RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE MÉDÉA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE
POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER
EN MATHÉMATIQUES

OPTION
RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

INTITULÉ

ARÊTE LIFTING ET NOMBRE B-CHROMATIQUE

PAR
BETTACHE Asma
HOUIDECHE Loubna

Devant le jury composé de :

K. TABLENNEHAS	Maître Assistant, UYFM	Président
N. IKHLEF ESCHOUF	Maître de Conférences, UYFM	Encadreur
M. ZAMIME	Maître de Conférences, UYFM	Examinateur
M. BOUZEFRANE	Maître Assistant, UYFM	Examinateur

Année Universitaire : 2020-2021

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, nous remercions ALLAH de nous avoir donné la volonté et la patience et nous aider afin d'achever notre travail.

Nous voudrons témoigner toute notre gratitude à notre promoteur, Monsieur Noureddine IKHLEF ESCHOUF, Maître de Conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour sa disponibilité illimité, son aide, sa patience, sa bonne humeur et surtout pour ses précieux conseils tout au long de ce travail, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous tenons à exprimer également nous plus vifs remerciements et toute nous gratitude à:

— Monsieur K. TABLENNEHAS, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, de nous avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.
— Monsieur M. ZAMIME, Maître de Conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa et Monsieur M. BOUZEFRANE, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Sans oublier tout les professeurs se soit du primaire, du moyen, du secondaire ou du l'enseignement supérieur, qui nous permets d'accéder à ce cher succès.

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, d'affectation et d'amour, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur : Maman que j'adore plus que ma vie.

A mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifie pour me voir réussir, que dieu te garde en bonne santé : mon super papa

A mes frères Billel, Otman et ma sœur Meriem.

Aux personnes qui m'ont toujours aidés et encouragés, qui étaient toujours à mes cotés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieure, surtout mes très chers oncles Salem et Rashed, ma chère tante Chahira et son homme Sayeh OULEDBOUDJEMAA et mon cher oncle SEMACHE Taher

A ma chère binôme Loubna et tous mes amis Salima, NOUJOUM Amina, KORICHI Hajer et sa mère, ZANDAGUI Chakib et ACHAB Hamid.

Tous les membres de ma famille.

Asma

DÉDICACE

Je dédie ce travail à :

Mes chères parents, je vous remercie pour vos soutien, encouragement et vos supplication qui m'a donné la force pour dépassé tous les obstacles de la vie. Que Dieu vous préserve, et vous donne la bonne santé et la longue vie.

Mon frère Mohammed et mes sœurs Samah, Maroua et Safaa.

Tous les membres de ma famille.

Mes amis Asma, Amel, Meriem, Abir, Souaad, Samira, Imane, Khadija et Rania.

Tous qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Loubna

Table des matières

RÉSUME **X**

ABSTRACT **XI**

INTRODUCTION **1**

1 NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES **4**

1.1 Définitions et notations 4

1.2 Quelques graphes particuliers 7

1.3 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum) 13

1.4 Quelques paramètres de graphes 13

1.5 Quelques opérations sur les graphes 15

1.6 La complexité algorithmique 17

1.6.1 Classes de complexité 18

1.7 Coloration des sommets dans les graphes 18

1.7.1 Coloration et nombre chromatique 19

1.7.2 a-coloration et nombre a-chromatique 20

1.7.3 b-coloration et nombre b-chromatique 21

2 QUELQUES RÉSULTATS EXISTANTS SUR LA b-COLORATION **23**

2.1 Bornes supérieures et inférieures pour $b(G)$ 23

2.2 Le nombre b-chromatique de quelques graphes particuliers 25

2.2.1 Le nombre b-chromatique des graphes discrets 26
2.2.2 Le nombre b-chromatique de F_n et $Cr(F_n)$ 26
2.2.3 Le nombre b-chromatique de K_n et $Cr(K_n)$ 26
2.2.4 Le nombre b-chromatique de $K_{1,n}$ et $Cr(K_{1,n})$ 26
2.2.5 Le nombre b-chromatique de $K_{n,p}$ et $Cr(K_{n,p})$ 27
2.2.6 Le nombre b-chromatique de P_n, $M(P_n)$, $T(P_n)$ et $Cr(P_n)$ 27
2.2.7 Le nombre b-chromatique de C_n, $M(C_n)$, $T(C_n)$ et $Cr(C_n)$ 27
2.2.8 Les arbres 28
2.2.9 Le nombre b-chromatique des graphes réguliers 28
2.3 Quelques notions liées à la b-coloration 30
2.3.1 Graphes b-continues 30
2.3.2 Graphes b-monotonnes 30
2.3.3 Graphes b-critiques 31
2.3.4 Graphes b-parfaits 31

3 ARÊTE LIFTING ET b-COLORATION DANS LES GRAPHES 32

3.1 Arête lifting et nombre b-chromatique de quelques graphes particuliers 33
3.1.1 Arête lifting et nombre b-chromatique des chaînes 33
3.1.2 Arête lifting et nombre b-chromatique des cycles 34
3.1.3 Arête lifting et nombre b-chromatique des étoiles 34
3.1.4 Arête lifting et nombre b-chromatique des graphes de Friendship 35
3.2 Arête lifting et nombre b-chromatiques des graphes milieux et graphes totaux des chaînes et des cycles 36
3.2.1 Arête lifting et nombre b-chromatiques de $M(P_n)$ et $T(P_n)$ 36
3.2.2 Arête lifting et nombre b-chromatiques de $M(C_n)$ et $T(C_n)$ 42
3.3 Arête lift et nombre b-chromatique des couronnes des chaînes, des cycles, des étoiles et des graphes de Friendship 46
3.3.1 Arête lifting et nombre b-chromatique de $Cr(P_n)$ 46
3.3.2 Arête lifting et nombre b-chromatique de $Cr(C_n)$ 47
3.3.3 Arête lifting et nombre b-chromatique de $Cr(K_{1,n})$ 49

3.3.4 Arête lifting et nombre b-chromatique de $Cr(F_n)$ 50
3.4 Résultats particuliers sur les graphes critiques 53
3.4.1 Quelques notations essentielles 53
3.4.2 Graphes $b_L^=$-critiques 53
3.4.3 Graphes b_L^+-critiques 54
3.4.4 Graphes b_L^--critiques 56

CONCLUSION **58**

BIBLIOGRAPHIE **59**

Table des figures

1.1 Un graphe simple. 5

1.2 Représentation d'un graphe partiel et d'un sous graphe. 6

1.3 c-f-a-j-g-c représente un cycle et b-g-j-a-d-f-e représente une chaîne. 6

1.4 Le graphe de Frucht contient des triangles, il a une maille de 3. 7

1.5 Un graphe connexe. 7

1.6 Un graphe 3-régulier. 8

1.7 Le graphe milieu de la Figure 1.8. 8

1.8 Le graphe G et son graphe total. 9

1.9 Un graphe complet d'ordre 5 (K_5). 9

1.10 Un graphe discret. 9

1.11 Le graphe complémentaire de la Figure 1.1. 10

1.12 Le graphe adjoint de la Figure 1.17. 10

1.13 Un graphe biparti complet et un graphe biparti. 10

1.14 un graphe planaire. 11

1.15 Un arbre T. 11

1.16 La couronne $C_5 \circ K_1$. 11

1.17 Une chenille $C(3, 2, 4)$. 12

1.18 Une forêt. 12

1.19 Une étoile $K_{1,4}$. 12

1.20 Un sous graphe induit d'un graphe G. 13

1.21 Un graphe sans griffe. 13

1.22 $\{b, e, f, h\}$ c'est la clique maximum avec $\omega(G) = 4$. 14
1.23 $S = \{h, g, d, c, i\}$ avec $\alpha(G) = 5$. 14
1.24 $M = \{dc, ef, fj, qo, jp\}$ et $\beta(G) = 5$. 15
1.25 $D = \{a, c\}$ et $\gamma(G) = 2$. 15
1.26 La représentation de $G + H$. 16
1.27 $P_2 \vee C_3$. 16
1.28 La représentation de G, $G \setminus \{v\}$ et $G \setminus \{uv\}$. 16
1.29 $P_2 \square P_2$. 17
1.30 Une représentation d'une a-coloration. 21
1.31 Représentation d'une b-coloration optimale. 22

2.1 Il y a au moins k sommets de degré au moins $k - 1$. 23
2.2 F_4. 26
2.3 Representation des graphes cubiques dont leurs nombre b-chromatique est différent de $d + 1$. 29
2.4 Un graphe b-continu avec $b(G) = 5$, $\chi(G) = 2$ et $k = 3$ ou 4. 30
2.5 Un graphe b-parfait avec $\chi(G) = b(G) = 4$. 31

3.1 La représentation de G et de G^x_{uv} respectivement. 32
3.2 Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 5, 6$ 33
3.3 Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 4, 5$. 34
3.4 Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 4, 5$. 35
3.5 Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 2$ et $n \geq 3$. 35
3.6 Les types des chaînes induites P_3 dans un graphe milieu d'une chaîne 36
3.7 Une b-coloration optimale de G^x_{uv} pour $n = 9$. 37
3.8 Une b-coloration optimale de G^x_{uv} pour $3 \leq n \leq 7$. 38
3.9 Une b-coloration optimale de G^x_{uv} pour $n = 9$. 38
3.10 Une b-coloration optimale de G^x_{uv} pour $3 \leq n \leq 8$. 39
3.11 Les types des chaînes induites P_3 dans le graphe total de P_n. 39
3.12 Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 7$. 40

3.13 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $4 \leq n \leq 6$. 41
3.14 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $4 \leq n \leq 6$. 41
3.15 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $3 \leq n \leq 5$. 42
3.16 Une b-coloration optimale de G_{uv}^x pour $3 \leq n \leq 5$. 43
3.17 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $6 \leq n \leq 8$. 43
3.18 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 9$. 44
3.19 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 3$. 44
3.20 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 4$. 45
3.21 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 5$. 45
3.22 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 6$. 46
3.23 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 3, 4$. 47
3.24 Une représentation des types des chaînes. 47
3.25 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 3, 4$. 48
3.26 Une b-coloration de H_{uv}^x pour $n = 5$. 49
3.27 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 6$. 49
3.28 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 4$ et $n = 5$. 50
3.29 Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 2$. 50
3.30 Les types des chaînes induites P_3 dans $Cr(F_2)$. 51
3.31 Une b-coloration de G_{uv}^x avec $n \geq 3$ et $n = 2$ respectivement. 52
3.32 Une b-coloration de G_{uv}^x avec $n = 2$. 52
3.33 Le graphe de Peterson avec $b(P) = 3$ et $b(P_{uv}^x) = 4$. 55
3.34 Une b-coloration de G=$(C_3 \square C_3)$ avec $b(G) = 3$ et $b(G_{uv}^x) = 4$ 55
3.35 La représentation de G_{uv}^x, H_{uv}^x et K_{uv}^x. 56
3.36 Une arbre pivoté. 57
3.37 T et T_{uv}^x. 57

RÉSUME

Ce mémoire porte sur l'étude de la b-coloration et l'arête lifting dans les graphes.

Soient G un graphe simple et uxv une chaîne induite P_3 quelconque centrée à x. Une coloration propre des sommets est une affectation de couleurs aux sommets de sorte que deux sommets voisins aient des couleurs différentes. Le nombre minimum des couleurs nécessaire à la coloration des sommets de G est le nombre chromatique $\chi(G)$. De nombreux paramètres de coloration propre sont dérivés du nombre chromatique. La plupart de ces paramètres cherchent à minimiser le nombre de couleurs. D'autres paramètres cherchent à maximiser le nombre de couleurs, on cite le nombre a-chromatique et le nombre b-chromatique. Le nombre b-chromatique $b(G)$ est le plus grand entier k tel que G admet une b-coloration avec k couleurs.

Dans la première partie de ce mémoire, on donne quelques bornes sur le nombre b-chromatique. Ainsi que, le nombre b-chromatique de certains graphes particuliers.

Dans la deuxième partie, on donne des résultats et des valeurs du nombre b-chromatique de certains graphe particuliers, a savoir les chaînes P_n, les cycles C_n et leur graphes milieux et totaux, les étoiles $K_{1,n}$, les graphes de Friendship F_n et la couronne de ces derniers lorsque on supprime ux, vx et on ajoute uv. Où ux, vx sont les arêtes d'une chaîne induite P_3 quelconque centrée à x.

La troisième partie est consacrée à l'étude des graphes dit b_L-critiques. C'est à dire les graphes G dont le nombre b-chromatique diminue, augmente ou reste inchangé, lorsque on supprime ux, vx et on ajoute uv. Dans ce sens, on donne une caractérisation des graphes b_L^+-critiques, ainsi que les arbres b_L^--critiques.

ABSTRACT

This memory is the study of b-coloring and edge lifting in graphs.

Let be $G = (V, E)$ a simple graph and uxv any vertex induced copies of P_3 in G. A proper vertex coloring of a graph G is an assignment of colors to the vertices of G such that neighbor vertices have different colors. The minimum number of colors which is necessary for a proper vertex coloring of graph G is called the chromatic number $\chi(G)$.

Many parameters are derived from proper coloring chromatic number . Most of these parameters minimize the number of colors. Others parameters are seeking to maximize the number of colors, we cite in this way the a-chromatic number and the b-chromatic number. The b-chromatic number $b(G)$ of a graph G is the largest k such that G admits a b-coloring with k colors.

In the first part of this memory, we present some bounds for b-chromatic number. like, the b-chromatic number of some graphs.

In the second part, we give some results and values of b-chromatic number of some graphs, namely, the paths P_n, the cycles C_n and his middle and total graphs, star graphs $K_{1,n}$, the Friendship graphs F_n and corona of these last graphs. When we delete ux, vx and add uv.

Such as ux, vx are the edges of any path induced P_3 The last part is devoted to the study of graphs called b_L-critical. That is, the graphs G whose number b-chromatic decrease, increase or stay when G is modified by deleting ux, vx and add uv. In this sens, we characterize the b_L^+-critical graphs, like b_L^--critical trees.

ملخص

الغرض الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة مفهوم ب-تلوين و حافة الرفع في البيانات.

ليكن $G = (V, E)$ عبارة عن رسم بياني بسيط و uxv اي سلسلة مستحثة P_3 متمركزة في x. التلوين الأجود لرؤوس البيان هو توزيع الألوان على الرؤوس بحيث أن كل راسين متجاورين لهما لونين مختلفين. نسمي الحد الأدنى للألوان المطلوبة لتلوين G العدد اللوني $\chi(G)$. العدد ب-لوني $b(G)$ لبيان G هو اكبر عدد صحيح بحيث يقبل البيان G ب-تلوين ب k تلوين.

في الجزء الأول من هذه الأطروحة نقدم بعض القيم الحدية للعدد ب-لوني بالإضافة إلى العدد ب-لوني لبعض البيانات.

أما في الجزء الثاني نعطي نتائج و قيما للعدد ب-لوني لبعض البيانات الخاصة مثل السلسلة و الحلقة و بيانهما الوسيطي والتام، النجمة، البيان المثالي و تاج هذه البيانات الاخيرة و هذا عند حذف ux، vx وإضافة uv. حيث ux، vx هما حافتا اي سلسلة مستحثة P_3 متمركزة في x.

الجزء الثالث مخصص لدراسة ما يسمى البيانات ب-نقدية وهي البيانات التي يتزايد أو يتناقص أو لا يتغير عددها ب-لوني عند تعديل البيان بحذف ux، vx و إضافة uv، كما نعطي خصائص كل من البيانات التي يتزايد عددها ب-لوني والأشجار التي يتناقص عددها ب-لوني.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La recherche opérationnelle peut-être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.

Elle fait partie des «aides à la décision» dans la mesure où elle propose des modèles conceptuels en vue d'analyser et de maitriser des situations complexes pour permettre aux décideurs de comprendre, d'évaluer les enjeux et d'arbitrer ou de faire les choix les plus efficaces.

Ce domaine fait largement appel au raisonnement mathématique (logique, probabilités, analyse des données) et à la modélisation des processus, il est fortement lié à l'ingénierie des systèmes, ainsi qu'au management du système d'information.

L'histoire de la théorie des graphes début peut-être avec les travaux d'Euler au 18^{me} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de konigsberg (les habitants de Konigsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du 18^{me} siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de Konig, Menger, Cayley, puis de Berge et d'Erdos.

De manière générale, les graphes sont un outil de modélisation naturel, voire indispensable dans de nombreuses disciplines. On peut bien sur penser aux réseaux rencontrés dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur (routes, télécommunication, réseaux électrique, transport,

réseau informatiques, logistique et production) mais aussi dans d'autres sciences (économie, chimie, physique, biologie, etc.).

De plus, l'essor de l'informatique a fortement contribué au développement de la théorie des graphes apparaissent comme un outil essentiel dans certains domaines de l'informatique fondamentale (automates, langages, logique par exemple).
Les problèmes de colorations des graphes sont au cours de la théorie des graphes, et font l'objet, à ce titre, de nombreuses recherches.
Au-delà de l'importance théorique liée à leur résolution, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie.
La technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes.
Généralement, il s'agit de trouver une coloration des sommets (ou arête) d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité.
Parmi les nombreux paramètres de coloration existants, nous avons étudié l'un de ces paramètres de coloration des sommets d'un graphe assujettie à certaines contraintes. La coloration liée à ce paramètre a pour objectif d'être propre et de maximiser le nombre de couleurs utilisées. Elle est appelée une b-coloration.
Une b-coloration est une coloration propre ou chaque classe de couleur contient au moins un sommet qui à au moins un voisin dans chaque classe de couleur autre que la sienne.
Le paramètre associe à cette coloration est appelé le nombre b-chromatique. Il est le plus grand entier k pour lequel G a une b-coloration avec k couleurs. Ce concept a été introduit par Irving et Manlove [1] en 1999.

