Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et l'Informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'optention du

Diplôme de Master en

Mathématiques

Option :

Recherche Opérationnelle

Thème

Etude de la coloration équitable dans les graphes

Par

KASRI Nassima et BADAOUI Hanane

Soutenu devant le jury composé de :

K. TABLENNEHAS	MAA	U.D.Y.F-Médéa	Président.
M. ZAMIME	MCB	U.D.Y.F-Médéa	Encadreur.
N. IKHLEF ESCHOUF	MCA	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.
R. LEMDANI	MAA	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.

Date de soutenance : 29/09/2020

Résumé

Dans ce mémoire, nous intéressons à la notion de la coloration $k-$équitable des sommets et le nombre chromatique $k-$équitable dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et sans sommet isolé. Une coloration propre de sommets de G est une affectation de couleurs aux sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Le nombre minimum de couleurs nécessaires à la coloration des sommets de G est appelé le nombre chromatique de G et noté $\chi(G)$. Une coloration $k-$équitable d'un graphe G est une coloration propre telle que l'ensemble de sommets $V(G)$ peut être partitionné en k ensembles indépendants non vides $V_1, V_2, ..., V_k$, avec $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Le plus petit entier k pour lequel un graphe G admet une coloration équitable est le nombre chromatique équitable et noté $\chi_=(G)$.

Dans ce travail, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique équitable de certains graphes comme le graphe milieu et total et central d'un graphe moulin C_3^n, graphe circulant ML_n, graphe de fan $F_{1,n}$, graphe de double fan $F_{2,n}$, couronne d'une chaîne $C_r(P_n)$ et couronne d'un cycle $C_r(C_n)$ aussi nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique équitable pour les graphes suivant : le graphe splitting d'une roue $S'(W_n)$, le graphe splitting d'une étoile $S'(K_{1,n})$, couronne d'un graphe complet avec une chaîne $K_n \odot P_m$, couronne d'un cycle avec un graphe complet $C_n \odot K_m$, couronne d'un cycle avec une chaîne $C_n \odot P_m$. De plus, nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique équitable de prisme complémentaire d'une étoile $K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$, prisme complémentaire d'un couronne de cycle $C_r(C_n\overline{C}_n)$, prisme complémentaire d'un graphe splitting d'un cycle $S'(C_n\overline{C}_n)$, prisme complémentaire d'un graphe de helme $H_n\overline{H}_n$, graphe de mycielski de graphe circulant $\mu(ML_n)$, graphe de mycielski d 'un graphe de prisme de cycle $\mu(Y_n)$.

Abstract

In this report, we are interested in the notion of the $k-$équitable coloring of vertices and the $k-$équitable chromatic number in graphs. Let $G = (V, E)$ be a simple graph without an isolated vertex. A proper vertex coloring of a graph G is an assignment of colors to the vertices of G such that adjacent vertices have different colors. The minimum number of colors which is necessary for a proper vertex coloring of graph G is called the chromatic number $\chi(G)$. A $k-$équitable coloring of a graph G is a proper coloring of G such that a graph G is said to be equitably $k-$colorable if the vertex set $V(G)$ can be partitioned into k non-empty independent sets $V_1, V_2, ..., V_k$ such that $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ for every $i \neq j$. The smallest integer k for which G is equitably $k-$colorable is called the equitable chromatic number of G, and is denoted by $\chi_{=}(G)$.

In this work, we determine the exact value of the équitable chromatic number of some classical graphs such as the middle and total and central graph of a moulin graph C_n^3,circulant graph ML_n, fan graph $F_{1,n}$, double fan graph $F_{2,n}$, corona of a path $C_r(P_n)$, corona of a cycle $C_r(C_n)$, then we study the équitable chromatic number of the following graphs : splitting graph of wheel graph $S'(W_n)$, splitting graph of star $S'(K_{1,n})$, corona of complete graph with path $K_n \odot P_m$, corona of cycle with complete graph $C_n \odot K_m$, corona of cycle with path $C_n \odot P_m$, Moreover, we give the exact value of the équitable chromatic number of complementary prism of star $K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$, complementary prism of corona of cycle,$C_r(C_n\overline{C}_n)$, complementary prism of the splitting graph of cycle $S'(C_n\overline{C}_n)$, complementary prism of helm graph $H_n\overline{H}_n$, mycielski graph of prism graph $\mu(ML_n)$, mycielski graph of circulant graph $\mu(Y_n)$.



Remerciements

Avant tout nous remercions **Allah** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nous tenons a exprimer toute notre gratitude et notre reconnaissance a notre promoteur **Mr ZAMIME Mohamed**, pour l'honneur qu'il nous a fait en assurant la direction du présent mémoire. Nous le remercions pour sa disponibilité et pour la pertinence de ses conseils avec lesquels, il a su nous guider durant nos travaux de recherche.

Nous remercions vivement **Mr K. TABLENNEHAS** qui a bien voulu nous faire honneur en acceptant de prendre en charge la présidence du jury.

Nous remercions également **Mr N. IKHLEF ESCHOUF** et **Mr R. LEMDANI** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Nous tenons également à remercier nos familles pour leurs soutiens et leurs aides précieuses pendant tout ce temps.

Enfin, j'adresse un grand merci à tous les enseignants de l'Université Dr. Yahia FARES de Médéa qui m'ont accompagnés dès la première année jusqu'à la fin de mes études.

Dédicace

À mes très chers parents

Qui ont été toujours là pour moi, pour leurs soutiens durant toute ma formation, leurs patiences, leurs amours et leurs encouragements tout au long de mes études et au cours de la réalisation de ce mémoire.

À mes sœurs et mes frères :

Fatiha, Samira, Abla, Mourad, Fouad.

À mes neveux : **Omar, meriem, Chaima, Asmaa et Salah el dine**.

À ma chère binôme **Hanene.**

À toutes mes familles et mes amies surtout mes chères : **Cherifa, Naziha, Bouchra**.

À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail.

À tous, je dédie ce travail.

KASRI Nassima

Dédicace

À mes très chers parents

Qui ont été toujours là pour moi, pour leurs soutiens durant toute ma formation, leurs patiences, leurs amours et leurs encouragements tout au long de mes études et au cours de la réalisation de ce mémoire.

À mes sœurs et mes frères.
Wardichan, Hayat, Nawal, Salwa, Rabeh, Mohamad.

À mes neveux : **Nadjlaa, Abd el moumen, Sondos, Djawad, Anwar, Malak, Manar**.

À ma chère binôme **Nassima.**

À toutes mes familles et mes amies surtout mes chères : **Cherifa, Chahinz, Hadjer, Naziha, Bouchra.**

À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail.

À tous, je dédie ce travail.

BADAOUI Hanane

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

molakhas **iv**

Table des figures **xiii**

Introduction **xvii**

1 Généralités sur les graphes **1**

1.1 Concepts et notions de base 1

1.1.1 Graphes 1

1.1.2 Sous-graphes et graphes partiels 2

1.1.3 Voisinage, degré d'un sommet 3

1.1.4 Chaînes, cycles 4

1.1.5 Minimalité et maximalité d'un ensemble 5

1.1.6 Connexité 5

1.1.7 Stable 6

1.1.8 Partition de graphe 6

1.1.9 Clique 6

1.2 Quelques graphes particuliers 6

1.2.1 Graphe complet 6

1.2.2 Graphe biparti 7

1.2.3 Graphe régulier 7
1.2.4 Graphe complémentaire 8
1.2.5 Couronne d'un graphe 8
1.2.6 Etoile 9
1.2.7 Graphe de Mycielski 9
1.3 Quelques opérations sur les graphes 10
1.3.1 Le produit cartésien 10
1.3.2 Le produit direct 10
1.3.3 Le produit total (ou fort) 10
1.3.4 Subdivision de graphe 10
1.3.5 Graphe total 11
1.3.6 Graphe milieu 11
1.3.7 Graphe central 11
1.4 Classes de complexité 12
1.4.1 Classe P 12
1.4.2 Classe NP 12
1.4.3 Problème NP-Complet 13
1.4.4 Classe NP-complet 13

2 Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration équitable 14
2.1 La coloration propre 14
2.2 Posistion du probléme 15
2.3 Bornes sur le nombre chromatique 15
2.4 Quelques bornes du nombre chromatique équitable 17
2.5 Coloration équitable de certains graphe particuliers 17
2.5.1 Coloration équitable d'un cycle 17
2.5.2 Coloration équitable d'une chaîne 18
2.5.3 Coloration équitable d'un graphe complet 18
2.5.4 Coloration équitable d'un graphe biparti 18
2.5.5 Coloration équitable d'une étoile 19
2.5.6 Coloration équitable d'un graphe prisme de cycle 19

2.5.7 Coloration équitable d'un graphe de tadpole 20
2.6 Coloration équitable du graphe milieu de quelques graphes 21
2.6.1 Coloration équitable du graphe milieu d'un cycle 21
2.6.2 Coloration équitable du graphe milieu d'une chaîne 21
2.6.3 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe complet 21
2.6.4 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe biparti 22
2.6.5 Coloration équitable du graphe milieu d'une étoile 22
2.6.6 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe prisme de cycle . . 23
2.6.7 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe de tadpole 23
2.7 Coloration équitable du graphe central de quelques graphes 24
2.7.1 Coloration équitable du graphe central d'un cycle 24
2.7.2 Coloration équitable du graphe central d'une chaîne 24
2.7.3 Coloration équitable du graphe central d'un graphe complet 25
2.7.4 Coloration équitable du graphe central d'un graphe biparti 25
2.7.5 Coloration équitable du graphe central d'une étoile 25
2.7.6 Coloration équitable du graphe central d'un graphe prisme de cycle . 26
2.7.7 Coloration équitable du graphe central d'un graphe de tadpole 26
2.8 Coloration équitable du graphe total de quelques graphes 27
2.8.1 Coloration équitable du graphe total d'un cycle 27
2.8.2 Coloration équitable du graphe total d'une chaîne 28
2.8.3 Coloration équitable du graphe total d'un graphe biparti 28
2.8.4 Coloration équitable du graphe total d'un graphe prisme de cycle . . 28
2.8.5 Coloration équitable du graphe total d'un graphe de tadpole 29
2.9 Coloration équitable et certaines operations sur les graphes 29
2.9.1 Coloration équitable de produit cartisien 29
2.9.2 Coloration équitable de produit direct 30
2.9.3 Coloration équitable de produit total 33
2.10 Coloration équitable du graphe de mycielski 34
2.10.1 Coloration équitable du graphe de mycielski d'un cycle 34
2.10.2 Coloration équitable du graphe de mycielski d'une chaîne 34

2.10.3 Coloration équitable du graphe de mycielski de graphe biparti 35

3 Détermination du nombre chromatique équitable de quelques graphes particuliers 37

3.1 Coloration équitable du graphe moulin 37
3.1.1 Coloration équitable du graphe milieu de graphe moulin 38
3.1.2 Coloration équitable du graphe central de graphe moulin 40
3.1.3 Coloration équitable du graphe total de graphe moulin 41
3.2 Coloration équitable du graphe circulant 42
3.2.1 Coloration équitable du graphe central de graphe circulant 43
3.2.2 Coloration équitable du graphe milieu de graphe circulant 44
3.3 Coloration équitable d'un graphe de fan 45
3.3.1 Coloration équitable d'un graphe de fan 46
3.3.2 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe de fan 47
3.3.3 Coloration équitable du graphe central d'un graphe de fan 48
3.4 Coloration équitable d'un graphe de double fan 50
3.4.1 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe double fan 52
3.4.2 Coloration équitable du graphe central d'un graphe de double fan . . 54
3.5 Coloration équitable de couronne des certains graphes particuliers 56
3.5.1 Coloration équitable de couronne d'une chaîne 56
3.5.2 Coloration équitable du graphe milieu de couronne d'une chaîne . . . 57
3.5.3 Coloration équitable du graphe total de couronne d'une chaîne 58
3.5.4 Coloration équitable de couronne d'un cycle 59
3.5.5 Coloration équitable du graphe milieu de couronne d'un cycle 61
3.5.6 Coloration équitable du graphe total de couronne d'un cycle 62
3.6 Coloration équitable de graphe splitting de certains graphes particuliers . . . 64
3.6.1 Coloration équitable de graphe splitting d'une roue 64
3.6.2 Coloration équitable de graphe splitting d'une étoile 67
3.7 Coloration équitable d'une couronne de deux graphes 69
3.7.1 Coloration équitable de couronne d'un graphe complet avec une chaîne 69
3.7.2 Coloration équitable de couronne d'un cycle avec un graphe complet . 71

3.7.3 Coloration équitable de couronne d'un cycle avec une chaîne 73
3.8 Coloration équitable de prisme complémentaire d'un certains graphes particuliers 76
3.8.1 Coloration équitable de prisme complémentaire d'une étoile 76
3.8.2 Coloration équitable de prisme complémentaire d'une couronne de cycle 77
3.8.3 Coloration équitable de prisme complémentaire de graphe splitting d'un cycle 78
3.8.4 Coloration équitable de prisme complémentaire d'un graphe de Helme 79
3.9 Coloration équitable du graphe de mycielski de quelque graphes 81
3.9.1 Coloration équitable du graphe de mycielski de prisme de cycle 81
3.9.2 Coloration équitable du graphe mycielski de graphe circulant 83

Conclusion **85**

Table des figures

Figure 1.1.1 Graphe non orienté 2
Figure 1.1.2 Un graphe simple 2
Figure 1.1.3 Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe 3
Figure 1.1.4 Une chaîne P_5 et un cycle C_5 4
Figure 1.1.5 Graphe connexe 5
Figure 1.1.6 Un graphe $G = (V, E)$ et une clique ω_3 6
Figure 1.2.1 Graphe complet K_5 7
Figure 1.2.2 Un graphe biparti et biparti complet $K_{4,3}$ 7
Figure 1.2.3 Un graphe 3−régulie 8
Figure 1.2.4 Un graphe G et son complémentaire 8
Figure 1.2.5 Un graphe C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$ 8
Figure 1.2.6 Une étoile $K_{1,5}$ 9
Figure 1.2.7 Graphe Mycielski de K_4 9
Figure 1.3.1 Exemple du produits de chaîne $P_2 \boxdot P_3$ et $P_2 \times P_3$ et $P_2 \boxtimes P_3$ 10
Figure 1.3.2 Exemple de la subdivision d'une arête uv un graphe 11
Figure 1.3.3 Exemple d'un graphe milieu et central de C_6 et total de P_5 12
Figure 2.1.1 $\chi(P_4) = 2$ 14
Figure 2.5.1 $\chi_=(C_4) = 2$, $\chi_=(C_5) = 3$ 17
Figure 2.5.2 $\chi_=(P_5) = 2$ 18
Figure 2.5.3 $\chi_=(K_6) = 6$ 18

Figure 2.5.4 $\chi_{=}(K_{3,3}) = 2$ 18
Figure 2.5.5 $\chi_{=}(K_{1,4}) = 3$ 19
Figure 2.5.6 $\chi_{=}(Y_4) = 2$, $\chi_{=}(Y_5) = 3$ 20
Figure 2.5.7 $\chi_{=}(T_{4,2}) = 2, \chi_{=}(T_{4,3}) = 2, \chi_{=}(T_{5,2}) = 3, \chi_{=}(T_{5,3}) = 3$ 20
Figure 2.6.1 $\chi_{=}(M(C_5)) = 3$ 21
Figure 2.6.2 $\chi_{=}(M(P_5)) = 3$ 21
Figure 2.6.3 $\chi_{=}(M(K_4)) = 4$ 22
Figure 2.6.4 $\chi_{=}(M(K_{2,2})) = 4$ 22
Figure 2.6.5 $\chi_{=}(M(K_{1,5})) = 5$ 22
Figure 2.6.6 $\chi_{=}(M(Y_5)) = 5$ 23
Figure 2.6.7 $\chi_{=}(M(T_{4,2})) = 4$ 23
Figure 2.7.1 $\chi_{=}(C(C_6)) = 3$, $\chi_{=}(C(C_5)) = 3$ 24
Figure 2.7.2 $\chi_{=}(C(P_6)) = 3$, $\chi_{=}(C(P_5)) = 3$ 24
Figure 2.7.3 $\chi_{=}(C(K_5)) = 3$ 25
Figure 2.7.4 $\chi_{=}(C(K_{2,2})) = 3$ 25
Figure 2.7.5 $\chi_{=}(C(K_{1,4})) = 4$ 26
Figure 2.7.6 $\chi_{=}(C(Y_4)) = 4$ 26
Figure 2.7.7 $\chi_{=}(C(T_{6,2})) = 3$, $\chi_{=}(C(T_{6,3})) = 4$, $\chi_{=}(C(T_{5,2})) = 3$ 27
Figure 2.8.1 $\chi_{=}(T(C_6)) = 3$ 27
Figure 2.8.2 $\chi_{=}(T(P_5)) = 3$ 28
Figure 2.8.3 $\chi_{=}(T(K_{2,3})) = 4$, $\chi_{=}(T(K_{2,2})) = 4$ 28
Figure 2.8.4 $\chi_{=}(T(Y_8)) = 5$ 29
Figure 2.8.5 $\chi_{=}(T(T_{5,3})) = 4$ 29
Figure 2.9.1 $\chi_{=}(C_4 \boxdot C_4) = 2$, $\chi_{=}(C_4 \boxdot C_3) = 3$ 30
Figure 2.9.2 $\chi_{=}(K_{1,4} \boxdot P_3) = 3$ 30
Figure 2.9.3 $\chi_{=}(C_4 \times C_4) = 2$, $\chi_{=}(C_3 \times C_4) = 3$ 31
Figure 2.9.4 $\chi_{=}(K_4 \times P_4) = 2$, $\chi_{=}(K_3 \times P_3) = 3$ 32
Figure 2.9.5 $\chi_{=}(P_3 \times P_5) = 3$ 32
Figure 2.9.6 $\chi_{=}(K_{1,3} \times P_4) = 2$, $\chi_{=}(K_{1,3} \times P_3) = 3$ 33

Figure 2.7.9 $\chi_=(P_4 \boxtimes P_4) = 4$, $\chi_=(P_3 \boxtimes P_4) = 5$ 33

Figure 2.10.1 $\chi_=(\mu(C_4)) = 3$, $\chi_=(\mu(C_{10})) = 4$, $\chi_=(\mu(C_5)) = 4$ 34

Figure 2.10.2 $\chi_=(\mu(P_1)) = 2$, $\chi_=(\mu(P_4)) = 3$, $\chi_=(\mu(P_{10})) = 4$ 35

Figure 2.10.3 $\chi_=(\mu(K_{5,5})) = 4$, $\chi_=(\mu(K_{3,3})) = 3$, $\chi_=(\mu(K_{2,4})) = 3$. 36

Figure 3.1.1 Graphe moulin C_3^5 37

Figure 3.1.2 Graphe moulin $\chi_=(C_3^3) = 4$ 38

Figure 3.1.3 Graphe milieu de graphe moulin $\chi_=(M(C_3^3)) = 6$ 39

Figure 3.1.4 Graphe central de graphe moulin $\chi_=(C(C_3^3)) = 3$ 40

Figure 3.1.5 Graphe total du graphe moulin $\chi_=(T(C_3^4)) = 9$ 41

Figure 3.2.1 Graphe Circulant $\chi_=(ML_n) = 3$ 43

Figure 3.2.2 Graphe central de graphe circulant $\chi_=(C(ML_6)) = 6$ 44

Figure 3.2.3 Graphe milieu de graphe circulant $\chi_=(M(ML_6)) = 4$ 45

Figure 3.3.1 Graphe de fan $\chi_=(F_{1,n}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ 47

Figure 3.3.2 Graphe milieu de graphe fan $\chi_=(M(F_{1,6})) = 7$ 48

Figure 3.3.3 Graphe central de graphe fan $\chi_=(C(F_{1,7})) = 4$ 49

Figure 3.3.4 Graphe central de graphe fan $\chi_=(C(F_{1,8})) = 4$ 49

Figure 3.4.1 Graphe double fan 52

Figure 3.4.2 Graphe milieu de graphe double fan $\chi_=(M(F_{2,6})) = 7$ 53

Figure 3.4.3 Graphe central de graphe double fan $\chi_=(M(F_{2,6})) = 3$. 55

Figure 3.4.4 Graphe central de graphe double fan $\chi_=(C(F_{2,7})) = 4$ 55

Figure 3.5.1 Couronne d'une chaîne $\chi_=(C_r(P_n)) = 2$ 57

Figure 3.5.2 Graphe milieu de couronne d'une chaîne $\chi_=(M(C_r(P_n))) = 4$ 58

Figure 3.5.3 Graphe total de couronne d'une chaîne $\chi_=(T(C_r(P_n))) = 4$ 59

Figure 3.5.4 Couronne d'un cycle 61

Figure 3.5.5 Graphe milieu de couronne d'un cycle $\chi_=(M(C_r(C_n))) = 4$ 62

Figure 3.5.6 Graphe total de couronne d'un cycle $\chi_=(T(C_r(C_n))) = 4$ 64

Figure 3.6.1 Graphe splitting d'une roue (n est pair) 67

Figure 3.6.2 Graphe splitting d'une roue (n est impair) 67

Figure 3.6.3 Graphe splitting d'une étoile 69
Figure 3.7.1 $\chi_{=}(K_5 \odot P_3) = 5$ 71
Figure 3.7.2 $\chi_{=}(K_6 \odot P_4) = 6$ 71
Figure 3.7.3 Couronne d'un cycle avec un graphe complet $\chi_{=}(C_n \odot K_m) = m + 1$ 73
Figure 3.7.4 Couronne d'un cycle avec une chaîne $\chi_{=}(C_n \odot P_m) = 3$ 75
Figure 3.8.1 Prisme complémentaire d'une étoile $\chi_{=}(K_{1.5}\overline{K_{1,5}}) = 5$ 77
Figure 3.8.2 Prisme complémentaire d'un couronne de cycle $\chi_{=}(C_r(C_5\overline{C_5}) = 5$ 78
Figure 3.8.3 $\chi_{=}(S'(C_5\overline{C_5}) = 5$ 79
Figure 3.8.4 Prisme complémentaire de graphe Helm $\chi_{=}(H_5\overline{H_5}) = 6$ 81
Figure 3.9.1 Graphe mycielski de prisme graphe si n est pair 83
Figure 3.9.2 Graphe mycielski de prisme graphe si n est impair 83
Figure 3.9.3 Graphe Mycielski de circulant graphe $\chi_{=}(ML_4) = 4$ 84

Introduction

La recherche opérationnelle peut être définie comme étant l'ensemble des méthodes et des techniques rationnelles d'analyse des phénomènes de management du système d'information utilisable pour élaborer de meilleurs décisions. Elle propose des modèles conceptuels pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire les choix les plus efficaces.

