solution générale de l'équation (4-6) est la somme de la solution de l'équation homogène x_H (sans second membre) et la solution particulière de l'équation différentielle avec le second membre x_p.

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \tag{4-7}$$

4.3.1 Régime transitoire (début du mouvement→ $x_H(t)\neq 0$)

Il faut signaler qu'au début du mouvement la solution $x_H(t)$ **n'est pas nulle** et la solution générale est la somme de x_H et x_p on est alors dans **le régime transitoire**.

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \tag{4-8}$$

L'expression de la solution homogène x_H dépend du Δ', mais dans tous les cas x_H tend vers zéro après un certain temps (voir les figures).

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x_H \xrightarrow{\forall régime} 0 \tag{4-9}$$

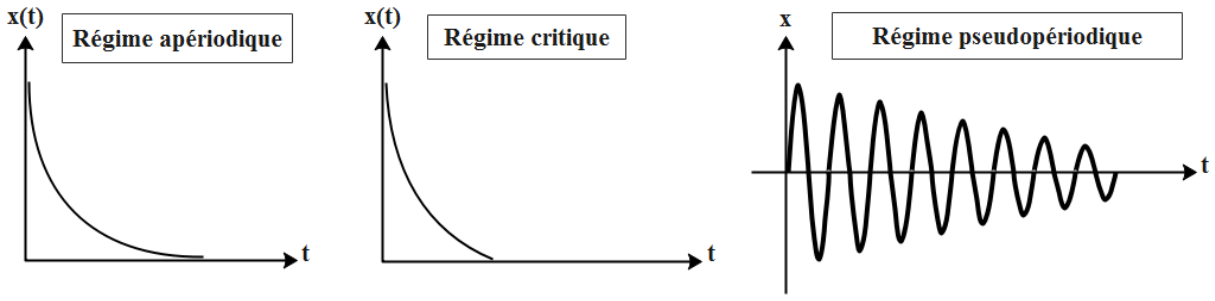


Figure 4-3. Régimes transitoires

4.3.2 Régime permanent (solution homogène tend vers zéro)

Au fil du temps la solution homogène $x_H(t)$ tend vers zéro, donc il ne nous reste comme solution que la solution particulière $xp(t)$.

$$x(t) = \underbrace{x_H(t) + x_p(t)}_{régime \quad transitoire} \quad \text{Après une courte durée} \quad x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{régime \quad permanent}$$

$$x(t) = x_p(t) \tag{4-10}$$

4.3.3 Méthode des nombres complexes

La méthode des nombres complexes permet de transformer l'équation différentielle en une équation algébrique.

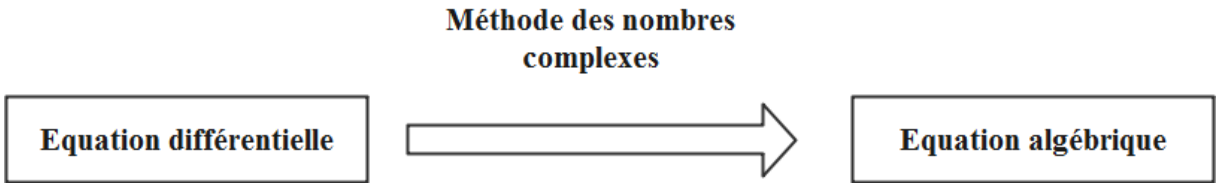


Figure 4-4. Méthode des nombres complexes

La force extérieure est une fonction périodique du temps de pulsation Ω.

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \tag{4-11}$$

La notation complexe de la force est :

$$\underline{F(t)} = F_0 e^{i\Omega t} \quad avec \quad F(t) == F_0 \cos(\Omega t) = \mathrm{Re}\left[F_0 e^{i\Omega t}\right]$$

Re : signifie la partie réelle du nombre complexe.

On cherche une solution particulière de la même forme que le second membre de l'équation différentielle :

$x(t) = x_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ Sa notation complexe est $\underline{x(t)} = x_0 e^{i(\Omega t+\varphi)} = \underbrace{x_0 e^{i\varphi}}_{\underline{X_0}} e^{i\Omega t}$

On pose :

$$\underline{X_0} = x_0 e^{i\varphi}$$

Alors, on peut écrire **:**

$$\underline{x(t)} = \underline{X_0} e^{i\Omega t}$$

En substituant l'expression de *x(t)* dans l'équation différentielle (4-6), on trouve la solution complexe :

$$\underline{X_0} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega} \quad et \quad \underline{X_0} = x_0 e^{i\varphi}$$

On cherche le module et l'argument de ce nombre complexe :

$$x_0 = \left|\underline{X_0}\right| = \frac{\left|\frac{F_0}{m}\right|}{\left|(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega\right|} et \quad \varphi = \arg ument(\underline{X_0}) = \arg \frac{\left[\frac{F_0}{m}\right]}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega\right]}$$

On peut écrire ;

$$\varphi = \arg(\underline{X_0}) = \arg\left[\frac{F_0}{m}\right] - \arg\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega\right] = 0 - \arctan\left[\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right]$$

Le module de ce nombre complexe donne la valeur de x_0 et son argument donne la valeur de φ :

$$x_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \qquad \varphi = -\arctan\left[\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right]$$

4.4 Variation de l'amplitude en fonction de la pulsation

Lorsqu'on varie la pulsation de la force excitatrice, l'amplitude x_0 atteint une valeur maximale lorsque la dérivé de x_0 par rapport à Ω est nulle.

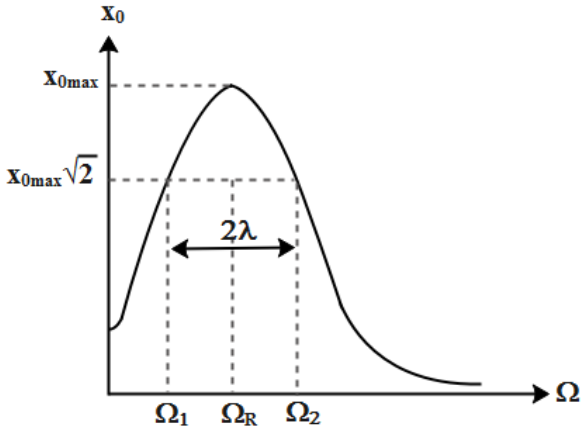


Figure 4-5. Phénomène de résonance

$$\frac{dx_0}{d\Omega} = -\frac{2\frac{F_0}{m}\Omega\left[\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2\right]}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Il existe un maximum à la pulsation de résonance Ω_R

Seulement si la condition de résonance est vérifiée :

$$\omega_0^2 > 2\lambda^2 \Rightarrow \qquad \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

On constate sur la figure que l'amplitude x_0 est d'autant plus importante que la pulsation de la force extérieure est proche de la pulsation de résonance.

Remarque

Dans le domaine du bâtiment et/ou du génie civil, si la pulsation de résonance du résonateur (bâtiment, pont…) coïncide avec la pulsation de l'excitateur (vent fort, tremblements de terre... l'amplitude du résonateur peut prendre de très grandes valeurs, et cela peut provoquer la destruction des bâtiments et des ouvrages d'art comme les ponts. On peut citer comme exemple : le 7 novembre 1940, le pont de Tacoma Narrows s'effondre sous l'action du vent.



4.5 Variation de la phase en fonction de la pulsation

Nous avons déjà calculé φ :

$$\varphi = -arc\tan\left[\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right] \Rightarrow \tan(-\varphi) = \frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{4-12}$$

Pour les faibles amortissements, on a :

$\lambda << \omega_0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \approx \omega_0$

On peut tracer la variation de φ en fonction de Ω, en servant du tableau suivant :

Ω	0	ω_0	+α
φ	0	-π/2	-π

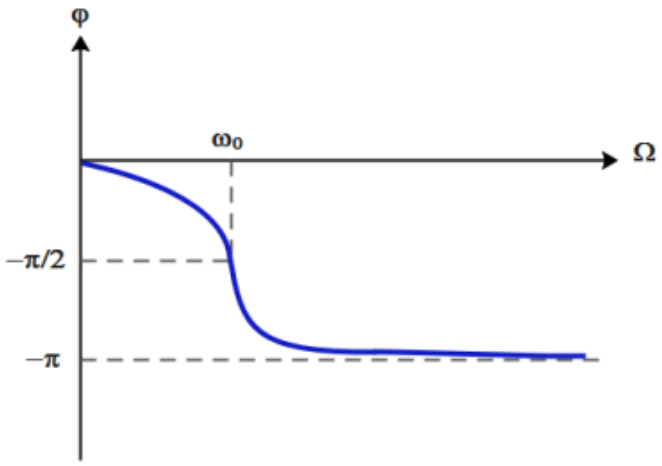


Figure 4-6. Variation de φ en fonction de Ω

Pour pouvoir diminuer l'amplitude de résonance, on essaye de diminuer la valeur du facteur de qualité Q .

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Omega_2 - \Omega_1} \tag{4-13}$$

$\Delta\Omega=\Omega_2-\Omega_1 =2\lambda$ est appelé ***la bande passante***.

Lorsque le facteur d'amortissement augmente la bande passante augmente et le facteur de qualité diminue, et par conséquent l'amplitude de vibration diminue également (figure 4-7).

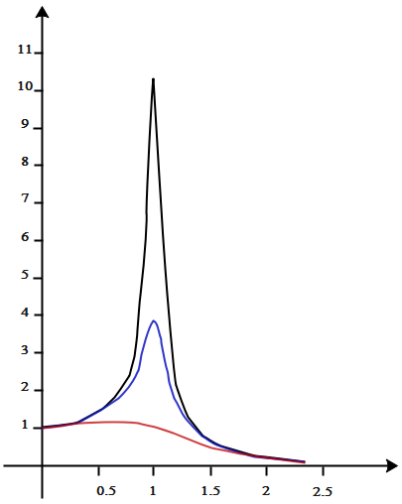


Figure 4-7. Variation de

Les pulsations Ω_1 et Ω_2 sont appelées les pulsations de coupure, pour lesquelles :

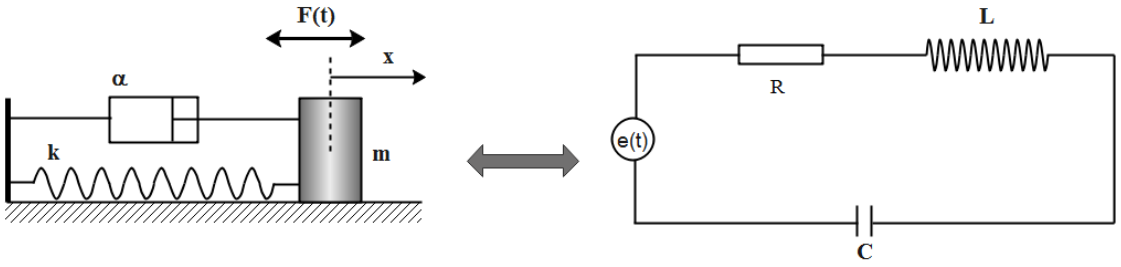
$$X_0(\Omega_1) = x_0(\Omega_2) = \frac{x_{0max}}{\sqrt{2}} \qquad (4\text{-}14)$$

4.6 Analogie électrique

Des systèmes mécaniques peuvent être représentés par des circuits électriques analogues. On constate que la relation entre le courant électrique ***i*** et la charge électrique *q* est exactement de même nature que celle qui existent entre la vitesse *v* et la position *x* d'un système mécanique :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad et \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Analogie force tension : On prend l'exemple suivant **:**



En appliquant le formalisme de lagrange:
$mx''+\alpha x'+kx=F(t)$

En appliquant la loi des mailles, on trouve:
$Lq''+Rq'+1/C\ q=e(t)$

Figure 4-8. Analogie systèmes mécaniques/systèmes électriques

Sur le plan mathématique, les deux équations différentielles sont parfaitement analogues :
Par identification, on peut facilement résumer les relations d'équivalence entre les deux systèmes dans le tableau suivant :

Système mécanique	**Système électrique**
Masse (m)	Bobine (L)
Amortisseur (α)	Résistance (R)
Ressort (k)	Condensateur (1/C)
Vitesse *v(t)*	Courant *i(t)*

4.7 Puissance fournie et puissance dissipée

- **Puissance fournie par la force extérieure**

La puissance fournie par la force extérieure peut être calculée à partir de la relation :

$$P_f(t) = F_{ext}(t).v(t) \tag{4-15}$$

F_{ext} : est la force extérieure appliquée sur le système.

v(t) : est la vitesse du point d'application de la force extérieure.

Dans le cas où :

$$v(t) = \dot{x}(t) \qquad avec \quad x(t) = x_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

La puissance instantanée fournie par la force s'écrit :

$$P_f(t) = -F_0 \Omega x_0 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t + \varphi) \tag{4-16}$$

Sa valeur moyenne est :

$$\left\langle P_f(t) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T -F_0 \Omega x_0 \cos(\Omega t)\sin(\Omega t + \varphi)dt$$

- **Puissance dissipée par l'amortisseur**

Cette puissance est donnée par la relation

$$P_\alpha(t) = \alpha v_\alpha{}^2 = \alpha \dot{x}_\alpha{}^2 \Rightarrow P_\alpha(t) = \alpha x_0^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi)$$

La puissance moyenne dissipée

$$\langle P_\alpha(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha x_0^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi) dt$$

On trouve après le calcul :

$$\langle P_\alpha(t)\rangle = \frac{1}{2}\alpha x_0^2 \Omega^2 \tag{4-17}$$

4.8 Impédance électrique et impédance mécanique

L'impédance électrique est une grandeur qui caractérise la manière dont le circuit freine le passage du courant en donnant le rapport qui existe entre la tension de la source et le courant résultant.

Lorsqu'on utilise la notation complexe du courant électrique

$$\underline{I} = I_0 e^{i\Omega t} \tag{4-18}$$

L'impédance électrique est définie par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} \qquad (ohm) \tag{4-19}$$

- **Résistance**

$$\underline{V_R} = R\underline{I} \Longrightarrow \underline{Z_R} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R \tag{4-20}$$

- **Bobine**

$$\underline{V_L} = L\frac{D\underline{I}}{dt} = i\Omega L\underline{I} \Longrightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} i\Omega L \tag{4-21}$$

- **Condensateur**

$$\underline{V_C} = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int \underline{I} di = \frac{\underline{I}}{i\Omega C} \Longrightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{1}{i\Omega C} \tag{4-22}$$

On observe clairement le déphasage entre le courant et la tension lorsqu'on utilise la notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{Z_R} = R = Re^{i0} \\ \underline{Z_L} = i\Omega L = \Omega L e^{i\pi/2} \\ \underline{Z_C} = \dfrac{1}{i\Omega C} = \dfrac{1}{\Omega C} e^{-i\pi/2} \end{cases} \tag{4-23}$$

Par analogie, on peut définir aussi l'impédance mécanique par la relation suivante :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{v}(t)} \tag{4-24}$$

- **Amortisseur**

$$\underline{Z}\alpha = \frac{F_\alpha}{v_\alpha} = \frac{\alpha v}{v} = \alpha \tag{4-25}$$

- **Ressort**

$$\underline{Z}_k = \frac{F_k}{v_\alpha} = \frac{kx}{\dot{x}} \qquad avec \quad x = x_0 e^{i\Omega t} \Leftrightarrow \dot{x} = i\Omega x_0 e^{i\Omega t}$$

$$\underline{Z}_k = \frac{kx_0 e^{i\Omega t}}{i\Omega x_0 e^{i\Omega t}} = \frac{k}{i\Omega} \tag{4-26}$$

- **Masse**

$$\underline{Z}_m = \frac{F_m}{v} = \frac{ma}{v} \qquad a = \ddot{x} = \dot{v} = i\Omega v$$

$$\underline{Z} = \frac{im\Omega v}{v} = im\Omega \tag{4-27}$$

5 Chapitre 5 : Oscillations libres à deux degrés de liberté

5.1 Introduction :

On définit un système à plusieurs degrés de libertés par un système mécanique (ou circuit électrique) qui nécessitent plusieurs coordonnées généralisées pour le décrire. pour étudier un système à deux degrés de liberté on aura besoin de deux coordonnées q_1 et q_2 .