La détermination de ce paramètre pour un graphe quelconque étant NP-complet, alors plusieurs études ont été menées sur diverses classes particuliers de graphes.
Il existe plusieurs opérations sur les graphes. Parmi ces opérations, nous nous intéressons à l'arête lifting, qui fait l'objet de notre étude dans le dernier chapitre.
Soient G un graphe simple et uxv une chaîne induite P_3 quelconque centrée à x.

L'arête lifting est définit comme l'opération de la suppression de ux, vx et l'ajout de uv.

Dans ce mémoire nous nous intéressons principalement à l'effet de l'opération de l'arête lifting sur le nombre b-chromatique.

Ce mémoire est développé en trois chapitres :

Chapitre 1 :

Nous rappelons quelques notions de bases nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Ainsi que, les définitions utilisées dans la suite, et nous nous définissons la coloration classique, la a-coloration et la b-coloration dans les graphes.

Chapitre 2 :

Nous rappelons quelques résultats existants sur la b-coloration dans la première partie. Ainsi que, nous présentons quelques bornes pour $b(G)$ en fonction de quelques paramétrés. Dans la deuxième partie, nous déterminons le nombre b-chromatique de quelques graphes particuliers. Et nous donnons quelques notions liées à la b-coloration.

Chapitre 3 :

On s'intéresse à la détermination de la valeur du nombre b-chromatique de certains graphes particuliers lorsque on supprime ux, vx et on ajoute uv. Ensuite, nous donnons quelques graphes b_L-critiques. Ainsi que, la caractérisation des graphes b_L^+-critiques et les arbres b_L^--critiques.

Ce mémoire s'achève par une conclusion qui résume le contenu de ce manuscrit.

Chapitre 1

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes. La première partie est un rappel de quelques définitions nécessaires qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Dans la deuxième partie, nous faisons une brève présentation de l'efficacité des algorithmes et de la complexité des problèmes.
Dans la dernière partie, nous exposons un aperçu de la coloration, la a-coloration et la b-coloration.

1.1 Définitions et notations

Dans cette section, nous rappelons les principales notions nécessaires à la compréhension du contenu de ce document.

- Un graphe fini G est un couple (V, E) composé d'un ensemble fini et non vide de points V dits sommets, et d'un ensemble E de lignes reliant certains de ces sommets dites arêtes. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G, noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G, noté par $m(G)$.

  Une arête e de E est un couple de sommets (u, v) notée par $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et à v. Une boucle est une arête dont les extrémités sont confondues.

  Un sommet u est dit isolé s'il n'existe aucune arête dans E incident à u. Une arête mul-

tiple est une arête u d' extrémité x et y telle qu'il existe une arête $v \neq u$ avec les mêmes extrémités. Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples.

Par exemple la Figure 1.1 représente un graphe à cinq sommets et cinq arêtes dont l'ensemble des sommets est $\{a, b, c, d, e\}$ et l'ensemble des arêtes est $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, avec $n(G) = m(G) = 5$.

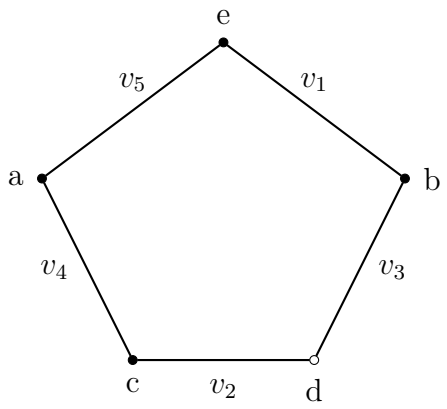


FIGURE 1.1: Un graphe simple.

- Le voisinage ouvert d'un sommet u, noté $N_G(u)$, est l'ensemble des sommets adjacents à u défini par : $N_G(u) = \{u \in (V(G)) : uv \in (E)\}$. Le voisinage fermé de u, noté $N_G[u]$, est défini par : $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.

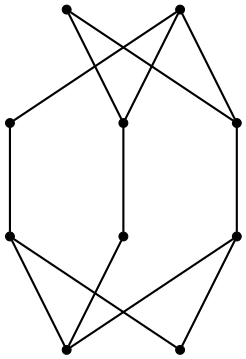
  Le voisinage ouvert d'un ensemble des sommets S est : $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(u)$. Le voisinage fermé d'un ensemble des sommets S est : $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G[u]$. Le voisinage privé d'un sommet $v \in S$ par rapport à un ensemble S, noté $Pn[u, S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autre voisin dans S ($i.e : pn[v, S] = \Big\{u \in V(G) : N[u] \cap S = \{v\}\Big\}$).

  Le degré d'un sommet v dans un graphe G noté $d_G(v)$ est le nombre d'arêtes incidentes à v, et donc $d_G(u) =\mid N_G(u) \mid$. Un sommet de degré un est dit sommet pendant. Un sommet qui est adjacent à un sommet v pendant est dit support.

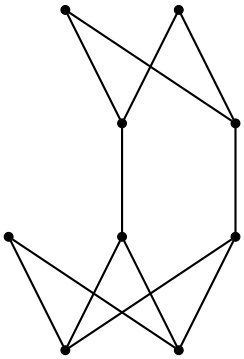
  On note par $\Delta(G)$ (resp., $\delta(G)$) Le degré maximum (resp., minimum) d'un graphe G respectivement.

- Un graphe partiel de G est un graphe $H = (V, E')$ tel que E' est un sous ensemble de E. Un sous graphe de G est le graphe G' obtenu en élevant un ou plusieurs sommets au

graphe G, ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.



Un graphe partiel de la Figure 1.6.



Un sous-graphe de la Figure 1.6.

FIGURE 1.2: Représentation d'un graphe partiel et d'un sous graphe.

- Une chaîne P de G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$, avec $i = 1, 2, ..., k-1$, (v_i, v_{i+1}) est une arête de G pour tout $i \neq j$, les sommets v_1, v_k sont les extrémités de la chaîne P, et les sommets $v_2, v_3, ..., v_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de P.

  Une chaîne est simple si chaque arête de P est emprunté une seule fois. Une chaîne est élémentaire si elle ne passe pas deux fois par le même sommet. Un cycle est une chaîne simple dont les deux extrémités sont confondues.

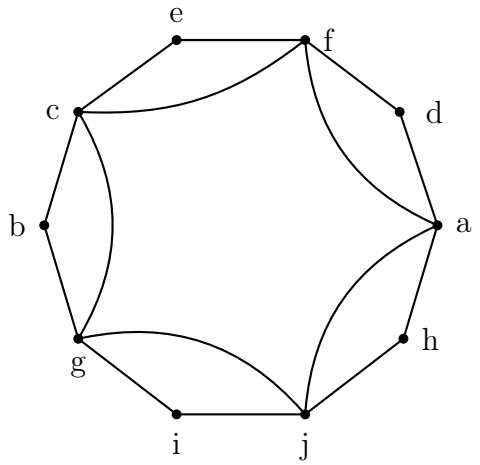


FIGURE 1.3: c-f-a-j-g-c représente un cycle et b-g-j-a-d-f-e représente une chaîne.

- On appelle distance entre u et v, noté $d_G(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v, où u et v sont deux sommets de G. L'excentricité d'un sommet v dans un graphe G

est $exc(v) = max\{d_G(v, w) : w \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé un centre. Le diamètre d'un graphe G, noté $diam(G)$ représente la plus grande distance entre deux sommets quelconques de G. La maille d'un graphe G est la longueur du plus court de ses cycles.

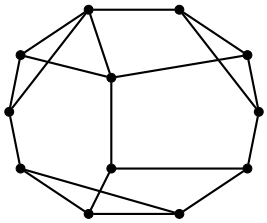


FIGURE 1.4: Le graphe de Frucht contient des triangles, il a une maille de 3.

1.2 Quelques graphes particuliers

- On dit qu'un graphe G est connexe si pour chaque paire de sommets distincts v et u de $V(G)$, il existe une chaîne joignant v et u.

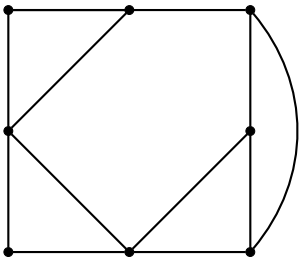


FIGURE 1.5: Un graphe connexe.

- Un graphe G est régulier si tous ses sommets on le même degré. Un graphe G est d-régulier si tous ses sommets sont de degré d. Si $d = 3$, alors G est dit cubique.

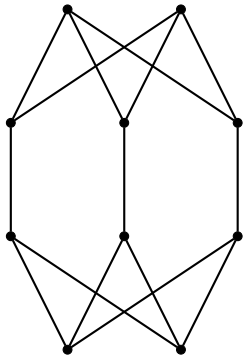


FIGURE 1.6: Un graphe 3-régulier.

- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe milieu de G noté $M(G)$ est définie comme suit : L'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V \cup E(G)$ et deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

  - $x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.

  - $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.

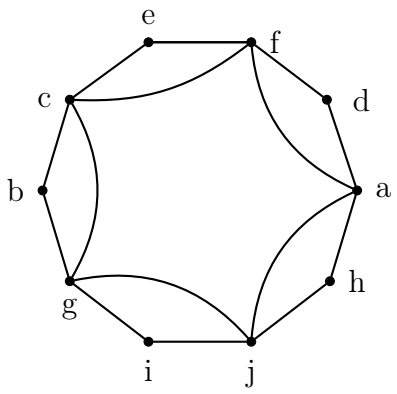


FIGURE 1.7: Le graphe milieu de la Figure 1.8.

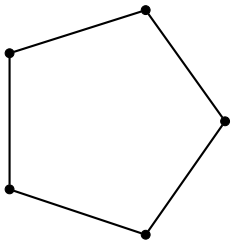
- Le graphe total de G, noté $T(G)$, est défini comme suit :

  L'ensemble des sommets de T est $V \cup E$, et deux sommets x, y de T sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

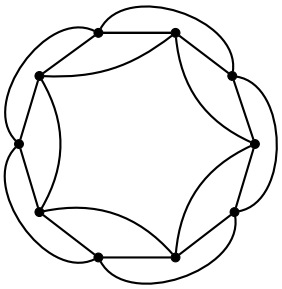
  - $x, y \in V$ et x, y sont adjacents dans G.

  - $x, y \in E$ et x est adjacent à y dans G.

  - $x \in V$, y $\in E$ et x est incident à y dans G.



Le graphe G



Le graphe total de G

FIGURE 1.8: Le graphe G et son graphe total.

- Un graphe complet d'ordre n, noté K_n est un graphe dont tous les sommets sont adjacents. Un graphe complet G est un graphe $(n-1)$-régulier.

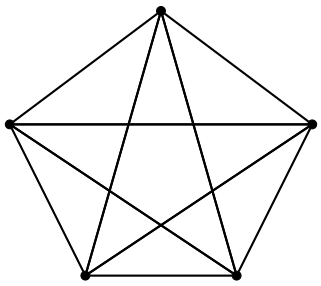


FIGURE 1.9: Un graphe complet d'ordre 5 (K_5).

- Un graphe discret est un graphe 0-régulier.

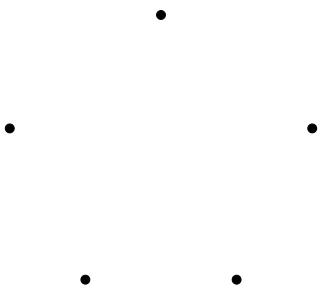


FIGURE 1.10: Un graphe discret.

- Le graphe complémentaire de G noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G.

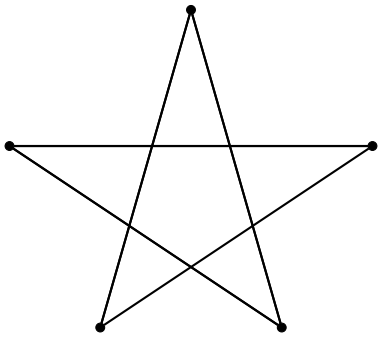


FIGURE 1.11: Le graphe complémentaire de la Figure 1.1.

- Le graphe adjoint d'un graphe G, noté $L(G)$ est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondants à ces deux sommets sont adjacentes.

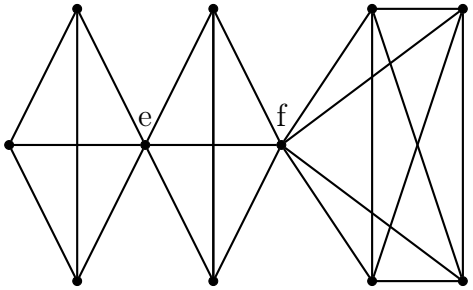
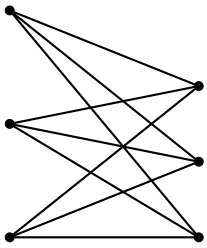


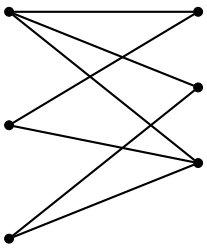
FIGURE 1.12: Le graphe adjoint de la Figure 1.17.

- Un graphe est dit biparti si V peut se partager en deux sous-ensemble V_1 et V_2 de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de V_1 à un sommet de V_2.

  Un graphe biparti complet et un graphe biparti telle que chaque sommet de A est relié à chaque sommet de B.



Un graphe biparti complet $K_{3,3}$.



Un graphe biparti

FIGURE 1.13: Un graphe biparti complet et un graphe biparti.

- Un graphe est dit planaire si on peut le dessiner de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

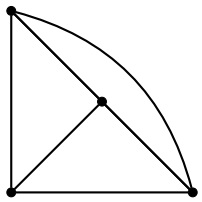


FIGURE 1.14: un graphe planaire.

- Un arbre est un graphe connexe et sans cycle. Tout sommet de degré 1 dans un arbre est appelé une feuille.

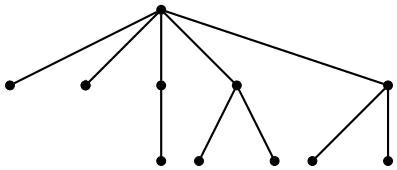


FIGURE 1.15: Un arbre T.

- La couronne d'un graphe G, noté $G \circ K_1$ (ou $Cr(G)$) est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un sommet pendant.

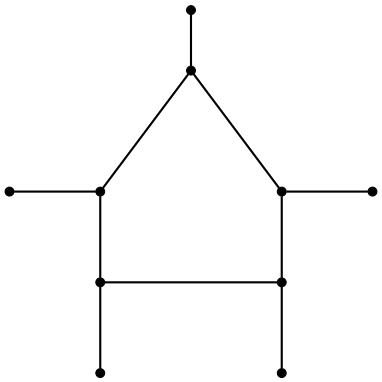


FIGURE 1.16: La couronne $C_5 \circ K_1$.

- Une chenille, noté $C(t_1, t_2, ..., t_n)$ est un arbre dont la suppression des arêtes pendantes incidentes aux sommets $t_1, t_2, ..., t_n$ produira une chaîne $t_1 - t_2 - ... - t_n$.

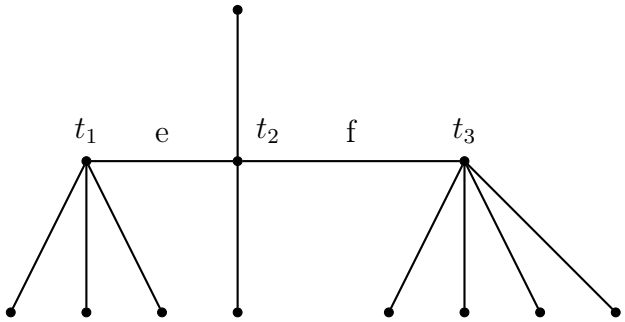


FIGURE 1.17: Une chenille $C(3, 2, 4)$.

- Une forêt est un graphe non connexe ou chaque composante connexe est un arbre.

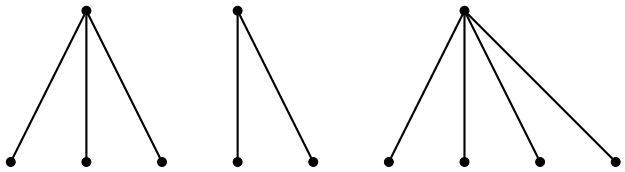


FIGURE 1.18: Une forêt.

- Une étoile $K_{1,n}$ est un arbre à $n + 1$ sommets ayant n sommets pendants.

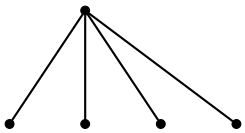
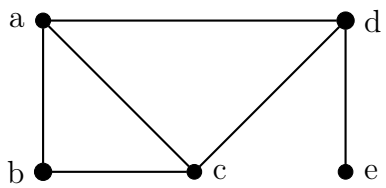


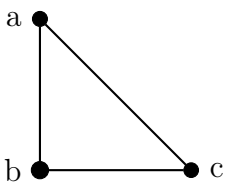
FIGURE 1.19: Une étoile $K_{1,4}$.

Remarque 1.2.1. *Si $n = 3$, on appelle G une griffe.*

- Pour un sous ensemble S de V, le sous graphe induit par S noté $G[S]$ est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S.



Un graphe G



Un sous-graphe induit par $\{a, b, c\}$

FIGURE 1.20: Un sous graphe induit d'un graphe G.

- Un graphe est sans griffe s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous graphe induit.

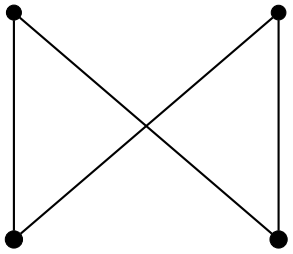


FIGURE 1.21: Un graphe sans griffe.

1.3 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum)

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

— Un sous-ensemble A de V est dit minimal (resp., maximal) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp., $A \subseteq B$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$.

— Un sous-ensemble A de V est dit minimum ou de taille minimale (resp., maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$. tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$ et $|A| \leq |B|$ (resp., $|A| \geq |B|$).

1.4 Quelques paramètres de graphes

Nous définissons ci-après quelques paramètres de graphes intervenant dans la suite.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$.