Les domaines et les outils faisant part de la recherche opérationnelle sont très vastes, parmi ces outils, on trouve la théorie des graphes qui est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre la plupart des problèmes discrets que pose la RO. La coloration de graphe est l'un des problèmes d'optimisation combinatoire les plus étudiés en informatique et en mathématiques. le problème consiste à colorier le graphe avec un nombre minimum de couleurs, ce problème peut être formulé d'une facon très simple Colorer les sommets tel qu'il n'existe pas deux sommets adjacents de la même couleur. D'un point de vue complexité théorique, la coloration de graphe a été l'un des premiers problèmes démontrés NP-complet.

Le problème de coloration est au cœurs de la théorie des graphes et fait l'objectif de plusieurs recherches. Il est apparu en 1852, quand le problème des quatre couleurs a été posé pour la première fois par Francis Guthrie, lorsqu'il s'est demandé s'il est toujours possible de colorer n'importe quelle carte géographique en n'utilisant que quatre couleurs, de manière à éviter que deux pays voisins aient la même couleur. C'est qu'en 1976, que deux chercheurs américains, K. Appel et W.Haken ont pu répondre affirmativement à cette question à l'aide d'un calcul par ordinateur. Et depuis, les problèmes de coloration apparaissent dans plusieurs domaines pour modéliser de nombreux problèmes pratiques, nous citons par exemple les problèmes d'ordonnancement, de planning de lavie de tous les jours, et dans le domaine des réseaux/télécom, etc....Divers types de coloration ont été considérés dans la littérature (a-coloration, b-coloration, coloration équitable, etc....). Pour de plus amples

détails sur ce sujet, le lecteur peut se reporter aux livres de G.Chartrand et P.Zhang et de T.R.Jensen et B.Toft.

Parmi les coloration existants, nous avons étudié la coloration équitable.

Une coloration équitable est une $k-$coloration propre de G telle que l'ensemble de sommets $V(G)$ peut être partitionné en k ensembles indépendants non vides V_1,V_2, ..., V_k, avec $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Le plus petit entier k pour lequel G est $k-$équitable est appelé le nombre chromatique équitable de G, et est noté $\chi_=(G)$, Cette notion a été présenté par W. Meyer en 1973.

Dans ce mémoire, nous intéréssons principalement à l'étude de la coloration équitable dans les graphes. Après une introduction générale, le mémoire s'atricule autour de trois chapitres suivants. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation et définition de la coloration et nous donnons un recueil des principaux résultats existants sur la coloration équitable des sommets d'un graphe, bornes et valeurs exactes du nombre k-équitable pour certaines classe de graphes.

Dans le troisième chapitre, nous proposons notre travail sur la coloration équitable, et nous déterminons la valeur exacte $\chi_=(G)$ dans certaines classes de graphes.

Enfin, nous donnons une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

Dans ce chapitre on présente des notions classiques de la théorie des graphes ainsi que des notations usuelles, dont on aura besoin durant la réalisation de ce travail.

1.1 Concepts et notions de base

1.1.1 Graphes

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G; noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G, noté par $m(G)$.*

Graphe non orienté

Définition 1.1.2 *Est un graphe dont les arêtes ne sont pas orientés et chaque arête (e) est définie comme suit : $e = (x_i, x_j) = x_i x_j$. Une arête de type $x_i x_i$ est appelée boucle dans ce cas on dit que :*

— *x_i et x_j sont adjacents.*

— *(e) est incidente à x_i et x_j.*

— *Deux arêtes e_i et e_j sont adjacents s'ils ont au moins une extrémité en commun.*

Le graphe de la Figure 1.1.1 possède cinq sommets et huit arêtes qui sont $V = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, $E = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$.

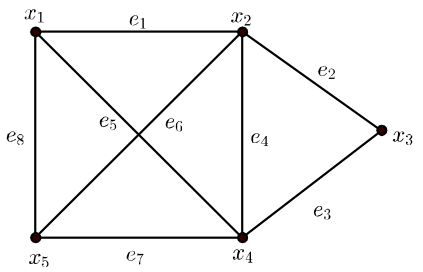


Figure 1.1.1 : Graphe non orienté.

Graphe simple

Définition 1.1.3 *Un graphe simple est un graphe qui ne possède pas ni de boucle ni arête multiples.*

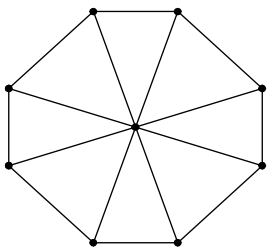


Figure 1.1.2 : Un graphe simple.

1.1.2 Sous-graphes et graphes partiels

Sous-graphe

Définition 1.1.4 *Soit $G = (V, E)$ un graphe alors $G = (V', E')$ est dit sous-graphe de G si l'ensemble des sommets V' inclut dans V et l'ensembles des arêtes E' est formé par toutes les arêtes de E dont les extrémités sont dans V'.*

Graphe partiel

Définition 1.1.5 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, le graphe $G = (V, E')$ est un graphe partiel de G si E'inclus dans E. Autrement dit,on obtient G'en enlevant une ou plusieurs arêtes*

au graphe G. Le graphe de la Figure 1.1.3 *représente un graphe G et son graphe partiel et sous graphe de G.*

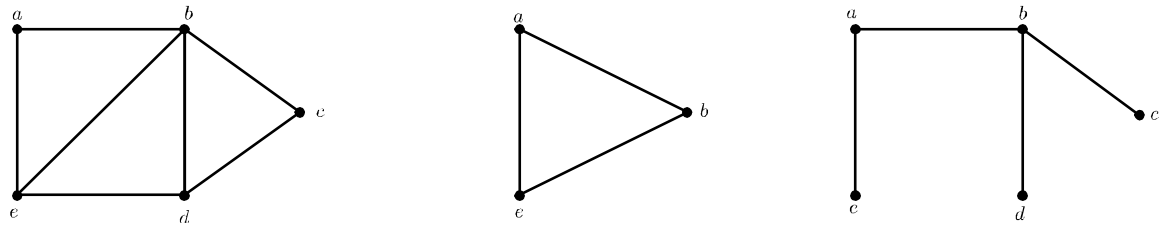


Figure 1.1.3 : Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe .

1.1.3 Voisinage, degré d'un sommet

Définition 1.1.6 *Soit G (V, E) un graphe pour un sommet v de G, le voisinage ouvert de v est :*

$$N_G(v) = \{u \in V_G(v) : uv \in E(G)\}.$$

Le voisinage fermé de v est défini par :

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est :

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v).$$

Le voisinage fermé de S est :

$$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[S].$$

Définition 1.1.7 *Pour le graphe simple, le degré d'un sommet est la taille de son voisinage. Soit $v \in V(G)$, le degré de v est noté par :*

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

Le degré maximum d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par :

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Le degré minimum d'un graphe est le degré minimum de tous ses sommets, noté par :

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Par exemple pour le graphe G de la figure (1.1.1) le voisinage ouvert du sommet x_1 est $\{x_2, x_4, x_5\}$ et son voisinage fermé est $[x_1, x_2, x_4, x_5]$. Le graphe G n'a pas de sommets isolés. Le degré minimum du G est donc $\delta(G) = 2$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 4$.

1.1.4 Chaînes, cycles

Chaîne

Définition 1.1.8 *Soit un graphe $G = (V, E)$ une chaîne P de G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$, où pour tout $i = k-1$,(v_i, v_{i+1}) est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont les extrémités de la chaîne P et les sommets v_2 , ..., v_{k-1} sont les sommets intérieurs de P.*

— *Une chaîne P est simple si chaque arête de P est emprunté une seule fois.*

— *Une chaîne P est élémentaire si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.*

Cycles

Définition 1.1.9 *Un cycle C d'un graphe $G = (V, E)$ est une chaîne v_1,v_2 ,...,v_k telle que les extrémités sont confondues $v_1 = v_k$.*

— *Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire telle que ses deux extrémités sont confondues.*

— *Un cycle C est simple si chaque arête de C est emprunté une seule fois..*



Figure 1.1.4 : Une chaîne P_5 et un cycle C_5.

1.1.5 Minimalité et maximalité d'un ensemble

Définition 1.1.10 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et ρ une propriété. On dit qu'on sous-ensemble A de V est minimal par rapport à la propriété ρ si aucun sous-ensemble inclus dans A ne vérifie cette propriété. Aussi A est dit maximal par rapport à ρ si aucun sous-ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie cette propriété.*

De même, on dit qu'un sous-ensemble B de V est minimum ou de taille minimale par rapport à la propriété ρ si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie ρ. Ainsi,un sous-ensemble ρ de V est dit maximun ou de taille maximale par rapport à ρ, si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie ρ.

1.1.6 Connexité

Définition 1.1.11 *Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe connexe s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets du graphe. Un graphe connexe a n sommets posséde au moins $n - 1$ arêtes. une composantes connexe d'un graphe G est un sous-graphe induit maximal connexe de sommets. Une arête e est appelée un isthme de G si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G, un sommet v du graphe G est appelé un sommet d'articulation du graphe G si le graphe $(G - v)$ a plus de composantes connexes que G. dans le graphe de la figure* 1.1.5 *les sommets a, d, f sont des sommets d'articulation et l'arête a, d est un isthme.*

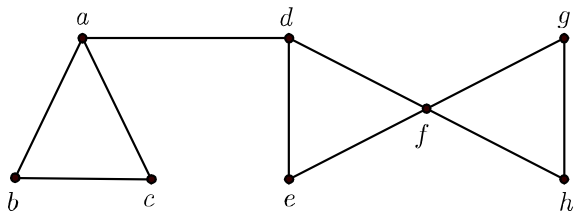


Figure 1.1.5 : Graphe connexe.

1.1.7 Stable

Définition 1.1.12 *Un stable S (appellé aussi ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous ensemble des sommets de V deux à deux non adjacents.*

$\alpha(G) = \max\{|S| : S$ *est un stable de* $G\}$ *est appélle nombre de stabilité de* G.

1.1.8 Partition de graphe

Définition 1.1.13 *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une partition ρ de G est une partition de ses sommets suivant certaines règles avec les sommets. Si le nombre de classes dans la partition ρ est fixé a un entier k, on dit $k-$partition, ou bien, on dit que la partition ρ contient k classes.*

1.1.9 Clique

Définition 1.1.14 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple tel que X un ensemble de sommets de G deux à deux adjacents. Cet ensemble est dite une clique de n sommets est noté ω_n Donc un graphe est une clique $d_G(x) = n - 1$ pour tout ses sommets telle que $|X| = n$.*

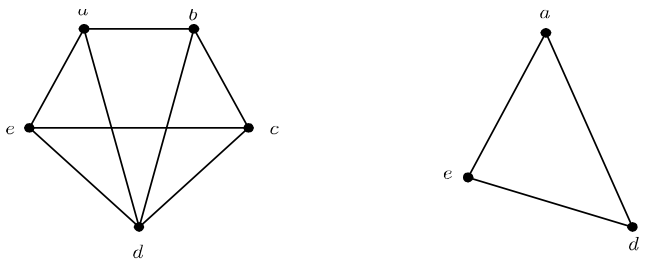


Figure 1.1.6 : Un graphe $G = (V, E)$ et un clique ω_3.

1.2 Quelques graphes particuliers

1.2.1 Graphe complet

Définition 1.2.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit complet si tous les sommets sont deux à deux adjacents, et le graphe complet a n sommets contient $n(n-1)/2$ arêtes et noté K_n.*

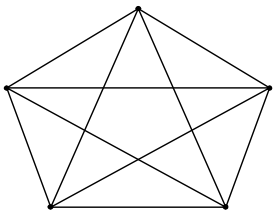


Figure 1.2.1 : Graphe complet K_5.

1.2.2 Graphe biparti

Définition 1.2.2 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe une partition de l'ensemble des sommets de G en deux sous-ensembles X_1 et X_2 tel que toute arête de G a une extrémité dans X_1 et l'autre extrémité dans X_2. Si de plus $|X_1| = |X_2|$ alors G est appelé graphe biparti équilibré.*

Un graphe biparti est complet si tous sommet de X_1 est adjacent a tous sommet de X_2, un tel graphe est noté $K_{p,q}$ avec $p = X_1$ et $q = X_2$.

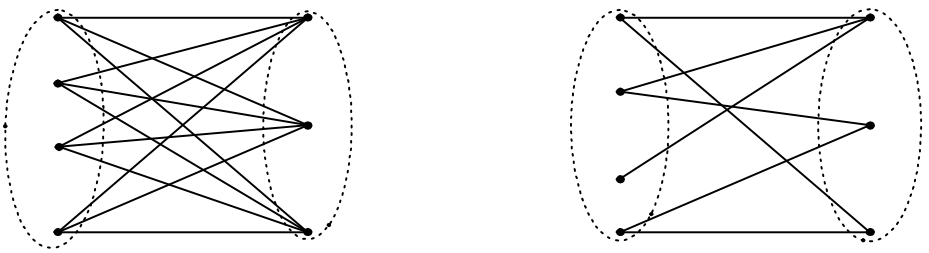


Figure 1.2.2 : Un graphe biparti et biparti complet $K_{4,3}$.

1.2.3 Graphe régulier

Définition 1.2.3 *Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré est égal à d pour tout sommet, alors on dit que le graphe est $d-r$ égulier.*

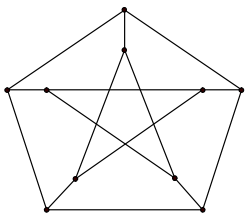


Figure 1.2.3 : Graphe $3-r$égulie.

1.2.4 Graphe complémentaire

Définition 1.2.4 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple $G = (V, E)$ noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par $V(G) = V(\overline{G})$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G)$ et $uv \notin E(G)\}$.*

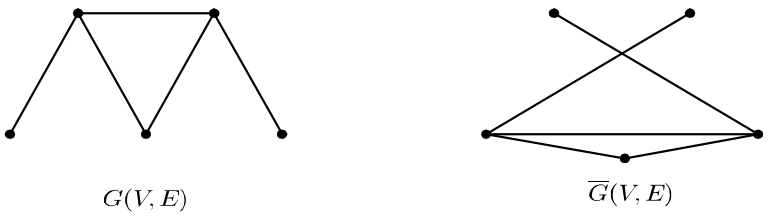


Figure 1.2.4 : Graphe G et son complémentaire.

1.2.5 Couronne d'un graphe

Définition 1.2.5 *On appelle couronne d'un graphe G, notée $Cr(G)$ ou $G \circ K_1$, le graphe obtenu enattachant à chaque sommets de G un sommet pendant, et donc il est évident que l'ordre de $Cr(G)$ est égal à $2|V(G)|$.*

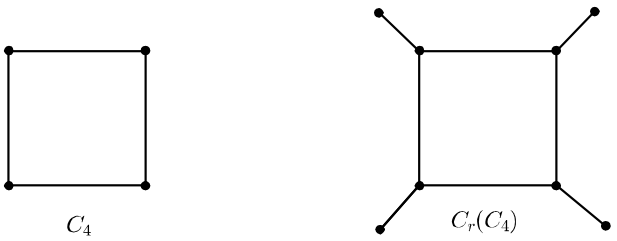


Figure 1.2.5 : C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$.

1.2.6 Etoile

Définition 1.2.6 *Une étoile est un graphe biparti complet dans lequel* $|X_1| = 1$ *et* $|X_2| = k$*, noté* $K_{1,k}$ *on peut définir un étoile comme un graphe connexe dont tous les sommets sauf un sont de degré* 1*, Le sommet de* V_1 *est appelé centre ou sommet central de l'étoile.*

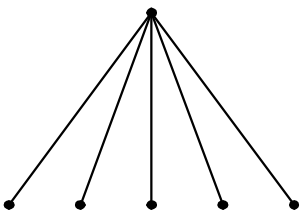


Figure 1.2.6 : Exemple d'une étoile $K_{1,5}$.

1.2.7 Graphe de Mycielski

Définition 1.2.7 *Soit* G *un graphe simple* ***le graphe de Mycielski*** *de* G *noté* $\mu(G)$*, est un graphe connexe avec* $V(\mu(G)) = V(G) \cup V' \cup \{w\}$ *avec* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *et* $V' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *et* $E(\mu(G)) = E(G) \cup E' \cup E''$ *avec* $E' = \{v_i x_j, v_j x_i : si\ est\ seulement\ si\ v_i v_j \in E(G)\}$ *et* $E'' = \{w x_i : \forall i\}$ *tel que* $1 \leq i \leq n$*,* $1 \leq j \leq n$.

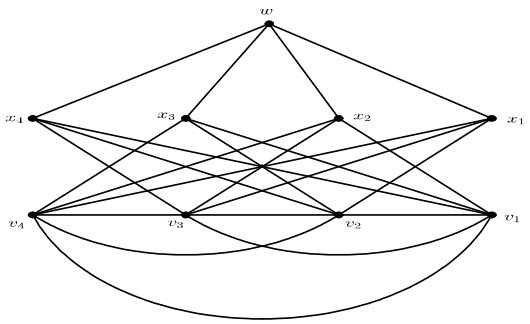


Figure 1.2.7 : Graphe de Mycielski de K_4.