Quelques systèmes à 2DL

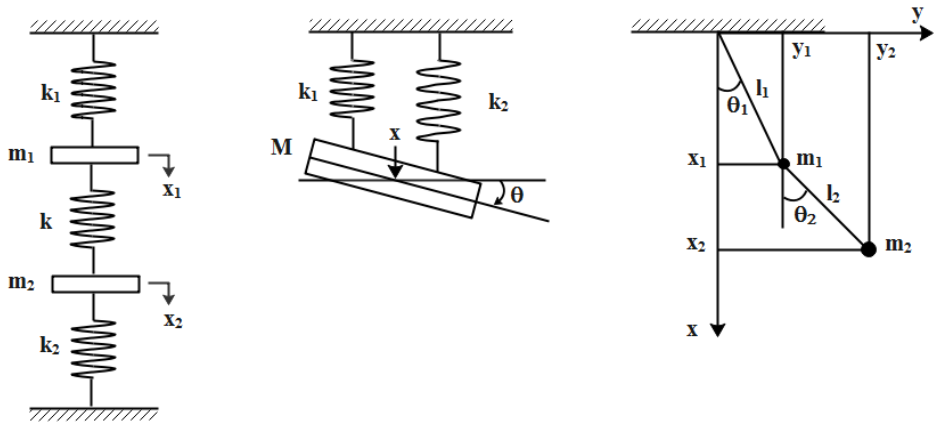


Figure 5-1. Systèmes à 2 degrés de liberté

5.2 Équations de Lagrange

Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \quad (5\text{-}1)$$

Pour les systèmes oscillatoires régis par les équations de cette forme, on cherche une solution périodique de la forme suivante :

$$\begin{cases} q_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ q_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (5\text{-}2)$$

Exemple : pendules couplés

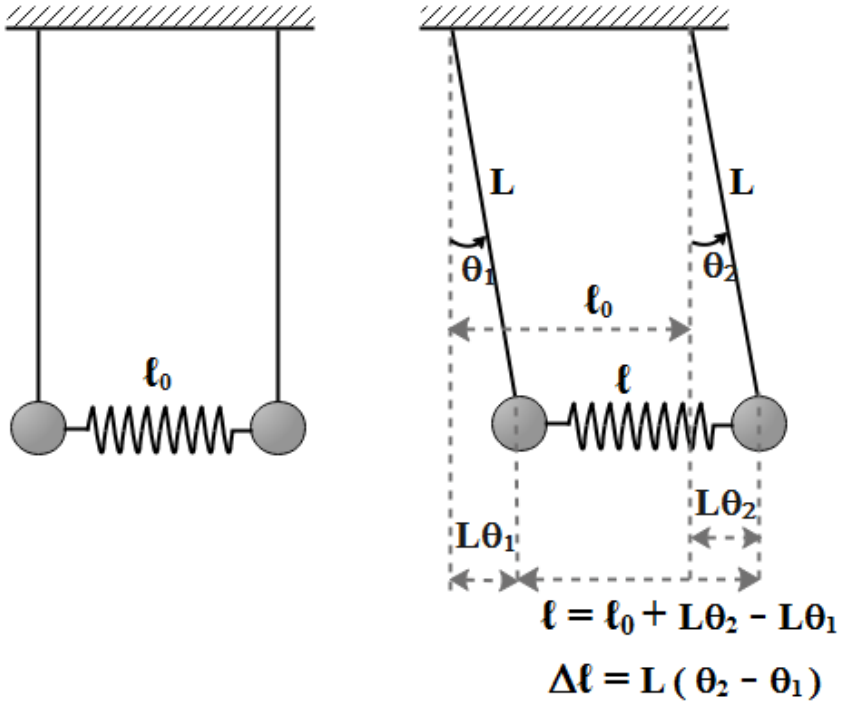


Figure 5-2. Pendules couplés

Les énergies cinétiques et potentielles s'écrivent :

$$T=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)$$

$$V=mgl(1-\cos\theta_1)+mgl(1-\cos\theta_2)+\frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2$$

Le système d'équations du mouvement s'écrit

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1+(mgl+kl^2)\theta_1-kl^2\theta_2=0 \\ -kl^2\theta_1+ml^2\ddot{\theta}_2+(mgl+kl^2)\theta_2=0 \end{cases} \qquad (*)$$

On cherche une solution de la forme $\theta_i=A_i\cos(\omega t+\varphi)$ i=1,2.

On obtient le système algébrique suivant : $\begin{cases} (mgl+kl^2-ml^2\omega^2)A_1-kl^2A_2=0 \\ -kl^2A_1+(mgl+kl^2-ml^2\omega^2)A_2=0 \end{cases}$

Ce qui constitue un système d'équations linéaires homogènes dont les inconnues sont A_1 et A_2. Ce système admet une solution non identiquement nulle seulement si le déterminant $\Delta(\omega)$ des coefficients de A_1 et A_2 est égal à zéro.

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} [k_1 + K - m_1\omega^2] & -K \\ -K & [k_2 + K - m_2\omega^2] \end{vmatrix}$$

Le déterminant $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $\Delta(\omega) = 0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit
Le déterminant de ce système est égal à :

$$(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2)^2-(\frac{k}{m})^2=(\frac{g}{l}-\omega^2)(\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}-\omega^2)=0$$

Les pulsations propres sont donc égales à : $\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}}$.

La solution générale est une combinaison linéaire des solutions :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Mode propre : ***On appelle mode propre de vibration du système couplé un mode d'oscillation pour lequel les deux pendules ont un mouvement sinusoïdal de même pulsation.***

On appelle vecteur propre associé ` a la valeur propre ω ces solutions non triviales.

On cherche le premier vecteur propre en remplaçant dans le système ω par ω_1 :
On trouve dans ce cas :$A_{11}=A_{12}$

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{11} \end{pmatrix}$$

Le premier mode propre s'écrit, alors

$$\begin{cases} \theta_1=A_{11}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) \\ \theta_2=A_{11}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) \end{cases}$$

Les deux pendules vibrent en phase.

Par la même méthode, le second vecteur propre vérifie $(\omega=\omega_2)$ est $A_{12}=-A_{22}$.

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} A_{12} \\ -A_{12} \end{pmatrix}$$

On remarque que les deux vecteurs propres sont orthogonaux.

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{11} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} A_{12} \\ -A_{12} \end{pmatrix} = 0$$

Le mode propre correspondant s'écrit

$$\begin{cases} \theta_1 = A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2 = -A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans ce cas là les deux pendules vibrent en opposition de phase.

Puisque le système d'équations différentielles est linéaire, la solution générale est la somme des deux solutions, soit :

$$\begin{cases} \theta_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \qquad (**)$$

Ceci indique que n'importe quelle solution se décompose sur la base de ces deux solutions orthogonales.

Les constantes A_{11}, A_{12}, φ_1 et φ_2 sont déterminées à partir de 4 conditions initiales.

6 Examens et solutions

UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

F.S. Département SM — **Mardi 17– 01 – 2023**
L2 Chimie — **08H30 – 10H00**

EFS 1 : VIBRATIONS, ONDES & OPTIQUE

Exercice 01 *(8 points)*

Le système représenté dans la figure 1 est constitué de deux masses, 2m et m, fixées sur une tige de mas négligeable de longueur 2ℓ.

Les masses 2m et m sont attachées à un amortisseur et un ressort de constante de raideur k, respectivemer

A l'équilibre θ =0, l'allongement du ressort Δℓ =0.

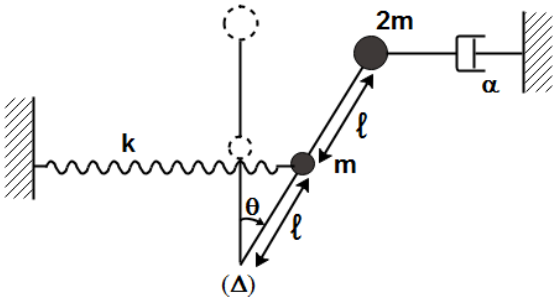


Figure 1

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Déterminer la fonction de dissipation.
3) Discuter la stabilité du système.
4) Établir l'équation du mouvement.
5) Donner la solution de l'équation du mouvement pour un équilibre instable

Exercice 02 *(7 points)*

Un disque de masse M et de rayon R, attaché à un ressort de constante de raideur K, peut osciller verticalement et sans glissement. Une masse ponctuelle m est fixée au centre du disque (Figure 2).

A l'équilibre, l'allongement du ressort est Δℓ.

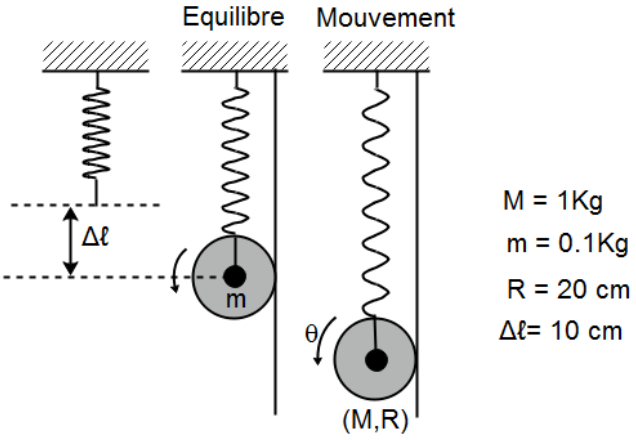


Figure 2

1) Trouver la condition d'équilibre à partir de l'énergie potentielle. En déduire la constante de raideur K du ressort.
2) Déterminer l'énergie cinétique du système.
3) Établir l'équation du mouvement.
4) Calculer la pulsation propre ω_0 du système.

Exercice 03 *(5 points)*

Le système représenté sur la figure 3 est constitué de deux pendules simples identiques de masse **m** et de longueur ℓ, fixés à un bâti fixe horizontal. Un ressort de raideur ***K***, fixé à une distance ℓ/2 du bâti, assure le couplage entre les deux pendules. À l'équilibre les deux pendules sont verticaux (le ressort n'est pas déformé; $\Delta\ell=0$).

On suppose que les masses des tiges sont négligeables, et on considèrera le cas des faibles oscillations.

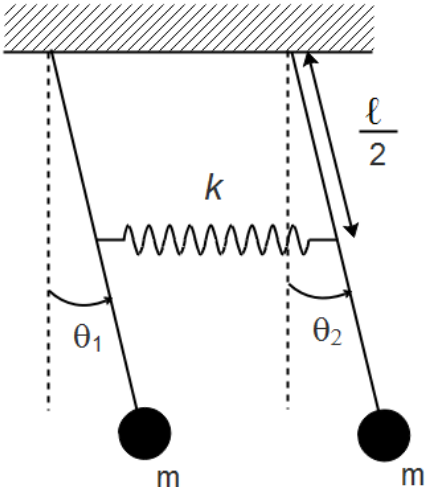


Figure 3

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Établir les équations différentielles du mouvement du système.
3) Déterminer les pulsations propres du système.

Bon courage

Solution EX02:

1) Condition d'équilibre.

$V = V_M + V_m + V_k$

$= -MgR\theta - mgR\theta + \frac{1}{2}k(R\theta + \Delta\ell)^2$

$$V = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + (kR\Delta\ell - MgR - mgR)\theta + c$$

A l'équilibre: $\frac{\partial y}{\partial \theta}|_{\theta=0} = 0$ => $kR\Delta\ell - (M-m)gR = 0$

$$k = \frac{(M-m)g}{\Delta\ell}$$

$= \frac{(1-0.1)10}{0.1} = 110\, N/m$

2) Énergie cinétique.

$T = T_M + T_m$

$= \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$

$T = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}M + m)R^2\dot{\theta}^2$

3) Equation de movement.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{dt}{d\theta} = 0$$

$$\ell = T - V$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$

=> $\left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{\theta} + k\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{k}{\frac{3}{2}M+m}\theta = 0$

4) Pulsation.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\frac{3}{2}M + m}}$$

$= \sqrt{\frac{110}{\frac{3}{2}1+0.1}} = 8.29\, rad/S$

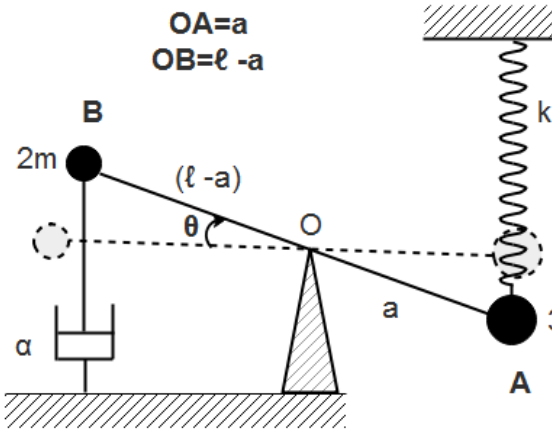
UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

F.S. Département SM **Samedi 22– 01 – 2022** **L2**
Chimie **10H00 – 11H00**

EFS 1 : VIBRATIONS, ONDES & OPTIQUE

Exercice 01 *(12 points)*

Une tige de masse négligeable et de langueur ℓ porte à ses extrémités deux masses ponctuelles $2m$ et $3m$. La masse $3m$ est reliée à un ressort de constante de raideur k, alors que la masse $2m$ est reliée à un amortisseur α. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe fixe passant par O. La position d'équilibre correspond à $\theta=0$.



1) Déterminer le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation passant par O.

2) Déterminer l'énergie cinétique et la fonction de dissipation du système.

3) Déterminer la condition d'équilibre et la condition de stabilité à partir de l'énergie potentielle. En déduire la déformation du ressort $\Delta\ell$ en fonction de m, a, ℓ et k.

4) Pour quelle valeur de a la déformation du ressort est nulle à l'équilibre.

5) Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.

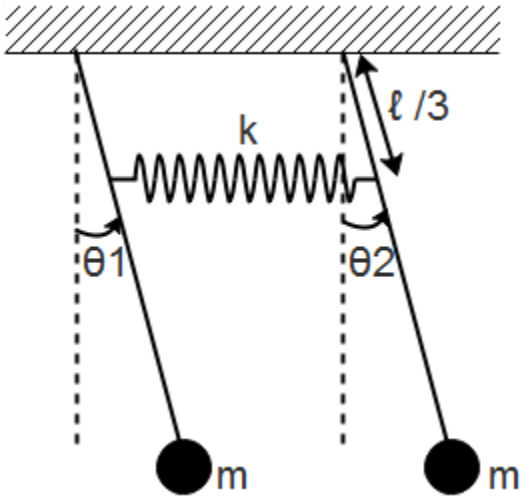
6) Établir l'équation différentielle du mouvement.

7) Donner la condition pour laquelle le système se trouve dans un régime critique. **8**) Donner l'expression générale de la solution de l'équation différentielle dans ce cas.

Exercice 02 *(8 points)*

Le système représenté sur la figure ci-dessous est constitué de deux pendules simples identiques de masse **m** et de longueur ℓ, fixés à un bâti fixe horizontal. Un ressort de raideur K, fixé à une distance $\ell/3$ du bâti, assure le couplage entre les deux pendules. À l'équilibre les deux pendules sont verticaux (le ressort n'est pas déformé; $\Delta\ell=0$).

On suppose que les masses des **tiges sont négligeables**, et on considèrera le cas des faibles oscillations.