- On appelle clique de G un ensemble de sommets de G deux à deux adjacents. La taille

d'une clique est le nombre de ses sommets. Une clique de taille P notée par K_p.

Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

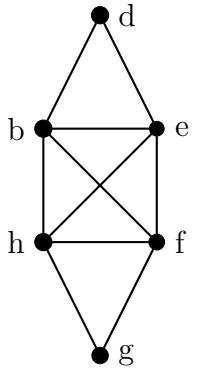


FIGURE 1.22: $\{b, e, f, h\}$ c'est la clique maximum avec $\omega(G) = 4$.

- Un stable dans un graphe G, noté S, est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G est noté par $\alpha(G)$ et appelé nombre de stabilité de G.

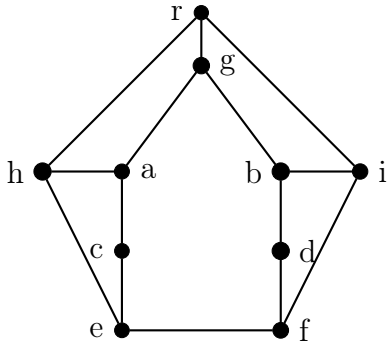


FIGURE 1.23: $S = \{h, g, d, c, i\}$ avec $\alpha(G) = 5$.

- On appelle couplage M dans un graphe G un sous-ensemble d'arêtes de E deux à deux non adjacentes. La taille d'un couplage maximum de G est noté par $\beta(G)$. Un couplage qui sature tous les sommets de G est dit parfait.

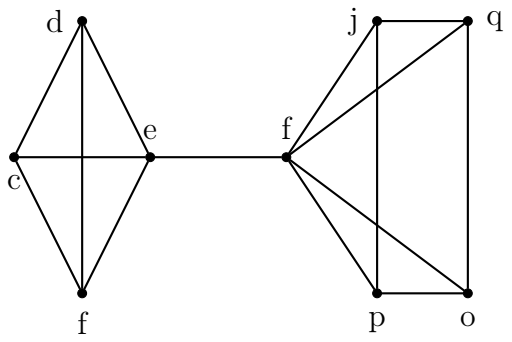


FIGURE 1.24: $M = \{dc, ef, fj, qo, jp\}$ et $\beta(G) = 5$.

Ce couplage n'est pas parfait.

- Un sous-ensemble D de V est un dominant de G, si tout sommet de $V \setminus D$ est adjacent à au moins un sommet de D. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant est noté par $\gamma(G)$.

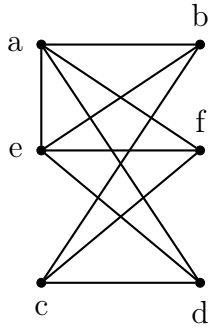


FIGURE 1.25: $D = \{a, c\}$ et $\gamma(G) = 2$.

1.5 Quelques opérations sur les graphes

Dans la suite, on définit quelques opérations sur les graphes qui peuvent être utilisées par la suite.

Soient G et H deux graphes.

- L'union de deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$, noté $G + H$, est le graphe ayant pour l'ensemble des sommets $V \cup V'$ et l'ensemble des arêtes $E \cup E'$. Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est noté par kG.

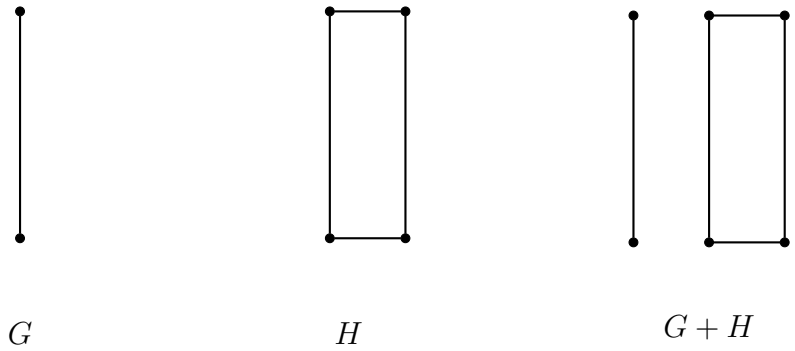


FIGURE 1.26: La représentation de $G + H$.

- Le joint de G et H est le graphe noté $G \vee H$ obtenu à partir de $G + H$ en ajoutant toutes les arêtes entre H et G.

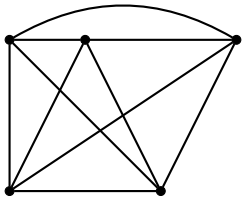


FIGURE 1.27: $P_2 \vee C_3$.

- Soient $v \in V$ et $S \subseteq V$. Le graphe $G \setminus \{v\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. (Voir la Figure 1.28.)
- Soit uv une arête de G. Le graphe $G \setminus \{uv\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête uv (les extrémités de uv ne sont pas supprimées). (Voir la Figure 1.28)

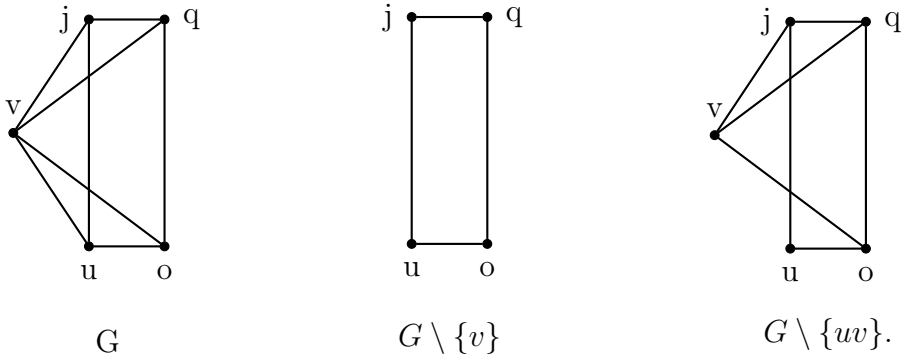


FIGURE 1.28: La représentation de G, $G \setminus \{v\}$ et $G \setminus \{uv\}$.

- Le produit cartésien (ou somme cartésienne) de deux graphes $G = (V_1, E_1)$ et $H = (V_2, E_2)$, noté $G\square H$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1u_2 \in E_1$.

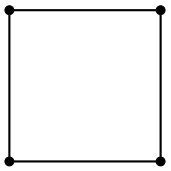


FIGURE 1.29: $P_2\square P_2$.

Pour plus de détails voir [19].

1.6 La complexité algorithmique

Beaucoup de problèmes sont réputés difficiles en théorie des graphes.
On introduit quelques éléments de base sur la complexité algorithmique et on définit quelques problèmes connus.

Un algorithme est une procédure de résolution composée d'une suite finie d'opérations élémentaires qui, pour toute instance du problème à traiter, transforme les données initiales (entrées) en résultats (sorties).

Le mot algorithme vient du nom du mathématicien ALkhawarizmi (9^{me} siècle) qui a fournit le premier algorithmique pour résoudre les équations linéaires et quadratiques.

La complexité d'un algorithme est la durée d'exécution de cet algorithme en fonction de la taille des donnéés.

1.6.1 Classes de complexité

Le but de la théorie de la complexité est la classification des problèmes suivants leur degré de difficulté de résolution.

Dans la littérature, il existe plusieurs classes de complexité, mais les plus connues sont les suivantes :

- **Classe P**

  Un problème est dans P s'il existe un algorithme déterministe pour le résoudre en temps polynomial par rapport à la taille des données.

  Le problème de cette classe est dit facile.

- **Classe NP**

  Un problème est dans NP (non déterministe polynomial) s'il existe un algorithme non déterministe (un algorithme non déterministe s'il comporte des instructions de choix) pour vérifier qu'une solution donnée satisfait la question posée en un temps polynomial.

  Théorème 1.6.1. *La classe $P \subset$ la classe NP.*

- **Clase NP-complet**

  Parmi l'ensemble des problèmes appartenant à NP, il existe un sous ensemble qui contient les problèmes les plus difficiles, on les appelle les problèmes NP-complet.

  Un problème est dit NP-complet s'il est dans NP et que tout problème de la classe NP est réductible polynomialement en ce problème.

1.7 Coloration des sommets dans les graphes

La notion de la coloration des graphes est apparue en 1852, quand Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur. Ce n'est qu'en 1976 que deux chercheurs américains on pu répondre affirmativement à cette conjecture des quatre couleurs.

En effet, à tout pays d'une carte géographique, on associe un sommet du graphe.

A deux sommets du graphe, on associe une arête si et seulement si les deux régions correspondantes ont une extrémité commune. Une coloration des sommets du graphe est alors équivalente à une coloration des régions. Cette technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes.
Dans cette section, nous définissons la coloration, la a-coloration et la b-coloration et leurs paramètres. Ainsi, nous donnons quelques bornes sur le nombre chromatique.

1.7.1 Coloration et nombre chromatique

Définition 1.7.1. *On appelle coloration des sommets d'un graphe G, toute attribution d'une couleur à chaque sommet. Une coloration utilisant k couleurs est appelée une k-coloration. Une coloration est propre si pour chaque arête de G, les deux sommets incidents à cette arête ayant des couleurs différentes.*

Définition 1.7.2. *Une classe de couleurs i est un sous-ensemble stable de sommets de V ayant la même couleur.*

Définition 1.7.3. *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaire à une coloration propre des sommets de G.*

Le calcul du nombre chromatique est NP-complet en général.
De ce fait, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre chromatique en fonction d'autres paramètres de graphe.
Un des vieux résultats établi sur le nombre chromatique est celui [14] du brooks.

Théorème 1.7.1. *[14] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

On rappelle aussi l'inégalité de Gaddum et Nordhaus [11].

Théorème 1.7.2. *[11] Pour tout graphe G, on a*

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$$

On a aussi le résultat classique suivant :

Proposition 1.7.1. *Pour tout graphe G, on a*

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

Où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum.

Théorème 1.7.3. *[19] Pour tout graphe G, on a*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1 \quad et \quad \alpha(G)\chi(G) \geq n$$

De nombreux paramètres de coloration propre sont dérivés du nombre chromatique. La plupart de ces paramètres cherchent à minimiser le nombre de couleurs. D'autres paramètres cherchent à maximiser le nombre de couleurs, on cite le nombre a-chromatique et le nombre b-chromatique.

1.7.2 a-coloration et nombre a-chromatique

Pour obtenir une bonne coloration d'un graphe, Harary, Hedetniemi et Prins [29] en 1967, ont parvenu à trouver une technique qui consiste à partir d'une coloration propre arbitraire de réduire le nombre de couleurs utilisées par la coloration initiale en unifiant des classes de couleurs différentes. S'il existe une arête entre deux classes de couleurs quelconques, la stratégie précitée n'est pas possible à appliquer. D'où la définition de la a-coloration.
Pour plus de détails Voir [29, 30, 31, 32]

Définition 1.7.4. *Une a-coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, les sous-graphe engendré par les deux classes de couleurs i et j, contient au moins une arête.*

Remarque 1.7.1. *Les b-sommets se sont les sommets en noir.*

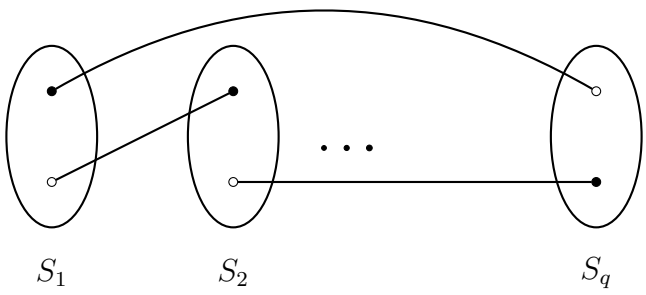


FIGURE 1.30: Une représentation d'une a-coloration.

Définition 1.7.5. *Le nombre a-chromatique, noté $\Psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleurs dans une a-coloration.*

Le problème de décider si $\Psi(G) \geq k$ pour un graphe G et un entier k est un NP-complet en général [17].
Un état de l'art sur le nombre a-chromatique été présenté dans [16]. Il est à noté que le nombre a-chromatique et la a-coloration ne font pas le but de ce mémoire.

1.7.3 b-coloration et nombre b-chromatique

Une autre technique était définit en 1999 par Irving et Manlove [1, 33]. Cette technique cherche à améliorer la coloration d'un graphe. Elle consiste à partir d'une coloration propre donnée du graphe, de réduire le nombre de couleurs en transférant les sommets d'une certaine classe de couleur vers d'autres classes de couleur. Si chaque classe de couleur possède un sommet qui a un voisin dans toutes les autres classes de couleurs, il est impossible d'appliquer cette technique. D'où, la définition de la b-coloration.

Définition 1.7.6. *Une coloration est appelée b-coloration, si pour chaque couleur C_i, il existe au moins un sommet v_i coloré C_i dont le voisinage est coloré par toutes les autres couleurs.*
Le sommet v_i est dit sommet dominant pour la couleur C_i.

Définition 1.7.7. *Le nombre b-chromatique d'un graphe G, noté $b(G)$, est le nombre maximum de classes de couleur dans une b-coloration.*

Complexité.

- *NP-complet pour un graphe général. [34]*
- *Polynomial pour les arbres. [34]*

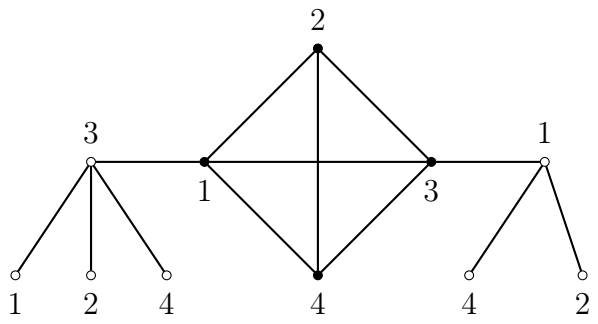


FIGURE 1.31: Représentation d'une b-coloration optimale.

Chapitre 2

QUELQUES RÉSULTATS EXISTANTS SUR LA b-COLORATION

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les principaux résultats de la littérature liés à la b-coloration et au nombre b-chromatique. Dans la deuxième partie, nous donnons le nombre b-chromatique de quelques graphes particuliers. La définition de quelques notions liées à la b-coloration sera traité dans la dernière partie.

2.1 Bornes supérieures et inférieures pour $b(G)$

Dans [6, 10], Irving et Manlove ont remarqué que pour qu'un graphe G admette une b-coloration avec k couleurs, il doit avoir au moins k sommets de degré supérieur à $k-1$.
De cette observation, ils ont défini le m-degré comme suit :

Définition 2.1.1. *Le m-degré noté $m(G)$ est le plus grand entier k tel que G a au moins k sommets de degré au moins $k-1$.*

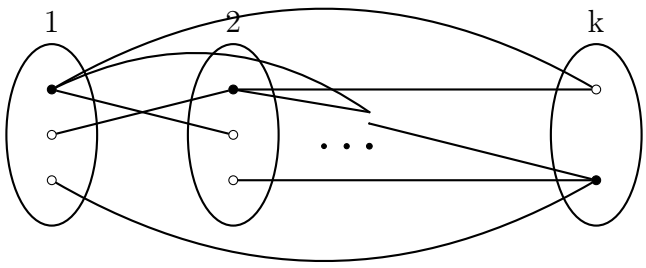


FIGURE 2.1: Il y a au moins k sommets de degré au moins $k-1$.

Un sommet $u \in V(G)$ est dense si $d(u) \geq m(G) - 1$.

Dans [6, 10], Irving et Manlove donnent le résultat suivant.

Proposition 2.1.1. *[6, 10] Pour un graphe G d'ordre n.*

$$b(G) \leq m(G)$$

.

La différence entre le nombre b-chromatique et le m-degré d'un graphe peut être très grande. Par exemple, si $G = K_{n,n}$ et le graphe biparti complet, alors $m(G) = n + 1$ et $b(G) = 2$. De ce fait, il est naturel de chercher à caractériser les graphes réalisant l'égalité dans la Proposition 2.1.1.

Proposition 2.1.2. *[2, 6] Soient G un graphe et $\chi(G)$ son nombre chromatique. Alors,*

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \Delta + 1$$

Toute b-coloration vérifie la définition de la a-coloration. Alors, on peut déduire la proposition suivante.

Proposition 2.1.3. *Pour tout graphe G, on a :*

$$b(G) \leq \Psi(G)$$

Dans [1], Kouider et Mahéo fournissent d'autre bornes supérieure.

Proposition 2.1.4. *[1] Pour tout graphe G de taille m, nous avons :*

$$b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + 1/4}$$

Théorème 2.1.1. *[1] Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$b(G) + b(\overline{G}) \leq n + 1$$

Proposition 2.1.5. *[1] Pour un graphe connexe G.*

$$b(G) \leq n + 1 - \alpha$$

Théorème 2.1.2. *[1] Soient G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors*

$$b(G)b(\overline{G}) \geq n$$

Théorème 2.1.3. *[20] Si G est le complémentaire d'un graphe biparti et $\omega(G)$ est la taille de sa clique maximum. Alors*

$$b(G) \leq \frac{4\omega(G)}{3}$$

Théorème 2.1.4. *[20] Si G un graphe sans $K_{1,t}$. Alors*

$$b(G) \leq (t-1)(\chi(G)-1)+1$$

Théorème 2.1.5. *[20] Si G est sans griffe. Alors*

$$b(G) \leq 2\chi(G)-1$$

Théorème 2.1.6. *[21] Pour chaque graphe non-complet G.*

$$b(G) \leq \lceil \frac{n+\omega(G)}{2} \rceil - 1$$

où $\lceil . \rceil$ est la partie entière supérieure.

Dans [9], C.T. Hoàng et M. Kouider donnent le théorème suivant.

Théorème 2.1.7. *[9] Soient H, K deux graphes de sommets disjoints et $G = H \vee K$ le joint de H et K. Alors*

$$b(G) = b(H) + b(K)$$

Kouider et Mahéo ont données les valeurs exactes du nombre b-chromatique pour quelques graphes particuliers.