1.3 Quelques opérations sur les graphes

1.3.1 Le produit cartésien

Définition 1.3.1 *Le produit cartésien de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \boxdot G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{(u, v) : u \in V_1$ et $v \in V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1u_2 \in E_1$.*

1.3.2 Le produit direct

Définition 1.3.2 *Le produit direct (ou croisé) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \times G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{(u, v) : u \in V_1$ et $v \in V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $v_1v_2 \in E_2$ et $u_1u_2 \in E_1$.*

1.3.3 Le produit total (ou fort)

Définition 1.3.3 *Le produit total (ou fort) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ noté $G_1 \boxtimes G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G_1) \times V(G_2)$ et dont deux sommet $(u_1, v_2) \neq (u_2, v_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si $u_1 = u_2$ ou $u_1u_2 \in E(G_1)$ et $v_1 = v_2$ ou $v_1v_2 \in E(G_1)$. Ceci veut dire que $E(G_1 \boxtimes G_2) = E(G_1 \boxdot G_2) \cup E(G_1 \times G_2)$.*

Les trois produits sont illustrés dans la figure suivant :

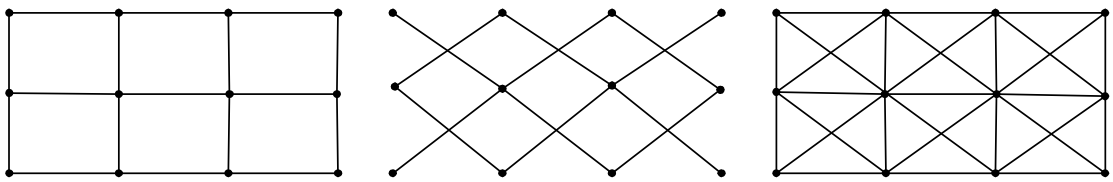


Figure 1.3.1 : Exemple du produits de chaîne $P_2 \boxdot P_3$ et $P_2 \times P_3$ et $P_2 \boxtimes P_3$.

1.3.4 Subdivision de graphe

Définition 1.3.4 *La subdivision d'une arête uv d'un graphe $G = (V, E)$ consiste à supprimer l'arête uv et rajouter un sommet w et deux arêtes uw et vw. Le graphe obtenu*

àpartir de la subdivision de uv est noté par $S(G)$ où $V(S(G)) = V(G) \cup w$ et $E(S(G)) = E(G) \cup \{uw, vw\}$.



Figure 1.3.2 : Exemple de la subdivision d'une arête uv un graphe.

1.3.5 Graphe total

Définition 1.3.5 *Le graphe total d'un graphe $G = (V, E)$, noté $T(G)$, est défini comme suit : L'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x, y de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$x, y \in V(G)$ et x, y sont adjacents dans G.*
- *$x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.*
- *$x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.*

1.3.6 Graphe milieu

Définition 1.3.6 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$ est défini comme suit : L'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.*
- *$x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.*

1.3.7 Graphe central

Définition 1.3.7 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe central de G noté $C(G)$ est défini comme suit: L'ensemble des sommets de $C(G)$ est $V(G) \cup E(G)$,et deux sommets x, y de $C(G)$ sont adjacents si la condition suivante est vérifée :*

— $x, y \in V(G)$ *et* x, y *sont non adjacents dans* G.

— $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et* x *est incident à* y *dans* G.

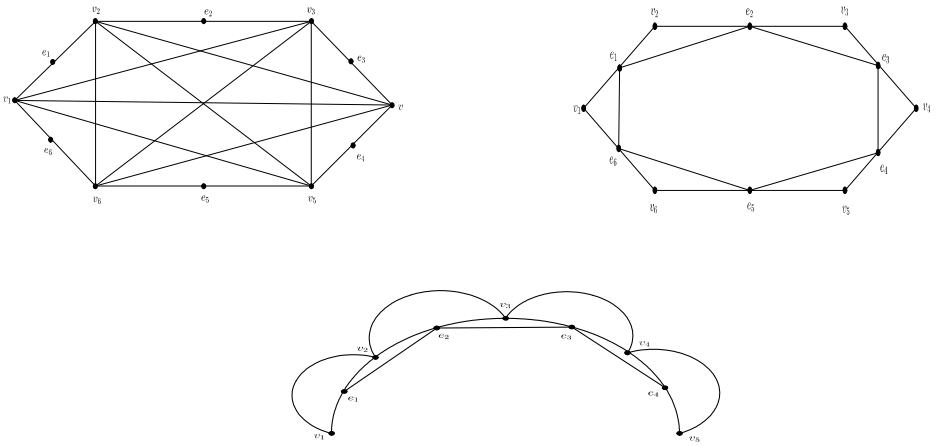


Figure 1.3.4 : Exemple d'un graphe milieu et central de C_6 *et total de* P_5.

1.4 Classes de complexité

1.4.1 Classe P

Un problème p est dit Polynomial (i.e $p \in P$), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial. Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. Etant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par une chaîne. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P. Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

1.4.2 Classe NP

Un problème p est dans **NP**, s'il est résoluble par un algorithme non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème **NP**, est capable de répondre oui ou non.

Intuitivement, les problèmes dans **NP** sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes:

- le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel).
- le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, que $P \in NP$.

1.4.3 Problème NP-Complet

Un problème est **NP-difficile** si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans **NP**. Formellement, on définit une notion de réduction : Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de p à p' est un algorithme transformant toute instance de p'en une instance de p. Ainsi, si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre p', p est donc aumoins aussi difficile à résoudre que p'. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes **NP-complets**, par ce qu'on ne sait pas les résoudre éfficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que $P \subset NP$, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

Le problème p est alors **NP-difficile** si pour tout problème p' de **NP**, p' se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de p' à une instance de p est polynomial .

1.4.4 Classe NP-complet

Le problème étant dans **NP et NP-difficile**, il est **NP-complet**, autrement dit, les problèmes **NP-complets** sont les plus difficiles de la classe.

Chapitre 2

Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration équitable

Dans ce chapitre, nous présentons quelques types de coloration des graphes et leurs paramétres associées. Dans ce contexte, nous rappelons les défnitions de la coloration classique et de la coloration équitable, ensuite nous exposons brièvement quelques résultats fondamentaux obtenus sur la coloration équitable.

2.1 La coloration propre

Définition 2.1.1 *Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une application c qui associé à chaque sommet de $V(G)$ une couleur de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., k\}$ de telle façon que les sommets voisins (adjacents) ont des couleurs distinctes:$\{(uv)\} \epsilon E\ (G) \Longrightarrow c(u) \neq c(v)$ (Voir Figure 2.1.1):*

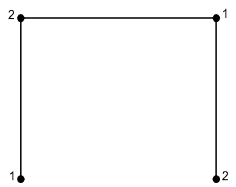


Figure 2.1.1: $\chi(P_4) = 2$.

Définition 2.1.2 *De maniére équivalente, la classe de couleur d'une coloration de G en k couleurs est une partition de l'ensemble des sommets $V(G)$ en k ensembles stables (ou indépendants) $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup ..... \cup V_k$ avec $Vi =$ ensemble des sommets colorer par la couleur i $(i = 1, ..., k)$. On dira que le graphe G admet une k-coloration.*

Définition 2.1.3 *On appellera nombre chromatique d'un graphe $G = (V, E)$, noté $\chi(G)$, le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration. c'est -à- dire le plus petit nombre des couleurs permettant de colorer tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur. La coloration optimale (minimale) du graphe $G = (V, E)$ est appellée $\chi(G)$-coloration, ou bien $\chi(G)$-chromatique.*

2.2 Posistion du probléme

On peut poser le probleme de coloration des graphes par le modéle suivant :

$$\begin{cases} \min(f = \|k\|) \\ \sum_{k=K} x_{ik} = 1 \\ X_{ik} + X_{jk} = 1 \\ \forall i, j \ \epsilon \ X \ tq(i, j) \ \epsilon \ E \text{ et } \forall \ k \ \epsilon \ K \end{cases}$$

Où : K : l'ensemble des couleurs

X : l'ensemble des sommets

E : l'ensemble des arêtes

$x_{ik} \epsilon \{0; 1\}$ tel que $x_{ik} = 1$ si le sommet i est de couleur k sinon $x_{ik} = 0$. La premiére contrainte nous informe qu'un sommet i doit être coloré d'une ceule et unique couleur, tandis que la deuxiéme indique l'impesibilité que deux sommet (i, j) relié par un arête, soint coloré par une couleur.[13]

2.3 Bornes sur le nombre chromatique

Proposition 2.3.1 *[5]* 1. *Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n est n.*

2. *Le nombre chromatique d'un graphe discret d'ordre n est* 1.

3. *Le nombre chromatique d'un cycle d'ordre pair est* 2.
4. *Le nombre chromatique d'un cycle d'ordre impair* $\geqslant 3$ *est* 3.
5. *Le nombre chromatique d'une chaîne d'ordre* $\geqslant 2$ *est* 2.

Théorème 2.3.1 *[20] Si* H *est un sous-graphe de* G*. Alors*

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

Théorème 2.3.2 *[20] Pour tout graphe* G*,*

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Théorème 2.3.3 *[3] Soit* G *un graphe connexe. Si* G *n'est ni un cycle impair ni un graphe complet. Alors*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

De plus, si G *est complet ou contient un cycle impair*

$$\chi(G) = \Delta(G) + 1$$

Théorème 2.3.4 *[3] Pour tout graphe* G *de degré maximum* $\Delta(G)$*,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Théorème 2.3.5 *[1] Si* G *est un graphe planaire. Alors*

$$\chi(G) \leq 4$$

Théorème 2.3.6 *[2] Soit* G *un graphe et* $\overline{G}$ *le graphe complementaire de* G*,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$$

Théorème 2.3.7 *[20] Un graphe* G *est* 2*-colorable si et seulement si* G *est biparti.*

La borne inférieure du nombre chromatique d'un graphe G implique le nombre chromatique de ses sous -graphes.

2.4 Quelques bornes du nombre chromatique équitable

Théorème 2.4.1 *[6] Pour tout graphe G,*

$$\chi(G) \leq \chi_{=}(G)$$

Théorème 2.4.2 *[7] Si H est un sous-graphe de G, alors*

$$\chi_{=}(H) \leq \chi_{=}(G)$$

Théorème 2.4.3 *[8] Pour tout graphe G,*

$$\omega(G) \leq \chi_{=}(G)$$

Théorème 2.4.4 *[12] Soit G un graphe connexe. Si G ni un cycle impaire ni un graphe complet,*

$$\chi_{=}(G) \leq \Delta(G)$$

2.5 Coloration équitable de certains graphe particuliers

2.5.1 Coloration équitable d'un cycle

Théorème 2.5.1 *[12] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_{=}(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

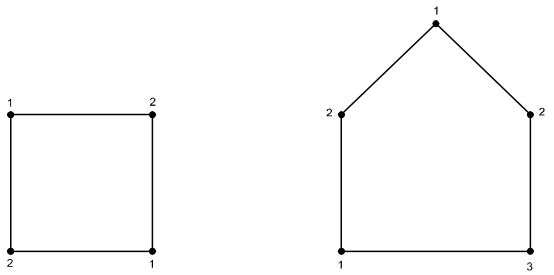


Figure 2.5.1 : $\chi_{=}(C_4) = 2$ et $\chi_{=}(C_5) = 3$

2.5.2 Coloration équitable d'une chaîne

Théorème 2.5.2 *[12] Pour tout $n \geq 2$,*

$$\chi_{=}(P_n) = 2$$

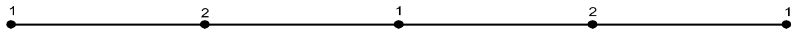


Figure 2.5.2 : $\chi_{=}(P_5) = 2$.

2.5.3 Coloration équitable d'un graphe complet

Théorème 2.5.3 *[12] Pout tout $n \geq 2$,*

$$\chi_{=}(K_n) = n$$

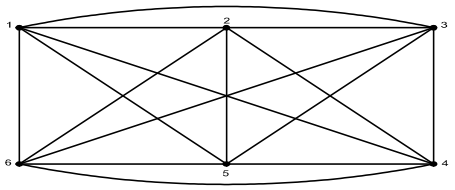


Figure 2.5.3 : $\chi_{=}(K_6) = 6$

2.5.4 Coloration équitable d'un graphe biparti

Théorème 2.5.4 *[12] Si $n \geq 3$. Alors*

$$\chi_{=}(K_{n.n}) = 2$$

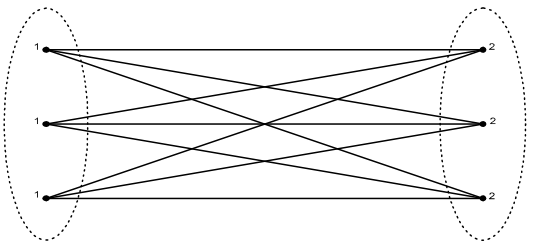


Figure 2.5.4 : $\chi_{=}(K_{3.3}) = 2$.

2.5.5 Coloration équitable d'une étoile

Théorème 2.5.5 *[12] Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}\ (K_{1.n}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

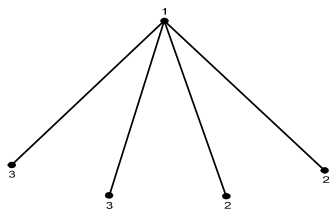


Figure 2.5.5 : $\chi_{=}(K_{1.4}) = 3$

2.5.6 Coloration équitable d'un graphe prisme de cycle

Définition 2.5.1 *[14] Un graphe de prisme d'un cycle noté par* Y_n *est un graphe obtenu en prenant deux cycles disjoints* C_n *(cycle intérieur et cycle extérieur), et on ajout des arêtes* $v_i v_i^{'}$ *pour* $i, i^{'} \in \{1, 2, ..., n\}, v_i = v_i^{'}$ *avec :*

- v_i *les sommets du cycle intérieur.*
- $v_i^{'}$ *les sommets du cycle extérieur.*

Théorème 2.5.6 *[14] Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}\ (Y_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

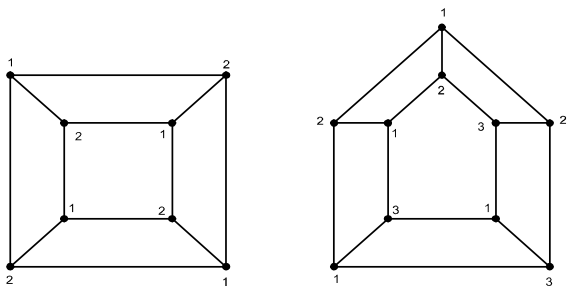


Figure 2.5.6 : $\chi_{=}(Y_4) = 2$ et $\chi_{=}(Y_5) = 3$.

2.5.7 Coloration équitable d'un graphe de tadpole

Définition 2.5.2 *[15] Le graphe Tadpole $T_{m,n}$ (graphe têtard), est le graphe obtenu en joignant l'une des extrémité de la chaîne P_n à un sommet d'un cycle C_m par isthme.*

Théorème 2.5.7 *[15] Pour tout $n \geq 2, m \geq 3$,*

$$\chi_{=}(T_{m.n}) = \begin{cases} 2 \text{ si } m \text{ est pair et } n \text{ est pair} \\ 2 \text{ si } m \text{ est pair et } n \text{ est impair} \\ 3 \text{ si } m \text{ est impair et } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } m \text{ est impair et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

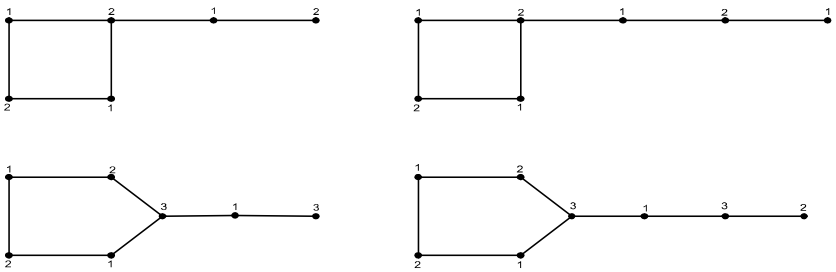


Figure 2.5.7 : $\chi_{=}(T_{4.2}) = 2$, $\chi_{=}(T_{4.3}) = 2$, $\chi_{=}(T_{5.2}) = 3$, $\chi_{=}(T_{5.3}) = 3$.

2.6 Coloration équitable du graphe milieu de quelques graphes

2.6.1 Coloration équitable du graphe milieu d'un cycle

Théorème 2.6.1 *[12] Si $n \geq 3$. Alors*

$$\chi_{=}\ (M(C_n)) = 3$$

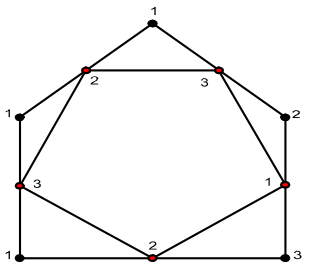


Figure 2.6.1 : $\chi_{=}(M(C_5)) = 3$.

2.6.2 Coloration équitable du graphe milieu d'une chaîne

Théorème 2.6.2 *[12] Si $n \geq 2$. Alors*

$$\chi_{=}\ (M(P_n)) = 3$$

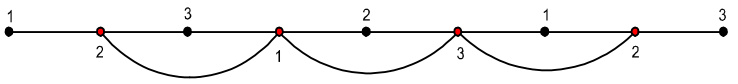


Figure 2.6.2 : $\chi_{=}(M(P_5)) = 3$.

2.6.3 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe complet

Théorème 2.6.3 *[12] Si $n \geq 3$. Alors*

$$\chi_{=}\ (M(K_n)) = n$$

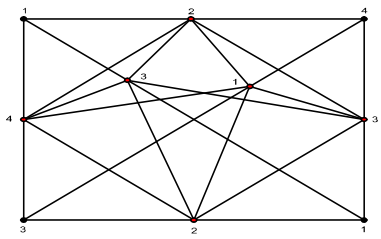


Figure 2.6.3 : $\chi_{=}(M(K_4)) = 4$.

2.6.4 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe biparti

Théorème 2.6.4 *[12] Pour le graphe milieu de graphe biparti,*

$$\chi_{=}\ (M(K_{n.n})) = n + 1$$

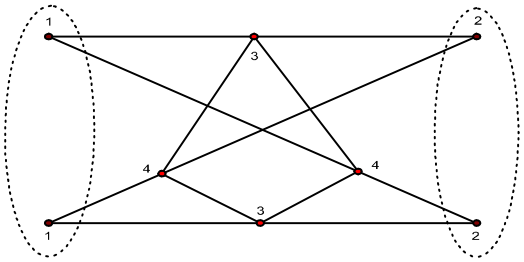


Figure 2.6.4: $\chi_{=}(M(K_{2.2})) = 4$

2.6.5 Coloration équitable du graphe milieu d'une étoile

Théorème 2.6.5 *[16] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_{=}\ (M(K_{1.n})) = n + 1$$

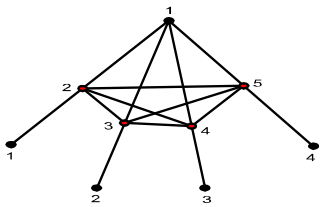


Figure 2.6.5 : $\chi_{=}(M(K_{1.4})) = 5$.

2.6.6 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe prisme de cycle

Théorème 2.6.6 *[14] Si* $n \geq 4$,

$$\chi_{=}(M(Y_n)) = 5$$

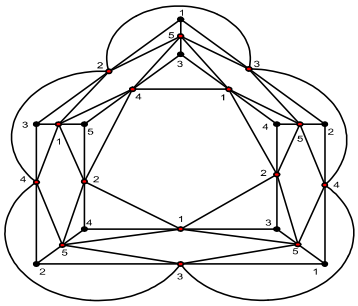


Figure 2.6.6 : $\chi_{=}(M(Y_5)) = 5$.