1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Etablir les équations différentielles du mouvement du système.
3) Déterminer les pulsations propres du système.
4) Déterminer le rapport des amplitudes angulaires $\frac{B}{A}$ pour chacun des modes propres de ce système. En déduire les solutions générales $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

Bon courage

Correction de l'EFS: Physique 03

Année 2021/2022

Exercice 1(12 points)

1/ **Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation passant par O.**

$$\mathrm{I} = \mathrm{I2m} + \mathrm{I3m} = 2\mathrm{m}(\ell - a)^2 + 3m(a)^2$$

2/ Déterminer l'énergie cinétique et fonction de dissipation

$$T = T_{2m} + T_{3m} = \frac{1}{2}(2m)(\ell - a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(3m)(a)^2\dot{\theta}^2$$

$$T = T_{2m} + T_{3m} = \frac{1}{2}m[2(\ell - a)^2 + 3(a)^2]\dot{\theta}^2$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\ell - a)^2\dot{\theta}^2$$

3) Energie potentielle

$V = V_{2m} + V_{3m} + Vk = +2mg(\ell - a)sin\theta - 3mgasin\theta + \frac{1}{2}k(a\theta + \Delta\ell)^2$

Pour les faibles oscillations: $sin\theta \simeq \theta$

$$V = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 + [2mg(\ell - a) - 3mga + ka\Delta\ell]\theta + C$$

$$V = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 + [2mg\ell - 5mga + ka\Delta\ell]\theta + C$$

4) Condition d'équilibre:

$\left[\frac{\delta V}{\delta\theta}\right]_{\theta=0} = 0$===> $2mg\ell - 5mga + ka\Delta\ell = 0$===> $\Delta\ell = \frac{-2mg\ell + 5mga}{ka}$

Stabilité:

$\left[\frac{\delta^2 V}{\delta^2\theta}\right]_{\theta=0}$>0 ***condition toujours vérifiée***

5) La déformation du ressort est nulle à l'équilibre

$$\Delta\ell = 0 ===> a = \frac{2\ell}{5}$$

6) ***Expression finale de l'énergie potentielle***

$$V = \frac{1}{2}k(a\theta)^2$$

7) L'équation différentielle du mouvement:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=0$$

$$m[2(\ell-a)^2+3(a)^2]\ddot{\theta}+\ \alpha(\ell-a)^2\ \dot{\theta}+\mathrm{k}a^2\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\alpha(\ell-a)^2}{m[2(\ell-a)^2+3(a)^2]}\ \dot{\theta}+\frac{\mathrm{k}a^2}{m[2(\ell-a)^2+3(a)^2]}\theta=0$$

8) le système se trouve dans un régime critique lorsque:

$$\omega_0^2=\lambda^2\Longrightarrow\left[\frac{1}{2}\ \frac{\alpha(\ell-a)^2}{m[2(\ell-a)^2+3(a)^2]}\right]^2=\frac{\mathrm{k}a^2}{m[2(\ell-a)^2+3(a)^2]}$$

Solution:

$$\theta=(A+Bt)e^{-\lambda t}$$

Exercice 2(8 points)

1) **Les énergies cinétique et potentielle du système**

$$T=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_2^2$$

$$V=Vm+Vm+Vk=-mg\ell cos\theta_1-mg\ell cos\theta_2+\frac{1}{2}k(\frac{\ell}{3}\theta_2-\frac{\ell}{3}\theta_1)^2$$

$$\cos(\theta_1)\approx 1-\frac{\theta_1^2}{2}\qquad \cos(\theta_2)\approx 1-\frac{\theta_2^2}{2}$$

$$V=\frac{1}{2}mg\ell{\theta_1}^2+\frac{1}{2}mg\ell{\theta_2}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{\ell}{3}\right)^2(\theta_2-\theta_1)^2$$

2) **Équation du mouvement**

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\delta L}{\delta\dot{\theta}_1}\right)-\dfrac{\delta L}{\delta\theta_1}=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\delta L}{\delta\dot{\theta}_2}\right)-\dfrac{\delta L}{\delta\theta_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ell^2\ddot{\theta}_1+\ddot{m}g\ell\theta_1-k\left(\dfrac{\ell}{3}\right)^2(\theta_2-\theta_1)&=0\\ m\ell^2\ddot{\theta}_2+\ddot{m}g\ell\theta_2+k\left(\dfrac{\ell}{3}\right)^2(\theta_2-\theta_1)&=0\end{cases}$$

3) **Pulsations propres:**

$$\begin{cases}\theta_1=Acos(\omega\ \ +\varphi)\\ \theta_2=Bcos(\omega\ \ +\varphi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(-m\ell^2\omega^2+mg\ell+k\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\right)A-k\left(\frac{\ell}{3}\right)^2B=0\\ -\left(k\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\right)A+\left(-m\ell^2\omega^2+mg\ell+k\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\right)B=0\end{cases}$$

$$\Delta=\left(-m\ell^2\omega^2+mg\ell+k\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\right)^2-(k\left(\frac{\ell}{3}\right)^2)^2=(-\!-m\ell^2\omega^2+mg\ell)(\ -m\ell^2\omega^2+mg\ell+2k\left(\frac{\ell}{3}\right)^2)=0$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell} + \dfrac{2k}{9m}} \end{cases}$$

1) Rapport des amplitudes angulaires

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} ====> \frac{B}{A} = 1 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{9m}} ====> \frac{B}{A} = -1 \end{cases}$$

Département des sciences de la matière ***2ème année Chimie-SM***

Faculté des sciences ***Module - Physique 03***

Université de Médéa ***Mardi le 29/01/2019***

de 11:00 à 12:30

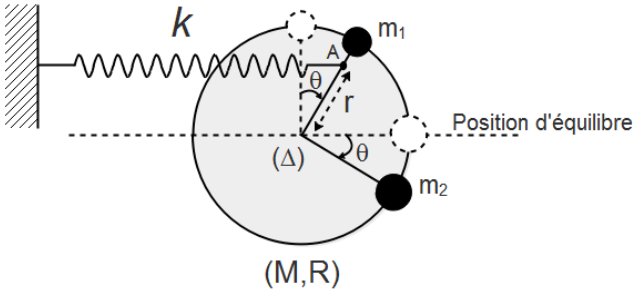
EPREUVE DE FIN DE SEMESTRE 1

Exercice 01 *(7 points)*

Le système ci-contre est constitué d'un disque de masse ***M=6 kg*** et de rayon ***R=40 cm,*** et de deux masses ponctuelles ***m_1=1 kg et m_2 =2 kg*** fixées à sa périphérie.

Un ressort de constante de raideur ***k=600*** *N/m* fixé à un pâti fixe, est accroché au point A distant de ***r=30 cm*** de l'axe de rotation (Δ).

Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour de l'axe de rotation (Δ). À l'équilibre ***θ=0***, le ressort est déformé par Δℓ. On donne ***g=10 m/s^2***

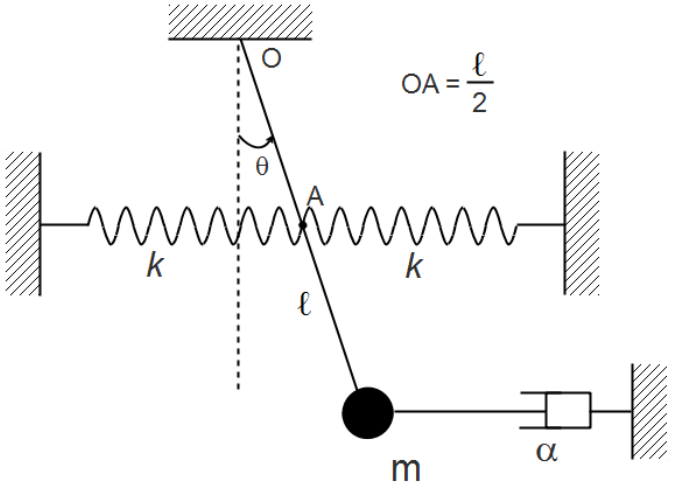


1) Déterminer la condition d'équilibre et vérifier la condition de stabilité. Puis calculer la déformation du ressort Δℓ à l'équilibre.
2) Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.
3) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.
4) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
5) Calculer la pulsation propre du système.

Exercice 02 *(6oints)*

Un système mécanique amorti, oscillant autour d'un axe passant par *O*, est constitué par une tige de longueur ℓ de **masse négligeable** reliée par deux ressorts identiques de constante de raideur *K* au point *A*, sachant que *OA*= ℓ/2. Une masse ponctuelle ***m*** est fixée à l'extrémité de la tige.

A l'équilibre $\theta=0$ la tige est verticale (les ressorts ne sont pas déformés)



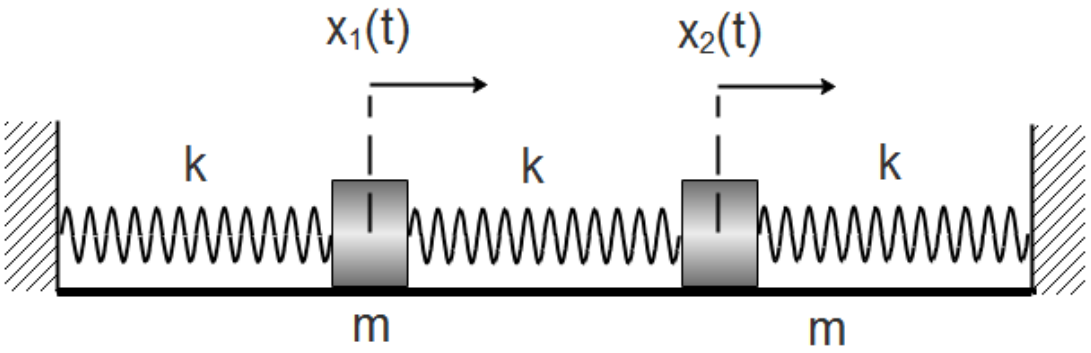
1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation.
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement pour les faibles oscillations. En déduire la pulsation propre du système.
3) Résoudre dans le cas des faibles amortissements l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes :

$$\theta(0) = 0 \ \ et \ \ \dot{\theta}(0) = -2\, rad$$

Exercice 03*(7 points)*

Deux oscillateurs identiques de masse ***m=1 kg*** et de constante de raideur ***K=10 N/m*** sont couplés par un ressort de même constante de raideur ***K=10 N/m***.

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentent les déplacements des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre (figure).



1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Etablir les équations différentielles du mouvement du système.
3) Calculer les pulsations propres du système.
4) Déterminer le rapport des amplitudes $\frac{B}{A}$ pour chacun des modes propres. En déduire les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Bon courage

Département SM ***Université de Médéa***

Année 2018/ 2019

SOLUTION EFS PHYS 03

Exercice 1(7points)

1) Énergie potentielle

$$V = V_{m1} + V_{m2} + \underbrace{V_M}_{0} + V_K = m_1 gR\cos(\theta) - m_2 gR\sin(\theta) + \frac{1}{2}k(r\theta + \Delta\ell)^2$$

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \qquad \sin(\theta) \approx \theta$$

$$V = \frac{1}{2}\left[kr^2 - m_1 gR\right]\theta^2 + \left[+kr\Delta\ell - m_2 gR\right]\theta + C$$

- **Condition d'équilibre :**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \left[kr\Delta\ell - m_2 gR\right] = 0$$

- **Condition de stabilité**

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right] > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = kr^2 - m_1 gR = 600 \times 0.3^2 - 1 \times 10 \times 0.4 = 50 > 0$$

L'équilibre toujours stable

- **L'allongement de ressort :** $\Delta\ell = \frac{m_2 gR}{kr}$ $\quad A.N \quad$ $\Delta\ell = \frac{2 \times 10 \times 0.4}{600 \times 0.3} = 0.044m = 4.4cm$

2) Expression simplifiée de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}\left[kr^2 - m_1 gR\right]\theta^2 + C$$

3) Énergie cinétique

$$T = T_{m1} + T_{m2} + T_M = \frac{1}{2}m_1 R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right]R^2\dot{\theta}^2$$

4) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=0 \Rightarrow \ddot{\theta}+\left(\frac{kr^2-m_1gR}{(m_1+m_2+\frac{1}{2}M)\dot{R}^2}\right)\theta=0$$

La pulsation propre

$$\omega_0=\sqrt{\frac{kr^2-m_1gR}{(m_1+m_2+\frac{1}{2}M)\dot{R}^2}} \qquad A.N \quad \omega_0=\sqrt{\frac{600\times 0.3^2-1\times 10\times 0.4}{(1+2+\frac{1}{2}\times 6)\times \dot{0.4}^2}}=7.21 rad/s$$

Exercice 2(6points)

1) Énergies cinétique, potentielle et fonction de dissipation

$$T=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$V=V_m+V_k+V_k=-mg\ell\cos(\theta)+\frac{1}{2}k\left[\frac{\ell}{2}\theta\right]^2+\frac{1}{2}k\left[\frac{\ell}{2}\theta\right]^2$$

$$V=-mg\ell(1-\frac{\theta^2}{2})+\frac{1}{2}k\left[\frac{\ell^2}{2}\right]\theta^2=\frac{1}{2}\left[mg\ell+\frac{k\ell^2}{2}\right]\theta^2+C$$

$$D=\frac{1}{2}\alpha\ell^2\dot{\theta}^2$$

2) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=0 \Rightarrow \ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\alpha\ell^2}{m\ell^2}}_{2\lambda}\dot{\theta}+\underbrace{\frac{mg\ell+\frac{k\ell^2}{2}}{m\ell^2}}_{\omega_0^2}\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{2\lambda}\dot{\theta}+\underbrace{\left(+\frac{2mg+k\ell}{2m\ell}\right)}_{\omega_0^2}\theta=0$$

3) Solution

$$\theta(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\omega^{\backslash}t+\varphi) \qquad \omega^{\backslash}=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$$

4) Conditions initiales

$$\begin{cases} \theta(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi) \\ \dot{\theta}(t)=-\lambda Ae^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi)-\omega' Ae^{-\lambda t}\sin(\omega' t+\varphi) \end{cases} \text{ à } t=0 \Rightarrow \begin{cases} \theta(0)=0=A\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\pi/2 \vee -\pi/2 \\ \dot{\theta}(0)=-2=-\lambda A\cos\varphi-\omega' A\sin\varphi \end{cases}$$

$$A=\frac{2}{\omega'} \Rightarrow \qquad \theta(t)=\frac{2}{\omega'}e^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\frac{\pi}{2})$$

Exercice 3(7points)

2) Énergies cinétiques et potentielle

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$V=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}kx_2^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$$

3) Equations du mouvement

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right)=0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1+kx_1-k(x_2-x_1)=0 \\ m\ddot{x}_2+kx_2+k(x_2-x_1)=0 \end{cases}$$

4) Pulsations propres

$$\begin{cases} \theta_1=A\cos(\omega t+\varphi) \\ \theta_2=B\cos(\omega t+\varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m\omega^2+2k)A-kB=0 \\ -kA+(-m\omega^2+2k)B=0 \end{cases}$$

$$\Delta(\omega)=\left[-m\omega^2+2k\right]^2-\left[k\right]^2=\left(-m\omega^2+2k-k\right)\left(-m\omega^2+2k+k\right)=0$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}=3.16 rad/s \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}=5.47 rad/s$$

5) Rapport des amplitudes angulaires

$$\begin{cases} \omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \dfrac{B}{A}=1 \\ \omega_2=\sqrt{\dfrac{3k}{m}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \dfrac{B}{A}=-1 \end{cases}$$

$$Solutions: \begin{cases} \theta_1(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ \theta_2(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-B\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{cases}$$

Département du tronc commun en technologie
Faculté de technologie
Université de Médéa

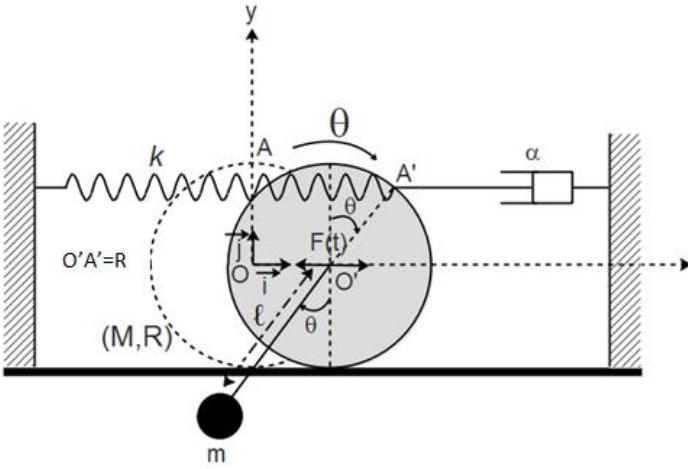
2ème année LMD-ST
Module - Physique 03
Dimanche le 20/01/2019
de 12h:45 à 14h:15

EPREUVE DE FIN DE SEMESTRE 1

Exercice 01 *(8 points)*

Un disque de masse ***M*** et de rayon ***R***, représenté sur la figure ci-contre**,** peut rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe. Le disque est relié au point (A') par un ressort de constante de raideur *k* et par un amortisseur de coefficient de frottement α.