2.2 Le nombre b-chromatique de quelques graphes particuliers

Dans cette section, on va donné quelques valeurs de certains graphes, a savoir les graphes discrets D_n, les graphes de Friendship F_n, les graphes complets K_n, les étoiles $K_{1,n}$, les graphes bipartis complets $K_{n,p}$, les chaînes P_n, les cycles C_n et la couronne de ces derniers graphes.

2.2.1 Le nombre b-chromatique des graphes discrets

Proposition 2.2.1. *[1] Soit $G = D_n$, un graphe discret. Alors pour tout n, on a*

$$b(D_n) = 1.$$

2.2.2 Le nombre b-chromatique de F_n et $Cr(F_n)$

Définition 2.2.1. *Le graphe de Friendship noté F_n, est un graphe planaire avec $2n+1$ sommets et $3n$ arêtes, peut être construit à partir de n copies de C_3 par identification d'un sommet de chaque copie C_3.*

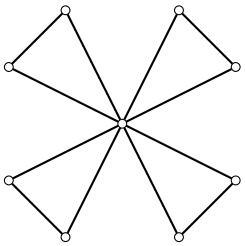


FIGURE 2.2: F_4.

Proposition 2.2.2. *[28] Soit $G = F_n$, un graphe de Friendship. Alors pour tout $n \geq 2$, on a*

i) $b(F_n) = 3$.

ii) $b(Cr(F_n)) = 4$.

2.2.3 Le nombre b-chromatique de K_n et $Cr(K_n)$

Théorème 2.2.1. *[1, 28] Soit $G = K_n$, un graphe complet. Alors pour tout $n \geq 3$, on a* $b(K_n) = b(Cr(K_n)) = n$.

2.2.4 Le nombre b-chromatique de $K_{1,n}$ et $Cr(K_{1,n})$

Proposition 2.2.3. *[1, 28] Soit $G = K_{1,n}$. Alors pour tout $n \geq 2$, on a*

i) $b(K_{1,n}) = 2$.

ii) $b(Cr(K_{1,n})) = 3$.

2.2.5 Le nombre b-chromatique de $K_{n,p}$ et $Cr(K_{n,p})$

Proposition 2.2.4. *[1, 28] Soit $G = K_{n,p}$, un graphe biparti complet. Alors pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a*

i) $b(K_{n,P}) = 2$.

ii) $$b(Cr(K_{n,p})) = \begin{cases} 2 & si\ n = p = 1 \\ 3 & si\ min\ \{n,p\} = 1\ et\ max\ \{n,p\} \geq 2 \\ 4 & si\ min\ \{n,p\} \geq 2 \end{cases}$$

2.2.6 Le nombre b-chromatique de P_n, $M(P_n)$, $T(P_n)$ et $Cr(P_n)$

Proposition 2.2.5. *[1, 27, 28] Soit G une chaîne d'ordre $n \geq 2$. Alors*

i)
$$b(P_n) = \begin{cases} 2 & si\ n \leq 4 \\ 3 & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

ii)
$$b(M(P_n)) = \begin{cases} 3 & si\ n = 3, 4 \\ 4 & si\ n = 5, 6, 7 \\ 5 & si\ n \geq 8 \end{cases}$$

iii)
$$b(T(P_n)) = \begin{cases} n & si\ n \leq 4 \\ 5 & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

iv)
$$b(C_r(P_n)) = \begin{cases} 2 & si\ n = 2 \\ 3 & si\ n \in \{3, 4, 5\} \\ 4 & si\ n \geq 6 \end{cases}$$

2.2.7 Le nombre b-chromatique de C_n, $M(C_n)$, $T(C_n)$ et $Cr(C_n)$

Proposition 2.2.6. *[1, 27, 28] Soit C_n une cycle d'ordre $n \geq 3$. Alors*

i)
$$b(C_n) = \begin{cases} 2 & si\ n = 4 \\ 3 & si\ n \neq 4 \end{cases}$$

ii)

$$b(M(C_n)) = \begin{cases} n & si\ n \leq 4 \\ 5 & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

iii)

$$b(T(C_n)) = \begin{cases} n & si\ n \leq 4 \\ 5 & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

iv)

$$b(Cr(C_n)) = \begin{cases} 3 & si\ n \in \{3, 5\} \\ 4 & si\ n = 4\ ou\ n \geq 6 \end{cases}$$

Théorème 2.2.2. *[18] Soit $G = F_1$, F_2 ou F_3 (Voir la Figure 2.3). Alors $b(F_1) = b(F_2) = 3$ et $b(F_3) = 2$.*

2.2.8 Les arbres

Définition 2.2.2. *[6] Un arbre T est dit pivoté si T admet exactement m sommets denses et contient un sommet v distingué (appelé pivot), non dense tel que :*

a) Tout sommet dense est adjacent à v ou à un sommet dense adjacent à v.

b) Tout sommet dense adjacent à v et à autre sommet dense est de degré $m - 1$.

Théorème 2.2.3. *Soit T un arbre, alors*

— *Si T est pivoté, alors $b(T) = m - 1$. [12]*

— *Si T n'est pas pivoté, alors $b(T) = m$. [6]*

2.2.9 Le nombre b-chromatique des graphes réguliers

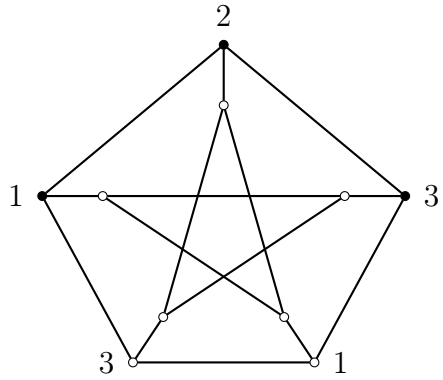
Les graphes réguliers jouent un rôle intéressant et important pour le nombre b-chromatique puisque pour chaque graphe régulier, l'égalité $m(G) = \Delta(G) + 1$ est vérifiée [3].
Dans [7], J. Kratochvil, Z. Tuza, M. Voigt sont prouvés que si G est graphe d-régulier a au moins d^4 sommets. Alors $b(G) = \Delta(G) + 1$.

Théorème 2.2.4. *[5] Soit G un graphe d-régulier sans C_4 et diam $\geq d$, alors $b(G) = d + 1$.*

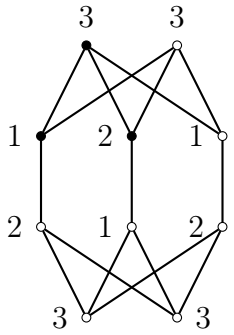
L'un des premiers résultats concernant la plus petite maille d'un graphe régulier était prouvé par El Sahili et Kouider.

Théorème 2.2.5. *[3] Si G un graphe régulier de maille au moins 5 et ne contient pas de C_6, alors G admet une b-coloration avec $d+1$ couleurs.*

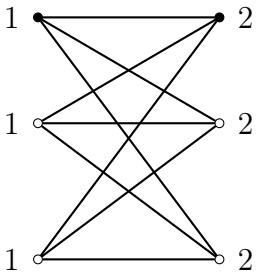
Dans le cas des graphes 3-réguliers (cubiques), Jakovac et Klavzar [18] ont montré qu'à l'exception des graphes de la Figure 2.3, le nombre b-chromatique des graphes cubiques est égal à 4.



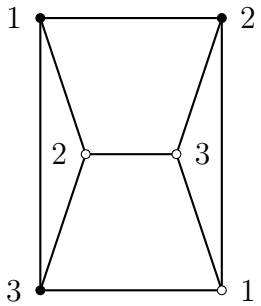
Le graphe de Petersen



Le graphe F_1



Le graphe $F_3 = K_{3,3}$



Le graphe F_2

FIGURE 2.3: Representation des graphes cubiques dont leurs nombre b-chromatique est différent de $d+1$.

Théorème 2.2.6. *[18] Soit G un graphe connexe 3-régulier. Alors $b(G) = 4$ sauf si G=Petersen, F_1, $K_{3,3}$ ou F_2. Dans ces cas, $b(Petersen) = b(F_1) = b(F_2) = 3$ et $b(K_{3,3}) = 2$.*

Théorème 2.2.7. *[8] Soit G un graphe d-régulier sans C_4. Alors.*

$$b(G) \geq \lfloor \frac{d+3}{2} \rfloor$$

Si G contient un triangle. Alors

$$b(G) \geq \lfloor \frac{d+4}{2} \rfloor$$

Où $\lfloor . \rfloor$ est la partie entière inférieure.

2.3 Quelques notions liées à la b-coloration

La définitions de la b-continuité, la b-monotonie, la b-criticité et la b-perfection sera le sujet de cette section.

2.3.1 Graphes b-continues

Dans [2, 22, 23, 24, 25, 26], les auteurs ont étudie la notion de la b-continuité de certaines classes de graphes.

Définition 2.3.1. *Un graphe G est dit b-continu si et seulement si pour tout entier k, avec $\chi(G) \leq k \leq b(G)$, G admet une b-coloration avec k couleurs. L'intervalle $[\chi(G), b(G)]$ est dit le b-spectre du graphe G.*

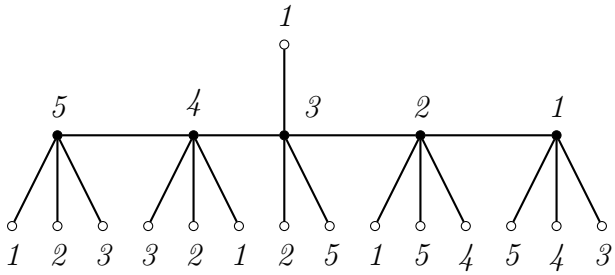


FIGURE 2.4: Un graphe b-continu avec $b(G) = 5$, $\chi(G) = 2$ et $k = 3$ ou 4.

2.3.2 Graphes b-monotonnes

Définition 2.3.2. *Soient H_1 un graphe induit de G et H_2 un sous graphe de H_1. On appelle tout graphe G vérifiant $b(H_2) \leq b(H_1)$ un graphe b-monotone.*

2.3.3 Graphes b-critiques

Parmi les problèmes dont l'étude a bénéficié des motivations pratiques et théoriques à la fois, se trouvent les problèmes des graphes critiques par rapport à un paramètre donné.

On appelle un sommet d'un graphe G (resp., une arête) critique , un sommet (resp., arête) dont sa suppression fait diminuer le nombre chromatique de G. Évidemment, la suppression d'une arête ou d'un sommet fait diminue le nombre chromatique de G par au plus un. Un graphe critique est un graphe dans lequel chaque sommet ou arête est critique. Un graphe k-critique est un graphe critique avec $\chi(G) = k$.

2.3.4 Graphes b-parfaits

Un graphe est dit b-parfait si tout sous-graphe induit H de G vérifie $\chi(G) = b(G)$.

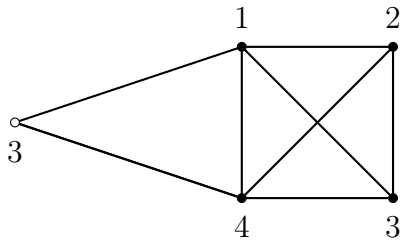


FIGURE 2.5: Un graphe b-parfait avec $\chi(G) = b(G) = 4$.

Chapitre 3

ARÊTE LIFTING ET b-COLORATION DANS LES GRAPHES

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous intéressons principalement à la détermination du nombre b-chromatique de certains graphes particuliers.

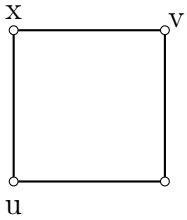
Dans la deuxième partie, nous donnons de nouveaux résultats sur les graphes b_L-critiques. Ensuite, nous caractérisons les graphes b_L^+-critiques et les arbres b_L^--critiques.

Définition 3.0.1. *Soit uxv une chaîne induite P_3 quelconque centrée à x, on appelle l'opération de la suppression de ux et vx et l'ajout de uv à $E(x)$, une arête lifting.*

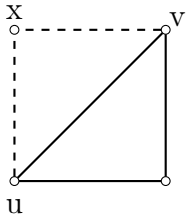
Le graphe obtenu est noté par G_{uv}^x. Avec

$V(G_{uv}^x) = V(G)$ *et* $E(G_{uv}^x) = E(G) \setminus \{ux, vx\} \cup \{uv\}$.

Exemple



Le graphe G



Le graphe G_{uv}^x

FIGURE 3.1: La représentation de G et de G_{uv}^x respectivement.

Définition 3.0.2. *Soient G un graphe et c une b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs.*

Un ensemble S de b-sommets de c est dit b-système de c si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

— $|S| = b(G)$.

— $\forall x, y \in |S|$, $c(x) \neq c(y)$.

Remarque 3.0.1. *Il est à noter que les sommets en noir représentent les b-sommets.*

3.1 Arête lifting et nombre b-chromatique de quelques graphes particuliers

Dans cette section, nous allons déterminer le nombre b-chromatique des chaînes, des cycles, des étoiles et des graphes de Friendship, lorsque on supprimant les arêtes ux, vx d'une chaîne induite P_3 quelconque centrée à x et on ajoutant uv.

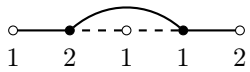
3.1.1 Arête lifting et nombre b-chromatique des chaînes

Proposition 3.1.1. *Soient G une chaîne d'ordre $n \geq 2$ et uxv une chaîne induite P_3 quelconque de G de centre x. Alors*

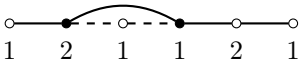
$$b(G_{uv}^x) = \begin{cases} 2 & si\ n = 3, 4, 5 \\ 3 & si\ n \geq 6 \end{cases}$$

Preuve. Soit $G = P_n$, alors on remarque que $G_{uv}^x = P_{n-1} \cup \{x\}$, avec :

$V(P_{n-1}) = V(P_n) \setminus \{x\}$ et $E(P_{n-1}) = E(P_n) \setminus \{ux, vx\} \cup \{uv\}$. Il est clair que $b(G_{uv}^x) = b(P_{n-1})$. Au vu du Proposition 2.2.6, on a les résultats désirés.



Pour $n = 5$, $b(G_{uv}^x) = b(P_4)$



Pour $n = 6$, $b(G_{uv}^x) = b(P_5)$

FIGURE 3.2: Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 5, 6$

.

3.1.2 Arête lifting et nombre b-chromatique des cycles

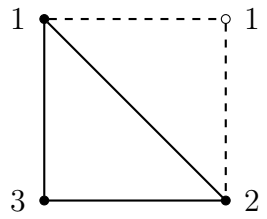
Proposition 3.1.2. *Soient G un cycle d'ordre $n \geq 3$ et uxv une chaîne induite P_3 quelconque de G de centre x. Si $G = C_n$. Alors*

$$b(G_{uv}^x) = \begin{cases} 2 & si\ n = 5 \\ 3 & si\ n \neq 5 \end{cases}$$

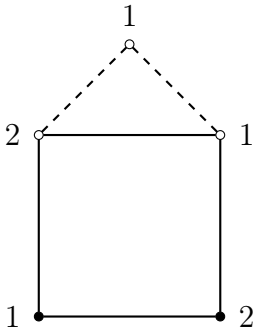
Preuve. Soit $G = C_n$, alors $G_{uv}^x = C_{n-1} \cup \{x\}$. Avec

$V(C_{n-1}) = V(C_n) \setminus \{x\}$ et $E(C_{n-1}) = E(C_n) \setminus \{ux, vx\} \cup \{uv\}$.

Il est clair que $b(G_{uv}^x) = b(C_{n-1})$. Au vu du Proposition 2.2.7, on a les résultats désirés.



Pour $n = 4$, $b(G_{uv}^x) = b(C_3)$



Pour $n = 5$, $b(G_{uv}^x) = b(C_4)$

FIGURE 3.3: Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 4, 5$.

3.1.3 Arête lifting et nombre b-chromatique des étoiles

Proposition 3.1.3. *Soient $G = K_{1,n}$ avec $n \geq 2$ et uxv une chaîne induite P_3 quelconque. Alors*

$$b(G_{uv}^x) = 2$$

Preuve.

Soit $G = K_{1,n}$, $n \geq 2$, alors $G_{uv}^x = K_{1,n-2} + P_2$, donc $b(G_{uv}^x) = b(K_{1,n-2})$. Au vu la Proposition 2.2.4, on a le résultat désiré.



FIGURE 3.4: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 4, 5$.

3.1.4 Arête lifting et nombre b-chromatique des graphes de Friendship

Proposition 3.1.4. *Soient $G = F_n$ et uxv une chaîne induite P_3 quelconque. Alors pour $n \geq 2$,*

$$b(G^x_{uv}) = 3$$

preuve. Soit G un graphe de Friendship.

Si $n = 2$, alors $b(G^x_{uv}) = b(C_5) = 3$.

Pour $n \geq 3$, le m-degré de G^x_{uv} est égal à 3. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 3$. Il est clair de voir que C_5 est un sous graphe de G^x_{uv}. Donc $b(G^x_{uv}) \geq b(C_5) = 3$. Donc $b(G^x_{uv}) = 3$.

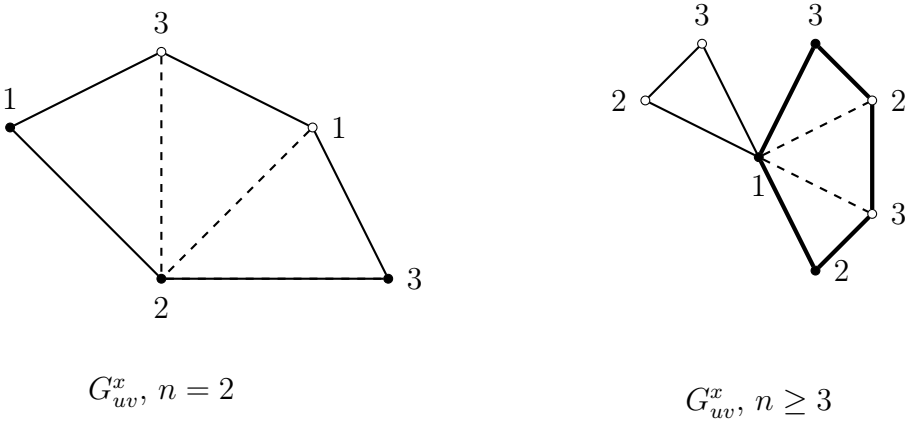


FIGURE 3.5: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 2$ et $n \geq 3$.