2.6.7 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe de tadpole

Théorème 2.6.7 *[15] Si* $m \geq 4$ *et* $n \geq 1$,

$$\chi_{=}(M(T_{m.n})) = 4$$

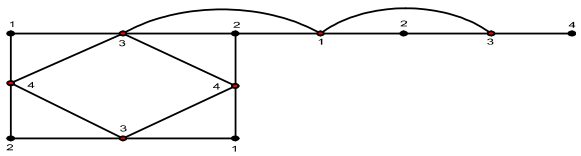


Figure 2.6.7 : $\chi_{=}(M(T_{4.2})) = 4$.

2.7 Coloration équitable du graphe central de quelques graphes

2.7.1 Coloration équitable du graphe central d'un cycle

Théorème 2.7.1 *[21] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_{=}(C(C_n)) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

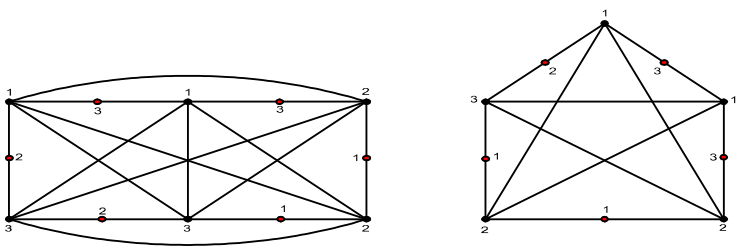


Figure 2.7.1 : $\chi_{=}(C(C_6)) = 3$ et $\chi_{=}(C(C_5)) = 3$.

Remarque 2.7.1 *Si $n = 3; 4$, alors $\chi_{=}(C(C_n)) = 2; 3$ respectivement.*

2.7.2 Coloration équitable du graphe central d'une chaîne

Théorème 2.7.2 *[21] Pour tout $n \geq 2$,*

$$\chi_{=}(C(P_n)) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} \text{ sin est impair} \end{cases}$$

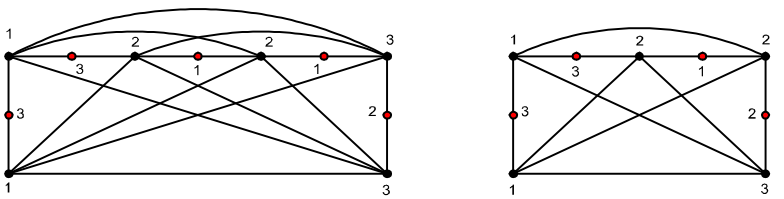


Figure 2.7.2 : $\chi_{=}(C(P_6)) = 3$ et $\chi_{=}(C(P_5)) = 3$.

2.7.3 Coloration équitable du graphe central d'un graphe complet

Théorème 2.7.3 *[21] Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}(C(K_n)) = 3$$

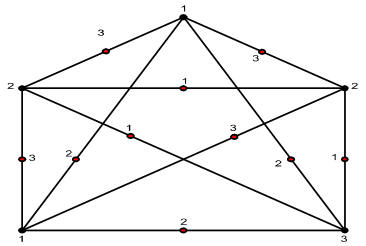


Figure 2.7.3 : $\chi_{=}(C(K_5)) = 3$.

2.7.4 Coloration équitable du graphe central d'un graphe biparti

Théorème 2.7.4 *[21] Si* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}(C(K_{n.n})) = n + 1$$

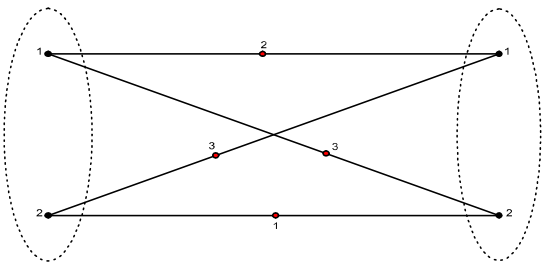


Figure 2.7.4 : $\chi_{=}(C(K_{2.2})) = 3$.

2.7.5 Coloration équitable du graphe central d'une étoile

Théorème 2.7.5 *[16] Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}(C(K_{1.n})) = n$$

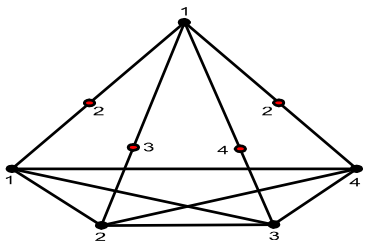


Figure 2.7.5 : $\chi_{=}(C(K_{1.4})) = 4$.

2.7.6 Coloration équitable du graphe central d'un graphe prisme de cycle

Théorème 2.7.6 *[14] Si* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}(C(Y_n)) = n$$

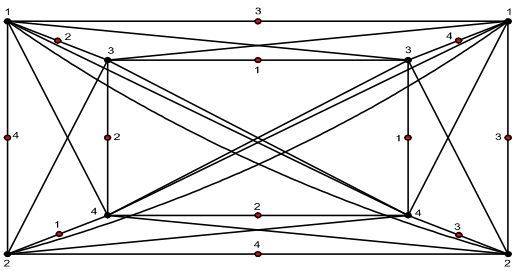


Figure 2.7.6 : $\chi_{=}(C(Y_4)) = 4$.

2.7.7 Coloration équitable du graphe central d'un graphe de tadpole

Théorème 2.7.7 *[15] Si* $m \geq 4$ *et* $n \geq 1$. *Alors*

$$\chi_{=}(C(T_{m.n})) = \begin{cases} \frac{m+n}{2} & si\ m\ est\ pair\ et\ n\ est\ pair \\ \frac{m+n+1}{2} & si\ m\ est\ pair\ et\ n\ est\ impair \\ \frac{m+n+1}{2} & si\ m\ est\ impair\ et\ n\ est\ pair \\ \frac{m+n+2}{2} & si\ m\ est\ impair\ et\ n\ est\ impair \end{cases}$$

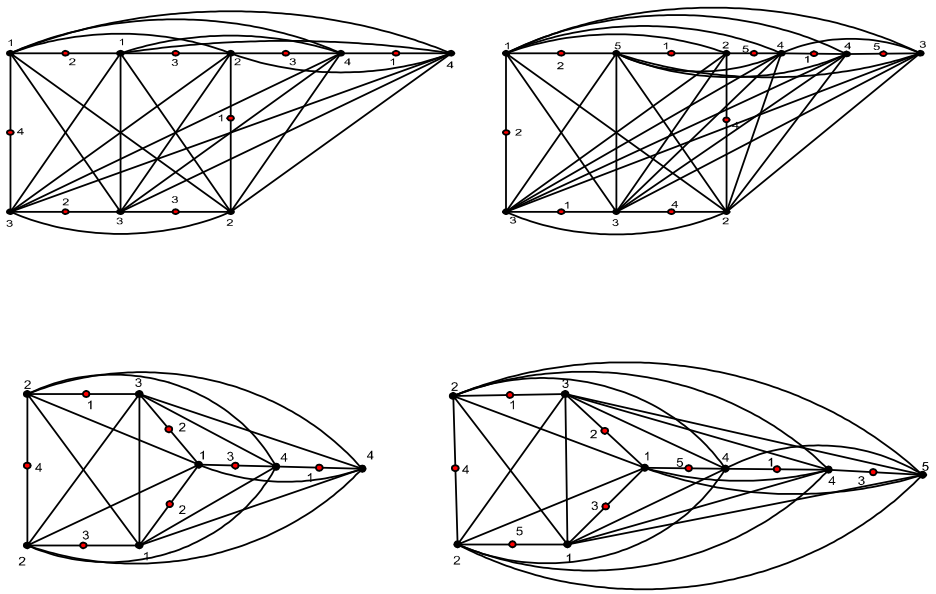


Figure 2.7.7 : $\chi_{=}(C(T_{6,2})) = 3$, $\chi_{=}(C(T_{6,3})) = 4$, $\chi_{=}(C(T_{5,2})) = 4$, $\chi_{=}(C(T_{5,2})) = 5$.

2.8 Coloration équitable du graphe total de quelques graphes

2.8.1 Coloration équitable du graphe total d'un cycle

Théorème 2.8.1 *[21] Si n multiple 3. Alors*

$$\chi_{=}(T(C_n)) = 3$$

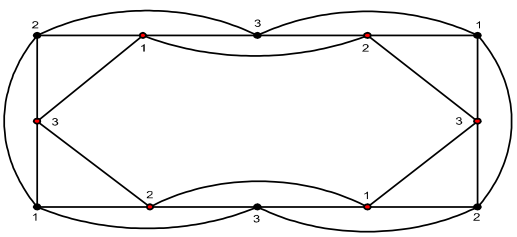


Figure 2.8.1 : $\chi_{=}(T(C_6)) = 3$.

2.8.2 Coloration équitable du graphe total d'une chaîne

Théorème 2.8.2 *[21] Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}(T(P_n)) = 3$$

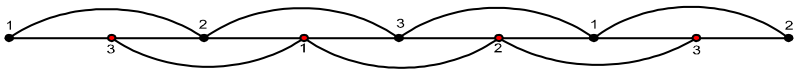


Figure 2.8.2 : $\chi_{=}(T(P_5)) = 3$.

2.8.3 Coloration équitable du graphe total d'un graphe biparti

Théorème 2.8.3 *[21] Si* $m \leq n$. *Alors*

$$\chi_{=}(T(K_{m.n})) = \begin{cases} n+1 \ si \ m < n \\ n+2 \ si \ m = n \end{cases}$$

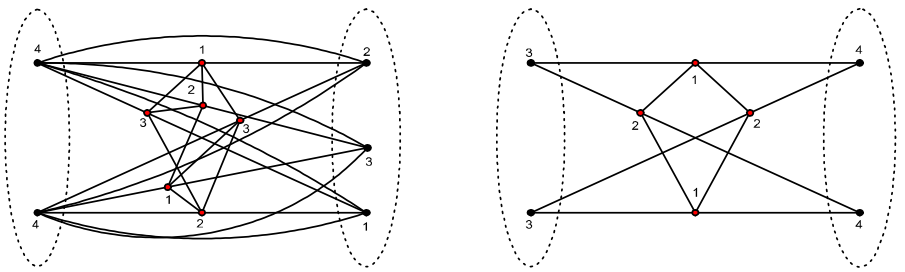


Figure 2.8.3 : $\chi_{=}(T(K_{2.3})) = 4$ et $\chi_{=}(T(K_{2.2})) = 4$.

2.8.4 Coloration équitable du graphe total d'un graphe prisme de cycle

Théorème 2.8.4 *[14] Si* $n > 4$. *Alors*

$$\chi_{=}(T(Y_n)) = 5$$

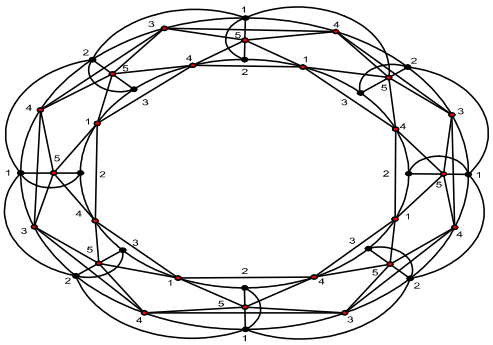


Figure 2.8.4 : $\chi_{=}(T(Y_8)) = 5$.

2.8.5 Coloration équitable du graphe total d'un graphe de tadpole

Théorème 2.8.5 *[15] Si $m \geq 4$ et $n \geq 1$. Alors*

$$\chi_{=}(T(T_{m.n})) = 4$$

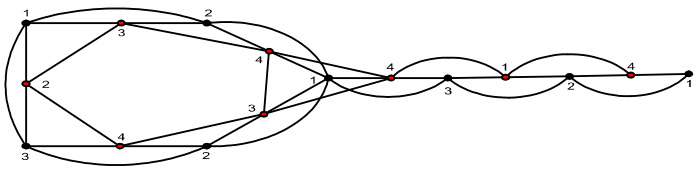


Figure 2.8.5 : $\chi_{=}(T(T_{5.3})) = 4$.

2.9 Coloration équitable et certaines operations sur les graphes

2.9.1 Coloration équitable de produit cartisien

Théorème 2.9.1 *[4]*

$$\chi_{=}(C_m \square C_n) = \begin{cases} 2 \ si \ m, n \ sont \ pairs \\ 3 \qquad sinon \end{cases}$$

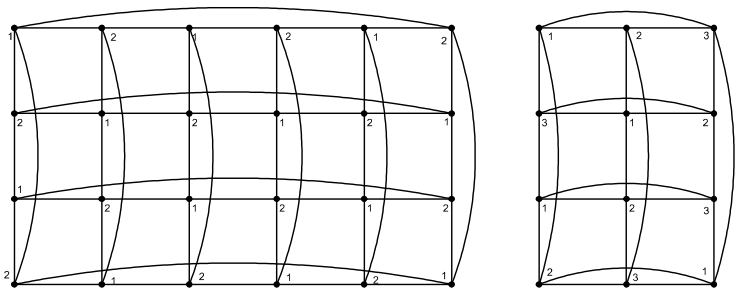


Figure 2.9.1: $\chi_{=}(C_4 \square C_4) = 2$ et $\chi_{=}(C_4 \square C_3) = 3$

Théorème 2.9.2 *[7] Soit m, n des entiers positifs, m, $n \geq 3$ et n est impair,*

$$\chi_{=}(K_{1.m} \square P_n) = 3$$

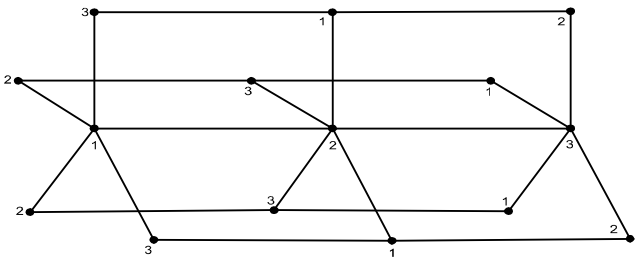


Figure 2.9.2 : $\chi_{=}(K_{1.4} \square P_3) = 3$.

2.9.2 Coloration équitable de produit direct

Théorème 2.9.3 *[7]*

$$\chi_{=}(C_m \times C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } m, n \text{ est pair} \\ 3 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

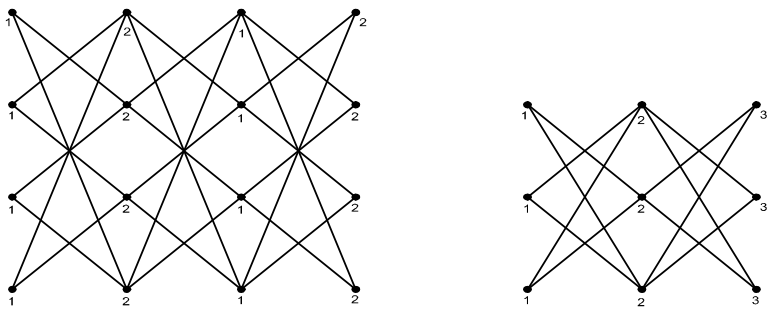


Figure 2.9.3 : $\chi_{=}(C_4 \times C_4) = 2$, $\chi_{=}(C_3 \times C_3) = 3$.

Corollaire 2.9.1 *[7] Soit H un graphe ayant au moins un sommet, m, n entiers positifs,*

$$\begin{aligned} \chi_{=}(C_n \times H) &= 2 \text{ pour } n \text{ pair} \\ \chi_{=}(P_n \times H) &= 2 \text{ pour } n \text{ pair} \\ \chi_{=}(K_{m.n} \times H) &= 2 \text{ pour } m = n \end{aligned}$$

Maintenant, nous donnons quelques valeurs exactes du nombre chromatique équitable de produits de certains graphes

Théorème 2.9.4 *[7] Soit m, n des entiers positifs,*

$$\chi_{=}(K_{1.m} \times K_{1.n}) = \frac{(m+1)(n+1)}{\max\{m,n\}+1} = \min\{m,n\}+1$$

Théorème 2.9.5 *[7] Soit m, n des entiers positifs, $m, n > 1$,*

$$\chi_{=}(K_n \times P_m) = \begin{cases} 2 \text{ si } m \text{ est pair ou } n = 2 \\ 3 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

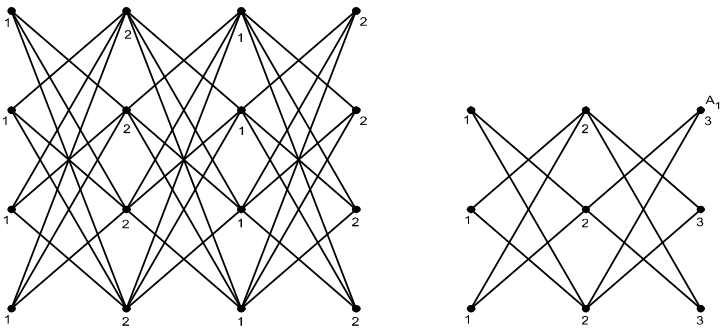


Figure 2.9.4 : $\chi_{=}(K_4 \times P_4) = 2$ et $\chi_{=}(K_3 \times P_3) = 3$.

Corollaire 2.9.2 *[7] Soit G un graphe à n sommets et au moins une arête,*

$$\chi_{=}(G \times P_m) \leq \begin{cases} 2 \text{ si } m \text{ est pair} \\ 3 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Corollaire 2.9.3 *[9] Soit $m, n \geq 3$ des entiers positifs impairs,*

$$\chi_{=}(P_m \times P_n) = 3$$

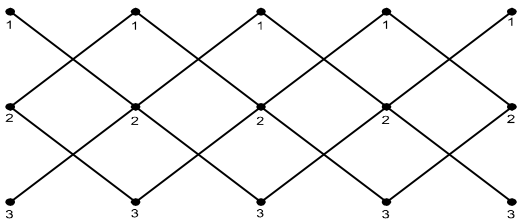


Figure 2.9.5 : $\chi_{=}(P_3 \times P_5) = 3$.

Corollaire 2.9.4 *[7] Soit m, n des entiers positifs et $n \geq 2$,*

$$\chi_{=}(K_{1.m} \times P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

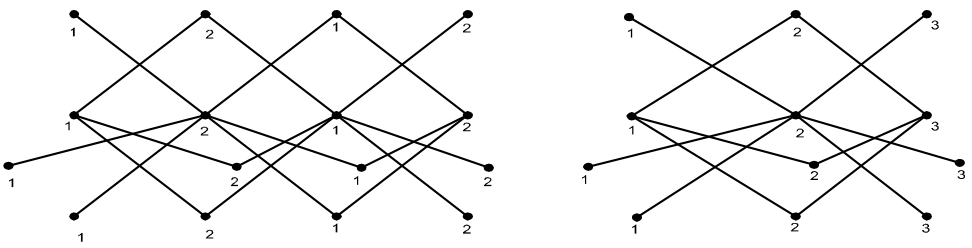


Figure 2.9.6 : $\chi_=(K_{1.3} \times P_4) = 2$ et $\chi_=(K_{1.3} \times P_3) = 3$.

2.9.3 Coloration équitable de produit total

Théorème 2.9.6 *[18] Soit G_1, G_2 des graphes avec au moins une arête,*

$$\chi_=(G_1 \boxtimes G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} + 2$$

Dans le reste de cette section, nous collectons plusieurs résultats exacts

Théorème 2.9.7 *[7] Soit m, n des entiers positifs et $m, n > 1$,*

$$\chi_=(P_m \boxtimes P_n) = \begin{cases} 4 \text{ si } n, m \text{ est pair} \\ 5 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

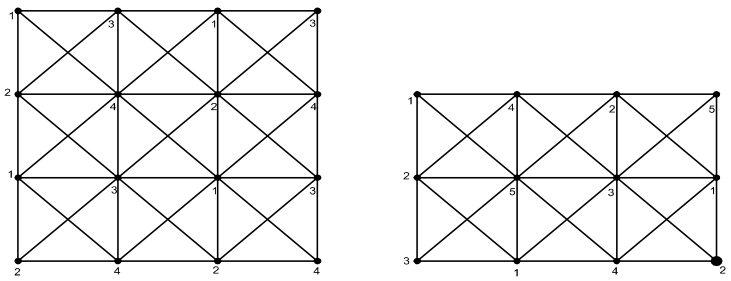


Figure 2.9.7 : $\chi_=(P_4 \boxtimes P_4) = 4$ et $\chi_=(P_3 \boxtimes P_4) = 5$.