Une tige rigide de longueur $\boldsymbol{\ell}$ de masse négligeable est solidaire du disque et portant à son extrémité une masse ponctuelle ***m***.



À l'équilibre la tige est verticale (θ=0) et le ressort n'est pas déformé ***(Δℓ=0)***. On considèrera le régime des faibles oscillations.

I. Oscillations libres amorties F(t) =0

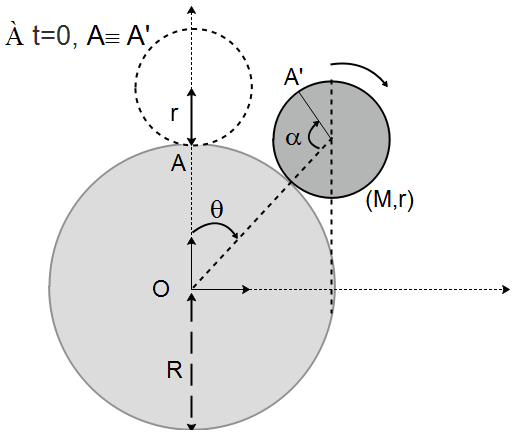
1) Ecrire, dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, les composantes des vecteurs positions $\overrightarrow{r_M}$ et $\overrightarrow{r_m}$ associés au centre de gravité du disque et à la masse ponctuelle m, respectivement.
2) Déduire les composantes des vitesses $\overrightarrow{v_M}$ et $\overrightarrow{v_m}$.
3) Déterminer l'énergie cinétique du système, en utilisant dans ce cas l'approximation des faibles oscillations: $cos\boldsymbol{\theta} \approx 1$.
4) Déterminer l'énergie potentielle et la fonction de dissipation du système.
5) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

II. Oscillations forcées F(t)=$F_0 cos(\Omega t)$

Dans cette partie, une force F(t)=$F_0 cos(\Omega t)$ est appliquée horizontalement au centre de gravité du disque.

6) Déterminer la force généralisée.
7) Déduire l'équation différentielle du mouvement.
8) Quelle est la pulsation pour que le module de l'amplitude soit maximum.

Exercice 02 *(5 points)*

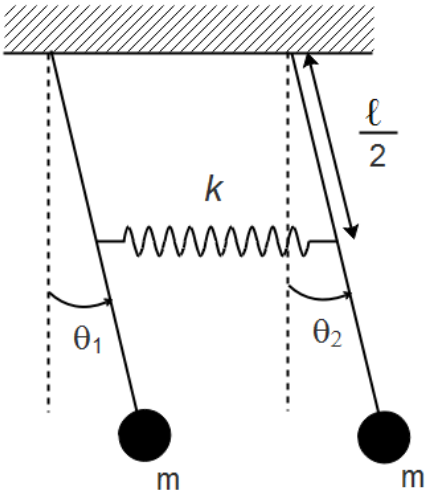


Un disque de rayon ***r*** et de masse **M** est situé initialement au sommet d'une sphère immobile de rayon **R**. Le disque peut se déplacer de sorte qu'il roule sans glisser le long de la sphère.

On considère le cas où le disque et la sphère sont en contact.

1) Donner la condition de roulement sans glissement du disque.
2) Déterminer l'énergie potentielle en fonction de $\boldsymbol{\theta(t)}$.
3) Déterminer l'énergie cinétique du système en fonction de la vitesse généralisée $\dot{\theta}(t)$. En déduire le Lagrangien du système.
4) Ecrire l'équation du mouvement du disque.

Exercice 03 *(7 points)*



Le système représenté sur la figure ci-contre est constitué de deux pendules simples identiques de masse **m** et de longueur ℓ, fixés à un bâti fixe horizontal. Un ressort de raideur ***K***, fixé à une distance ℓ/2 du bâti, assure le couplage entre les deux pendules.

À l'équilibre les deux pendules sont verticaux (le ressort n'est pas déformé; $\Delta\ell=0$).

On suppose que les masses des tiges sont négligeables, et on considèrera le cas des faibles oscillations.

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Etablir les équations différentielles du mouvement du système.
3) Déterminer les pulsations propres du système.
4) Déterminer le rapport des amplitudes angulaires $\frac{B}{A}$ pour chacun des modes propres de ce système. En déduire les solutions générales $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

Département SM ***Université de Médéa***

Année 2018/ 2019

SOLUTION – EFS PHYS 03 2019

Exercice 1 (8 points)

Partie 1

1) Les composantes des vecteurs positions :

$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{r_M} = R\theta\vec{i}$ $\qquad$ $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{r_m} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'm}$

$$\overrightarrow{Om} = \begin{cases} R\theta - \ell\sin(\theta) \\ -\ell\cos(\theta) \end{cases}$$

2) Les composantes des vitesses

$$\overrightarrow{v_M} = \begin{cases} R\dot{\theta} \\ 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{v_m} = \begin{cases} R\dot{\theta} - \ell\dot{\theta}\cos(\theta) \\ \ell\dot{\theta}\sin(\theta) \end{cases}$$

3) Energie cinétique

$$T = \underbrace{T_M}_{Trot+Ttr} + T_m = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2{}_m = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(R\dot{\theta} - \ell\dot{\theta}\cos(\theta)\right)^2 + \left(\ell\dot{\theta}\sin(\theta)\right)^2\right]$$

$$T = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\theta}^2 + \left(\ell\dot{\theta}\right)^2\underbrace{\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)}_{1} - 2R\ell\dot{\theta}^2\underbrace{\cos(\theta)}_{1}\right]$$

$$T = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[R^2 + \ell^2 - 2R\ell\right]\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[R - \ell\right]^2\dot{\theta}^2$$

4) Energie potentielle

$$V = V_m + V_k = -mg\ell\cos(\theta) + \frac{1}{2}k(x_A)^2 = -mg\ell(1 - \frac{\theta^2}{2}) + \frac{1}{2}k(2R\theta)^2$$

$$V = \frac{1}{2}\left[mg\ell + 4kR^2\right]\theta^2 + C$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_A^2 = \frac{1}{2}\alpha\left[2R\dot{\theta}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[4\alpha R^2\right]\dot{\theta}^2$$

5) **L'équation différentielle du mouvement.**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=0\Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{4\alpha R^2}{\frac{3}{2}MR^2+m\left[R-\ell\right]^2}\dot{\theta}+\left(\frac{mg\ell+4kR^2}{\frac{3}{2}MR^2+m\left[R-\ell\right]^2}\right)\theta=0$$

Partie 2.

6) Force généralisée

$$F_\theta(t)=\overrightarrow{F(t)}\frac{d\vec{r}_F}{d\theta}=F_0\cos(\Omega t)\vec{i}\frac{d(R\theta\vec{i})}{d\theta}=F_0R\cos(\Omega t)$$

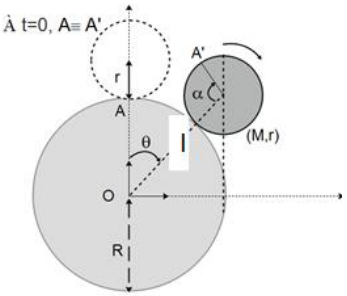
7) Equation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=F_\theta(t)\Rightarrow \ddot{\theta}+\underbrace{\frac{4\alpha R^2}{\frac{3}{2}MR^2+m\left[R-\ell\right]^2}}_{2\lambda}\dot{\theta}+\underbrace{\left(\frac{mg\ell+4kR^2}{\frac{3}{2}MR^2+m\left[R-\ell\right]^2}\right)}_{\omega_0^2}\theta=\frac{F_0R}{\frac{3}{2}MR^2+m\left[R-\ell\right]^2}\cos(\Omega t)$$

8) Pulsation de résonance

$$\Omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}\ avec\quad \omega_0^2>2\lambda^2$$

Exercice 2 (5 points)



1) La condition de roulement sans glissement :

$$\widehat{AI}=\widehat{IA'}\Rightarrow R\theta=r\alpha$$

2) Energie potentielle

$$V=mg(R+r)\cos(\theta)$$

3) Energie cinétique

$$T=T_{ran}+T_{rot}=\frac{1}{2}MV_{CG}{}^2+\frac{1}{2}I_{/CG}(\dot{\alpha}+\dot{\theta})^2\ avec\quad \dot{\alpha}=\frac{R}{r}\dot{\theta}$$

$$T=T_{ran}+T_{rot}=\frac{1}{2}M\left[(R+r)\dot{\theta}\right]^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}Mr^2)(\frac{R}{r}\dot{\theta}+\dot{\theta})^2=\frac{3}{4}M(R+r)^2\dot{\theta}^2$$

- **Le Lagrangien**

$$L=T-V=\frac{3}{4}M(R+r)^2\dot{\theta}^2-mg(R+r)\cos(\theta)$$

4) Equation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=0 \Rightarrow \ddot{\theta}-\frac{2g}{3(R+r)}\sin(\theta)=0$$

Exercice 3 (7 points)

1) Énergies cinétiques et potentielle

$$T=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_2^2$$

$$V=-mg\ell\cos(\theta_1)-mg\ell\cos(\theta_2)+\frac{1}{2}K\left(\frac{\ell}{2}\right)^2(\theta_2-\theta_1)^2 \qquad \cos(\theta_1)\approx 1-\frac{\theta_1^2}{2} \qquad \cos(\theta_2)\approx 1-\frac{\theta_2^2}{2}$$

$$V=\frac{1}{2}mg\ell\theta_1^2+\frac{1}{2}mg\ell\theta_2^2++\frac{1}{2}K\left(\frac{\ell}{2}\right)^2(\theta_2-\theta_1)^2+C$$

2) Equations du mouvement

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1}\right)=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\ell^2\ddot{\theta}_1+mg\ell\theta_1-K\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2(\theta_2-\theta_1)=0\\ m\ell^2\ddot{\theta}_2+mg\ell\theta_2+K\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2(\theta_2-\theta_1)=0\end{cases}$$

3) Pulsations propres

$$\begin{cases}\theta_1=A\cos(\omega t+\varphi)\\ \theta_2=B\cos(\omega t+\varphi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-m\ell^2\omega^2+mg\ell+K\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2)A-K\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2B=0.....(1)\\ -K\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2A+(-m\ell^2\omega^2+mg\ell+K\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2)B=0.....(2)\end{cases}$$

$$\Delta(\omega)=\left[-m\ell^2\omega^2+mg\ell+K\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]^2-\left[K\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]^2=\left(-m\ell^2\omega^2+mg\ell+2K\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\left(-m\ell^2\omega^2+mg\ell\right)=0$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{\ell}+2\frac{K\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{m\ell^2}}=\sqrt{\frac{g}{\ell}+\frac{K}{2m}}$$

4) Rapport des amplitudes angulaires

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \dfrac{B}{A} = 1 \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell} + \dfrac{K}{2m}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \dfrac{B}{A} = -1 \end{cases}$$

$$Solutions : \begin{cases} \theta_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Département du tronc commun en technologie ***2ième année LMD-ST***

Faculté de technologie ***Module - Physique 03***

Université de Médéa ***Lundi le 08/01/2018***

de 12h:45 à 14h:15

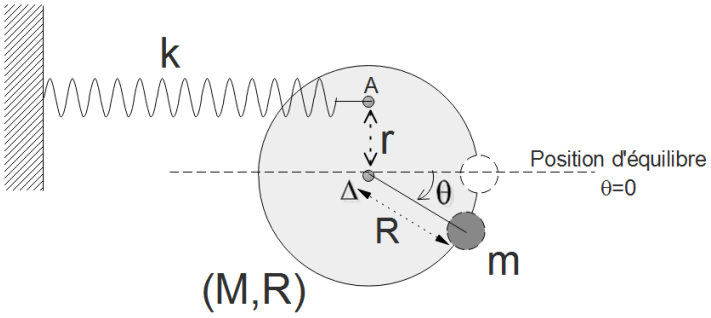
EPREUVE DE FIN DE SEMESTRE 1

Exercice 01 *(7points)*

Le système ci-contre est constitué d'un disque de masse ***M=5 kg*** et de rayon ***R=40 cm,*** et une masse ponctuelle ***m=1 kg,*** fixée à sa périphérie.

Un ressort de constante de raideur ***K=600 N/m*** fixé à un pâti fixe, est accroché au point A distant de ***r=20 cm*** de l'axe de rotation (Δ).

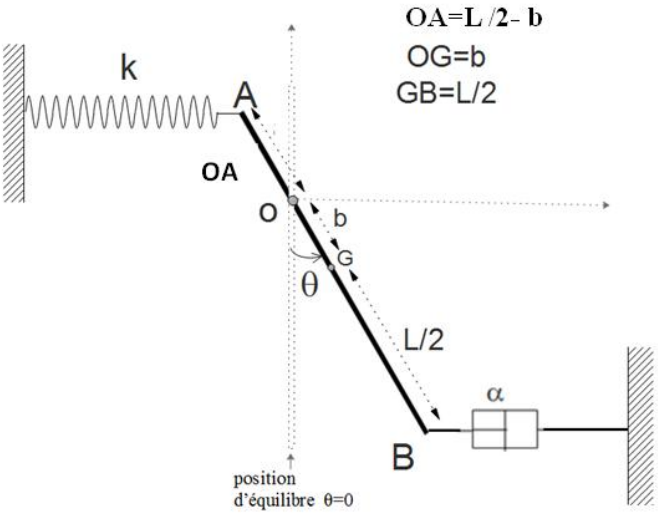
Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour de l'axe de rotation (Δ). À l'équilibre ***θ=0***, le ressort est déformé par Δℓ. On donne ***g=10 m/s^2.***



1) Déterminer la condition d'équilibre et vérifier la condition de stabilité. Puis calculer la déformation du ressort Δℓ à l'équilibre.
2) Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.
3) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.
4) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
5) Calculer la pulsation propre du système.

Exercice 02 *(7 points)*

Le système ci-contre est constitué d'une tige homogène de masse M et de langueur **L.** Un ressort de constante de raideur *K* et un amortisseur de coefficient de frottement **α** sont reliés à la tige aux points A et B, respectivement. Le système peut osciller (faibles oscillations) autour d'un axe fixe passant par le point O distant de OG=b, où le point G est le centre de gravité de la tige. À la position d'équilibre θ=0, le ressort n'est pas déformé; Δℓ=0.