3.2 Arête lifting et nombre b-chromatiques des graphes milieux et graphes totaux des chaînes et des cycles

3.2.1 Arête lifting et nombre b-chromatiques de $M(P_n)$ et $T(P_n)$

Le nombre b-chromatiques des graphes milieux et graphes totaux des chaînes et des cycles sera l'objet de cette section, lorsque on supprimant les arêtes ux, vx d'une chaîne induite P_3 quelconque centrée à x et on ajoutant uv.

Le nombre b-chromatiques de $M(P_n)$

Remarque 3.2.1. *Dans ce cas, il existe cinq types des chaînes, κ_1, κ_2, κ_3, κ_4 et κ_5 avec :*

- $\kappa_1 = \cup_{i=1}^{n-3}\{e_i - e_{i+1} - e_{i+2}\}$.
- $\kappa_2 = \{x_1 - e_1 - x_2\} \cup \{x_{n-1} - e_{n-1} - x_n\} \cup \{x_1 - e_1 - e_2\} \cup \{e_{n-2} - e_{n-1} - x_n\}$.
- $\kappa_3 = \cup_{i=2}^{n-2}\{x_i - e_i - x_{i+1}\}$.
- $\kappa_4 = \cup_{i=2}^{n-1}\{x_i - e_i - e_{i+1}\}$.
- $\kappa_5 = \cup_{i=1}^{n-3}\{e_i - e_{i+1} - x_{i+2}\}$. *(Voir la Figure 3.6)*

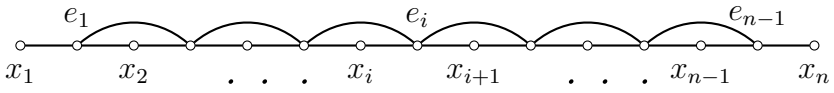


FIGURE 3.6: Les types des chaînes induites P_3 dans un graphe milieu d'une chaîne

.

Proposition 3.2.1. *Soit $G = M(P_n)$ avec $n \geq 3$. Alors*

i) Si $uxv \in \kappa_2$. Alors

$$b(G_{uv}^x) = \begin{cases} 2 & si\ n = 3 \\ 3 & si\ n = 4, 5 \\ 4 & si\ n = 6, 7 \\ 5 & si\ n \geq 8 \end{cases}$$

ii) Si $uxv \in \kappa_1$, κ_3, κ_4 ou κ_5 . Alors

$$b(G_{uv}^x) = \begin{cases} 2 & si\ n = 3 \\ 3 & si\ n = 4, 5 \\ 4 & si\ n = 6, 7, 8 \\ 5 & si\ n \geq 9 \end{cases}$$

Preuve.

i) Soit $H = M(P_8)$, il est facile de voir que le m-degré de H_{uv}^x est égal à 5. Alors $b(H_{uv}^x) \leq 5$. La Figure 3.7 présente une b-coloration de H_{uv}^x avec 5 couleurs. Donc $b(H_{uv}^x) \geq 5$. Ceci implique que $b(H_{uv}^x)$ est égal à 5. Vu que H_{uv}^x est un sous graphe de G_{uv}^x et puisque pour $n \geq 9$, $\Delta(G_{uv}^x) = 4$, alors on peut étendre cette coloration à G_{uv}^x. En conséquence, $b(G_{uv}^x) = 5$.

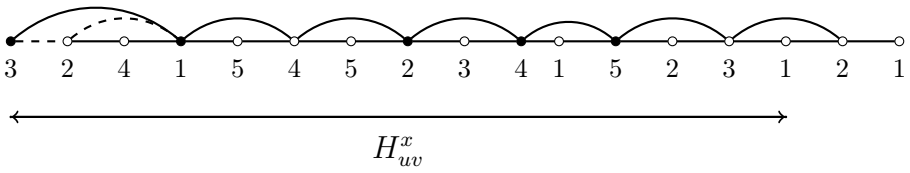


FIGURE 3.7: Une b-coloration optimale de G_{uv}^x pour $n = 9$.

.

Pour $n = 3$, il est facile de voir que le m-degré de G_{uv}^x est égal à 2. Donc $b(G_{uv}^x) \leq 2$. La Figure 3.8 donne une b-coloration de G_{uv}^x avec deux couleurs. Alors $b(G_{uv}^x) \geq 2$. Ceci implique $b(G_{uv}^x) = 2$.

Si $n = 4$ (resp., $n = 5$), il est facile de voir que le m-degré de G_{uv}^x est égal à 3. Donc $b(G_{uv}^x) \leq 3$. La Figure 3.8 donne une b-coloration de G_{uv}^x avec 3 couleurs. Alors $b(G_{uv}^x) \geq 3$. Ceci implique $b(G_{uv}^x) = 3$.

Pour $n = 6$ (resp., $n =, 7$), il est facile de voir que le m-degré de G_{uv}^x est égal à 4. Donc $b(G_{uv}^x) \leq 4$. La Figure 3.8 donne une b-coloration de G_{uv}^x avec 4 couleurs. Alors $b(G_{uv}^x) \geq 4$. Ceci implique $b(G_{uv}^x) = 4$.

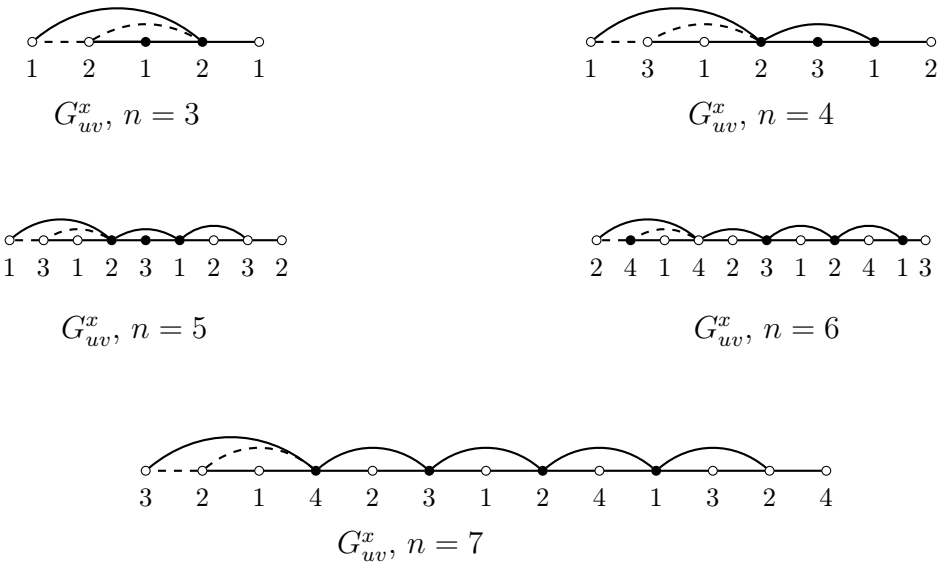


FIGURE 3.8: Une b-coloration optimale de G^x_{uv} pour $3 \leq n \leq 7$.

ii) Soit $H = M(P_9)$, il est facile de voir que le m-degré de H^x_{uv} est égal à 5. Alors $b(H^x_{uv}) \leq 5$. La Figure 3.9 donne une b-coloration de H^x_{uv} avec 5 couleurs. Ceci implique que $b(H^x_{uv}) \geq 5$. D'ø'u $b(H^x_{uv}) = 5$ est égal à 5. Vu que H^x_{uv} est un sous graphe de G^x_{uv}. Puisque pour $n \geq 10$, $\Delta(G^x_{uv}) = 4$, alors on peut étendre cette coloration à G^x_{uv}. En conséquence $b(G^x_{uv}) = 5$.

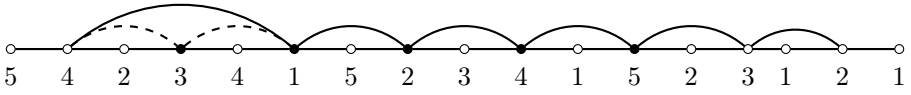


FIGURE 3.9: Une b-coloration optimale de G^x_{uv} pour $n = 9$.

Si $n = 3$, il est facile de voir que le m-degré de G^x_{uv} est égal à 2. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 2$. La Figure 3.10 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec deux couleurs. Alors $b(G^x_{uv}) \geq 2$. D'où $b(G^x_{uv}) = 2$.

Si $n = 4$ (resp., $n = 5$), il est facile de voir que le m-degré de G^x_{uv} est égal à 3. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 3$. La Figure 3.10 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec 3 couleurs. Alors $b(G^x_{uv}) \geq 3$. D'où $b(G^x_{uv}) = 3$.

Si $n = 6$ (resp., $n = 7$), il est facile de voir que le m-degré de G^x_{uv} est égal à 4. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 4$. La Figure 3.10 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec 4 couleurs. Alors $b(G^x_{uv}) \geq 4$. D'où $b(G^x_{uv}) = 4$.

Si $n = 8$, comme $M(P_8)$ a exactement 5 sommets de degré 4 donc le m-degré de $M(P_8)$ est égal à 5, alors si $uxv \in \kappa_1, \kappa_3, \kappa_4$ ou κ_5, le m-degré de G^x_{uv} est égal à 4. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 4$. La

Figure 3.10 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec 4 couleurs. Alors $b(G^x_{uv}) \geq 4$. D'où $b(G^x_{uv}) = 4$.

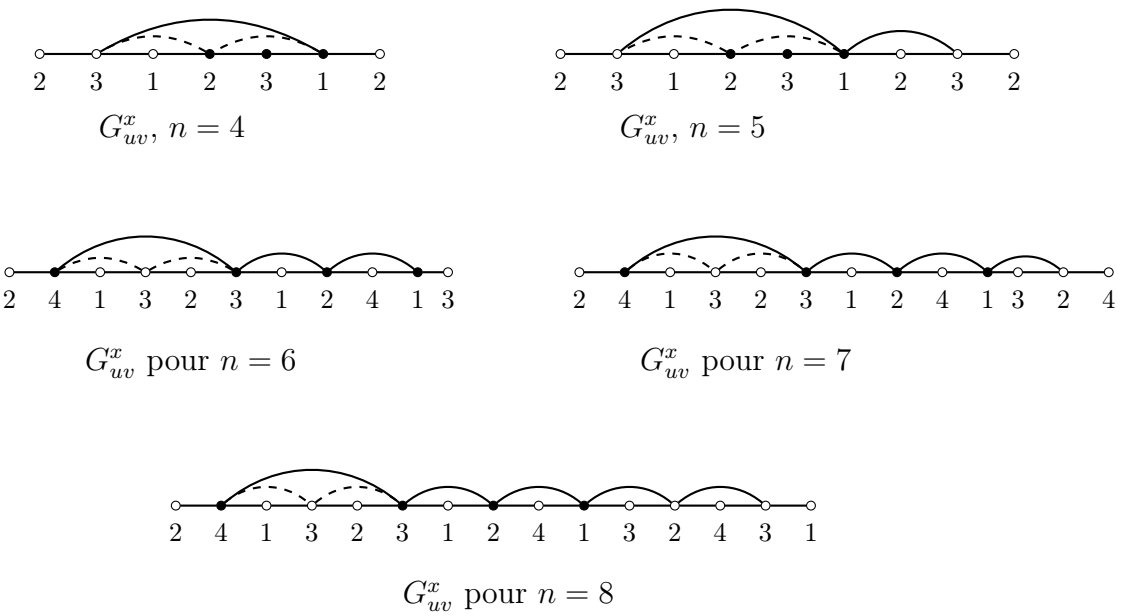


FIGURE 3.10: Une b-coloration optimale de G^x_{uv} pour $3 \leq n \leq 8$.

Le nombre b-chromatiques de $T(P_n)$

Remarque 3.2.2. *Dans ce cas, il existe sept types des chaine induites P_3, κ_1, κ_2, κ_3, κ_4, κ_5, κ_6 et κ_7 avec :*

— $\kappa_1 = \{x_1 - e_1 - e_2\} \cup \{x_n - e_{n-1} - e_{n-2}\}$.

— $\kappa_2 = \cup_{i=1}^{n-3}\{e_i - e_{i+1} - e_{i+2}\}$.

— $\kappa_3 = \cup_{i=1}^{n-2}\{x_i - x_{i+1} - x_{i+2}\}$.

— $\kappa_4 = \cup_{i=2}^{n-2}\{x_i - e_i - e_{i+1}\}$.

— $\kappa_5 = \cup_{i=1}^{n-2}\{x_i - x_{i+1} - e_{i+1}\}$.

— $\kappa_6 = \cup_{i=1}^{n-3}\{e_i - e_{i+1} - x_{i+2}\}$.

— $\kappa_7 = \cup_{i=1}^{n-2}\{e_i - x_{i+1} - x_{i+2}\}$. *(Voir la Figure 3.11).*

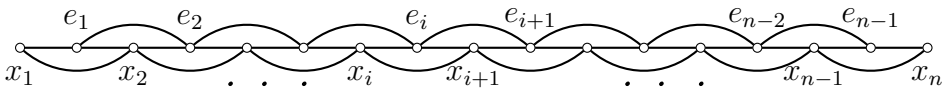


FIGURE 3.11: Les types des chaînes induites P_3 dans le graphe total de P_n.

Proposition 3.2.2. *Soit $G = T(P_n)$. Alors*

i) Si $uxv \in \kappa_3$, κ_4, κ_5, κ_6 ou κ_7. Alors

$$b(G_{uv}^x) = \begin{cases} 4 & si\ n = 4, 5 \\ 5 & si\ n \geq 6 \end{cases}$$

ii) Si $uxv \in \kappa_2$. Alors

$$b(G_{uv}^x) = \begin{cases} 3 & si\ n = 4 \\ 4 & si\ n = 5 \\ 5 & si\ n \geq 6 \end{cases}$$

iii) Si $uxv \in \kappa_1$. Alors

$$b(G_{uv}^x) = \begin{cases} 3 & si\ n = 3 \\ 4 & si\ n = 4 \\ 5 & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

Preuve.

i) Soit $H = T(P_6)$ un sous graphe de $T(P_n)$, pour $n \geq 7$. Il est facile de voir que le m-degré de H_{uv}^x est égal à 5. Donc $b(H_{uv}^x) \leq 5$. La Figure 3.13 représente une b-coloration de H_{uv}^x avec 5 couleurs. Ceci implique que $b(H_{uv}^x) \geq 5$. D'où $b(H_{uv}^x) = 5$. On considère une b-coloration c de H_{uv}^x avec 5 couleurs (coloration partielle de G_{uv}^x).

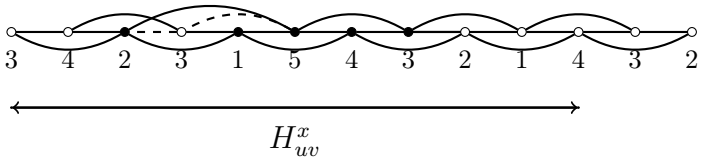
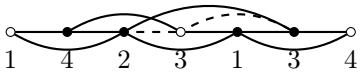


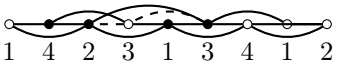
FIGURE 3.12: Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 7$.

Puisque pour $n \geq 7$, $\Delta(G_{uv}^x) = 4$, alors c peut s'étendre à G_{uv}^x. En conséquence $b(G_{uv}^x) = 5$.

Pour $n = 4$, il est facile de voir que le m-degré de G_{uv}^x est égal à 4. Donc $b(G_{uv}^x) \leq 4$. La Figure 3.13 donne une b-coloration de G_{uv}^x avec 4 couleurs. Alors $b(G_{uv}^x) \geq 4$. D'où $b(G_{uv}^x) = 4$.
Si $n = 5$, il est facile de voir que le m-degré de G_{uv}^x est égal à 4. Donc $b(G_{uv}^x) \leq 4$. La Figure 3.13 donne une b-coloration de G_{uv}^x avec 4 couleurs. Alors $b(G_{uv}^x) \geq 4$. D'où $b(G_{uv}^x) = 4$.



G^x_{uv}, $n = 4$.



G^x_{uv}, $n = 5$



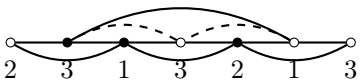
G^x_{uv}, $n = 6$

FIGURE 3.13: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $4 \leq n \leq 6$.

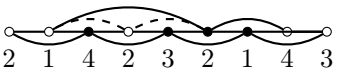
ii) Soit $H = T(P_6)$ un sous graphe de $T(P_n)$, pour $n \geq 7$. Il est clair de vérifie que le m-degré de H^x_{uv} est égal à 5. Donc $b(H^x_{uv}) \leq 5$. La Figure 3.14 représente une b-coloration de H^x_{uv} avec 5 couleurs. Ceci implique que $b(H^x_{uv}) \geq 5$. D'où $b(H^x_{uv})$=5. On considère une b-coloration c de H^x_{uv} avec 5 couleurs (coloration partielle de G^x_{uv}). Puisque pour $n \geq 7$, $\Delta(G^x_{uv}) = 4$, alors c peut s'étendre à G^x_{uv}. En conséquence $b(G^x_{uv}) = 5$.

Pour $n = 4$, il est facile de voir que le m-degré de G^x_{uv} est égal à 3. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 3$. La Figure 3.14 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec 3 couleurs. Alors $b(G^x_{uv}) \geq 3$. Ceci implique $b(G^x_{uv}) = 3$.

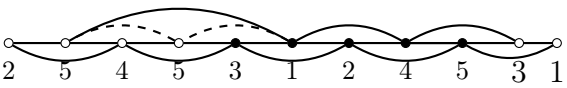
Si $n = 5$, il est facile de voir que le m-degré de G^x_{uv} est égal à 4. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 4$. La Figure 3.14 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec 4 couleurs. Alors $b(G^x_{uv}) \geq 4$. Ceci implique $b(G^x_{uv}) = 4$.