2.10 Coloration équitable du graphe de mycielski

2.10.1 Coloration équitable du graphe de mycielski d'un cycle

Théorème 2.10.1 *[19] Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}(\mu(C_n)) = \begin{cases} 3 \ si \ n = 4, 6, 8 \\ 4 \ si \ n \geq 10, \ n \ est \ pair \\ 4 \ si \ n \ est \ impair \end{cases}$$

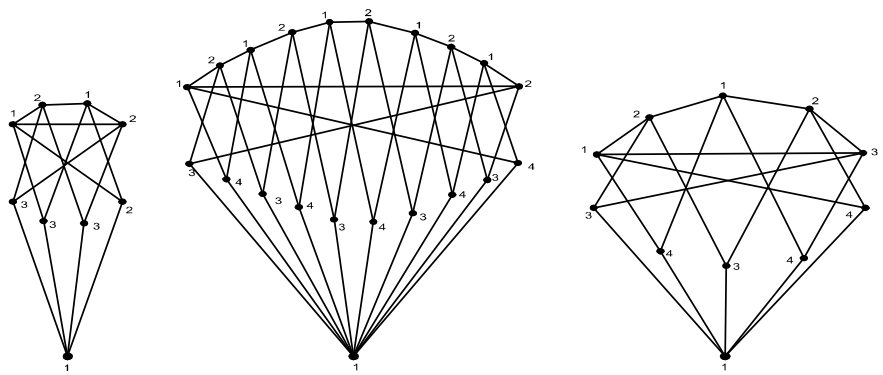


Figure 2.10.1 : $\chi_{=}(\mu(C_4)) = 3$ et $\chi_{=}(\mu(C_{10})) = 4$ et $\chi_{=}(\mu(C_5)) = 4$.

2.10.2 Coloration équitable du graphe de mycielski d'une chaîne

Théorème 2.10.2 *[19] Pour tout* $n \geq 1$,

$$\chi_{=}(\mu(P_n)) = \begin{cases} 2 \ si \ n = 1 \\ 3 \ si \ n \leq 11, n \neq 10 \\ 4 \quad si \ n \ \geq 10, n \neq 11 \end{cases}$$

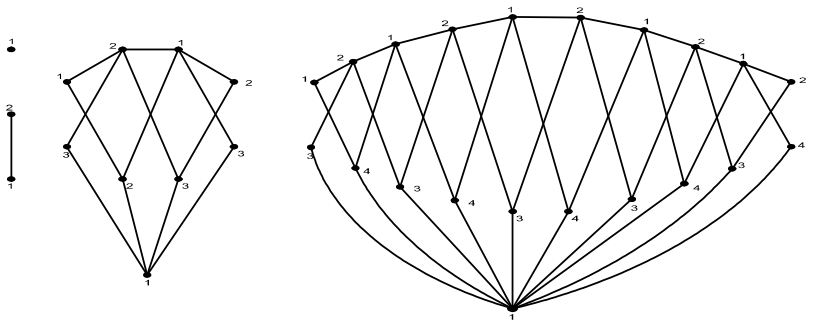


Figure 2.10.2 : $\chi_{=}(\mu(P_1)) = 2$ et $\chi_{=}(\mu(P_4)) = 3$ et $\chi_{=}(\mu(P_{10})) = 4$.

2.10.3 Coloration équitable du graphe de mycielski de graphe biparti

Théorème 2.10.3 *[22] Pour les graphes bipartis,*

$$\chi_{=}(\mu(K_{m;n})) = \begin{cases} 3 \ si \ m = n \leq 4 \\ 4 \ si \ m = n \geq 5 \\ 3 \ si \ 2m = n \\ \left\lceil \frac{m+n}{\min(m,n)} \right\rceil \qquad sinon \end{cases}$$

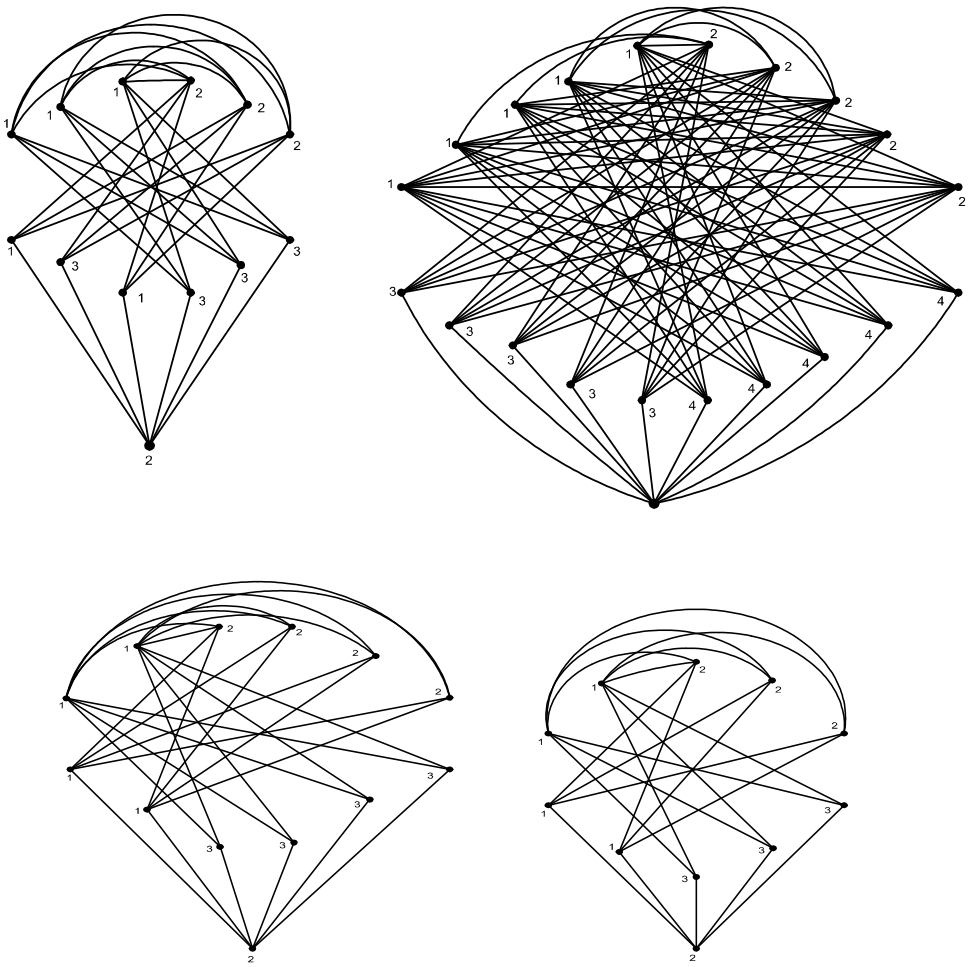


Figure 2.10.4 : $\chi_=(\mu(K_{3.3})) = 3$, $\chi_=(\mu(K_{5.5})) = 5$, $\chi_=(\mu(K_{2.4})) = 3$ et $\chi_=(\mu(K_{2.3})) = 3$.

Chapitre 3

Détermination du nombre chromatique équitable de quelques graphes particuliers

Dans ce chapitre, nous donnons nos résultats sur la détermination du nombre chromatique équitable de quelques types de graphes.

3.1 Coloration équitable du graphe moulin

Définition 3.1.1 *[17]* ***Le graphe Moulin*** C_p^m *est constitué de* m *copies de cycles* C_n *et un sommet commun.*

Exemple 3.1.1

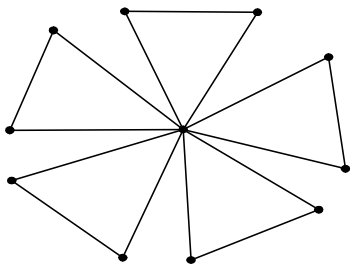


Figure 3.1.1 : Graphe moulin C_3^5.

Proposition 3.1.1 *Soit G un graphe moulin. Si $p = 3$. Alors :*

$$\chi_{=}(C_3^m) = m + 1$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe moulin C_3^m tel que $m \geq 2$, et soit $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ les sommets de graphe G, Soit v_1 le sommet commun. Colorons v_1 par 1. Comme v_1 est adjacent à tous les sommets $\{v_2, v_3..., v_n\}$, la couleur 1 ne peut être présent dans l'ensemble $\{v_2, v_3..., v_n\}$. D'après la dèfinition de la coloration équitable ($||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$), alors chaque couleur de l'ensemble $\{v_2, v_3..., v_n\}$ doit être utiliser au plus deux fois. Comme $|\{v_2, v_3..., v_n\}| = 2m$, alors on utilise m couleurs pour colorer les sommets $\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$. Par conséquent $\chi_{=}(C_3^m) = m + 1$. ■

Exemple 3.1.2

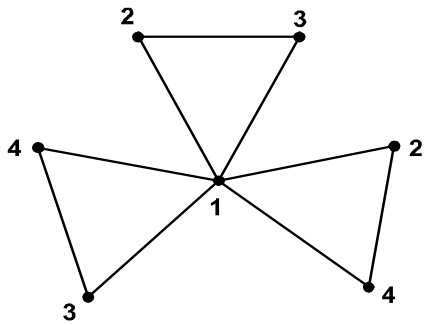


Figure 3.1.2 : Exemple de graphe moulin avec,
$\chi_{=}(C_3^3) = 4$.

3.1.1 Coloration équitable du graphe milieu de graphe moulin

Proposition 3.1.2 *Pour tout $p = 3$, $m \geq 2$,*

$$\chi_{=}(M(C_3^m)) = n = 2m + 1.$$

Preuve. Posons $G = M(C_3^m)$, et soit $V(C_3^m) \cup \{u_{i,m} : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ les sommets de $M(C_3^m)$ où $u_{i,m}$ les sommets de la subdivision des arêtes e_i pour tout $(i = 3m)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(M(C_3^m))$ comme suit :

$V_1 = \{v_{1,0}, u_{1,3}\}$

$V_2 = \{v_{1,1}, u_{1,2}\}$

$V_3 = \{v_{1,2}, u_{1,1}\}$

$V_4 = \{v_{2,1}, u_{2,2}\}$

$\vdots$

$V_{n-1} = \{v_{m,1}, u_{m,2}\}$

$V_n = \{v_{m,2}, u_{m,1}\}$

et $\{u_{2,3}, u_{3,3}, ..., u_{m,3}\}$ les sommets qui restent. Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n$. Colorons les sommets de l'ensemble $\{u_{2,3}, u_{3,3}, ..., u_{m,3}\}$ par les couleurs $2, 3, \ldots, m$. Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ donc $\chi_=(M(C_3^m)) \leq n$.

D'autre part le graphe $M(C_3^m)$ contient une clique d'ordre n, alors d'après le Théorème 2.4.2 $\chi_=(M(C_3^m)) \geq n$.

Par conséquent $\chi_=(M(C_3^m)) = n$. ■

Exemple 3.1.3

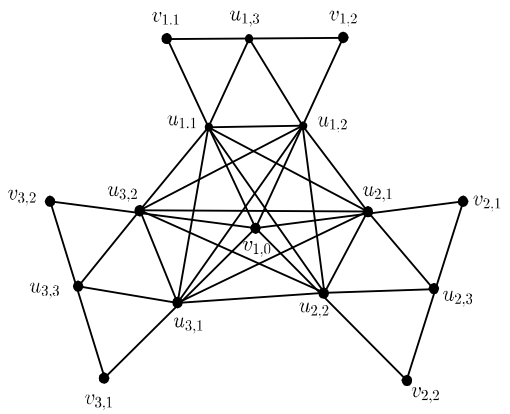


Figure 3.1.3 : Graphe milieu de graphe moulin avec,
$\chi_=(M(C_3^3)) = 6$.

3.1.2 Coloration équitable du graphe central de graphe moulin

Proposition 3.1.3 *Pour tout $p = 3$, $m \geq 3$,*

$$\chi_{=}(C(C_3^m)) = m.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $C(C_3^m)$, et soit $V(C_3^m) \cup \{u_{i,m} : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ les sommets de $C(C_3^m)$ où $u_{i,m}$ les sommets de la subdivision des arêtes e_i pour tout $(i = 3m)$

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(C(C_3^m))$ comme suit :

$V_1 = \{v_{1,0}, v_{1,1}, v_{1,2}, u_{m-1,3}, u_{m,3}\}$

$V_2 = \{v_{2,1}, v_{2,2}, u_{1,1}, u_{1,2}, u_{m,1}, u_{m,2}\}$

$V_3 = \{v_{3,1}, v_{3,2}, u_{2,1}, u_{2,2}, u_{1,3}\}$

$V_4 = \{v_{4,1}, v_{4,2}, u_{3,1}, u_{3,2}, u_{2,3}\}$

$\vdots$

$V_m = \{v_{m,1}, v_{m,2}, u_{m-1,1}, u_{m-1,2}, u_{m-2,3}\}$

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont des ensembles indépendants avec $|V_1| = |V_3| = \ldots = |V_m| = 5$ et $|V_2| = 6$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq m$. Ceci implique que $\chi_{=}(C(C_3^m)) \leq m$.

D'autre part le graphe $C(C_3^m)$ contient une clique d'ordre m, alors d'après le Théorème 2.4.2 $\chi_{=}(C(C_3^m)) \geq m$.

Par conséquent $\chi_{=}(C(C_3^m)) = m$. ■

Exemple 3.1.4

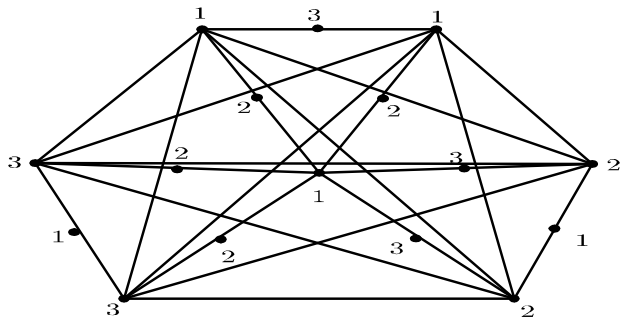


Figure 3.1.4 : Graphe central de graphe moulin de $\chi_{=}(C(C_3^3)) = 3$.

3.1.3 Coloration équitable du graphe total de graphe moulin

Proposition 3.1.4 *Pour tout $p = 3$, $m \geq 3$,*

$$\chi_{=}(T(C_3^m)) = n.$$

Preuve. Soit G le graphe $T(C_3^m)$, et soit $V(C_3^m) \cup \{u_{i,m} : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ les sommets de $T(C_3^m)$ où $u_{i,m}$ les sommets de la subdivision des arêtes e_i pour tout $(i = 3m)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(T(C_3^m))$ comme suit :

$V_1 = \{v_{1,0}, u_{1,3}\}$

$V_2 = \{v_{1,1}, u_{1,2}\}$

$V_3 = \{v_{1,2}, u_{1,1}\}$

$\vdots$

$V_n = \{v_{m,2}, u_{m,1}\}$

et $\{u_{2,3}, \ldots, u_{m,3}\}$ les sommets qui restent. On colorons comme suit $\{2, 3, \ldots, m\}$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont des ensembles indepéndants, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ donc. Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n$. Colorons les sommet de l'ensemble $\{u_{2,3}, \ldots, u_{m,3}\}$ par les couleurs $2, 3, ..., m$. D'où $\chi_{=}(T(C_3^m)) \leq n$.

D'autre part le graphe $T(C_3^m)$ contient une clique d'ordre n, alors d'après le Théorème 2.4.2 $\chi_{=}(T(C_3^m)) \geq n$.

Par conséquent $\chi_{=}(T(C_3^m)) = n$.

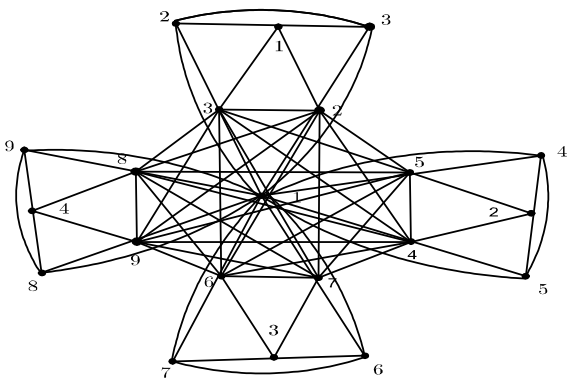


Figure 3.1.5 : Graphe total du graphe moulin de C_3^4.

■

3.2 Coloration équitable du graphe circulant

Définition 3.2.1 *[10]* ***Le graphe circulant (*** *l'échelle de Möbius) est un graphe cubique formé à partir du cycle à $2n$ sommets et $3n$ arêtes en ajoutant des arêtes entre les sommets opposés du cycle.*

Si n est impair alors le graphe Ml_n est un graphe biparti.

Proposition 3.2.1 *Pour tout n,*

$$\chi_{=}(ML_n) = \begin{cases} 3 \text{ si } 2n \equiv 0 \bmod[4] \text{ (n est pair).} \\ 2 \text{ si } 2n \equiv 2 \bmod[4] \text{ (n est impair).} \end{cases}$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe ML_n tel que $V(ML_n) = 2n = \{v_i : 1 \leq i \leq 2n\}$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(ML_n)$ comme suit :

Cas 1 : Si $n \equiv 1 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq 2n-1\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq 2n\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq 2n-2\}$

Cas 2 : Si $n \equiv 2 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq 2n-3\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq 2n-1, i \neq n+1\} \cup \{v_n\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq 2n-2, i \neq n\} \cup \{v_{n+1}, v_{2n}\}$

Cas 3 : Si $n \equiv 0 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], n+3 \leq i \leq 2n-3\} \cup \{v_{2n-1}\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], n+4 \leq i \leq 2n-5\} \cup \{v_{n+1}, v_{2n}\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n\} \cup \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], n+2 \leq i \leq 2n-4\} \cup \{v_{2n-2}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 3$.

Il est clair que V_1, V_2, V_3 sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. D'où $\chi_{=}(ML_n) \leq 3$.

D'autre part le graphe ML_n contient une clique d'ordre 3 alors d'après le Théorème 2.4.2 $\chi_{=}(ML_n) \geq 3$.

Par conséquent $\chi_{=}(ML_n) = 3$. ■

Exemple 3.2.1

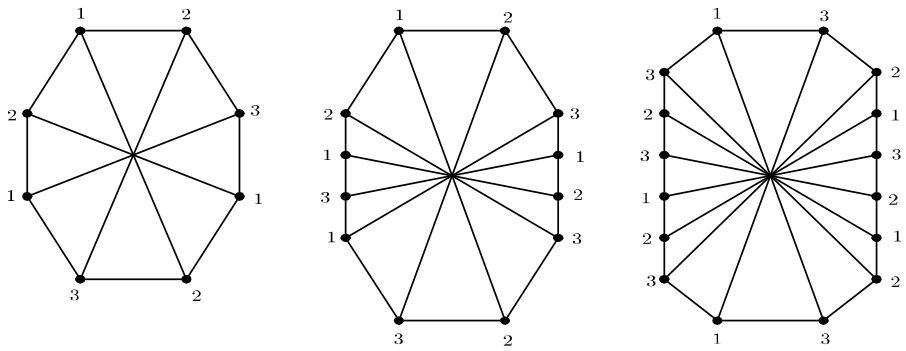


Figure 3.2.1 : $\chi_=(ML_4) = 3$, $\chi_=(ML_6) = 3$, $\chi_=(ML_8) = 3$.