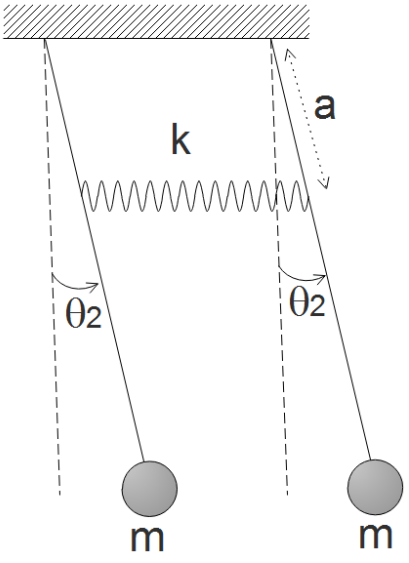
1) Déterminer le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation qui passe par le point O.
2) Déterminer les énergies cinétique et potentielle, ainsi que la fonction de dissipation du système.
3) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
4) Donner la solution de l'équation différentielle pour un mouvement oscillatoire.
5) Retrouver la solution de l'équation différentielle pour les conditions initiales:

$$\text{à } t=0 \Rightarrow \begin{cases} \theta(0)=0 \\ \dot{\theta}(0)=-4\text{rad/s} \end{cases}$$

Exercice 03 *(6 points)*

Le système représenté sur la figure ci-contre est constitué de deux pendules simples identiques de masse **m** et de longueur ℓ, fixés à un bâti fixe horizontal. Un ressort de raideur ***K***, fixé à une distance **a** du bâti assure le couplage entre les deux pendules. A l'équilibre les deux pendules sont verticaux (le ressort n'est pas déformé; Δℓ=0).

On suppose que les masses des tiges sont négligeables, et on se limite dans le cas des faibles oscillations.



1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Etablir les équations différentielles du mouvement du système.
3) Déterminer les pulsations propres du système en fonction de :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad et \quad \Omega = \sqrt{\frac{Ka^2}{m\ell^2}}$$

4) Déterminer le rapport des amplitudes angulaires $\frac{B}{A}$ pour chacun des modes propres de ce système. En déduire les solutions générales $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

Bon courage

Département du tronc commun en technologie ***Université de Médéa***

Année 2017/ 2018

SOLUTION EFS PHYS 03

Exercice 1(7points)

1. Condition d'équilibre

- Energie potentielle :

$$V = \underbrace{V_M}_{0} + V_m + V_K = -mgR\sin(\theta) + \frac{1}{2}k(r\theta + \Delta\ell)^2 \qquad \sin(\theta) \approx \theta$$

$$V = \frac{1}{2}kr^2\theta^2 + \left[kr\Delta\ell - mgR\right]\theta + C$$

- **Condition d'équilibre :**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \left[kr\Delta\ell - mgR\right] = 0$$

- **Condition de stabilité**

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right] = kr^2 > 0 \Rightarrow \text{ Equilibre toujours stable}$$

- Déformation du ressort

$$\Delta\ell = \frac{mgR}{kr} \qquad A.N \quad \Delta\ell = \frac{1\times 10\times 0.4}{600\times 0.2} = 0.033m$$

2) Expression simplifiée de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}kr^2\theta^2 + C$$

3) Énergie cinétique

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta^2} + \frac{1}{2}mR^2\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right]\dot{\theta}^2$$

4) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{kr^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}\right)\theta = 0$$

5) Pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kr^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}} \qquad A.N \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{600 \times 0.2^2}{\frac{1}{2} \times 5 \times 0.4^2 + 1 \times 0.4^2}} = 6.54\, rad/s$$

Exercice 2(8points)

1) Moment d'inertie de la tige

$$I_{/O} = I_{/G} + Mb^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mb^2$$

2) Énergies cinétique, potentielle et fonction de dissipation

$$T = \frac{1}{2}I_{/O}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}ML^2 + Mb^2\right]\dot{\theta}^2$$

$$V = V_M + V_K = -Mgh_G + \frac{1}{2}k(OA \times \theta)^2 = -Mgb\cos(\theta) + \frac{1}{2}k(\frac{L}{2} - b)^2\theta^2$$

$$V = -Mgb(1 - \frac{\theta^2}{2}) + \frac{1}{2}k(\frac{L}{2} - b)^2\theta^2$$

$$V = \frac{1}{2}\left[Mgb + k(\frac{L}{2} - b)^2\right]\theta^2 + C$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{L}{2} + b\right)^2\dot{\theta}^2$$

3) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha\left(\frac{L}{2} + b\right)^2}{\frac{1}{12}ML^2 + Mb^2}}_{2\lambda}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{Mgb + k(\frac{L}{2} - b)^2}{\frac{1}{12}ML^2 + Mb^2}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

4) Solution

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi) \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

5) Conditions initiales

$$\begin{cases} \theta(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi) \\ \dot{\theta}(t)=-\lambda Ae^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi)-\omega' Ae^{-\lambda t}\sin(\omega' t+\varphi) \end{cases} \text{ à } t=0 \Rightarrow \begin{cases} \theta(0)=0=A\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\pi/2 \vee -\pi/2 \\ \dot{\theta}(0)=-4=-\lambda A\cos\varphi-\omega' A\sin\varphi \end{cases}$$

$$A=\frac{4}{\omega'} \Rightarrow \qquad \theta(t)=\frac{4}{\omega'}e^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\frac{\pi}{2})$$

Exercice 3(6points)

1) Énergies cinétiques et potentielle

$$T=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_2^2$$

$$V=-mg\ell\cos(\theta_1)-mg\ell\cos(\theta_2)+\frac{1}{2}K\,a^2(\theta_2-\theta_1)^2 \qquad \cos(\theta_1)\approx 1-\frac{\theta_1^2}{2} \qquad \cos(\theta_2)\approx 1-\frac{\theta_2^2}{2}$$

$$V=\frac{1}{2}mg\ell\theta_1^2+\frac{1}{2}mg\ell\theta_2^2++\frac{1}{2}Ka^2(\theta_2-\theta_1)^2+C$$

2) Equations du mouvement

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta_1}\right)=0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta_2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ell^2\ddot{\theta}_1+mg\ell\theta_1-Ka^2(\theta_2-\theta_1)=0 \\ m\ell^2\ddot{\theta}_2+mg\ell\theta_2+Ka^2(\theta_2-\theta_1)=0 \end{cases}$$

3) Pulsations propres

$$\begin{cases} \theta_1=A\cos(\omega t+\varphi) \\ \theta_2=B\cos(\omega t+\varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m\ell^2\omega^2+mg\ell+Ka^2)A-Ka^2B=0.....(1) \\ -Ka^2A+(-m\ell^2\omega^2+mg\ell+Ka^2)B=0.....(2) \end{cases}$$

$$\Delta(\omega)=\left[-m\ell^2\omega^2+mg\ell+Ka^2\right]^2-\left[Ka^2\right]^2=\left(-m\ell^2\omega^2+mg\ell+2Ka^2\right)\left(-m\ell^2\omega^2+mg\ell\right)=0$$

$$\omega_1=\omega_0=\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{\ell}+2\frac{Ka^2}{m\ell^2}}=\sqrt{\omega_0^2+2\Omega^2}$$

4) Rapport des amplitudes angulaires

$$\begin{cases} \omega_1=\sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \frac{B}{A}=1 \\ \omega_2=\omega_2=\sqrt{\frac{g}{\ell}+2\frac{Ka^2}{m\ell^2}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \frac{B}{A}=-1 \end{cases}$$

$$Solutions: \begin{cases} \theta_1(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ \theta_2(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-B\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{cases}$$

Département du tronc commun en technologie — ***2ième année LMD-ST***

Faculté de technologie — ***Module - Physique 03***

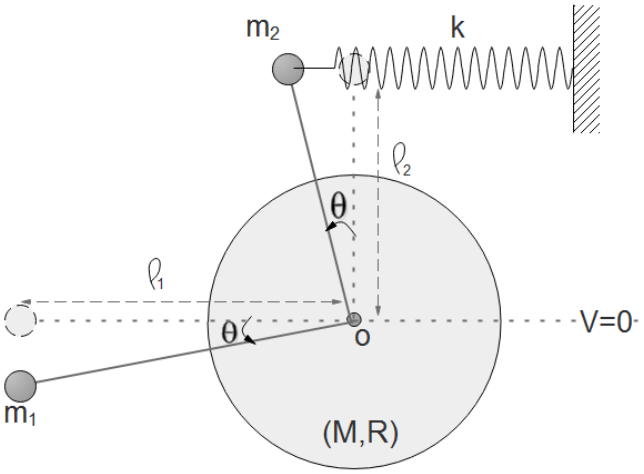
Université de Médéa — ***Mercredi le 04/01/2017***

de 12h:45 à 14h:15

EPREUVE DE FIN DE SEMESTRE 1.

Exercice 01 *(6 points)*

Le système ci-contre est constitué d'un disque de masse ***M*** et de rayon ***R*** et deux tiges de langueurs ℓ_1 et ℓ_2 perpendiculaires et de masses négligeables portant à leurs extrémités deux masses ponctuelles m_1 et m_2 respectivement. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe fixe passant par O. Un ressort de constante de raideur ***k*** est attaché à la masse m_2. À l'équilibre $\theta=0$, le ressort est déformé par $\Delta\ell$.

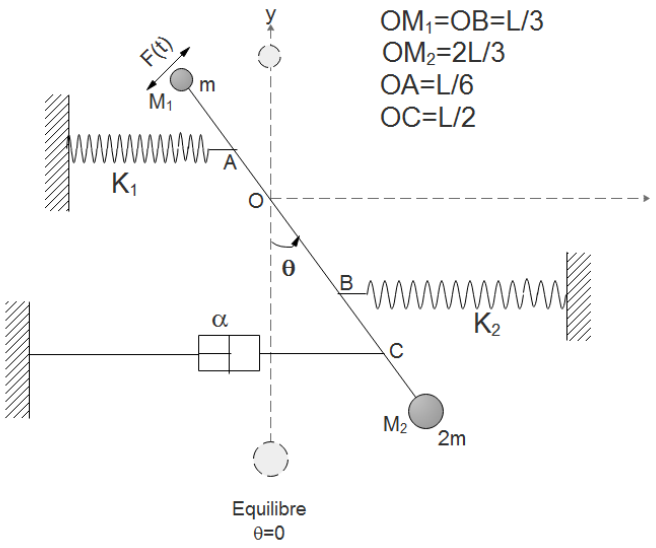


1) Déterminer la condition d'équilibre et la condition de stabilité à partir de l'énergie potentielle.
2) Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.
3) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.
4) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 02 *(8 points)*

Le système ci-contre est constitué d'une tige de masse négligeable et de langueur **L** portant à ses extrémités deux masses ponctuelles $m_1=m$ et $m_2=2m$. Deux ressorts de constantes de raideur K_1 et K_2 et un amortisseur de coefficient de frottement α sont reliés à la tige aux points A, B et C respectivement.

Le système peut osciller (faibles oscillations) autour d'un axe fixe passant par le point O. À la position d'équilibre $\theta=0$, les deux ressorts ne sont pas déformés; $\Delta\ell_1=\Delta\ell_2=0$.



1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle, ainsi que la fonction de dissipation.
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
3) Quelle est la condition imposée à α pour avoir un mouvement oscillatoire. Donner dans ce cas la solution de l'équation différentielle.
4) Retrouver la solution de l'équation différentielle pour les conditions initiales:

$$\text{à } t=0 \Rightarrow \begin{cases} \theta(0)=0 \\ \dot{\theta}(0)=-4\text{rad/s} \end{cases}$$

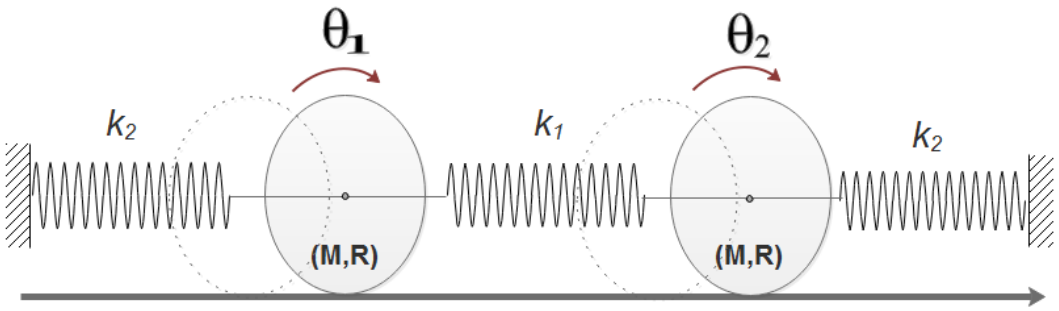
II. Oscillations forcées $F(t)=F_0 cos(\Omega t)$

On applique à la masse $m_1=m$ une force sinusoïdale $F=F_0 cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige.

1) Déterminer la force généralisée.
2) Déduire l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 03 *(6 points)*

Le système représenté sur la figure ci-dessous est constitué de deux disques homogènes et identiques de masse M et de rayon R couplés par un ressort de constante de raideur k_1. Les centres de gravité des disques sont également reliés à deux bâtis fixes par l'intermédiaire de deux ressorts identiques de constante de raideur k_2. À l'équilibre les trois ressorts ne sont pas déformés.



On suppose que les deux disques peuvent rouler sans glisser sur un plan horizontal et on néglige les forces de frottement.

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Etablir les équations différentielles du mouvement du système.
3) Déterminer les pulsations propres du système.
4) Déterminer le rapport des amplitudes angulaires $\frac{B}{A}$ pour chacun des modes propres de ce système. En déduire les solutions générales $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

Bon courage

Département du tronc commun en technologie ***Université de Médéa***

Année 2016/ 2017

SOLUTION EFS PHYS 03

Exercice 1(6points)

1) Énergie potentielle

$$V = V_{m1} + V_{m2} + \underbrace{V_M}_{0} + V_K = -m_1 g \ell_1 \sin(\theta) + m_2 g \ell_2 \cos(\theta) + \frac{1}{2} k (\ell_2 \theta + \Delta\ell)^2$$

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \qquad \sin(\theta) \approx \theta$$

$$V = \frac{1}{2}\left[k\ell_2^{\,2} - m_2 g \ell_2\right]\theta^2 + \left[+k\ell_2 \Delta\ell - m_1 g \ell_1\right]\theta + C$$

- **Condition d'équilibre :**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \left[k\ell_2 \Delta\ell - m_1 g \ell_1\right] = 0$$

- **Condition de stabilité**

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right] > 0 \Rightarrow k\ell_2^{\,2} - m_2 g \ell_2 > 0$$

2) Expression simplifiée de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}\left[k\ell_2^{\,2} - m_2 g \ell_2\right]\theta^2 + C$$

3) Énergie cinétique

$$T = T_{m1} + T_{m2} + T_M = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^{\,2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^{\,2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1 \ell_1^{\,2} + m_2 \ell_2^{\,2} + \frac{1}{2} M R^2\right]\dot{\theta}^2$$

4) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{k\ell_2^{\,2} - m_2 g \ell_2}{m_1 \ell_1^{\,2} + m_2 \ell_2^{\,2} + \frac{1}{2} M R^2}\right)\theta = 0$$

Exercice 2(8points)

1) Énergies cinétique, potentielle et fonction de dissipation

$$T = T_{m1} + T_{m2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{3} \right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} 2m \left(\frac{2L}{3} \right)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = V_{m1} + V_{m2} + V_{k1} + V_{k2} = mg \frac{L}{3} \cos(\theta) - 2mg \frac{2L}{3} \cos(\theta) + \frac{1}{2} K_1 (\frac{L}{6} \theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (\frac{L}{3} \theta)^2$$

$$V = mg \frac{L}{3} (1 - \frac{\theta^2}{2}) - 2mg \frac{2L}{3} (1 - \frac{\theta^2}{2}) + \frac{1}{2} K_1 (\frac{L}{6} \theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (\frac{L}{3} \theta)^2$$

$$V = \frac{1}{2} \left[4mg \frac{L}{3} - mg \frac{L}{3} + K_1 \frac{L^2}{36} + K_2 \frac{L^2}{9} \right] \theta^2 + C = \frac{1}{2} \left[mgL + K_1 \frac{L^2}{36} + K_2 \frac{L^2}{9} \right] \theta^2 + C$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{L}{2} \right)^2 \dot{\theta}^2$$

2) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha \frac{L^2}{4}}{mL^2}}_{2\lambda} \dot{\theta} + \underbrace{\frac{mgL + K_1 \frac{L^2}{36} + K_2 \frac{L^2}{9}}{mL^2}}_{\omega_0^2} \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha}{4m}}_{2\lambda} \dot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{g}{L} + \frac{K_1}{36m} + \frac{K_2}{9m} \right)}_{\omega_0^2} \theta = 0$$

3) La condition pour qu'il y ait un mouvement oscillatoire

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \alpha < 8m \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{K_1}{36m} + \frac{K_2}{9m}}$$

4) Solution

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega' t + \varphi) \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

5) Conditions initiales

$$\begin{cases} \theta(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi) \\ \dot{\theta}(t)=-\lambda Ae^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\varphi)-\omega' Ae^{-\lambda t}\sin(\omega' t+\varphi) \end{cases} \text{ à } t=0 \Rightarrow \begin{cases} \theta(0)=0=A\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\pi/2 \vee -\pi/2 \\ \dot{\theta}(0)=-4=-\lambda A\cos\varphi-\omega' A\sin\varphi \end{cases}$$

$$A=\frac{4}{\omega'} \Rightarrow \qquad \theta(t)=\frac{4}{\omega'}e^{-\lambda t}\cos(\omega' t+\frac{\pi}{2})$$

II. Oscillations forcées

1) Force généralisée :

$$F_\theta(t)=\frac{d\vec{r}}{d\theta}.\vec{F}(t)=\frac{L}{3}F(t)=F_0\frac{L}{3}\cos(\Omega t)$$

2) **Équation du mouvement**

$$\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\alpha}{4m}}_{2\lambda}\dot{\theta}+\underbrace{\left(\frac{g}{L}+\frac{K_1}{36m}+\frac{K_2}{9m}\right)}_{\omega_0^2}\theta=\frac{F_0}{3mL}\cos(\Omega t)$$

Exercice 3(6points)

1) Énergies cinétiques et potentielle

$$T=\frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}_1^2+\frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}_2^2$$

$$V=\frac{1}{2}K_2R^2\theta_1^2+\frac{1}{2}K_2R^2\theta_2^2+\frac{1}{2}K_1R^2(\theta_2-\theta_1)^2$$

2) Equations du mouvement

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta_1}\right)=0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta_2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\frac{3}{2}MR^2)\ddot{\theta}_1+K_2R^2\theta_1-K_1R^2(\theta_2-\theta_1)=0 \\ (\frac{3}{2}MR^2)\ddot{\theta}_2+K_2R^2\theta_2+K_1R^2(\theta_2-\theta_1)=0 \end{cases}$$

3) Pulsations propres

$$\begin{cases}\theta_1 = A\cos(\omega t+\varphi)\\ \theta_2 = B\cos(\omega t+\varphi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-\frac{3}{2}MR^2\omega^2 + K_2R^2 + K_1R^2)A - K_1R^2B = 0.....(1)\\ -K_1R^2A + (-\frac{3}{2}MR^2\omega^2 + K_2R^2 + K_1R^2)B = 0.....(2)\end{cases}$$

$$\Delta(\omega) = \left[-\frac{3}{2}MR^2\omega^2 + K_2R^2 + K_1R^2\right]^2 - \left[K_1R^2\right]^2 = \left(-\frac{3}{2}MR^2\omega^2 + K_2R^2 + 2K_1R^2\right)\left(-\frac{3}{2}MR^2\omega^2 + K_2R^2\right) = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K_2}{3M}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2(K_2+2K_1)}{3M}}$$

4) Rapport des amplitudes angulaires

$$\begin{cases}\omega_1 = \sqrt{\frac{2K_2}{3M}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \frac{B}{A} = 1\\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2(K_2+2K_1)}{3M}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \frac{B}{A} = -1\end{cases}$$

$$Solutions: \begin{cases}\theta_1(t) = A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + B\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\ \theta_2(t) = A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - B\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases}$$

UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

F.S. Département SM **Jeudi 31– 03 – 2022**

L2 Chimie **10H00 – 11H00**

Examen de Rattrapage

Vibrations et ondes optiques

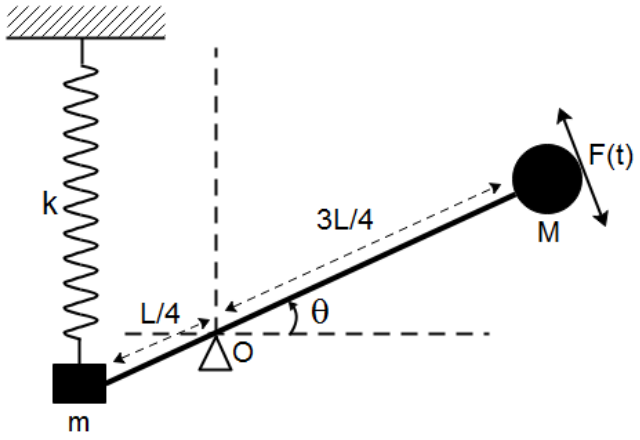
Exercice 01 *(6 points)*

On définit un oscillateur amorti constitué d'une masse ***m (kg)***, d'un amortisseur de coefficient de frottement ***α (kg/s),*** et d'un ressort de constante de raideur ***k= 3.75 N/m*** , régi par l'équation différentielle suivante : $0.6\,\ddot{x}+2.4\,\dot{x}+15\,x=0.$

1) Calculer la période propre du mouvement **T**.
2) Trouver la valeur du facteur d'amortissement **λ.**
3) Calculer la pseudo-période du mouvement $\mathbf{T}^{\backslash}$.
4) Montrer que la masse ***m*** a un mouvement oscillatoire amorti, puis résoudre l'équation différentielle pour les conditions initiales suivantes : à t=0 : $\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=v(o)=0.25\ m/s \end{cases}$
5) Calculer les valeurs de ***m*** et ***α.***

Exercice 02 *(14 points)*

m et ***M*** sont des masses ponctuelles fixées aux extrémités d'une tige homogène de longueur ***L*** et de masse négligeable, Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour l'axe (Δ). À l'équilibre ***θ=0***, le ressort est déformé par Δ**ℓ.**



I. Oscillations libres non amorties F=0

1) Déterminer la condition d'équilibre à partir de l'énergie potentielle.
2) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
3) Etablir l'équation différentielle du mouvement du système.
4) Déterminer la pulsation propre du système.

II. On applique à la masse ***M*** une force sinusoïdale $\mathbf{F=F_0}\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\Omega t})$ perpendiculaire à la tige.

1) Déterminer la force généralisée.
2) Déduire l'équation différentielle du mouvement.
3) Donner la forme de la solution générale de l'équation différentielle.

Bon courage

Université de Médéa

Année 2021/ 2022

SOLUTION RATTRAPAGE PHYS 3

Exercice. 1

1. **Période T**

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega^2_0\, x=0. \quad \ddot{x}+4\,\dot{x}+25\,x=0.$$

$$\omega_0=\sqrt{25}=5rad/s$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=1.25s$$

2. **Facteur d'amortissement**

$$2\lambda=4\Leftrightarrow\lambda=2s^{-1}$$

3. **Pseudo-période**

$$T^{\backslash}=\frac{2\pi}{\omega^{\backslash}},avec:\omega^{\backslash}=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}=4.58rad/s\Leftrightarrow T^{\backslash}=1.37s$$

4. **On a un mouvement oscillatoire amorti car :**

$$\Delta^{\backslash}=\lambda^2-\omega_0^2=-21<0$$

- **La solution** :

$$x(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\omega^{\backslash}t+\varphi)\Rightarrow\dot{x}(t)=-\lambda Ae^{-\lambda t}\cos(\omega^{\backslash}t+\varphi)-A\omega^{\backslash}e^{-\lambda t}\sin(\omega^{\backslash}t+\varphi)$$

$$\begin{cases}t=0\Rightarrow x(0)=0\Rightarrow\cos(\varphi)=0\Rightarrow\varphi=\pm\pi/2\\ t=0\Rightarrow\dot{x}\,(0)=v(o)=-A\omega^{\backslash}\sin(-\pi/2)\Rightarrow A=\dfrac{v(o)}{\omega^{\backslash}}=0.054m=5.4cm\end{cases}$$

$$x(t)=5.4e^{-2t}\cos(4.58t-\pi/2)(cm)$$

5. **Les valeurs de *m et α*.**

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=5\Rightarrow m=0.15kg$$

$$2\lambda=\frac{\alpha}{m}\Rightarrow\alpha=0.6kg/s$$

Exercice.2.

1. **Condition d'équilibre**

$$V = V_m + V_M + V_K = -mg\left(\frac{L}{4}\right)\sin(\theta) + Mg\left(\frac{3L}{4}\right)\sin(\theta) + \frac{1}{2}k\,(\Delta\ell + \frac{L}{4}\theta)^2$$

$$V = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{16}\right)^2\theta^2 + \left(-mg\frac{L}{4} + Mg\frac{3L}{4} + k\,\Delta\ell\frac{L}{4}\right)\theta + C$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow -mg\frac{L}{4} + Mg\frac{3L}{4} + k\,\Delta\ell\frac{L}{4} = 0$$

2. **Énergie cinétique**

$$T = T_m + T_M = \frac{1}{2}m(\frac{L}{4})^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(\frac{3L}{4})^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m+9M}{16}\right]L^2\dot{\theta}^2$$

- **Energie potentielle**

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{16}\right)^2\theta^2 + C$$

3. **Équation du mouvement**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{k\left(\frac{L}{16}\right)^2}{\frac{m+9M}{16}L^2}\right)\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{k}{m+9M}\right)\theta = 0 \ldots . \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m+9M}\right)}$$

II.1. Force généralisée

$$F_\theta(t) = \frac{d\vec{r}}{d\theta}.\vec{F}(t) = \frac{3L}{4}F(t) = \frac{3L}{4}F_0\cos(\Omega t)$$

2. **Equation du mouvement**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = \frac{3L}{4}F_0\cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{k}{m+9M}\right)\theta = \frac{3F_0}{\frac{m+9M}{4}L}\cos(\Omega t)$$

3. **Solution de l'équation du mouvement**

$$\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_P(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \theta_0\cos(\Omega t + \Psi)$$

Examens et solutions

Département des sciences de la matière — ***2ième année chimie-SM***

Faculté des sciences — ***Module - Physique 03***

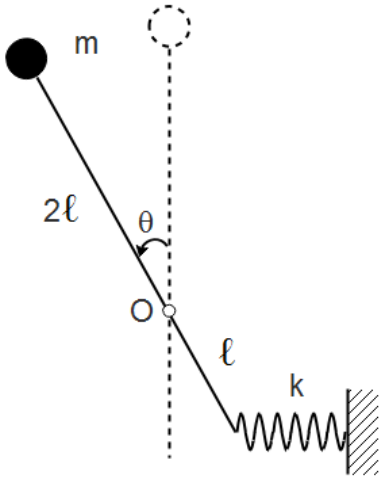
Université de Médéa — ***Samedi le 16/02/2019***

de 10:00 à 11:30

EPREUVE DE RATTRAPAGE

Exercice 01 *(7 points)*

Le système ci-contre est constitué d'une tige, de langueur 3ℓ et de masse négligeable, porte à son extrémité supérieure une masse ponctuelle m. l'autre extrémité est reliée à un ressort de constante de raideur k. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe fixe passant par O. À l'équilibre ***θ=0***, le ressort n'est pas déformé (Δℓ=0**)**.

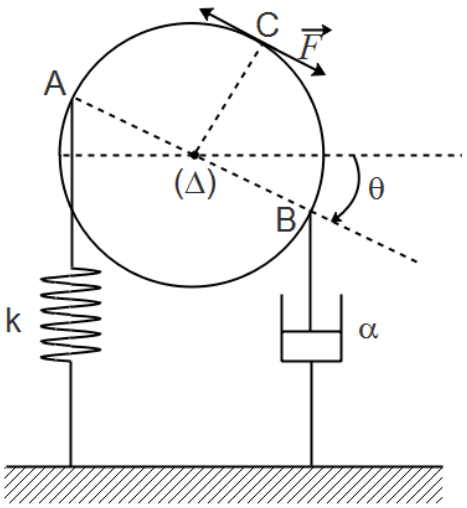


1) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.
2) Déterminer la condition d'oscillation à partir de l'énergie potentielle.
3) Etablir l'équation différentielle du mouvement par :
   a) Le formalisme de Lagrange.
   b) Le principe de la conservation de l'énergie.
4) Déduire la fréquence de vibration lorsque le système est oscillatoire.

Exercice 02 *(7 points)*

- Le système mécanique, représenté ci-contre, est constitué d'une poulie de masse M et de rayon R. Un ressort de raideur K et à un amortisseur α sont reliés, respectivement, à deux points diamétralement opposés A et B.

Une force sinusoïdale $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$ est appliquée tangentiellement à la poulie au pont C. Tout le système peut osciller autour d'un axe (Δ) passant par le centre de la poulie. On considère le cas des faibles oscillations.



Le moment d'inertie de la poulie est donné par :

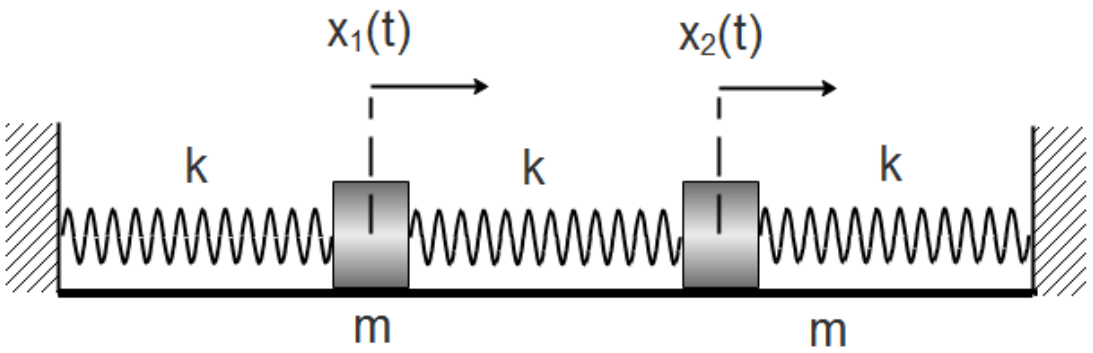
$I_{/\Delta}=1/2\ MR^2$

1) Déterminer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et la fonction de dissipation.
2) Déterminer l'expression de la force généralisée.
3) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 03 *(6 points)*

Deux oscillateurs identiques de masse ***m=1 kg*** et de constante de raideur ***K=10 N/m*** sont couplés par un ressort de même constante de raideur ***K=10 N/m***.

$x_1(t)$ et ***$x_2(t)$*** représentent les déplacements des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre (voir la figure).