G^x_{uv}, $n = 4$.



G^x_{uv}, $n = 5$



G^x_{uv}, $n = 6$

FIGURE 3.14: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $4 \leq n \leq 6$.

iii) Pour $n = 3$, il est facile de voir que le m-degré de G^x_{uv} est égal à 3. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 3$. La Figure 3.15 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec 3 couleurs. Alors $b(G^x_{uv}) \geq 3$. Ceci implique

$b(G^x_{uv}) = 3$.

Si $n = 4$, il est facile de voir que le m-degré de G^x_{uv} est égal à 4. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 4$. La Figure 3.15 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec 4 couleurs. Alors $b(G^x_{uv}) \geq 4$. Ceci implique $b(G^x_{uv}) = 4$.

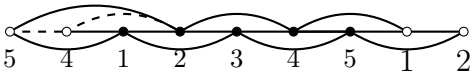
Soit $H = T(P_5)$, un sous graphe de $T(P_n)$ pour $n \geq 6$. Il est facile de voir que le m-degré de H^x_{uv} est égal à 5. Donc $b(H^x_{uv}) \leq 5$. La Figure 3.15 donne une b-coloration de H^x_{uv} avec 5 couleurs. Alors $b(H^x_{uv}) \geq 5$. Ceci implique que $b(H^x_{uv}) = 5$. On considère une b-coloration c de H^x_{uv} avec 5 couleurs (coloration partielle de G^x_{uv}), puisque pour $n \geq 7$, $\Delta(G^x_{uv}) = 4$, alors c peut s'étendre à G^x_{uv}. En conséquence $b(G^x_{uv}) = 5$.



G^x_{uv}, $n = 3$.



G^x_{uv}, $n = 4$



G^x_{uv}, $n = 5$

FIGURE 3.15: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $3 \leq n \leq 5$.

3.2.2 Arête lifting et nombre b-chromatiques de $M(C_n)$ et $T(C_n)$

Proposition 3.2.3. *Soient G un cycle d'ordre $n \geq 3$ et uxv une chaîne induite P_3 quelconque de G de centre x.*

i) Si $G = M(C_n)$. Alors

$$b(G^x_{uv}) = \begin{cases} 3 & si\ n = 3, 4 \\ 4 & si\ n = 5 \\ 5 & si\ n \geq 6 \end{cases}$$

ii) Si $G = T(C_n)$. Alors

$$b(G^x_{uv}) = \begin{cases} 4 & si\ n = 3, 4 \\ 5 & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

Preuve.

i) Si $n = 3$ (resp., $n = 4$), la Figure 3.16 donne une b-coloration de G^x_{uv} avec 3 couleurs.

Alors $b(G^x_{uv}) \geq 3$. De plus, le m-degré de G^x_{uv} est égal à 3, alors $b(G^x_{uv}) \leq 3$. Ceci implique que $b(G^x_{uv}) = 3$.

Si $n = 5$, il est clair de vérifie que le m-degré de G^x_{uv}est égal à 4, donc $b(G^x_{uv}) \leq 4$. La Figure 3.16 présente une b-coloration de G^x_{uv} avec 4 couleurs, donc $b(G^x_{uv}) \geq 4$. D'où le résultat désiré.

De la même manière, on trouve $b(G^x_{uv}) = 5$, pour $n = 6, 7, 8$. (Voir la Figure 3.17).

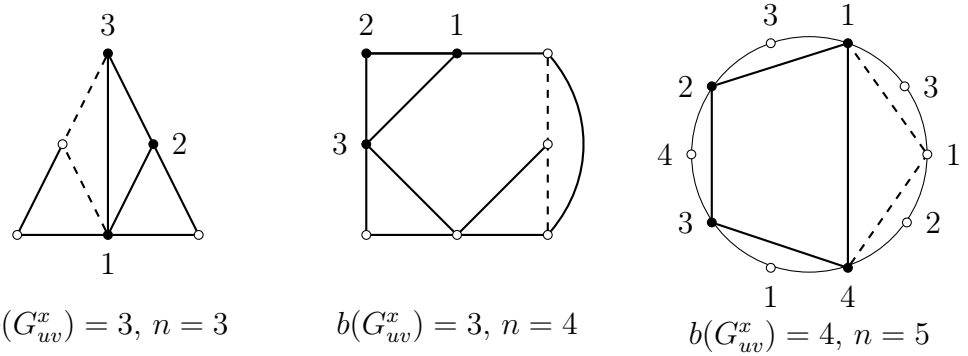


FIGURE 3.16: Une b-coloration optimale de G^x_{uv} pour $3 \leq n \leq 5$.

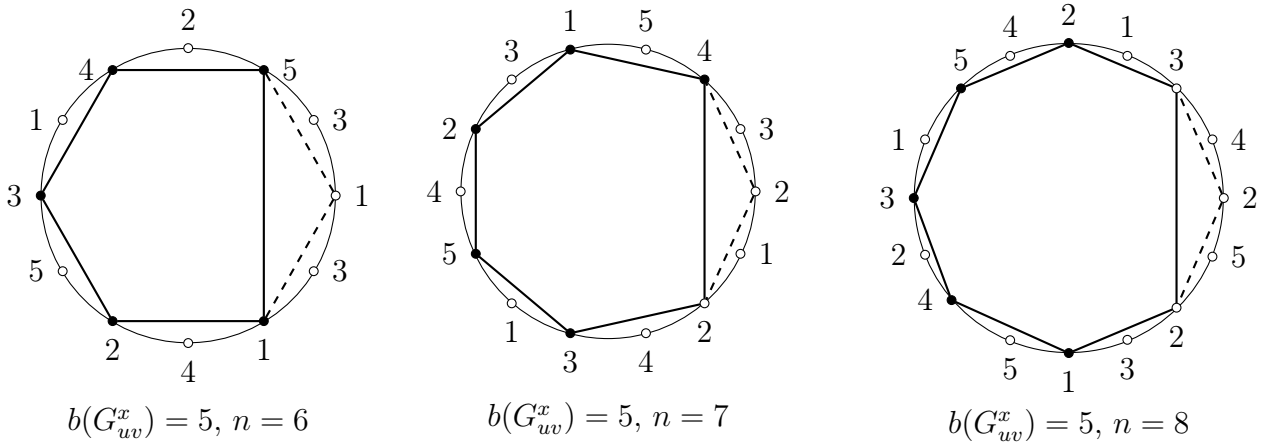


FIGURE 3.17: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $6 \leq n \leq 8$.

Soit $H = M(P_8)$, il est facile de voir que H est un sous graphe de G^x_{uv}, Pour $n \geq 9$, nous allons montrer que toute b-coloration optimale de H peut s'étendre à une b-coloration optimale de G^x_{uv} et par conséquent $b(G^x_{uv}) = b(H)$. D'après la Proposition 2.2.6, $b(H) = 5$. Soit c une b-coloration de H avec 5 couleurs (une coloration partielle de G^x_{uv}). Comme $\Delta(G^x_{uv}) = 4$, alors il existe une couleur disponible pour tout sommet non coloré de G. Donc c peut s'étendre à G^x_{uv} et par conséquent, G^x_{uv} admet une b-coloration avec $\Delta(G^x_{uv}) + 1$ couleurs. En conséquence, $b(G^x_{uv}) = 5$, pour tout $n \geq 8$.

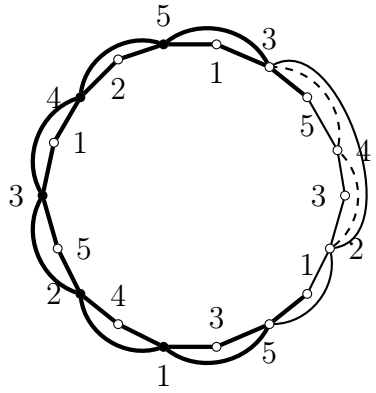
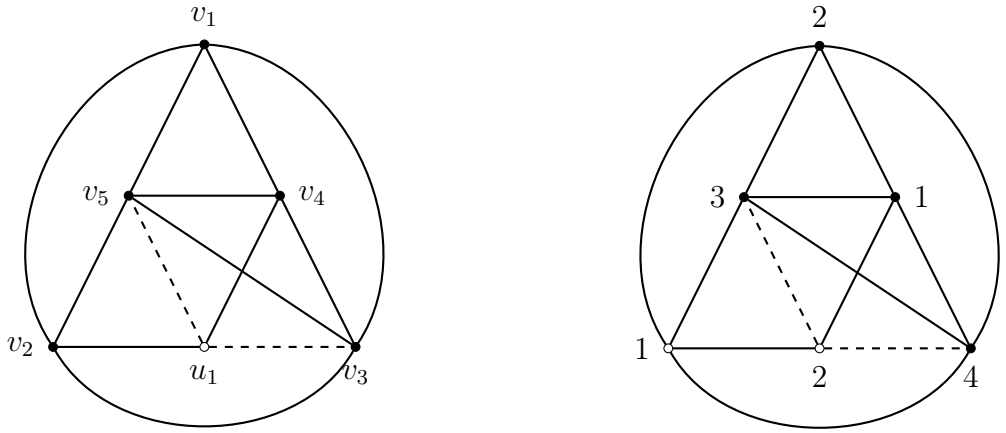


FIGURE 3.18: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 9$.

ii) Soit $G = T(C_3)$, l'ordre de G^x_{uv} est égale à 6, Vu que $\Delta(G^x_{uv}) = 4$, alors $b(G^x_{uv}) \leq 5$. Supposons que $b(G^x_{uv}) = 5$. Soit c une b-coloration de G^x_{uv} avec 5 couleurs. Soient v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 les b-sommets de c de couleurs 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement. Notons par u_1 l'autre sommet de G^x_{uv}, u_1 ne peut prendre les couleurs 2 et 4, mais le sommet v_2 besoin la couleur 4. Dans ce cas on aura deux sommets adjacents de même couleur, donc $b(G^x_{uv}) \leq 4$. Dans la Figure 3.19 on a une coloration avec 4 couleurs, donc $b(G^x_{uv}) = 4$.

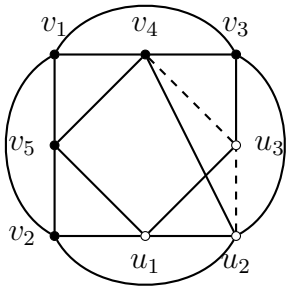


L'explication $b(G^x_{uv}) = 4$ pour $n = 3$

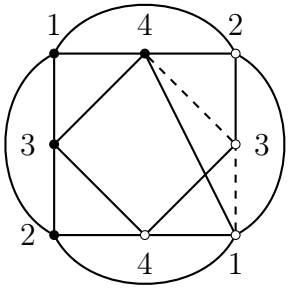
FIGURE 3.19: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 3$.

Soit $G = T(C_4)$, l'ordre de G^x_{uv} est égale à 8. Vu que $\Delta(G^x_{uv}) = 4$, alors $b(G^x_{uv}) \leq 5$. Supposons que $b(G^x_{uv}) = 5$. Soit c une b-coloration de G^x_{uv} avec 5 couleurs. Soient v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 les b-sommets de c de couleurs 1,2,3,4 et 5 respectivement. Notons par u_1, u_2 et u_3 les autres sommets de G^x_{uv} (Voir la Figure 3.20). Puisque v_2 est un b-sommet, alors il a besoin des

couleurs 3 et 4. Ceci implique que l'un des deux sommets u_1 et u_2, Disons u_1, reçoit la couleur 3 et l'autre la couleur 4. Dans ce cas, La couleur 4 est répétée dans le voisinage de v_3. Ainsi, v_3 aura deux couleurs manquantes dans son voisinage, Contradiction. D'où $b(G^x_{uv}) \leq 4$. Par ailleurs, la Figure 3.20 présente une b-coloration de G^x_{uv} avec 5 couleurs. D'où $b(G^x_{uv}) = 4$.



L'explication



$b(G^x_{uv})$ pour $n = 4$

FIGURE 3.20: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 4$.

Soit $H = T(C_5)$. Il est facile de voir que le m-degré de H^x_{uv} est égal à 5, alors $b(H^x_{uv}) \leq 5$. La Figure 3.21 donne une b-coloration de H^x_{uv} avec 5 couleurs, donc $b(H^x_{uv}) \geq 5$. D'où $b(H^x_{uv}) = 5$.

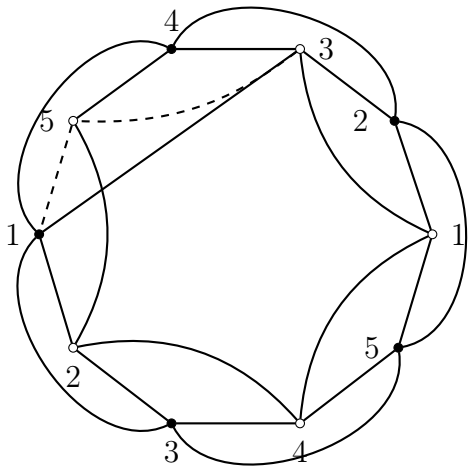


FIGURE 3.21: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 5$.

Montrons maintenant que, pour $n \geq 6$, $b(G^x_{uv}) = 5$. Comme le m-degré de G^x_{uv} est égale à 5. Donc $b(G^x_{uv}) \leq 5$. Pour avoir, il suffit de donner une b-coloration de G^x_{uv} avec 5 couleurs. Pour cela,considérons un sous graphe H de G^x_{uv} obtenue a partir de G^x_{uv} pour $n = 6$. On supprimant un seul sommet de G^x_{uv}. Puisque m(H) $\leq m(G^x_{uv})$, alors $b(H) \leq 5$. Par ailleurs, la Figure 3.22

présente une b-coloration c de H avec 5 couleurs. Par conséquence, $b(H) = 5$. Soit c une b-coloration de H avec 5 couleurs. Comme $\Delta(G^x_{uv}) = 4$, alors c peut s'étendre à G^x_{uv}, pour $n \geq 6$. D'où $b(G^x_{uv}) = 5$.

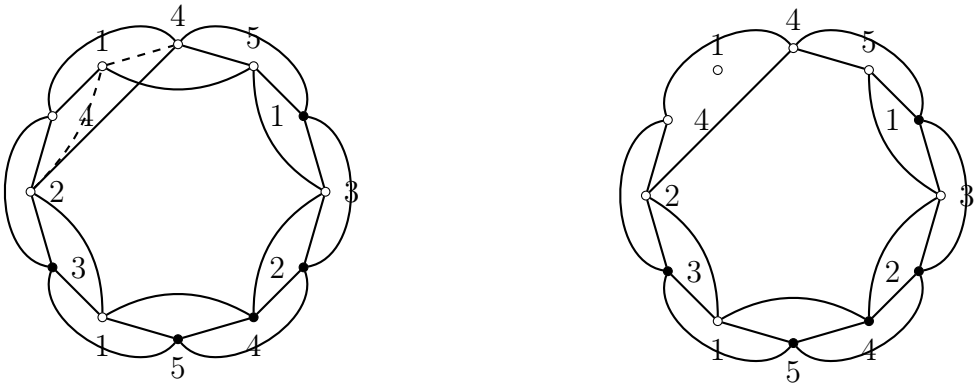


FIGURE 3.22: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 6$.

3.3 Arête lift et nombre b-chromatique des couronnes des chaînes, des cycles, des étoiles et des graphes de Friendship

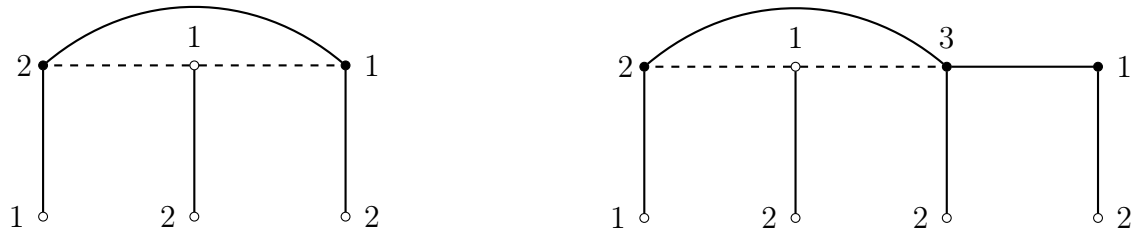
Dans cette section, nous allons déterminées le nombre b-chromatique de $Cr(P_n)$, $Cr(C_n)$, $Cr(K_{1,n})$ et $Cr(F_n)$ lorsque on supprimant les arêtes ux, vx d'une chaîne induite P_3 quelconque centrée à x et on ajoutant uv.

3.3.1 Arête lifting et nombre b-chromatique de $Cr(P_n)$

Proposition 3.3.1. *Soient $G = Cr(P_n)$ et uxv une chaîne induite P_3 quelconque. Alors*

$$b(G^x_{uv}) = \begin{cases} 2 & si\ n = 2, 3 \\ 3 & si\ n = 4, 5, 6 \\ 4 & si\ n \geq 7 \end{cases}$$

Preuve. Soit $G = Cr(P_n)$, alors $G^x_{uv} = Cr(P_{n-1}) + P_2$. Il est clair que $b(G^x_{uv}) = b(Cr(P_{n-1})$. Au vu du Proposition 2.2.6, on a les résultats désirés.