3.2.1 Coloration équitable du graphe central de graphe circulant

Proposition 3.2.2 *Pour tout n pair avec $n \geq 6$,*

$$\chi_=(C(ML_n)) = n.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $M(ML_n)$ tel que $V(ML_n) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$ où u_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iv_{i+1} et s_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iv_{i+n} (les sommets opposé)

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(M(ML_n))$ comme suit :

$V_1 = \{v_1, v_2, u_{n-3}, u_{n-2}\} \cup \{s_n\}$

$V_2 = \{v_3, v_4, u_{n-1}, u_n\} \cup \{s_{n-1}\}$

$V_3 = \{v_5, v_6, u_1, u_2\} \cup \{s_{n-2}\}$

$V_4 = \{v_6, v_7, u_3, u_4\} \cup \{s_{n-3}\}$

$\vdots$

$V_n = \{v_{n-1}, v_n, u_{n-5}, u_{n-4}\} \cup \{s_1\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont des ensembles indépendants avec $V_1 = V_2 = \ldots = V_n$, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. D'où $\chi_=(C(ML_n)) \leq n$.

D'autre part le graphe $C(ML_n)$ contient un étoile $K_{1.2n-2}$ comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.2 $\chi_=(C(ML_n)) \geq \chi_=(K_{1,2n-2}) = n$.

Par conséquent $\chi_{=}(M(ML_n)) = n$. ■

Exemple 3.2.2

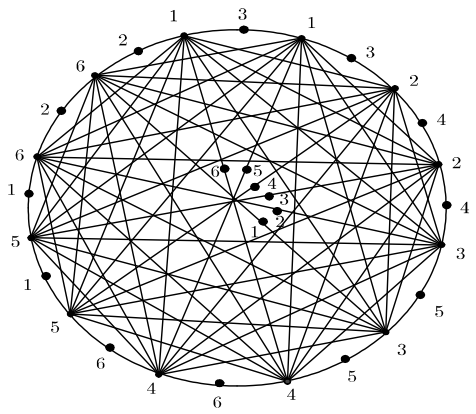


Figure 3.2.2 : Graphe central de graphe circulant ML_6.

3.2.2 Coloration équitable du graphe milieu de graphe circulant

Proposition 3.2.3 *Pour tout n pair,*

$$\chi_{=}(M(ML_n)) = 4.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $M(ML_n)$ tel que $V(ML_n) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$ où u_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iv_{i+1} et s_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iv_{i+n} (les sommets opposé)

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(M(ML_n))$ comme suit :

Cas 1: si n multiple 3 alors :

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq 2n-2\} \cup \{u_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq 2n-1\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq 2n\} \cup \{u_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq 2n-2\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq 2n-1\} \cup \{u_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq 2n\}$

$V_4 = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$

Cas 2: si n multiple pas 3 alors :

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[4], 1 \leq i \leq 2n-3\} \cup \{u_i : i \equiv 2 \bmod[4], 2 \leq i \leq 2n-2\} \cup \{s_i : i \equiv 0 \bmod[4], 4 \leq i \leq 2n\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[4], 4 \leq i \leq 2n\} \cup \{u_i : i \equiv 1 \bmod[4], 1 \leq i \leq 2n-3\} \cup \{s_i : i \equiv 3 \bmod[4], 3 \leq i \leq 2n-1\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[4], 2 \leq i \leq 2n-2\} \cup \{u_i : i \equiv 3 \bmod[4], 3 \leq i \leq 2n-1\} \cup \{s_i : i \equiv 1 \bmod[4], 1 \leq i \leq 2n-3\}$

$V_4 = \{v_i : i \equiv 3 \bmod[4], 3 \leq i \leq 2n-1\} \cup \{u_i : i \equiv 0 \bmod[4], 4 \leq i \leq 2n\} \cup \{s_i : i \equiv 2 \bmod[4], 2 \leq i \leq 2n-2\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 4$.

Il est clair que V_1, V_2, V_3, V_4 sont des ensembles indépendants, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ donc $\chi_=(M(ML_n)) \leq 4$. D'autre part le graphe $M(ML_n)$ contient une clique d'ordre 4 alors d'après le Théorème 2.4.2 $\chi_=(M(ML_n)) \geq 4$. Par conséquent $\chi_=(M(ML_n)) = 4$. ■

Exemple 3.2.3

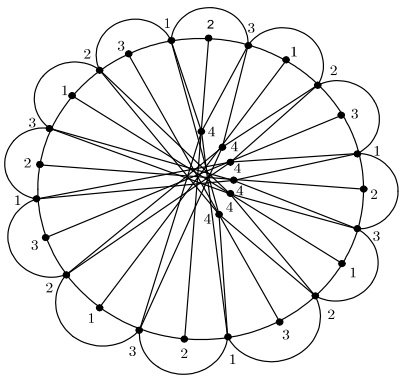


Figure 3.2.3 : Graphe milieu de graphe circulant ML_n.

3.3 Coloration équitable d'un graphe de fan

Définition 3.3.1 ***Un graphe de fan*** $F_{1,n}$ *est un graphe connexe obtenu à partir de l'union disjointe d'une chaîne d'ordre* n *et un sommet en reliant ce sommet à tous les sommet de la chaîne.*

3.3.1 Coloration équitable d'un graphe de fan

Proposition 3.3.1 *Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}(F_{1.n}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe de fan tel que $n \geq 3$ et soit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les sommets de la chaîne P_n, et v le sommet commun.

Deux cas se présentent:

Cas 1: si n est pair

$V_1 = \{v\}$

$V_2 = \{v_1, v_{\frac{n}{2}+1}\}$

$V_3 = \{v_{2,} v_{\frac{n}{2}+2}\}$

$V_4 = \{v_3, v_{\frac{n}{2}+3}\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil+1} = \{v_{\frac{n}{2}}, v_n\}$

Cas 2: si n est impair

$V_1 = \{v\}$

$V_2 = \{v_1, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil+1}\}$

$V_3 = \{v_{2,} v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil+2}\}$

$V_4 = \{v_3, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil+3}\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil+1} = \{v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil+1}$ sont des ensembles indépendants. Si n est pair, alors $|V_2| = |V_3| = \ldots = |V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil+1}| = 2$ et $|V_1| = 1$. Si n est impaire, alors $|V_2| = |V_3| = \ldots = |V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}| = 2$ et $|V_1| = |V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil+1}| = 1$. Par conséquent, cette coloration est une coloration équitable avec $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Donc $\chi_{=}(F_{1,n}) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

D'autre part dans les deux cas le graphe $F_{1,n}$ contient un étoile $K_{1,n}$ comme sous graphe, alors d'aprés le Théorème 2.4.2 $\chi_{=}(F_{1,n}) \geq \chi_{=}(K_{1.n}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Par conséquent $\chi_{=}(F_{1,n}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. ■

Exemple 3.3.1

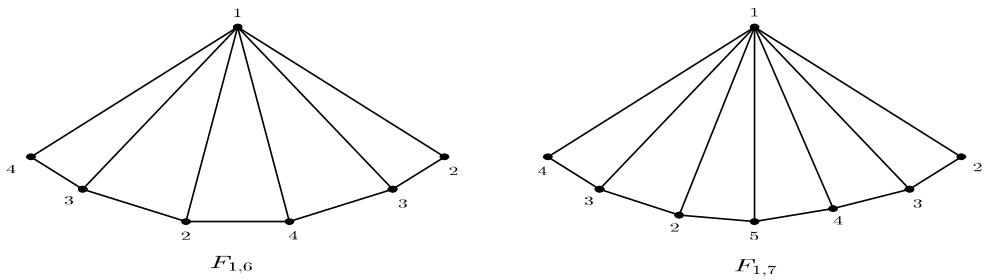


Figure 3.3.1: Graphe de fan $\chi_=(F_{1.n}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

3.3.2 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe de fan

Proposition 3.3.2 *Pour tout $n \geq 4$,*

$$\chi_=(M(F_{1.n})) = n + 1.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $M(F_{1,n})$ tel que $V(M(F_{1,n})) = V(F_{1,n}) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$, où u_i les sommets de la subdivision des arêtes $v_i v_{i+1}$ et s_i les sommets de la subdivision des arêtes vv_i, $(1 \leq i \leq n)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(M(F_{1,n}))$ comme suit :

$V_1 = \{v, v_n, u_1\}$

$V_2 = \{s_1, u_2\}$

$V_3 = \{s_2, v_1, u_3\}$

$V_4 = \{s_3, v_2, u_4\}$

$\vdots$

$V_n = \{s_{n-1}, v_{n-2}\}$

$V_{n+1} = \{s_n, v_{n-1}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n+1$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_1| = |V_3| = \ldots = |V_{n-1}| = 3$ et $|V_2| = |V_n| = |V_{n+1}| = 2$. Donc cette coloration est équitable. Ceci implique que $\chi_=(M(F_{1,n})) \leq n + 1$.

D'autre part le graphe $M(F_{1,n})$ contient une clique K_{n+1} comme sous graphe. D'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(M(F_{1,n})) \geq \chi_=(K_{n+1}) = n + 1$.

Par conséquent $\chi_{=}(M(F_{1,n})) = n + 1$. ■

Exemple 3.3.2

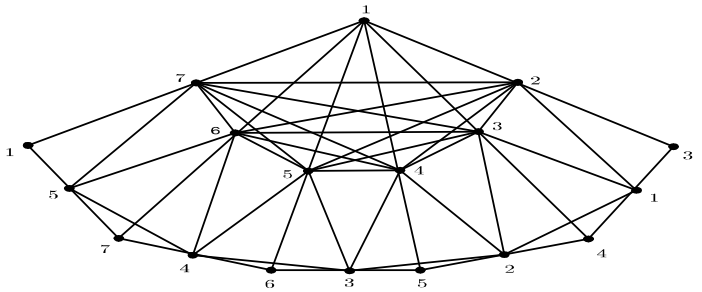


Figure 3.3.2 : Graphe milieu d'un graphe de fan

$\chi_{=}(M(F_{1,6})) = 7$.

3.3.3 Coloration équitable du graphe central d'un graphe de fan

Proposition 3.3.3 *Pour tout $n \geq 4$,*

$$\chi_{=}(C(F_{1.n})) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $C(F_{1,n})$ tel que $V(C(F_{1,n})) = V(F_{1,n}) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$ où u_i les sommets de la subdivision des arêtes $v_i v_{i+1}$, s_i les sommets de la subdivision des arêtes vv_i, $(1 \leq i \leq n)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(C(F_{1,n}))$ comme suit :

Cas 1 : Si n est pair

$V_1 = \{v, v_1, v_2, u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}\}$

$V_2 = \{v_3, v_4, s_1, s_2, s_{n-1}, s_n\}$

$V_3 = \{v_5, v_6, u_1, u_2, s_3, s_4\}$

$V_4 = \{v_7, v_8, u_3, u_4, s_5, s_6\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \{v_{n-1}, v_n, u_{n-4}, u_{n-5}, s_{n-2}, s_{n-3}\}$

Cas 2 : Si n est impair, $n \geq 5$

$V_1 = \{v, v_1, v_2, u_{n-1}, u_{n-2}\}$

$V_2 = \{v_3, v_4, s_1, s_2, s_n\}$

$V_3 = \{v_5, v_6, u_1, u_2, s_3, s_4\}$

$V_4 = \{v_7, v_8, u_3, u_4, s_5, s_6\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} = \{v_{n-1}, v_{n-2}, u_{n-5}, u_{n-6}, s_{n-4}, s_{n-3}\}$

$V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \{v_n, u_{n-3}, u_{n-4}, s_{n-1}, s_{n-2}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}| = 6$ si n est pair, $|V_1| = |V_2| = |V_n| = 5$ et $|V_3| = |V_4| = \ldots = |V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}| = 6$ si n est impair. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que. $\chi_=(C(F_{1,n})) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. D'autre part le graphe $C(F_{1,n})$ contient une clique $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(C(F_{1,n})) \geq \chi_=(K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Par conséquent $\chi_=(C(F_{1,n})) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Exemple 3.3.3 *Si n est impair*

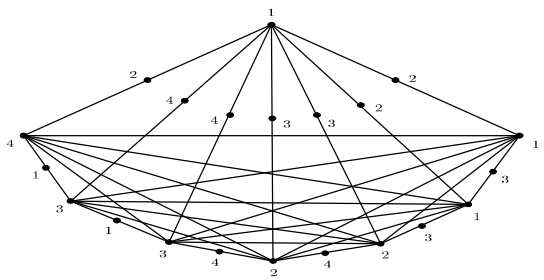


Figure 3.3.3: Graphe central d'un graphe de fan $\chi_=(C(F_{1,7})) = 4$.

Exemple 3.3.4 *Si n est pair*

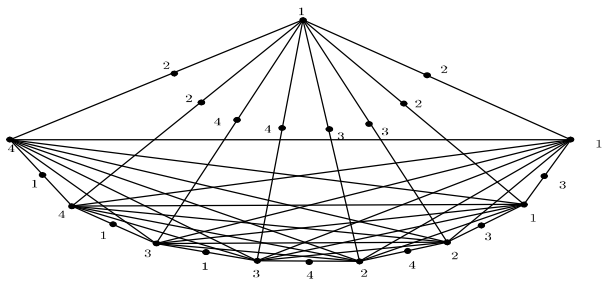


Figure 3.3.4: Graphe central d'un graphe de fan $\chi_=(C(F_{1,8})) = 4$.

■

3.4 Coloration équitable d'un graphe de double fan

Définition 3.4.1 ***Un graphe de double fan*** $F_{2,n}$ *est un graphe connexe obtenu à partir de joint de* $P_n + \overline{P_2}$ *en ajoutant toutes les arêtes entre tous les sommets de* P_n *et* $\overline{P_2}$.

Proposition 3.4.1 *Soit* $F_{2,n}$ *le graphe de double fan avec* $n \geq 5$,

$$\chi_=(F_{2,n}) = \begin{cases} \frac{n+3}{3} \ si \ n \equiv 0 \bmod[3] \\ \frac{n+4}{3} \ si \ n \equiv 2 \bmod[3] \\ \frac{n+5}{3} \ si \ n \equiv 1 \bmod[3] \end{cases}$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le doube fan graphe $F_{2,n}$ tel que $V(F_{2,n}) = \{v, v'\} \cup \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ avec $\{v, v'\}$ les sommets de $\overline{P_2}$ et v_i les sommets de P_n.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(F_{2,n})$ comme suit :

Cas 1: Si $n \equiv 0 \bmod[3]$

$V_1 = \{v, v'\}$

$V_2 = \{v_1, v_{\frac{n}{3}+1}, v_{\frac{2n}{3}+1}\}$

$V_3 = \{v_2, v_{\frac{n}{3}+2}, v_{\frac{2n}{3}+2}\}$

$V_4 = \{v_3, v_{\frac{n}{3}+3}, v_{\frac{2n}{3}+3}\}$

$\vdots$

$V_{\frac{n+3}{3}} = \{v_{\frac{n}{3}}, v_{\frac{2n}{3}}, v_n\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \frac{n+3}{3}$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{\frac{n+3}{3}}$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_2| = |V_3| = \ldots = |V_{\frac{n+3}{3}}| = 3$, $|V_1| = 2$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Donc cette coloration est équitable. Ceci implique que $\chi_=(F_{2,n}) \leq \frac{n+3}{3}$.

Supposons que $\chi_=(F_{2,n}) = k \leq \frac{n}{3}$. Comme v, v' sont adjacent à tout les sommets de l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, la couleur 1 ne peut être présent dans l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ c-à-d $|V_1| = 2$. Il est clair que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = n$. Pour minimiser $\chi_=(F_{2,n})$ et d'après la définition de la coloration équitable ($||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$) chaque couleur de l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ doit être utilisé deux ou trois fois. D'autre part, on a $n = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme

$|V_i| \leq 3$, $n \leq 3\,(k-1)$. Vu que $k \leq \frac{n}{3}$, $3(k-1) \leq n-3 \neq n$, contradiction. Ceci implique que $\chi_=(F_{2,n}) \geq \frac{n+3}{3}$.

Par conséquent $\chi_=(F_{2,n}) = \frac{n+3}{3}$.

Cas 2: Si $n \equiv 1 \bmod[3]$

$V_1 = \{v, v'\}$

$V_2 = \{v_1, v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}, (v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 2} \text{ si } n \geq 7)\}$

$V_3 = \{v_2, v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2}, (v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 3} \text{ si } n \geq 10)\}$

$V_4 = \{v_3, v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 3}, (v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 4} \text{ si } n \geq 13)\}$

$\vdots$

$V_{\frac{n+5}{3}} = \{v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}, v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \frac{n+5}{3}$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{\frac{n+5}{3}}$ sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ alors $\chi_=(F_{2,n}) \leq \frac{n+5}{3}$.

Supposons que $\chi_=(F_{2,n}) = k \leq \frac{n+2}{3}$. Comme v, v' sont adjacent à tout les sommets $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, la couleur 1 ne peut être présent dans l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ c-à-d $|V_1| = 2$, Il est clair que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = n$. Pour minimiser $\chi_=(F_{2,n})$ et d'après la définition de la coloration équitable ($|V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$) chaque couleur de l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ doit être utilisé deux ou trois fois. D'autre part, on a $n = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme $|V_i| \leq 3$, $n \leq 3\,(k-1)$. Vu que $k \leq \frac{n+2}{3}$, $3(k-1) \leq n-1 \neq n$, contradiction. Ceci implique que $\chi_=(F_{2,n}) \geq \frac{n+5}{3}$.

Par conséquent $\chi_=(F_{2,n}) = \frac{n+5}{3}$.

Cas 3: Si $n \equiv 2 \bmod[3]$

$V_1 = \{v, v'\}$

$V_2 = \{v_1, v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}, (v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1} \text{ si } n \geq 5)\}$

$V_3 = \{v_2, v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2}, (v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 2} \text{ si } n \geq 8)\}$

$V_4 = \{v_3, v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 3}, (v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 3} \text{ si } n \geq 11)\}$

$\vdots$

$V_{\frac{n+4}{3}} = \{v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}, v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \frac{n+4}{3}$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{\frac{n+4}{3}}$ sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ alors $\chi_=(F_{2,n}) \leq \frac{n+4}{3}$.

Supposons que $\chi_=(F_{2,n}) = k \leq \frac{n+1}{3}$. Comme v, v' sont adjacent à tout les sommets $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, la couleur 1 ne peut être présent dans l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ c-à-d $|V_1| = 2$, Il est clair que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = n$. Pour minimiser $\chi_=(F_{2,n})$ et d'après la définition de la coloration équitable ($||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$) chaque couleur de l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ doit être utilisé deux au trois fois. D'autre part, on a $n = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme $|V_i| \leq 3$, $n \leq 3(k-1)$. Vu que $k \leq \frac{n+1}{3}$, $3(k-1) \leq n-2 \neq n$, contradiction. Ceci implique que $\chi_=(F_{2,n}) \geq \frac{n+4}{3}$.

Par conséquent $\chi_=(F_{2,n}) = \frac{n+4}{3}$. ■

Exemple 3.4.1

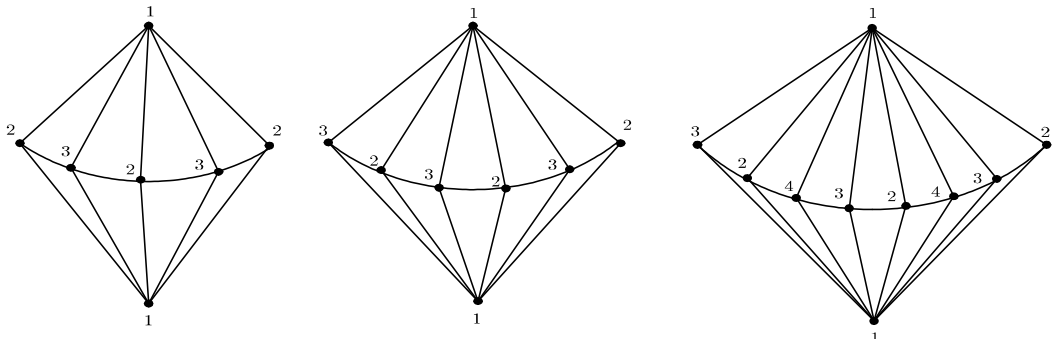


Figure 3.4.1 : Graphe de double fan.