1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Etablir les équations différentielles du mouvement du système.
3) Calculer les pulsations propres du système.
4) Déterminer le rapport des amplitudes $\frac{B}{A}$ pour chacun des modes propres. En déduire les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Bon courage

Département SM ***Université de Médéa***

Année 2018/ 2019

SOLUTION RATTRAPAGE PHYS 03

Exercice 1 (7points)

1) Énergie cinétique

$$T = T_m = \frac{1}{2} m \left(2\ell\right)^2 \theta^2$$

2) Énergie potentielle

$$V = V_m + V_K = mg\left(2\ell\right)\cos(\theta) + \frac{1}{2}K(\ell\theta)^2 \qquad \cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$V = \frac{1}{2}\left(-2mg\ell + K\ell^2\right)\theta^2 + C$$

- **Condition d'oscillations**

La condition d'équilibre est toujours vérifiée : $\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\theta=0} = 0$

Condition de stabilité

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right] > 0 \Rightarrow -2mg\ell + K\ell^2 > 0$$

3) Équation du mouvement

a) Méthode de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{K\ell - 2mg}{4m\ell}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

b) Conservation de l'énergie

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad E = T + V \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{K\ell - 2mg}{4m\ell}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

4) la fréquence de vibration

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{K\ell - 2mg}{4m\ell}}}{2\pi}$$

Exercice 2 (8Ps)

1) Energie cinétique, potentielle et fonction de dissipation.

$$T = \underbrace{T_M}_{Trot} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} KR^2 \theta^2$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

2) Force généralisée

$$F_\theta(t) = \frac{d\vec{r}}{d\theta}.\vec{F}(t) = R.F(t) = F_0 R\cos(\Omega t)$$

3) L'équation différentielle du mouvement.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F_\theta(t) \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha}{M}}_{2\lambda}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{K}{M}}_{\omega_0^2}\theta = F_0 R\cos(\Omega t)$$

Exercice.3.

4. Energie cinétique et potentielle

$$T = T_m + T_m = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2$$

5. Equations différentielles du mouvement

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - k\left(x_2 - x_1\right) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + k\left(x_2 - x_1\right) = 0 \end{cases}$$

6. Pulsations propres

$$\begin{cases} \theta_1 = A\cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_2 = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m\omega^2 + 2k)A - kB = 0.....(1) \\ -kA + (-m\omega^2 + 2k)B = 0.....(2) \end{cases}$$

$$\Delta(\omega) = \left[-m\omega^2 + 2k\right]^2 - \left[k\right]^2 = \left(-m\omega^2 + 3k\right)\left(-m\omega^2 + k\right) = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3.16 rad/s \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} = 5.47 rad/s$$

7. Rapport des amplitudes

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \frac{B}{A} = 1 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \Rightarrow (1) \Rightarrow \frac{B}{A} = -1 \end{cases}$$

$$Solutions: \begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Faculté des sciences et de la technologie ***Université de Médéa***

2ème année LMD-ST ***Samedi le 12/03/2016***

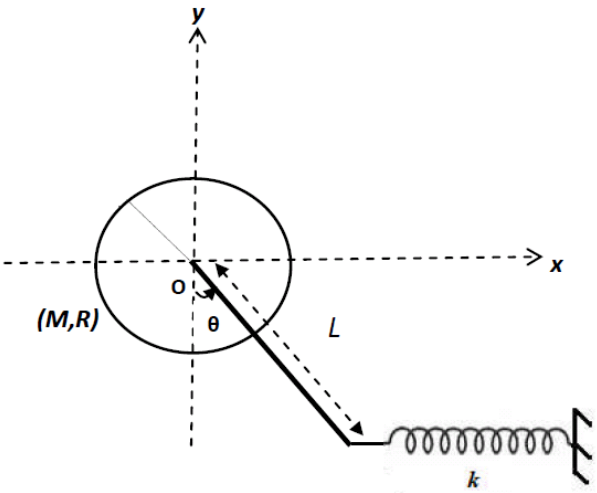
UEF31 - Physique 3 ***de 08h30 à 10h00***

EPREUVE DE RATTRAPAGE

Exercice 01 *(6 points)*

Un disque homogène de masse $M_D = M$ et de rayon R, peut osciller (faibles oscillations) autour d'un axe fixe passant par son centre O. Une tige homogène de langueur $L=3R$, et de masse $M_T = M$ est solidaire du disque. Un ressort de constante de raideur k est relié à la tige comme l'indique la figure.

La position d'équilibre correspond à θ = 0.



1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
2) Trouver l'équation différentielle du mouvement, et donner l'expression de la solution générale.
3) Déterminer l'expression de la période d'oscillation en fonction de **M**, **R** et k .

Exercice 02*(6 points)*

On définit un oscillateur amorti constitué d'une masse ***m (kg)***, d'un amortisseur de coefficient de frottement ***α (kg/s),*** et d'un ressort de constante de raideur ***k= 3.75 N/m*** , régi par l'équation différentielle suivante : $0.6\,\ddot{x}+2.4\,\dot{x}+15\,x=0.$

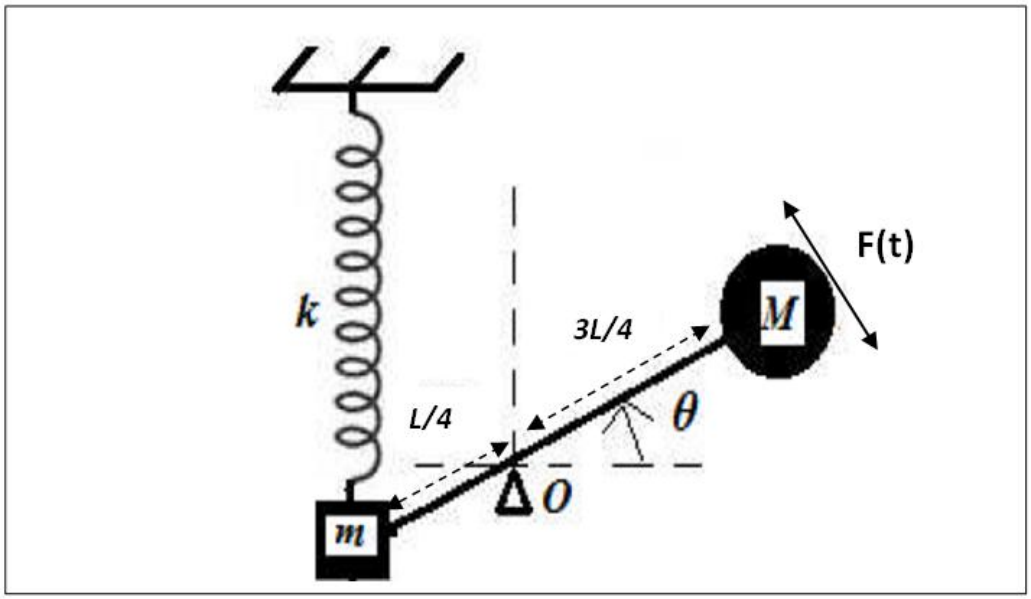
1) Calculer la période propre du mouvement **T**.
2) Trouver la valeur du facteur d'amortissement **λ**.
3) Calculer la pseudo-période du mouvement $\mathbf{T}^{\backslash}$.
4) Montrer que la masse m a un mouvement oscillatoire amorti, puis résoudre l'équation différentielle pour les conditions initiales suivantes : à t=0 :

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=v(o)=0.25\ m/s \end{cases}$$

5) Calculer les valeurs de ***m*** et ***α.***

Exercice 03 *(8 points)*

m et ***M*** sont des masses ponctuelles fixées aux extrémités d'une tige homogène de longueur ***L*** et de masse négligeable, Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour l'axe (Δ). À l'équilibre $\boldsymbol{\theta=0}$, le ressort est déformé par $\Delta\boldsymbol{\ell}$.



I. Oscillations libres non amorties F=0

1) Déterminer la condition d'équilibre à partir de l'énergie potentielle.
2) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.
3) Etablir l'équation différentielle du mouvement du système.
4) Déterminer la pulsation propre du système.

II. On applique à la masse ***M*** une force sinusoïdale $\mathbf{F=F_0}\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\Omega t})$ perpendiculaire à la tige.

1) Déterminer la force généralisée.
2) Déduire l'équation différentielle du mouvement.
3) Donner la forme de la solution générale de l'équation différentielle.

Bon courage

Faculté des sciences et de la technologie ***Université de Médéa***

Année 2015/ 2016

SOLUTION RATTRAPAGE PHYS 3

Exercice .1

1. **Énergie cinétique :**

$$T = T_D + T_T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}M(3R)^2\right]\dot{\theta}^2 = \frac{7}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

- **Énergie potentielle**

$$V = V_D + V_T + V_R = 0 - Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos(\theta) + \frac{1}{2}k(L\theta)^2$$

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow V = -Mg\left(\frac{3R}{2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{1}{2}k(3R\theta)^2 \Rightarrow V = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}MgR + 9kR^2\right]\theta^2 + C$$

2. **Équation du mouvement**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{\frac{3}{2}MgR + 9kR^2}{\frac{7}{2}MR^2}\right)\theta = 0$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

3. **Période d'oscillation**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}MgR + 9kR^2}{\frac{7}{2}MR^2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{2}MR^2}{\frac{3}{2}MgR + 9kR^2}}$$

Exercice. 2

1) **Période T**

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 25x = 0.$$

$$\omega_0 = \sqrt{25} = 5 rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1.25 s$$

2) **Facteur d'amortissement**

$$2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2 s^{-1}$$

3) Pseudo-période

$$T^{\backslash} = \frac{2\pi}{\omega^{\backslash}}, avec : \omega^{\backslash} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 4.58 rad/s \Leftrightarrow T^{\backslash} = 1.37 s$$

4) On a un mouvement oscillatoire amorti car :

$$\Delta^{\backslash} = \lambda^2 - \omega_0^2 = -21 < 0$$

- **La solution** :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega^{\backslash} t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\lambda A e^{-\lambda t}\cos(\omega^{\backslash} t + \varphi) - A\omega^{\backslash} e^{-\lambda t}\sin(\omega^{\backslash} t + \varphi)$$

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x(0)=0 \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\pi/2 \\ t = 0 \Rightarrow \dot{x}(0)=v(o)= -A\omega^{\backslash}\sin(-\pi/2) \Rightarrow A = \frac{v(o)}{\omega^{\backslash}} = 0.054m = 5.4cm \end{cases}$$

$$x(t) = 5.4e^{-2t}\cos(4.58t - \pi/2)(cm)$$

5) Les valeurs de *m et α.*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \Rightarrow m = 0.15kg$$

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \alpha = 0.6 kg/s$$

Exercice.3.

1) Condition d'équilibre

$$V = V_m + V_M + V_K = -mg\left(\frac{L}{4}\right)\sin(\theta) + Mg\left(\frac{3L}{4}\right)\sin(\theta) + \frac{1}{2}k(\Delta\ell + \frac{L}{4}\theta)^2$$

$$V = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{16}\right)^2\theta^2 + \left(-mg\frac{L}{4} + Mg\frac{3L}{4} + k\Delta\ell\frac{L}{4}\right)\theta + C$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow -mg\frac{L}{4} + Mg\frac{3L}{4} + k\Delta\ell\frac{L}{4} = 0$$

2) Énergie cinétique

$$T = T_m + T_M = \frac{1}{2}m(\frac{L}{4})^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(\frac{3L}{4})^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m+9M}{16}\right]L^2\dot{\theta}^2$$

- **Energie potentielle**

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{16}\right)^2\theta^2 + C$$

3) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=0\Rightarrow \ddot{\theta}+\left(\frac{k\frac{L}{16}^{2}}{\frac{m+9M}{16}L^{2}}\right)\theta=0\Rightarrow \ddot{\theta}+\left(\frac{k}{m+9M}\right)\theta=0....\omega_0=\sqrt{\left(\frac{k}{m+9M}\right)}$$

II.

1. Force généralisée

$$F_\theta(t)=\frac{d\vec{r}}{d\theta}.\vec{F}(t)=\frac{3L}{4}F(t)=\frac{3L}{4}F_0\cos(\Omega t)$$

2. Equation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=\frac{3L}{4}F_0\cos(\Omega t)\Rightarrow \ddot{\theta}+\left(\frac{k}{m+9M}\right)\theta=\frac{3F_0}{\frac{m+9M}{4}L}\cos(\Omega t)$$

3. Solution de l'équation du mouvement

$$\theta(t)=\theta_{\mathrm{H}}(t)+\theta_P(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\theta_0\cos(\Omega t+\Psi)$$

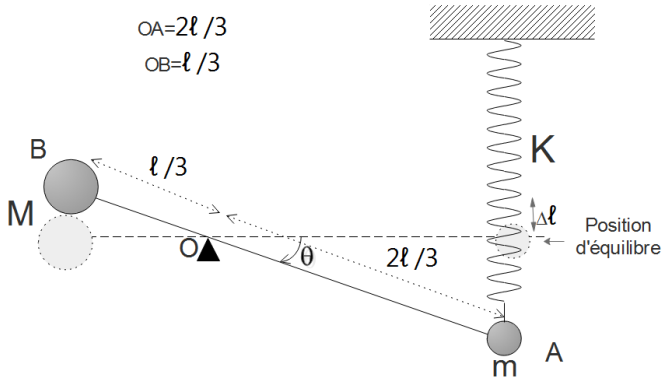
Département des sciences de la matière
Faculté des sciences
Université de Médéa

2ième année Chimie-SM
Module - Physique 03
Jeudi le 11/01/2018
de 09:30 à 11:00

EPREUVE DE FIN DE SEMESTRE 1

Exercice 01 : *(8points)*

Le système ci-contre est constitué d'une tige de masse négligeable et de langueur **ℓ** portant à ses extrémités deux masses ponctuelles *m et M*.
Un ressort de constante de raideur K est relié à la tige au point A.
Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour de l'axe de rotation (Δ) passant par le point O. À l'équilibre ***θ=0***, le ressort est déformé par **Δ**ℓ.

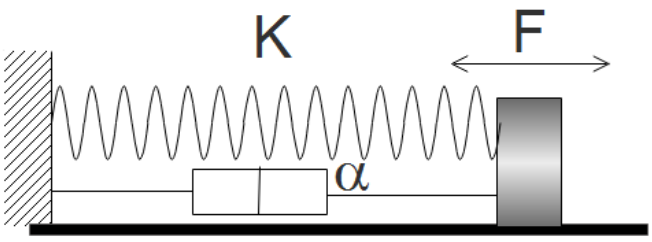


On donne : M=3m=3kg, K=100 N/m et ℓ=1m, g=10 m/s^2.

1) Déterminer la condition d'équilibre et vérifier la condition de stabilité. Puis calculer la déformation du ressort **Δ**ℓ à l'équilibre.
2) Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.
3) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.
4) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
5) Calculer la pulsation propre du système.

Exercice 02 : *(12points)*

On définit un oscillateur forcé amorti constitué d'une masse ponctuelle ***m=0.6kg***, d'un amortisseur de coefficient de frottement **α (kg/s)** et d'un ressort de constante de raideur ***K (N/m).***



La force appliquée à la masse m est de la forme :

$$F(t) = 0{,}3\cos(\Omega t) \qquad (N)$$

Ce système est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 25x = 0{,}5\cos(\Omega t)$$

1) Calculer la pulsation propre ω_0 du système. En déduire la période propre T_0.

2) Trouver la valeur du facteur d'amortissement λ.

3) Calculer la pseudo-pulsation $\omega^{\backslash}$ et la pseudo-période du mouvement $T^{\backslash}$.

4) Calculer les valeurs du K et **α.**

La solution de l'équation différentielle dans le régime permanent est donnée par :

$$x(t) = x_0\cos(\Omega t + \emptyset) \quad \text{avec} \quad x_0 = \frac{0{,}5}{\sqrt{(25-\Omega^2)^2 + 16\Omega^2}} \qquad (\text{m})$$

5) Déterminer la pulsation de résonance Ω_R.

6) Trouver la valeur de x_0MAX.

7) Tracer approximativement la courbe de résonance.