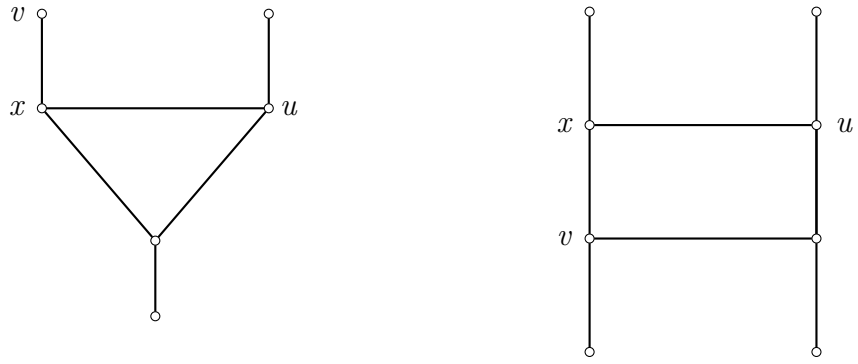
Pour n=3, $b(G^x_{uv}) = b(Cr(P_2))$ Pour n=4, $b(G^x_{uv}) = b(Cr(P_3)$

FIGURE 3.23: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 3, 4$.

3.3.2 Arête lifting et nombre b-chromatique de $Cr(C_n)$

Remarque 3.3.1. *Soit $G = Cr(C_n)$, dans ce cas on constate deux types des chaînes induites P_3 :*

- $\kappa_1 = \{\ uxv \mid ux, vx \in E(G)\ \}$.
- $\kappa_2 = \{uxv | ux \in E(G), vx \notin E(G)\}$. *(Voir la Figure 3.24).*



$\{uxv | ux \in E(G),\ vx \notin E(G)\}$ $\{uxv | ux,\ vx \in E(G)\}$

FIGURE 3.24: Une représentation des types des chaînes.

Proposition 3.3.2. *Soit $G = Cr(C_n)$. Alors*

i) si $uxv \in \kappa_1$, alors

$$b(G^x_{uv}) = \begin{cases} 3 & si\ n = 4, 6 \\ 4 & si\ n = 5 \\ 4 & si\ n \geq\ 7 \end{cases}$$

ii) Si $uxv \in \kappa_2$, alors

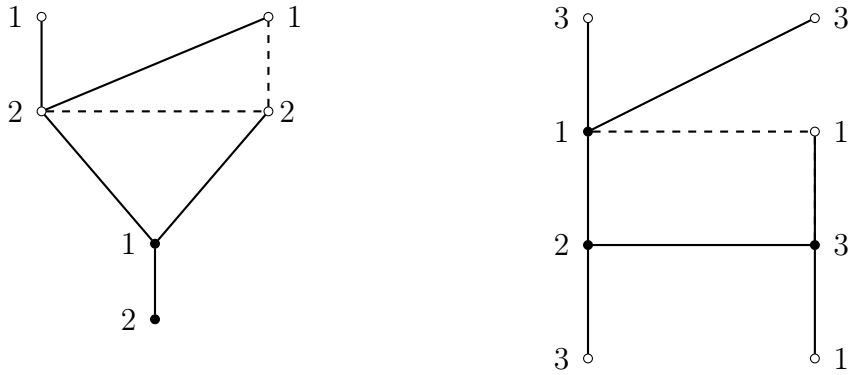
$$b(G_{uv}^x) = \begin{cases} 2 & si\ n = 3 \\ 3 & si\ n = 4 \\ 4 & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

Preuve.

i) Soit $G = Cr(C_n)$, alors $G_{uv}^x = Cr(C_{n-1}) + P_2$ avec $V(Cr(C_{n-1})) = V(Cr(C_n) \setminus \{x\}$ et $E(Cr(C_{n-1}) = E(Cr(C_n) \setminus \{ux, vx\} \cup \{uv\}$. Il est clair que $b(G_{uv}^x) = b(Cr(C_{n-1}))$. Au vu du Proposition 2.2.7, on a les résultats désirés.

ii) Si $n = 3$, il est immédiat que le m-degré de G_{uv}^x est égal à 2, alors $b(G_{uv}^x) \leq 2$. G_{uv}^x admet une b-coloration avec 2 couleurs (Voir la Figure 3.25), donc $b(G_{uv}^x) \geq 2$. D'où $b(G_{uv}^x) = 2$.

Si $n = 4$, il est clair de vérifie que le m-degré de G_{uv}^x est égal à 3, alors $b(G_{uv}^x) \leq 3$. G_{uv}^x admet une b-coloration avec 3 couleurs (Voir la Figure 3.25), donc $b(G_{uv}^x) \geq 3$. D'où $b(G_{uv}^x) = 3$.



$b(G_{uv}^x)$ pour $n = 3$ $b(G_{uv}^x)$ pour $n = 4$

FIGURE 3.25: Une b-coloration de G_{uv}^x pour $n = 3, 4$.

Soit $H = Cr(C_5)$. Il est facile de voir que le m-degré du graphe H_{uv}^x est égal à 4 et H_{uv}^x admet une b-coloration avec 4 couleurs (Voir la Figure 3.26). D'où $b(H_{uv}^x) = 4$.

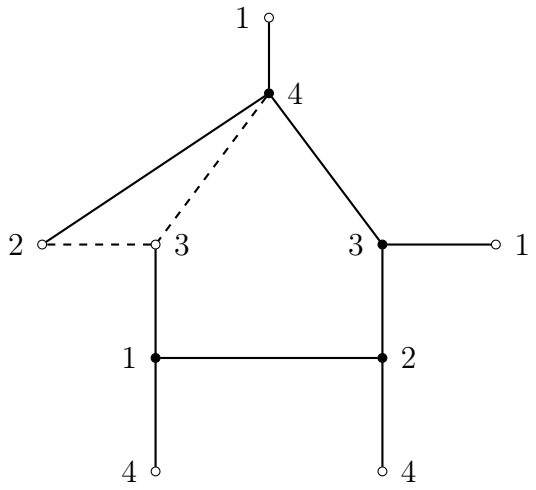


FIGURE 3.26: Une b-coloration de H^x_{uv} pour $n = 5$.

Si $n \geq 6$, il est clair de vérifie que H^x_{uv} est un sous graphe de G^x_{uv}. Puisque $\Delta(G^x_{uv}) = 3$, alors on peut étendre cette coloration à G^x_{uv}. Ceci implique que $b(G^x_{uv}) = 4$.

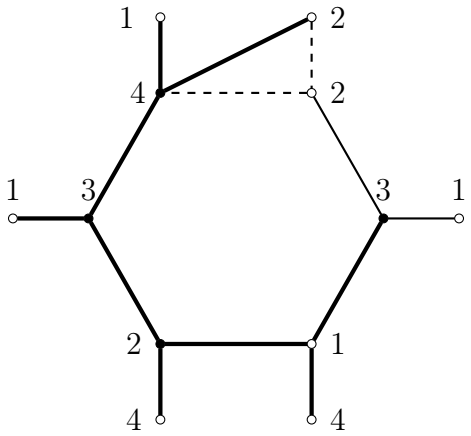


FIGURE 3.27: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 6$.

3.3.3 Arête lifting et nombre b-chromatique de $Cr(K_{1,n})$

Proposition 3.3.3. *Soit $G = Cr(K_{1,n})$, et soit uxv une chaîne induite P_3 quelconque. Alors*

$$b(G^x_{uv}) = \begin{cases} 2 & si\ n = 2 \\ 3 & si\ n \geq 3 \end{cases}$$

Preuve. Si $n \geq 3$, alors $G^x_{uv} = Cr(K_{1,n-2}) + P_4$. Donc $b(G^x_{uv}) = b(Cr(K_{1,n-2}))$. Au vu la Proposition 2.2.4, on a les résultats désirés.

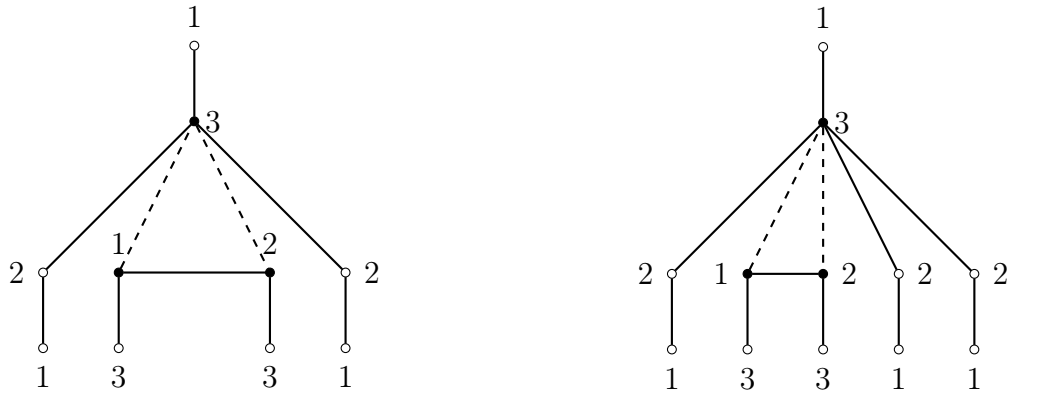


FIGURE 3.28: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 4$ et $n = 5$.

Si $n = 2$, la Figure 3.29 donne une b-coloration optimale de G^x_{uv} avec deux couleurs, donc $b(G^x_{uv}) \geq 2$. D'autre part, le m-degré de G^x_{uv} est égal à 2, alors $b(G^x_{uv}) \leq 2$. D'où $b(G^x_{uv}) = 2$.

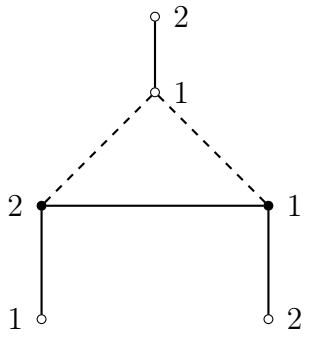


FIGURE 3.29: Une b-coloration de G^x_{uv} pour $n = 2$.

3.3.4 Arête lifting et nombre b-chromatique de $Cr(F_n)$

Remarque 3.3.2. *Si $n \geq 3$, alors toutes les chaînes induites P_3 jouent le même rôle.*

Si $n = 2$, il existe quatre types des chaînes induites P_3, κ_1, κ_2, κ_3 et κ_4 avec :

— $\kappa_1 = \{x_2 - y - x_3\} \cup \{x_1 - y - x_4\}$.

— $\kappa_2 = \cup_{i=1}^{4} \{e_i - x_i - y\}$.

— $\kappa_3 = \cup_{i=1}^{4} \{x_i - y - e_5\}$.

— $\kappa_4 = \{e_1 - x_1 - x_2\} \cup \{x_1 - x_2 - e_2\} \cup \{e_3 - x_3 - x_4\} \cup \{x_3 - x_4 - e_4\}$. *(Voir la Figure 3.30)*

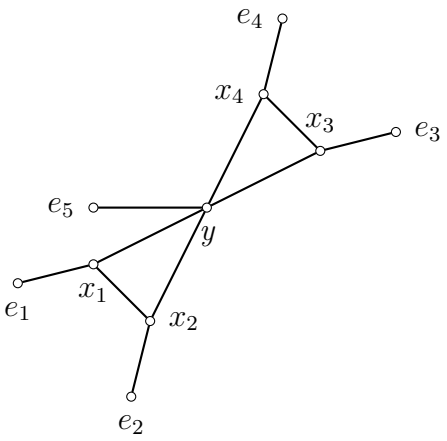


FIGURE 3.30: Les types des chaînes induites P_3 dans $Cr(F_2)$.

Proposition 3.3.4. *Soit $G = Cr(F_n)$.*

i) Si $uxv \in \kappa_2$, κ_3 ou κ_4 alors, pour tout $n \geq 2$, on a

$$b(G^x_{uv}) = 4$$

ii) Si $uxv \in \kappa_1$, alors

$$b(G^x_{uv}) = \begin{cases} 3 & si\ n = 2 \\ 4 & si\ n \geq 3 \end{cases}$$

Preuve.

i) Soit $G = Cr(F_n)$.

Si $n = 2$, il est facile de vérifier que le m-degré de G^x_{uv} est égal à 4, alors $b(G^x_{uv}) \leq 4$. G^x_{uv} admet une b-coloration avec 4 couleurs (Voir la Figure 3.31), donc $b(G^x_{uv}) \geq 4$. D'où $b(G^x_{uv}) = 4$.

Si $n \geq 3$, le graphe G a 4 sommets de degré au moins 3 mais il n'a pas 5 sommets de degré au moins 4. Alors $m(G) = 4$, et donc $b(G) \leq 4$. Soit $S_i \in V(G^x_{uv})$ avec $(1 \leq i \leq n)$ l'ensemble des sommets de G^x_{uv} d'ordre 4 contenant 2 sommets de degré exactement 3 et 2 sommets pendants (Voir la Figure 3.31). Alors, il est clair que $S_i \cap S_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$.

Dans ce cas, une b-coloration de G^x_{uv} avec 4 couleurs est obtenue de la façons suivante. D'abord, on colore les sommets de S_1 et S_2 comme si-indique dans la Figure 3.31. Ensuite, on colore le sommet de degré $2n+1$ par 1. Enfin, vu que le degré des sommets restants est au plus 3, alors on peut étendre cette coloration à G. D'où $b(G^x_{uv}) \geq 4$. Ceci implique que $b(G^x_{uv}) = 4$.

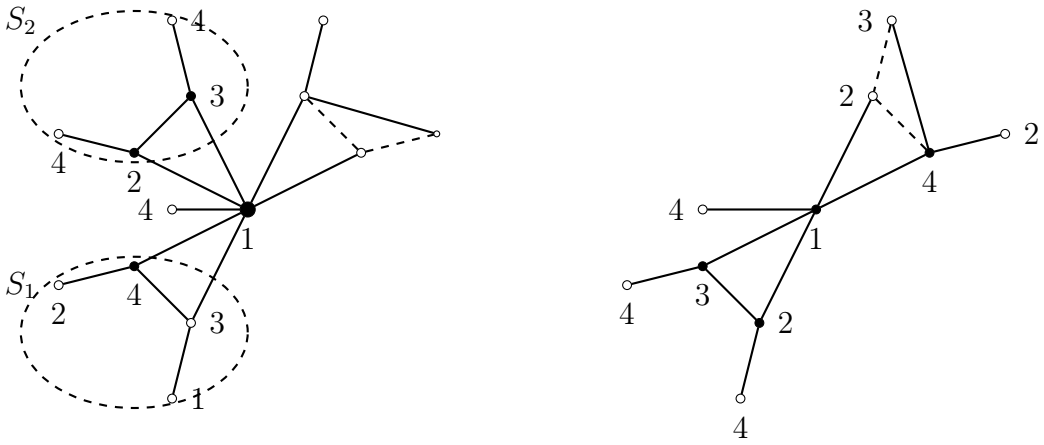


FIGURE 3.31: Une b-coloration de G^x_{uv} avec $n \geq 3$ et $n = 2$ respectivement.

ii) Si $n = 2$, il est clair de voir que $b(G^x_{uv}) = b(Cr(C_5)) = 3$.

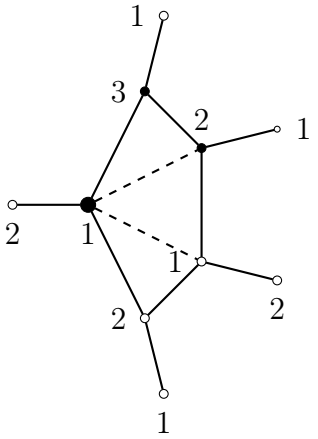


FIGURE 3.32: Une b-coloration de G^x_{uv} avec $n = 2$.

Si $n \geq 3$, on s'applique le même raisonnement du premier cas.

3.4 Résultats particuliers sur les graphes critiques

Dans cette section, nous allons introduire une nouvelle notion liée à la b-coloration, c'est les graphes b_L-critiques qui font l'objet du notre section. Ensuite, nous allons caractériser les graphes b_L^+-critiques et les arbres b_L^--critiques.
Voici quelques notations qui sont utilisées dans la suite.

3.4.1 Quelques notations essentielles

— $\beta(G)$=L'ensemble des chaînes induites P_3.
— $\beta^+(G) = \{uxv \in \beta(G) \mid b(G^x_{uv}) = b(G) + 1\}$.
— $\beta^-(G) = \{uxv \in \beta(G) \mid b(G^x_{uv}) = b(G) - 1\}$.
— $\beta^0(G) = \{uxv \in \beta(G) \mid b(G^x_{uv}) = b(G)\}$.

L'opération de l'arête lifting dans un graphe quelconque peut diminuer ou augmenter son nombre b-chromatique, comme il peut rester inchangé. Par conséquent, les graphes critiques par rapport au nombre b-chromatique peuvent se partitionnés en trois classes.

Définition 3.4.1. *Pour tout graphe connexe G, on définit les classes suivantes.*
— *Un graphe G est dit b_L^--critique si $\beta(G) = \beta^-(G)$.*
— *Un graphe G est dit b_L^+-critique si $\beta(G) = \beta^+(G)$.*
— *Un graphe G est dit $b_L^=$ si $\beta(G) = \beta^0(G)$.*

3.4.2 Graphes $b_L^=$-critiques

En utilisant les Propositions 2.2.6, 2.2.7 et 2.2. On obtient le résultat suivant.

Proposition 3.4.1. *Soient P_n une chaîne d'ordre n et C_n un cycle. Alors*
i) C_n est $b_L^=$-critique si et seulement si $n \geq 6$.
ii) P_n est $b_L^=$-critique si et seulement si $n \neq 5$.

Preuve. Soit $G = C_n \setminus \{ux, vx\} \cup \{uv\}$ avec $n \geq 6$. Puisque $\Delta(G) = 2$, alors la Proposition 2.1 implique que $b(G) \leq 3$. D'autre part, il est immédiat de voir que G contient C_5 comme sous

graphe. Ainsi, il est facile de vérifier que $b(C_5) = 3$ donc cette coloration peut s'étendre à G. De ce fait, $b(G) = 3$. D'après la Proposition 2.2.7, $b(G) = b(C_n) = 3$, pour $n \geq 6$. D'où C_n est $b_L^=$-critique.

Un raisonnement similaire s'applique au autre cas.

Proposition 3.4.2. *Pour tout entier $n \geq 4$, il existe un graphe G $b_L^=$-critique avec $b(G) = n$.*

Preuve. Pour tout $n \geq 4$, on considère $G = K_n \circ K_2$, alors $b(G) = n$ et G est un graphe $b_L^=$-critique.