3.4.1 Coloration équitable du graphe milieu d'un graphe double fan

Proposition 3.4.2 *Soit $F_{2,n}$ le graphe de double fan avec $n \geq 4$,*

$$\chi_=(M(F_{2.n})) = n + 1.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $M(F_{2,n})$ tel que $V(M(F_{2,n})) = V(F_{2,n}) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \cup \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_n\}$, u_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iv_{i+1}, s_i les sommets de la subdivision des arêtes vv_i, $(1 \leq i \leq n)$ et s'_i les sommets de la subdivision des arêtes $v'v_i$, $(1 \leq i \leq n)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(M(F_{2,n}))$ comme suit :

$V_1 = \{v, v_n, u_1, s'_{n-1}\}$

$V_2 = \{u_2, s_1, s'_n\}$

$V_3 = \{v_1, v', u_3, s_2\}$

$V_4 = \{v_2, u_4, s_3, s'_1\}$

$V_5 = \{v_3, u_5, s_4, s'_2\}$

$\vdots$

$V_n = \{v_{n-2}, s_{n-1}, s'_{n-3}\}$

$V_{n+1} = \{v_{n-1}, s_n, s'_{n-2}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n+1$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$ sont des ensembles indépendants avec $|V_1| = |V_3| = \ldots = |V_{n-1}| = 4$ et $|V_2| = |V_n| = |V_{n+1}| = 3$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_=(M(F_{2,n})) \leq n+1$.

D'autre part le graphe $M(F_{2,n})$ contient une clique K_{n+1} comme sous graphe alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(M(F_{2,n})) \geq \chi_=(K_{n+1}) = n+1$.

Par conséquent $\chi_=(M(F_{2,n})) = n+1$.

Exemple 3.4.2

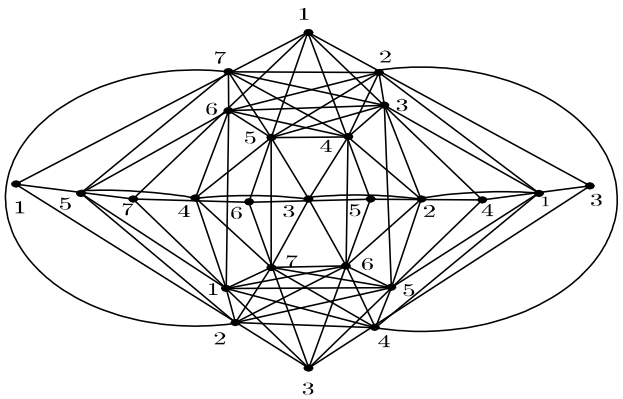


Figure 3.4.2 : Graphe milieu d'un graphe de double fan avec $\chi_=(M(F_{2,6})) = 7$.

■

3.4.2 Coloration équitable du graphe central d'un graphe de double fan

Proposition 3.4.3 *Soit $F_{2,n}$ le graphe de double fan avec $n \geq 4$,*

$$\chi_{=}(C(F_{2.n})) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $C(F_{2,n})$ tel que $V(C(F_{2,n})) = V(F_{2,n}) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \cup \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_n\}$, u_i les sommets de la subdivision des arêtes $v_i v_{i+1}$ et s_i les sommets de la subdivision des arêtes vv_i avec $(1 \leq i \leq n)$ et s'_i les sommets de la subdivision des arêtes $v'v_i$ avec $(1 \leq i \leq n)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(M(F_{2,n}))$ comme suit :

Cas 1 : si n est pair

$V_1 = \{v, v_1, v_2, u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, s'_3, s'_4\}$

$V_2 = \{v', v_3, v_4, u_1, s_1, s_2, s_{n-1}, s_n\}$

$V_3 = \{v_5, v_6, u_2, s_3, s_4, s'_1, s'_2, s'_{n-1}, s'_n\}$

$V_4 = \{v_7, v_8, u_3, u_4, s_5, s_6, s'_5, s'_6\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \{v_{n-1}, v_n, u_{n-4}, u_{n-5}, s_{n-2}, s_{n-3}, s'_{n-2}, s'_{n-3}\}$

Cas 2 : si n est impair

$V_1 = \{v, v_1, v_2, u_{n-1}, u_{n-2}, s'_3, s'_4\}$

$V_2 = \{v', v_3, v_4, u_1, s_1, s_2, s_n\}$

$V_3 = \{v_5, v_6, u_2, s_3, s_4, s'_1, s'_2, s'_n\}$

$V_4 = \{v_7, v_8, u_3, u_4, s_5, s_6, s'_5, s'_6\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} = \{v_{n-1}, v_{n-2}, u_{n-5}, u_{n-6}, s_{n-4}, s_{n-3}, s'_{n-4}, s'_{n-3}\}$

$V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \{v_n, u_{n-3}, u_{n-4}, s_{n-1}, s_{n-2}, s'_{n-1}, s'_{n-2}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ sont des ensembles indépendants avec $|V_1| = |V_2| = |V_4| = \ldots = |V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}| = 8$, $|V_3| = 9$ si n est pair, $|V_1| = |V_2| = |V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}| = 7$, $|V_3| = |V_4| = \ldots = |V_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}| = 8$ si n est impair. De plus $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_{=}(C(F_{2,n})) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

D'autre part le graphe $C(F_{2,n})$ contient une clique $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_{=}(C(F_{2,n})) \geq \chi_{=}(K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Par conséquent $\chi_{=}(C(F_{2,n})) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Exemple 3.4.3 *Si n est pair*

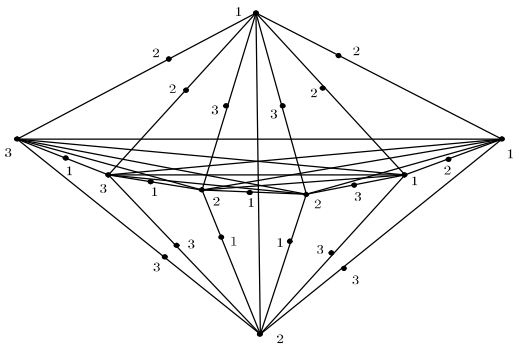


Figure 3.4.3 : Graphe central d'un graphe double fan $C(F_{2,6})$.

Exemple 3.4.4 *Si n est impair*

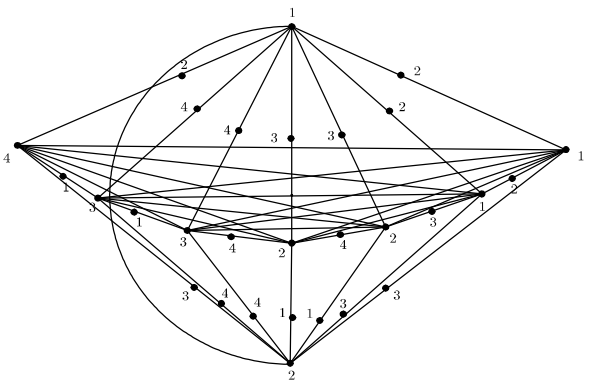


Figure 3.4.4 : Graphe central d'un graphe double fanC$(F_{2,7})$.

■

3.5 Coloration équitable de couronne des certains graphes particuliers

3.5.1 Coloration équitable de couronne d'une chaîne

Proposition 3.5.1 *Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{=}(C_r(P_n)) = 2$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $C_r(P_n)$ tel que $V(C_r(P_n)) = (v_i : 1 \leq i \leq n) \cup \{y_i : 1 \leq i \leq n\}$ et v_i les sommets du P_n et y_i des sommets pendants correspondants à chaque sommet de v_i.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(C_r(P_n))$ comme suit :

Cas 1: Si n est pair

$V_1 = \{v_1, v_3, \ldots, v_{n-1}\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_n\}$

$V_2 = \{v_2, v_4, \ldots, v_n\} \cup \{y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}\}$

Cas 2 : Si n est impair

$V_1 = \{v_1, v_3, \ldots, v_n\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_{n-1}\}$

$V_2 = \{v_2, v_4, \ldots, v_{n-1}\} \cup \{y_1, y_3, \ldots, y_n\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 2$.

ll est clair que V_1, V_2 sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ dans les deux cas, alors $\chi_{=}(C_r(P_n)) \leq 2$.

D'autre part le graphe $C_r(P_n)$ contient une chaîne comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_{=}(C_r(P_n)) \geq \chi_{=}(P_n) = 2$.

Par conséquent $\chi_{=}(C_r(P_n)) = 2$. ■

Exemple 3.5.1

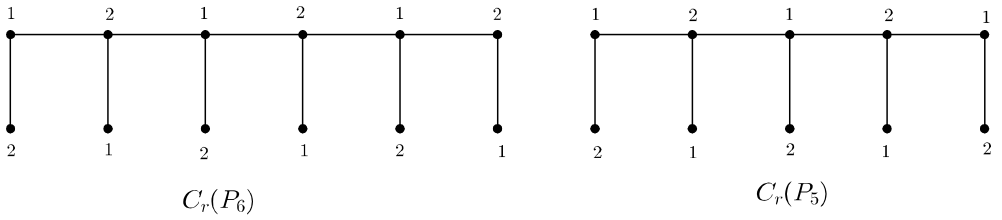


Figure 3.5.1 : Couronne d'une chaîne avec $\chi_=(C_r(P_n)) = 2$.

3.5.2 Coloration équitable du graphe milieu de couronne d'une chaîne

Proposition 3.5.2 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_=(M(C_r(P_n))) = 4$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $M(C_r(P_n))$ tel que $V(M(C_r(P_n)) = V(C_r(P_n)) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$ où u_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iv_{i+1} et s_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iy_i avec $(1 \leq i \leq n)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(M(C_r(P_n)))$ comme suit :

Cas 1: Si n est pair

$V_1 = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$

$V_2 = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$

$V_3 = \{u_1, u_3, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}\}$

$V_4 = \{u_2, u_4, \ldots, u_{n-2}\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_n\}$.

Cas 2 : Si n est impair

$V_1 = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$

$V_2 = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$

$V_3 = \{u_1, u_3, \ldots, u_{n-2}\} \cup \{y_1, y_3, \ldots, y_n\}$

$V_4 = \{u_2, u_4, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_{n-1}\}$.

Dans les deux cas, Il est claire que $|V_i| = n$, $1 \leq i \leq 3$ et $|V_4| = n - 1$. Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 4$.

ll est clair que $V_1, \ldots, V_4$ sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_=(M(C_r(P_n))) \leq 4$.

D'autre part le graphe $M(C_r(P_n))$ contient une clique K_4 comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(M(C_r(P_n))) \geq \chi_=(K_4) = 4$.

Par conséquent $\chi_=(M(C_r(P_n))) = 4$. ■

Exemple 3.5.2

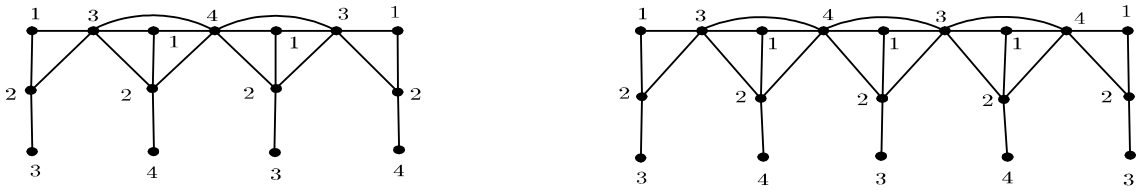


Figure 3.5.2 : Graphe milieu de couronne d'une chaîne avec $\chi_=(M(C_r(P_n))) = 4$.

3.5.3 Coloration équitable du graphe total de couronne d'une chaîne

Proposition 3.5.3 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_=(T(C_r(P_n))) = 4$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $T(C_r(P_n))$ tel que $V(T(C_r(P_n)) = V(C_r(P_n)) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$ et u_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iv_{i+1} et s_i les sommets de la subdivision des arêtes v_iy_i avec $(1 \leq i \leq n)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(T(C_r(P_n)))$ comme suit :

Cas 1: Si n est pair

$V_1 = \{v_1, v_3 \ldots, v_{n-1}\} \cup \{s_2, s_4, \ldots, s_n\}$

$V_2 = \{v_2, v_4 \ldots, v_n\} \cup \{s_1, s_3, \ldots, s_{n-1}\}$

$V_3 = \{u_1, u_3, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}\}$

$V_4 = \{u_2, u_4, \ldots, u_{n-2}\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_n\}$.

Cas 2 : Si n est impair

$V_1 = \{v_1, v_3 \ldots, v_n\} \cup \{s_2, s_4, \ldots, s_{n-1}\}$

$V_2 = \{v_2, v_4 \ldots, v_{n-1}\} \cup \{s_1, s_3, \ldots, s_n\}$

$V_3 = \{u_1, u_3, \ldots, u_{n-2}\} \cup \{y_1, y_3, \ldots, y_n\}$

$V_4 = \{u_2, u_4, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_{n-1}\}$.

Dans les deux cas, Il est claire que $|V_i| = n$, $1 \leq i \leq 3$ et $|V_4| = n - 1$. Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 4$.

ll est clair que $V_1, \ldots, V_4$ sont des ensembles indépendants, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_=(T(C_r(P_n))) \leq 4$.

D'autre part le graphe $T(C_r(P_n))$ contient une clique K_4 comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(T(C_r(P_n))) \geq \chi_=(K_4) = 4$.

Par conséquent $\chi_=(T(C_r(P_n))) = 4$. ■

Exemple 3.5.3

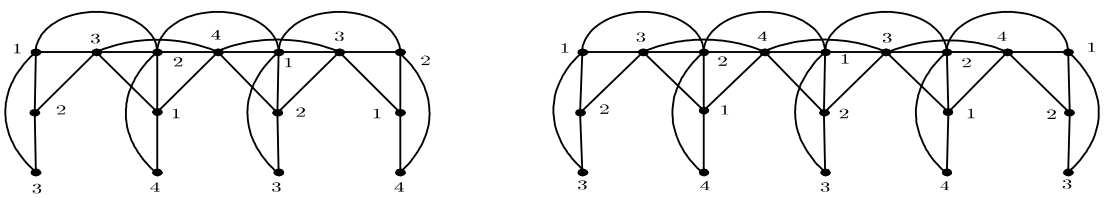


Figure 3.5.3 : Graphe total de couronne d'une chaîne avec $\chi_=(T(C_r(P_n))) = 4$.

3.5.4 Coloration équitable de couronne d'un cycle

Proposition 3.5.4 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_=(C_r(C_n)) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $C_r(C_n)$ tel que $V(C_r(C_n)) = (v_i : 1 \leq i \leq n) \cup \{y_i : 1 \leq i \leq n\}$ et v_i les sommets de C_n et y_i les sommets pendants correspondants à chaque sommet de v_i.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(C_r(C_n))$ comme suit :

Cas 1: Si n est pair

$V_1 = \{v_1, v_3, \ldots, v_{n-1}\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_n\}$

$V_2 = \{v_2, v_4, \ldots, v_n\} \cup \{y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 2$.

Ilest clair que V_1, V_2 sont des ensembles indépendants et $|V_1| = |V_2| = n$. De plus $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$, alors $\chi_=(C_r(C_n)) \leq 2$.

D'autre part le graphe $C_r(P_n)$ contient un cycle pair comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(C_r(C_n)) \geq \chi_=(C_{2n}) = 2$.

Par conséquent $\chi_=(C_r(C_n)) = 2$.

Cas 2 : Si n est impair, on distingue trois cas:

• *Cas 2,1* : Si $n \equiv 0 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{y_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n\} \cup \{y_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\}$

• *Cas 2,2* : Si $n \equiv 1 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2\}$

$V_2 = \{v_n \cup v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{y_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n\}$

• *Cas 2,3* : Si $n \equiv 2 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i : i \equiv 2 \bmod[3], 1 \leq i \leq n\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{y_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 3$.

Dans les trois cas il est clair que V_1, V_2, V_3 sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_=(C_r(C_n)) \leq 3$.

D'autre part le graphe $C_r(C_n)$ contient un cycle impair comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(C_r(C_n)) \geq \chi_=(C_{2n+1}) = 3$.

Par conséquent $\chi_=(C_r(C_n)) = 3$. ■

Exemple 3.5.4

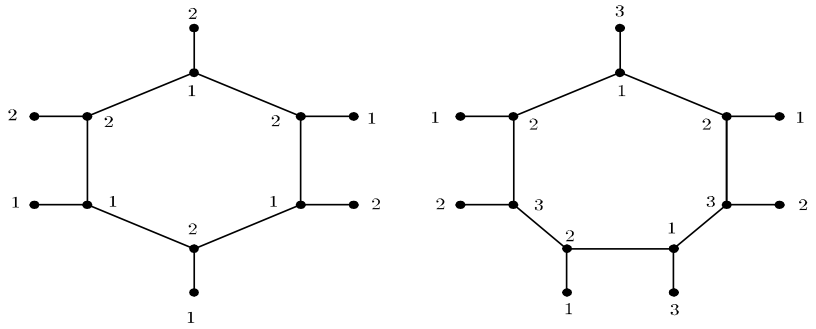


Figure 3.5.4: couronne d'un cycle.

3.5.5 Coloration équitable du graphe milieu de couronne d'un cycle

Proposition 3.5.5 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_{=}(M(C_r(C_n))) = 4$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $M(C_r(C_n))$ tel que $V(M(C_r(C_n)) = V(C_r(C_n)) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$ et u_i les sommets de la subdivision des arêtes $v_i v_{i+1}$ et s_i les sommets de la subdivision des arêtes $v_i y_i$ avec $(1 \leq i \leq n)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(M(C_r(C_n)))$ comme suit :

Cas 1: Si n est pair

$V_1 = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$

$V_2 = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$

$V_3 = \{u_1, u_3, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}\}$

$V_4 = \{u_2, u_4, \ldots, u_n\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_n\}$

Cas 2 : Si n est impair

$V_1 = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$

$V_2 = \{u_1, u_3, \ldots, u_{n-2}\} \cup \{y_2, y_4, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{s_n\}$

$V_3 = \{u_2, u_4, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{y_3, y_5, \ldots, y_n\} \cup \{s_1\}$

$V_4 = \{u_n\} \cup \{y_1\} \cup \{s_2, s_3, \ldots, s_{n-1}\}$

Dans les deux cas, Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 4$.

ll est clair que $V_1, \ldots, V_4$ sont des ensembles indépendants avec $|V_1| = |V_2| = |V_3| = |V_4| = n$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ dans les deux cas, alors $\chi_=(M(C_r(C_n))) \leq 4$.

D'autre part le graphe $M(C_r(C_n))$ contient une clique K_4 comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(M(C_r(C_n))) \geq \chi_=(K_4) = 4$.

Par conséquent $\chi_=(M(C_r(C_n))) = 4$. ■

Exemple 3.5.5

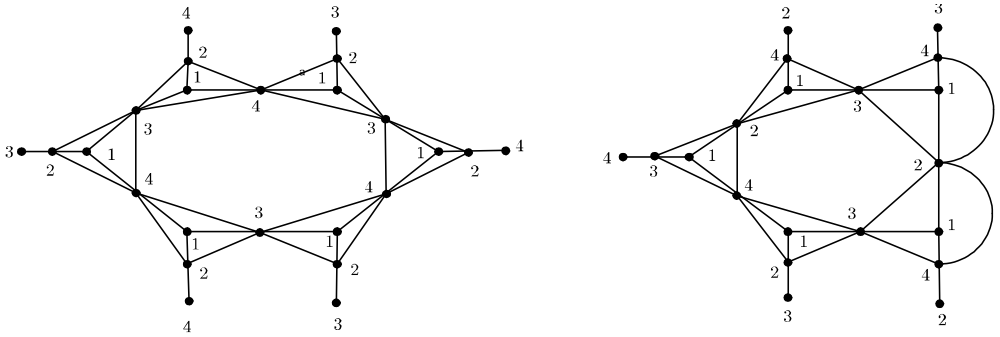


Figure 3.5.5 : Graphe milieu d'une couronne de cycle avec $\chi_=(M(C_r(C_n))) = 4$.