Bon courage

Département SM ***Université de Médéa***

Année 2017/ 2018

SOLUTION EFS PHYS 03

Exercice 1 :

1) Énergie potentielle

$$V = V_m + V_M + V_K = -mg\frac{2\ell}{3}\sin(\theta) + Mg\frac{\ell}{3}\sin(\theta) + \frac{1}{2}k(\frac{2\ell}{3}\theta + \Delta\ell)^2$$

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{4k\ell^2}{9}\right]\theta^2 + \left[\frac{2\ell k\Delta\ell}{3} + Mg\frac{\ell}{3} - mg\frac{2\ell}{3}\right]\theta + C$$

- **Condition d'équilibre :**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Longrightarrow \left[\frac{2\ell k\Delta\ell}{3} + Mg\frac{\ell}{3} - mg\frac{2\ell}{3}\right] = 0$$

- **Condition De stabilité :**

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right] = \frac{4k\ell^2}{9} > 0 \;\; Equilibre\ toujours\ stable$$

- **Allongement du ressort**

$$\Delta\ell = \frac{(2m - M)g}{2k} \quad A.N \quad \Delta\ell = \frac{(2\times 1 - 3)g}{2\times 100} = -0{,}05m$$

2) Expression simplifiée de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{4k\ell^2}{9}\right]\theta^2 + C$$

3) Énergie cinétique

$$T = T_m + T_M = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{4m}{9} + \frac{M}{9}\right]\ell^2\theta^2$$

4) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\ddot{\partial} L}{\partial\theta}\right) = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{\frac{4k\ell^2}{9}}{\left(\frac{4m}{9}+\frac{M}{9}\right)\ell^2}\right)\theta = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{4k}{4m+M}\right)\theta = 0$$

5) Pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{4m+M}} \quad A.N \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\times 100}{4\times 1+3}} = 7{,}56 rad/s$$

Exercice 2 :

L'équation du mouvement est de la forme

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$

1) Pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{25} = 5 rad/s$$

- **Période**

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad A.N. \quad T_0 = \frac{2\times 3.14}{5} = 1.25 s$$

2) facteur d'amortissement

$2\lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = 2 s^{-1}$

3) pseudo-pulsation

$$\omega^{\backslash} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad A.N \quad \omega^{\backslash} = \sqrt{5^2 - 2^2} = 4.58 rad/s$$

- **Pseudo-période**

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} \quad A.N \quad T' = \frac{2\times 3.14}{4.58} = 1.37 s$$

4) les valeurs du K et α

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Longrightarrow K = \omega_0^2 \times m \quad A.N. \quad K = 5^2 \times 0.6 = 15\ N/m$$

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m} \Longrightarrow \alpha = 2\lambda m \quad A.N. \quad \alpha = 2\times 2\times 0.6 = 2.4\ kg/s$$

5) Pulsation de résonance

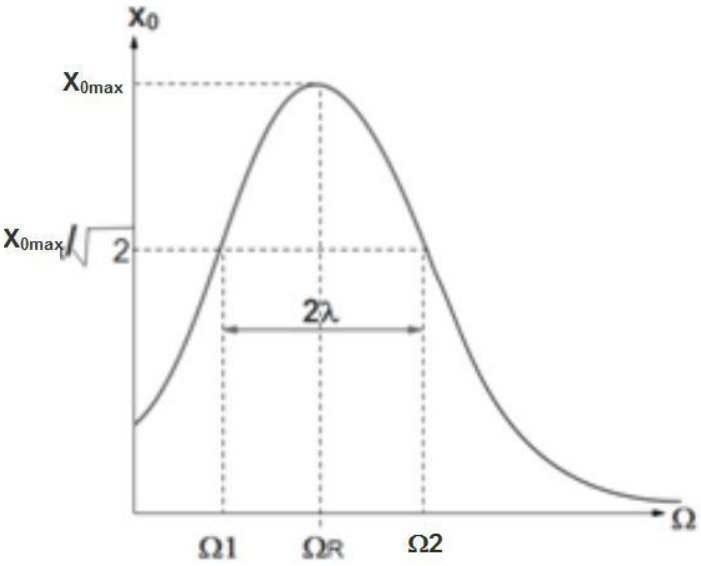
$$\frac{dx_0}{d\Omega} = \frac{2\frac{F_0}{m}\Omega[\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2]}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0 \Longrightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \ A.N \ \Omega_R = \sqrt{5^2 - 2\times 2^2} = 4.12 rad/s$$

6) la valeur de x_{0MAX}

$$x_{0MAX} = x_0(\Omega_R) = \frac{0.5}{\sqrt{\left(25-\Omega_R^2\right)^2+16\Omega_R^2}}$$

A.N $\quad x_{0MAX} = \frac{0.5}{\sqrt{(25-4.12^2)^2+16\times 4.12^2}} = 0.027m$

7)



Faculté des sciences et de la technologie ***Université de Médéa***

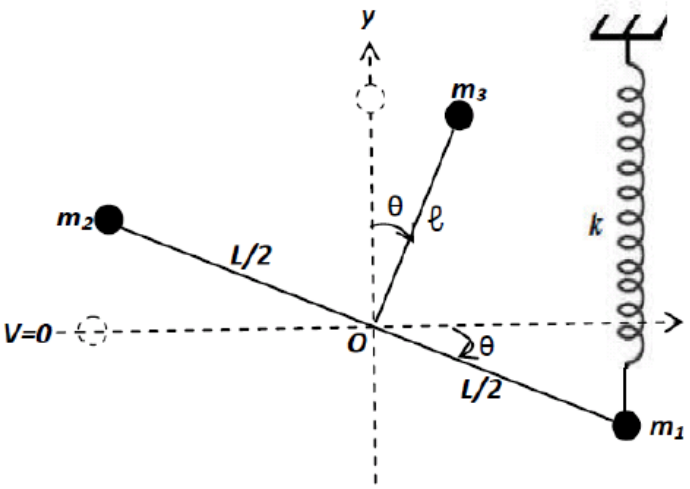
2ème année LMD-ST ***Mercredi le 13/01/2016***

UEF31 - Physique 3 ***de 08:30 à 10:00***

EPREUVE DE FIN DE SEMESTRE 1

Exercice 01 : *(6points)*

Le système ci-contre, est constitué de deux tiges perpendiculaires et de masses négligeables. ***m1*** ***m2*** et ***m3*** sont des masses ponctuelles, ***m1*** est reliée à ***m2*** par la tige de langueur ***L***, **m3** est fixée à l'une des extrémités de la tige de langueur ℓ. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe fixe passant par O. Un ressort de constante de raideur ***k*** est attaché à la masse ***m1***. À l'équilibre ***θ=0***, le ressort est déformé par Δℓ.



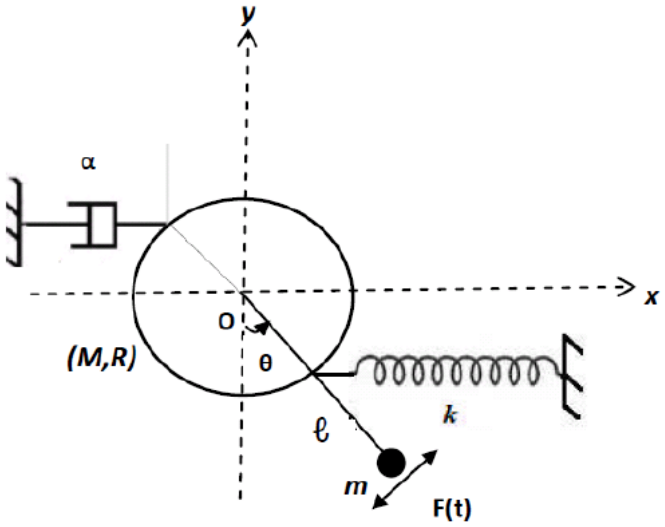
1) Déterminer la condition d'équilibre et la condition de stabilité à partir de l'énergie potentielle.

2) Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.

3) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.

4) Etabilir l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 02 : *(8points)*



Un disque homogène de masse ***M*** et de rayon ***R***, peut osciller (faibles oscillations) autour d'un axe fixe passant par son centre O. Une tige de langueur **ℓ** et de masse négligeable est solidaire du disque, portant une masse ponctuelle ***m*.** Un ressort de constante de raideur ***k*** et un amortisseur **α** sont reliés au disque comme l'indique la figure. La position d'équilibre correspond à θ=0.

I. Oscillations libres amorties F=0

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle, ainsi que la fonction de dissipation.

2) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3) Quelle est la condition pour qu'il y ait un mouvement oscillatoire.

4) Donner la solution dans ce cas.

II. Oscillations forcées $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$

On applique à la masse ***m*** une force sinusoïdale $F = F_0 \cos(\Omega T)$ perpendiculaire à la tige.

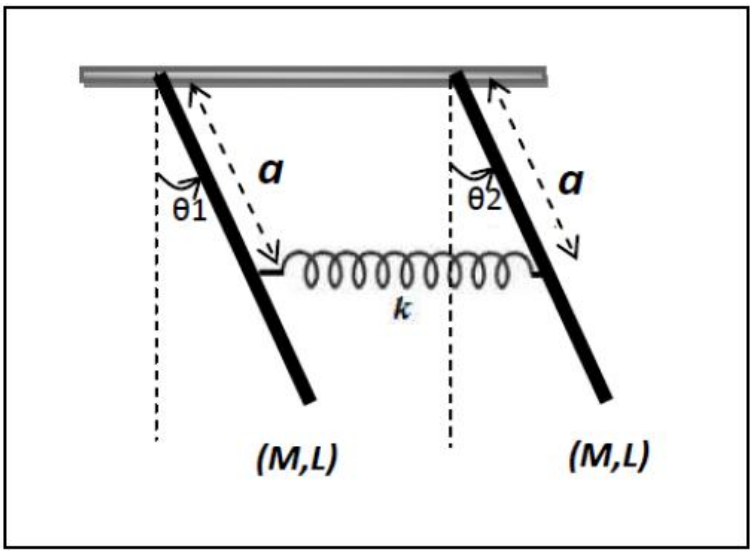
1) Déterminer la force généralisée.

2) Déduire l'équation différentielle du mouvement.

3) Donner la solution en régime permanent, en précisant les expressions de l'amplitude θ_0 et de la phase Ψ.

Exercice 03 : *(6 points)*

On considère le système de la figure ci-dessous, constitué de deux tiges homogènes et identiques de masse ***M*** et de langueur ***L***, couplées par un ressort de raideur ***k***. à l'équilibre les deux tiges sont verticales.



1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système.

2) Etablir les équations différentielles du mouvement du système.

3) Déterminer les pulsations propres du système.

Bon courage

Faculté des sciences et de la technologie ***Université de Médéa***

Année 2015/ 2016

SOLUTION EFS PHYS 3

Exercice 1

1) Énergie potentielle

$$V = V_{m1} + V_{m2} + V_{m3} + V_K$$

$$= -m_1 g\frac{L}{2}\sin(\theta) + m_2 g\frac{L}{2}\sin(\theta) + m_3 g\ell\cos(\theta)$$

$$+\frac{1}{2}k(\frac{L}{2}\theta + \Delta\ell)^2$$

$$\sin(\theta) \approx \theta \qquad \cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{kL^2}{4} - m_3 g\ell\right]\theta^2 + \left[m_2 g\frac{L}{2} + k\frac{L}{2}\Delta\ell - m_1 g\frac{L}{2}\right]\theta + C$$

- **Condition d'équilibre :**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Longrightarrow m_2 g\frac{L}{2} + k\frac{L}{2}\Delta\ell - m_1 g\frac{L}{2} = 0$$

- **Condition de stabilité**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right] > 0 \Longrightarrow \frac{kL^2}{4} - m_3 g\ell > 0$$

2) Expression simplifiée de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{kL^2}{4} - m_3 g\ell\right]\theta^2 + C$$

3) Energie cinétique

$$V = V_{m1} + V_{m2} + V_{m3} = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}m_3\ell^2\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_3\ell^2\right]\theta^2$$

4) Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=0 \Longrightarrow \theta+\left(\frac{\frac{kL^2}{4}-m_3 g\ell}{m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2+m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2+m_3\ell^2}\right)\theta=0$$

Exercice 2

1) Énergies cinétique, potentielle et fonction de dissipation

$$T=T_M+T_m=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2+m\ell^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$V=-mg\ell\cos(\theta)+\frac{1}{2}k(R\theta)^2\approx\frac{1}{2}(mg\ell+kR^2)\theta^2+C$$

$$D=\frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

2) Equation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}\right)=0 \Longrightarrow \ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\alpha R^2}{\frac{1}{2}MR^2+m\ell^2}}_{2\lambda}\dot{\theta}+\underbrace{\frac{kR^2+mg\ell}{\frac{1}{2}MR^2+m\ell^2}}_{\omega_0^2}\theta=0$$

3) La condition pour qu'il y ait un mouvement oscillatoire

$$\Delta'=\lambda^2-\omega_0^2<0$$

4) Solution

$$\theta(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\omega'+\varphi) \qquad \omega'=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$$

II. Oscillations forcées

1) Force généralisée

$$F_\theta(t)=\frac{d\vec{r}}{d\theta}.\vec{F}(t)=\ell F(t)=F_0\ell\cos(\Omega t)$$

2) Équation du mouvement

$$\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\alpha R^2}{\frac{1}{2}MR^2+m\ell^2}}_{2\lambda}\dot{\theta}+\underbrace{\frac{kR^2+mg\ell}{\frac{1}{2}MR^2+m\ell^2}}_{\omega_0^2}\theta=\frac{\ell F_0}{\frac{1}{2}MR^2+m\ell^2}\cos(\Omega t)$$

3) La solution

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t + \Psi)$$

$$\theta_0 = \frac{\frac{\ell F_0}{\frac{1}{2}MR^2 + m\ell^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \qquad \Psi = -\arctan(\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2})$$

Exercice 3

1) Énergies cinétiques et potentielle

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\theta_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\theta_2^2$$

$$V = -Mg\frac{L}{2}\cos(\theta_1) - Mg\frac{L}{2}\cos(\theta_2) + \frac{1}{2}k(a\theta_2 - a\theta_1)^2$$

$$V = \frac{1}{2}Mg\frac{L}{2}\theta_1^2 + \frac{1}{2}Mg\frac{L}{2}\theta_2^2 + \frac{1}{2}ka^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + C$$

2) Equations du mouvement

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\ddot{\theta}_1 + Mg\frac{L}{2}\theta_1 - ka^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\ddot{\theta}_2 + Mg\frac{L}{2}\theta_2 - ka^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

3) Pulsations propres

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2} - ka^2)A_1 - ka^2A_2 = 0 \\ -ka^2A_2 + \left(-\frac{1}{3}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2} - ka^2\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\omega) = \left[-\frac{1}{3}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2} - ka^2\right]^2 - [ka^2]^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2} - 2ka^2\right) = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{Mg\frac{L}{2} - 2ka^2}{\frac{1}{3}ML^2}}$$

Référence :

[1] D. F. B. HACENE, Vibrations et Ondes Mécaniques. *Université HassibaBENBOUALI de CHLEF. Année Universitaire, 2013*.

[2] H. Djelouah, Vibration et ondes manuel de cours, Université des sciences et technologies Houari Boumediene, 2006-2007.

[3] J. P. Mathieu, vibrations et phénomènes de propagation, Tome I, oscillateurs, Masson et Cie, Editeurs, 1974.

[4] D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, Cours et exercices corrigés : physique : ondes, optique et physique moderne, 6ième édition, Dunod, 2004.

[5] M. Balkanski et C. Sebenne, Physique 2 : ondes et phénomènes vibratoires, DUNOD, Paris

[6] J. Bruneaux, J. Matricon, Vibrations ondes, ellipses, 2008.

[7] Hecht, Physique – ondes, optique physique moderne 3, de Boeck, 2007.

[8] H. Ayed, Ondes et Vibrations: Cours et Exercices corrigés, 2022.