3.4.3 Graphes b_L^+-critiques

Avant de présenter quelques graphes b_L^+-critiques, il est utile de donner certaines propriétés concernant cette classe de graphes.

Proposition 3.4.3. *Soit G un graphe b_L^+-critique. Alors*

i) $b(G) \leq \Delta(G)$.

ii) $b(G) \leq m - 1$.

Preuve.

i) On suppose que $b(G) \leq \Delta(G)$ n'est pas vrai, alors $b(G) = \Delta(G) + 1$. Comme $\Delta(G_{uv}^x) \leq \Delta(G)$, alors $\Delta(G_{uv}^x) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ et on a $b(G_{uv}^x) \leq \Delta(G_{uv}^x) + 1$. Donc $b(G_{uv}^x) \leq \Delta(G) + 1 = b(G)$. Contradiction avec G est b_L^+-critique.

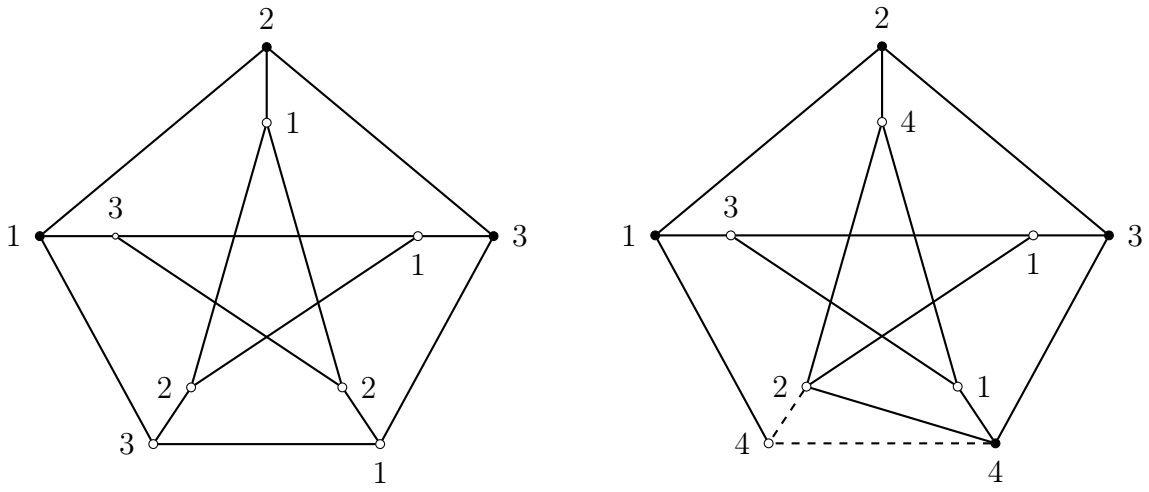
ii) Soit uxv une chaîne induite P_3 quelconque de G. Vu que $m(G_{uv}^x) \leq m(G)$, alors $b(G_{uv}^x) \leq m(G)$. Comme G est b_L^+-critique, alors $b(G) < b(G_{uv}^x)$. Donc $b(G) < m(G)$. D'où, $b(G) \leq m(G) - 1$.

Nous présentons maintenant quelques graphes b_L^+-critiques.

Proposition 3.4.4. *Le graphe de Petersen et $C_3 \square C_3$ ($K_3 \square K_3$) sont des graphes b_L^+-critiques.*

Preuve. Désignons par P le graphe de Petersen. Soit $G = P$ ou $C_3 \square C_3$. D'après la Proposition 2.2.6, $b(G) = 3$. Les Figures 3.33, 3.34 présentent une b-coloration de G_{uv}^x avec 4 couleurs. Vu que toutes les chaînes induites P_3 jouent le même rôle. Alors $b(G_{uv}^x) \geq 4 > b(G) = 3$. D'où P

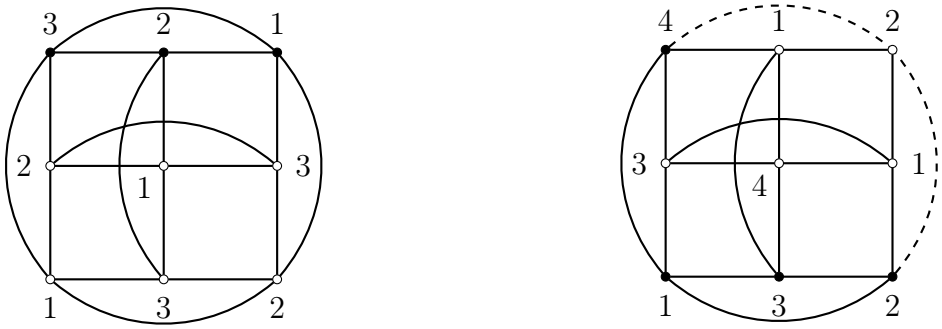
et $C_3\square C_3$ sont des graphes b_L^+-critiques.



Un graphe de Petersen P_{uv}^x

FIGURE 3.33: Le graphe de Peterson avec $b(P) = 3$ et $b(P_{uv}^x) = 4$.

.



$C_3\square C_3$ $(C_3\square C_3)_{uv}^x$.

FIGURE 3.34: Une b-coloration de G=$(C_3\square C_3)$ avec $b(G) = 3$ et $b(G_{uv}^x) = 4$

Proposition 3.4.5. *Soient F_1, F_2 et F_3 les graphes présentés dans la Figure 2.3, alors F_1, F_2 et F_3 ne sont pas des graphes b_L^+-critiques.*

Preuve.

Soient $G = F_1$, $H = F_2$ et $K = F_3$ et soit P une chaîne induite P_3 quelconque, alors on peut facilement vérifier que $m(G_{uv}^x)$=4. Par conséquent, $b(G_{uv}^x) \leq 4$, $b(H_{uv}^x) \leq 4$ et $b(K_{uv}^x) \leq 4$.

Soit $x_1, x_2, ..., x_6$ les sommets de H_{uv}^x. On suppose que $b(H_{uv}^x) = 4$, alors il est clair de voir que

pour tout b-coloration c de H^x_{uv} avec 4 couleurs, $x_1x_2x_3x_4$ sont des b-sommets de c.

Supposons maintenant que $c(x_i) = i$, pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, alors x_2 besoin toutes les couleurs à son voisin, x_5 doit colorer par 4. Ceci est impossible puisque x_5 est adjacent à x_4. Donc $b(H^x_{uv}) \leq 3$. Au vu le Théorème 2.2.7, on obtient le résultat désiré.

Par un raisonnement similaire, on trouve que F_1 et F_3 ne sont pas b^+_L-critiques.

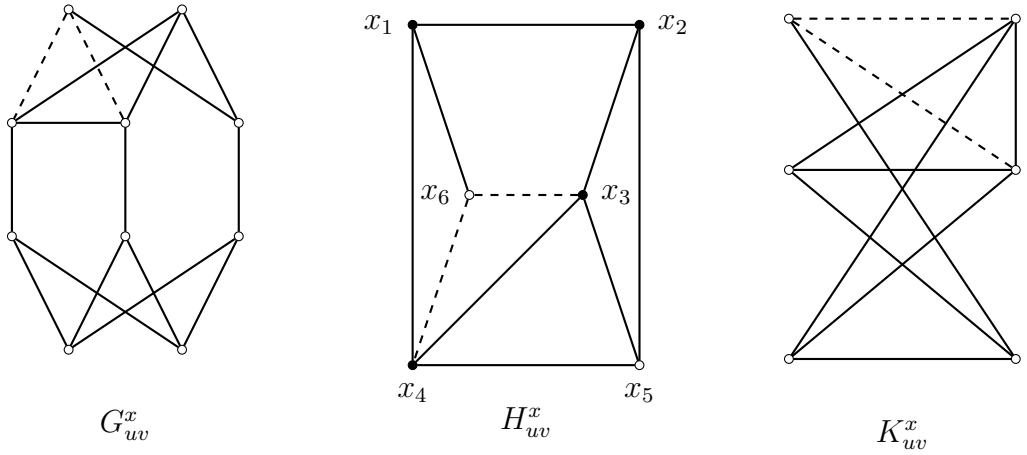


FIGURE 3.35: La représentation de G^x_{uv}, H^x_{uv} et K^x_{uv}.

3.4.4 Graphes b^-_L-critiques

Proposition 3.4.6. *L'arbre pivoté n'est pas b^-_L-critique.*

Preuve. Soient T un arbre pivoté et c une b-coloration de T avec $b(T)$ couleurs. D'après le Théorème 2.2.3, $b(T) = m-1$. Soit S l'ensemble des $(m-1)$ b-sommets des couleurs différentes. Soit D l'ensemble des sommets denses de T. Puisque T est pivoté, on a $|D| = m > |S|$. Soit $u \in D \setminus S$. Soit $v \in S$ avec $c(u) = c(v)$. Alors, u n'est pas adjacent à v mais il est de degré au moins $m-1$. Le sommet u a un voisin $x \in V(T)$. Puisque c est une b-coloration de $T \setminus \{ux, vx\} \cup \{uv\}$, alors T n'est pas b^-_L-critique.

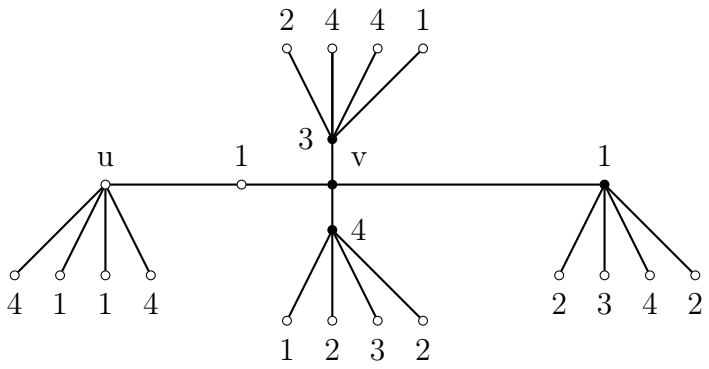


FIGURE 3.36: Une arbre pivoté.

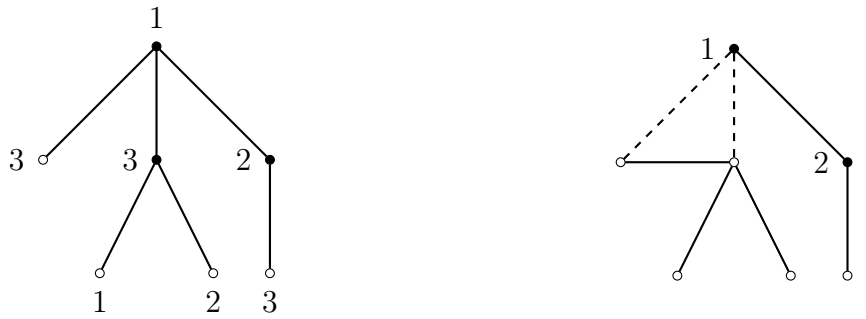
La proposition suivante donne des caractérisations des arbres b_L^--critiques.

Proposition 3.4.7. *Soient T un arbre et c une b-coloration de T, B l'ensemble des b-sommets. Si T est b_L^--critique, alors*

- *$\forall x \in V(T) \setminus B$, x a un voisin dans B.*
- *Si z est un support, donc $z \in B$.*

Preuve.

- Si $x \in V(T) \setminus B$ ne possède pas un voisin dans B, alors c reste une b-coloration de $T \setminus x$ avec $b(T)$ couleurs.
- Si la deuxième condition n'est pas vérifie, alors la suppression de quelques feuilles adjacentes à z ne diminue pas $b(T)$.



Un arbre b_L^--critique avec 3 couleurs T_{uv}^x avec 2 couleurs

FIGURE 3.37: T et T_{uv}^x.

Proposition 3.4.8. *Pour tout entier $n \geq 3$, il existe un graphe G b_L^--critique avec $b(G) = n$.*

Preuve. Soit G la couronne $K_n \circ K_1$, alors $b(G) = n$ et G est un graphe b_L^--critique.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à la notion fondamentales de la théorie des graphes. Plus précisément, nous nous sommes focalisé sur trois points essentiels : établissement des bornes et détermination des valeurs exacts du nombre b-chromatique pour des classes particulières de graphes. Présentation du quelques notions liées à la b-coloration et donné le nombre b-chromatique de certains graphes lorsque on supprimant ux, vx et ajoutant uv. Où : ux, vx sont les arêtes d'une chaîne induite P_3 quelconque centrée à x.
D'abord, en l'absence de la valeurs exactes du nombre b-chromatique d'un graphe G, on est amené généralement à déterminer des bornes qui l'encadrent le mieux possible et donner le nombre b-chromatique des certains graphes particuliers. Ainsi que quelques notions liées à la b-coloration.

Ensuite, nous avons abordé la notion des graphes dits b_L-critiques. C'est à dire les graphes dont la suppression de ux, vx et l'ajout de uv fait diminuer, augmenter ou rester inchangé $b(G)$ et nous avant donné leurs nombre b-chromatique.
Enfin, nous avons caractérisé les graphes b_L^+-critiques, ainsi que les arbres b_L^--critiques.

Bibliographie

[1] M. Kouider, M. Mahéo. *Some bounds for the b-chromatic number of a graph*. Discrete Math. 256 : 267-277, 2002.

[2] T. Faik. *La b-continuité des b-colorations : complexité, propriétés structurelles et algorithmes*. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2005.

[3] A. El Sahili, M. Kouider. *About b-colorings of regular graphs*. Res. Rep. 1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.

[4] A. El Sahili, H. Kouider. *About b-colouring of regular graphs*. Utilitas Math. 80 (2009) 211-215.

[5] S. Cabello and M. Jakovac. *On the b-chromatic number of regular graphs*. Discrete Applied Mathematics, 159 :1303-1310, 2011.

[6] R. W. Irving, D. F. Manlove. *The b-chromatic number of a graph*. Discrete Appl. Math. 91 (1999) 127–141.

[7] J. Kratochvíl, Z. Tuza, M. Voigt, *On the b-chromatic number of graphs*. Lecture Notes in Comput. Sci. 2573 (2002) 310–320.

[8] S. Shaebani. *On the b-chromatic number of regular graphs without 4-cycle*. Discrete Appl. Math. 160 (2012) 1610–1614.

[9] C.T. Hoàng, M. Kouider. *On the b-dominating coloring of graphs*. Discrete Appl. Math. 152 :176-186, 2005.

[10] D.F.Manlove. *Minimaximal and maximinimal optimization problems* : a partial order- based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 - 27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[11] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. *On complementary graphs*. Ann. Math. Monthly, 63 :175-177, 1956.

[12] M. Behzad. *A criterion for the planarity of the total graph of a graph*. Proc. Camb. Philos. Soc. 63 :679-679, 1967.

[13] T. Hamada, I. Yoshimura. *Traversability and connectivity of the middle graph of agraph*. Discrete Math. 14 :247-256, 1976.

[14] R. Brooks. *On coloring the nodes of a network*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 :194-197, 1941.

[15] M.R. Garey, D.S. Johnson. *Computers and Intractability* : A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman, 1979.

[16] F. Huges, G. MacGillivay. *The achromatic number of graphs* : a survey and some new results. Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications 19(1997), 27-56.

[17] F. Gavril, M. Yannakakis. *Edge dominating sets in graphs*. SIAM Journal of Applied Mathematics, 38(3)(1980), 364-372.

[18] M. Jakovac, S. Klavužar. *The b-Chromatic Number of Cubic Graphs*. Graphs and Combinatorics 26 :107-118, 2010.

[19] C. Berge. *Graphs*. North Hollan, 1985.

[20] M. Kouider, M. Zaker. *Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs*. Descrete mathematics, vol. 306, no 7, pp. 617-623, 2006.

[21] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. *b-coloring of some bipartite graphs*, Aus- tralasian J. Combin 53 (2012) 67-76.

[22] J. Kara, J. Kratochvil, M. Voigt. *b-continuity. Technical Report M 14/04*, Technical University Ilmenau, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, 2004.

[23] T. Faik. *About the b-continuity of graphs*, Elect. Notes in Discrete Mathematics 17 :151-156, 2004.

[24] D. Barth, J. Cohen and T. Faik. *Complexity of determining the b-continuity property of graphs*, PRiSM Technical Report, 2003.

[25] D. Barth, J. Cohen, T. Faik. *On the b-Continuity Property of Graphs*, Discrete Ap- plied Mathematics 155, 13 :1761-1768, 2007.

[26] F. Bonomo, G. Duràn, F. Maray, J. Marenco, M. Valencia-Pabon. *On the b-coloring of cographs and P4-sparse graphs*, Graphs and Combinatorics 25 :153-167, 2009.

[27] N. Ikhlef Eschouf. *Étude de la b-coloration dans les graphes : graphes extrémaux et graphes critiques*. Université de SAAD DAHLAB de Blida, 2011.

[28] S. Bachouche, S. Guettar. *La b-coloration et le nombre de subdivision dans les graphes*. Université de Yahia Farès de Médéa, 2014.

[29] F. Harary, S. Hedetniemi, and G. Prins. *An interpolation theorem for graphical homomorphisms*. Portugaliae Mathematica, 26 :453-462, 1967.

[30] F. Harary and S. Hedetniemi. *The achromatic number of a graph*. Journal of Combinatorial Theory, 8 :154-161, 1970.

[31] H.L. Bodlaender. *a-chromatic number is NP-complete for cographs and interval graphs*. Information Processing Letters, 31 :135-138, 1989.

[32] M. Farber, G. Hahn, P. Hell, and D. Miller. *Concerning the achromatic number of a graph*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 40 :21-39, 1986.

[33] N. Ikhlef Eschouf. *Characterization of some b-chromatic edge critical graphs*. Australasian Journal of Combinatorics 47 :21-35, 2010.

[34] A. Silva, F. Maffray. *b-corolation des block graphes avec* $\omega(G) \leq 3$. Laboratoire G-SCOP-Grenoble Financée par CAPES.