3.5.6 Coloration équitable du graphe total de couronne d'un cycle

Proposition 3.5.6 *Pour tout $n \geq 3$, on a*

$$\chi_=(T(C_r(C_n))) = 4$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $T(C_r(C_n))$ tel que $V(T(C_r(C_n)) = V(C_r(C_n)) \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$ et u_i les sommets de la subdivision des arêtes $v_i v_{i+1}$ et s_i les sommets de la subdivision des arêtes $v_i y_i$ avec $(1 \leq i \leq n)$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(T(C_r(C_n)))$ comme suit :

Cas 1: Si $n \equiv 0 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{y_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n\} \cup \{y_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\}$

$V_4 = \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Cas 2: Si $n \equiv 0 \bmod[3]$ $V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-3\} \cup \{u_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{y_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{s_n\}$ $V_2 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i : i \equiv 1 \bmod[3], 4 \leq i \leq n\} \cup \{y_i : i \equiv 1 \bmod[3], 4 \leq i \leq n\} \cup \{s_2\}$ $V_3 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i : i0 \equiv \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_1\}$

$V_4 = \{s_i : 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_1\} \cup \{v_n\} \cup \{y_1\}$.

Cas 3: Si $n \equiv 2 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-3\} \cup \{y_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-3\} \cup \{s_n\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i : i \equiv 1 \bmod[3], 4 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_n\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2\} \cup \{y_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2\} \cup \{s_1\}$

$V_4 = \{s_i : 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_n\} \cup \{y_1\}$.

Dans tous les cas, Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 4$. ll est clair que $V_1, \ldots, V_4$ sont des ensembles indépendants avec $|V_1| = |V_2| = |V_3| = |V_4| = n$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ dans les 3 cas. Ceci implique que $\chi_=(T(C_r(C_n))) \leq 4$.

D'autre part le graphe $T(C_r(C_n))$ contient une clique K_4 comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(T(C_r(C_n))) \geq \chi_=(K_4) = 4$. Par conséquent $\chi_=(T(C_r(C_n))) = 4$. ■

Exemple 3.5.6

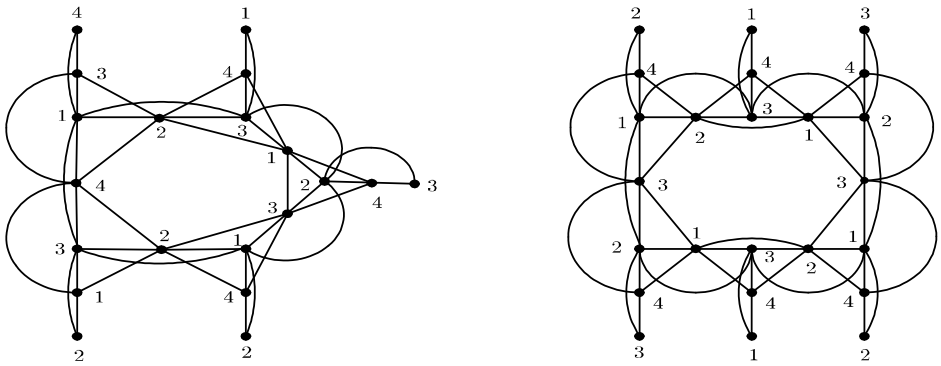


Figure 3.5.6 : Graphe total d'une couronne de cycle avec $\chi_{=}(T(C_r(C_n))) = 4$.

3.6 Coloration équitable de graphe splitting de certains graphes particuliers

Définition 3.6.1 *[17]* ***Le graphe splitting*** *d'un graphe G, noté par $S'(G)$, est obtenu en ajoutant un nouveau sommet v' correspondant à chaque sommet v de G, tel que le nombre de voisinage ouvert de v dans G est égal le nombre de voisinage ouvert de v'dans $S'(G)$.*

3.6.1 Coloration équitable de graphe splitting d'une roue

Proposition 3.6.1 *Pour tout $n \geq 8$,*

$$\chi_{=}(S'(W_n)) = \begin{cases} \frac{2n}{3} + 1 \ \textit{si } n \equiv 0 \bmod[3] \ . \\ \lceil \frac{2n}{3} \rceil \quad \textit{si non} \ . \end{cases}$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $S'(W_n)$ tel que $V(S'(W_n)) = 2n = (v_i : 1 \leq i \leq n) \cup \{v'_i : 1 \leq i \leq n\}$ et v_i les sommets de W_n et v'_i les sommets correspondants à chaque sommet du v_i.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(S'(W_n))$ comme suit :

Cas 1: Si $n \equiv 0 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_1, v'_1\}$

$V_2 = \{v_2, v'_2, v_{\frac{2n}{3}+2}\}$

$V_3 = \{v_3, v'_3, v_{\frac{2n}{3}+3}\}$

$\vdots$

$V_{\frac{n}{3}} = \{v_{\frac{n}{3}}, v'_{\frac{n}{3}}, v_n\}$

$V_{\frac{n}{3}+1} = \{v_{\frac{n}{3}+1}, v'_{\frac{n}{3}+1}, v'_{\frac{2n}{3}+2}\}$

$V_{\frac{n}{3}+2} = \{v_{\frac{n}{3}+2}, v'_{\frac{n}{3}+2}, v'_{\frac{2n}{3}+3}\}$

$\vdots$

$V_{\frac{2n}{3}} = \{v_{\frac{2n}{3}}, v'_{\frac{2n}{3}}\}$

$V_{\frac{2n}{3}+1} = \{v_{\frac{2n}{3}+1}, v'_{\frac{2n}{3}+1}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \frac{2n}{3} + 1$.

ll est clair que $V_1 = V_2 = \ldots = V_{\frac{2n}{3}+1}$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_1| = |V_{\frac{2n}{3}}| = |V_{\frac{2n}{3}+1}| = 2$, $|V_2| = \ldots = |V_{\frac{2n}{3}-1}| = 3$, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_{=}(S'(W_n)) \leq \frac{2n}{3} + 1$.

Supposons que $\chi_{=}(S'(W_n)) = k \leq \frac{2n}{3}$. Comme v_1, v'_1 sont adjacent à tout les sommets $\{v_2, v_3, ..., v_{2n-2}\}$, la couleur 1 ne peut être présent dans l'ensemble $\{v_2, v_3, ..., v_{2n-2}\}$ c-à-d $|V_1| = 2$. Il est clair que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = 2n-2$. Pour minimiser $\chi_{=}(S'(W_n))$ et d'après la définition de la coloration équitable ($||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$) chaque couleur de l'ensemble $\{v_2, v_3, ..., v_{2n-2}\}$ doit être utilisé deux au trois fois. D'autre part, on a $2n - 2 = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme $|V_i| \leq 3$, $2n-2 \leq 3\,(k-1)$. Vu que $k \leq \frac{2n}{3}$, $3(k-1) = 2n-3 \neq 2n-2$, contradiction. Ceci implique que $\chi_{=}(S'(W_n)) \geq \frac{2n}{3} + 1$.|

Par conséquent $\chi_{=}(S'(W_n)) = \frac{2n}{3} + 1$.

Cas 2: Si $n \equiv 1 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_1, v'_1\}$

$V_2 = \{v_2, v'_2, v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1}\}$

$V_3 = \{v_3, v'_3, v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 2}\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil} = \{v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}, v'_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}, v_n\}$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1} = \{v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}, v'_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}, v'_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1}\}$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2} = \{v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2}, v'_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2}, v'_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 2}\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1} = \{v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1}, v'_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1}, v'_{n-1}\}$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} = \{v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}, v'_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}, v'_n\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

ll est clair que $V_1 = V_2 = \ldots = V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}$ sont des ensembles indépendants avec $|V_1| = 2$ et $|V_2| = \ldots = |V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}| = 3$, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_=(S'(W_n)) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Cas 3: Si $n \equiv 2 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_1, v'_1\}$

$V_2 = \{v_2, v'_2, v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1}\}$

$V_3 = \{v_3, v'_3, v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 2}\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil} = \{v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}, v'_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}, v_n\}$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1} = \{v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}, v'_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}, v'_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1}\}$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2} = \{v_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2}, v'_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2}, v'_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 2}\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1} = \{v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1}, v'_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1}, v'_n\}$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} = \{v_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}, v'_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

ll est clair que $V_1 = V_2 = \ldots = V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}$ sont des ensembles indépendants avec $|V_1| = |V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}| = 2$ et $|V_2| = \ldots = |V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1}| = 3$, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ alors $\chi_=(S'(W_n)) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Supposons que $\chi_=(S'(W_n)) = k \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ dans les deux cas. Comme v_1, v'_1 sont adjacent à tout les sommets $\{v_2, v_3, ..., v_{2n}\}$, la couleur 1 ne peut être présent dans l'ensemble $\{v_2, v_3, ..., v_{2n-2}\}$ c-à-d $|V_1| = 2$. Il est clair que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = 2n-2$. Pour minimiser $\chi_=(S'(W_n))$ et d'après la définition de la coloration équitable ($||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$) chaque couleur de l'ensemble $\{v_2, v_3, ..., v_{2n-2}\}$ doit être utilisé deux au trois fois. D'autre part, on a $2n - 2 = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme $|V_i| \leq 3$, $n \leq 3(k-1)$. Vu que $k \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$, $3(k-1) \leq 3\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 3 \neq 2n - 2$, contradiction. Ceci implique que $\chi_=(S'(W_n)) \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Par conséquent $\chi_=(S'(W_n)) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. ■

Exemple 3.6.1

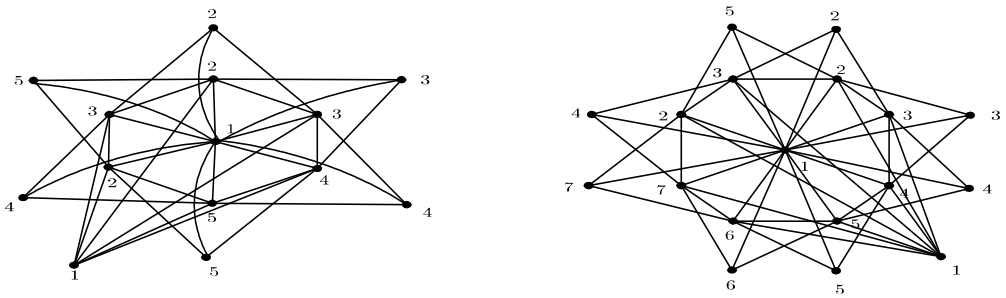


Figure 3.6.1 : Graphe splitting d'une roue (n est pair).

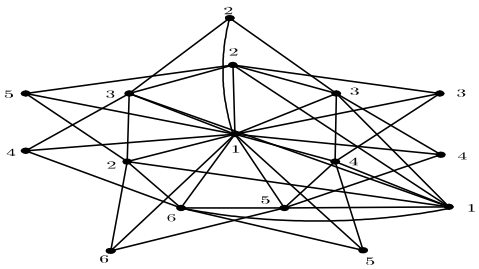


Figure 3.6.2 : Graphe splitting d'une roue (n est impair).

3.6.2 Coloration équitable de graphe splitting d'une étoile

Proposition 3.6.2 *Pour tout $n \geq 4$,*

$$\chi_{=}(S'(K_{1,n})) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ le graphe $S'(K_{1,n})$ tel que $V(S'(K_{1,n})) = 2n+2 = (v \cup v_i : 1 \leq i \leq n) \cup \{v' \cup v'_i : 1 \leq i \leq n\}$ et v la sommet central de $K_{1,n}$, v' le sommet correspondants à v.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(S'(K_{1,n}))$ comme suit :

Cas 1: Si $n \equiv 0 \bmod[3]$

$V_1 = \{v, v'\}$

$V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$

$V_3 = \{v_4, v_5, v_6\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1} = \{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil+2} = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil+3} = \{v'_4, v'_5, v'_6\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil+1} = \{v'_{n-2}, v'_{n-1}, v'_n\}$

Cas 2: Si $n \equiv 1 \bmod[3]$

$V_1 = \{v, v'\}$

$V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$

$V_3 = \{v_4, v_5, v_6\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil+1} = \{v_n, v'_1, v'_2\}$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil+2} = \{v'_3, v'_4, v'_5\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} = \{v'_{n-4}, v'_{n-3}, v'_{n-2}\}$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil+1} = \{v'_{n-1}, v'_n\}$

Cas 3: Si $n \equiv 2 \bmod[3]$

$V_1 = \{v, v'\}$

$V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$

$V_3 = \{v_4, v_5, v_6\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil+1} = \{v_{n-1}, v_n, v'_1\}$

$V_{\lceil \frac{n}{3} \rceil+2} = \{v'_2, v'_3, v'_4\}$

$\vdots$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} = \{v'_{n-3}, v'_{n-2}\}$

$V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil+1} = \{v'_{n-1}, v'_n\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1$.

ll est clair que dans les trois cas on a $V_1, V_2, \ldots, V_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil+1}$ sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_=(S'(K_{1,n})) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1$.

Supposons que $\chi_=(S'(K_{1,n})) = k \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Comme v, v' sont adjacent à tout les sommets $\{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$, la couleur 1 ne peut être présent dans l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$ c-à-d $|V_1| = 2$. Il est claire que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = 2n$. Pour minimiser $\chi_=(S'(K_{1,n}))$ et d'après la définition de

la coloration équitable ($|V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$) chaque couleur de l'ensemble $\{v_2, v_3, ..., v_{2n}\}$ doit être utilisé deux au trois fois. D'autre part, on a $2n = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme $|V_i| \leq 3$, $2n \leq 3\,(k-1)$. Vu que $k \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, $3(k-1) \leq 3(\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1) \neq 2n$, contradiction. Ceci implique que $\chi_=(S'(K_{1,n})) \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1$.

Par conséquent $\chi_=(S'(K_{1,n})) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1$. ■

Exemple 3.6.2

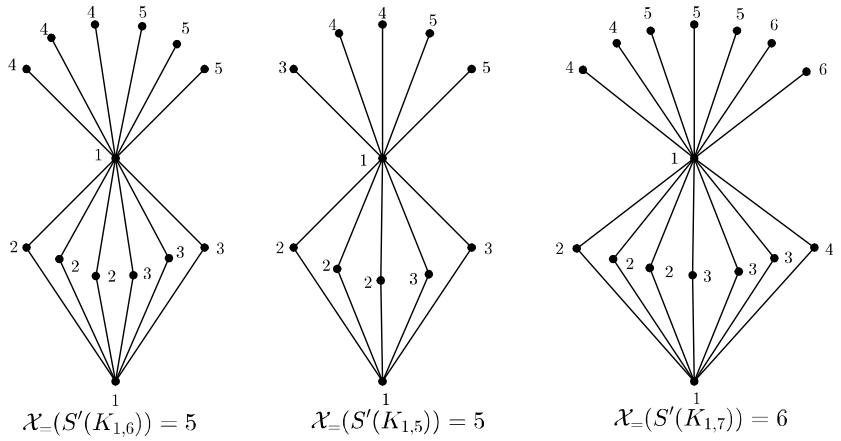


Figure 3.6.3 : Graphe splitting d'une étoile.

3.7 Coloration équitable d'une couronne de deux graphes

Définition 3.7.1 *[17]* ***La couronne de deux graphes*** G_1 *et* G_2 *est le graphe* $G = G_1 \odot G_2$ *formé par une copie de* G_1 *et* $|V(G_1)|$ *copies de* G_2*, où le i éme sommet de* G_1 *est adjacent à tous les sommets de la i éme copies de* G_2*.*

3.7.1 Coloration équitable de couronne d'un graphe complet avec une chaîne

Proposition 3.7.1 *Pour tout* $n \geq 3$,$m \geq 2$,

$$\chi_=(K_n \odot P_m) = n$$

Preuve. Soit $G(V,E)$ le graphe $K_n \odot P_m$ tel que $V(K_n \odot P_m) = V(K_n) \cup V(P_m)$. On note les sommets de K_n par $(v_i : 1 \leq i \leq n)$, et $P_{i,m}$ la chaîne correspondante à chaque sommets v_i, tel que ($u_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) les sommets de chaque chaîne $P_{i,m}$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(K_n \odot P_m)$ comme suit :

Cas 1: Si m est pair

$V_1 = \{v_1\} \cup \{u_{2,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\} \cup \{u_{3,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\}$

$V_2 = \{v_2\} \cup \{u_{3,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\} \cup \{u_{4,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\}$

$V_3 = \{v_3\} \cup \{u_{4,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\} \cup \{u_{5,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\}$

$\vdots$

$V_{n-1} = \{v_{n-1}\} \cup \{u_{n,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\} \cup \{u_{1,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\}$

$V_n = \{v_n\} \cup \{u_{1,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\} \cup \{u_{2,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}\}$

Cas 2 : Si m est impair

$V_1 = \{v_1\} \cup \{u_{2,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{u_{3,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$

$V_2 = \{v_2\} \cup \{u_{3,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{u_{4,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$

$V_3 = \{v_3\} \cup \{u_{4,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{u_{5,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$

$\vdots$

$V_{n-1} = \{v_{n-1}\} \cup \{u_{n,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{u_{1,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$

$V_n = \{v_n\} \cup \{u_{1,j} : j = 2k-1, 1 \leq k \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{u_{2,j} : j = 2k, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n$.

ll est clair que $V_1, \ldots, V_n$ sont des ensembles indépendants. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ dans les deux cas. Ceci implique que $\chi_=(K_n \odot P_m) \leq n$.

D'autre part le graphe $(K_n \odot P_m)$ contient une clique K_n comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(K_n \odot P_m) \geq \chi_=(K_n) = n$.

Par conséquent $\chi_=(K_n \odot P_m) = n$. ■

Exemple 3.7.1 *Si m est impair*

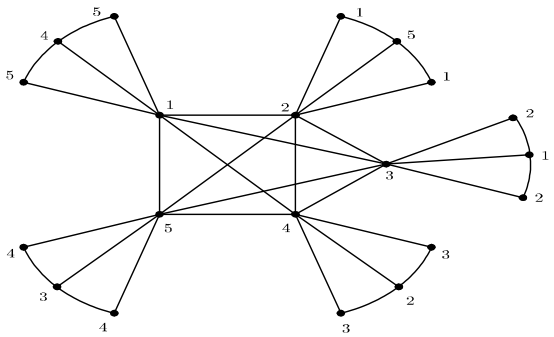


Figure 3.7.1 : $\chi_{=}(K_5 \odot P_3) = 5$.

Exemple 3.7.2 *Si m est pair*

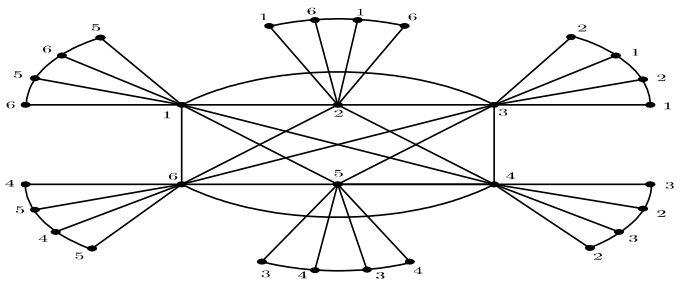


Figure 3.7.2 : $\chi_{=}(K_6 \odot P_4) = 6$.

3.7.2 Coloration équitable de couronne d'un cycle avec un graphe complet

Proposition 3.7.2 *Pour tout $n \geq 4$,$m \geq 3$,*

$$\chi_{=}(C_n \odot K_m) = m + 1$$

Preuve. Soit $G(V, E)$ le graphe $C_n \odot K_m$ tel que $V(C_n \odot K_m) = V(C_n) \cup V(K_m)$. On note les sommets de C_n par $(v_i : 1 \leq i \leq n)$, et $K_{i,m}$ le graphe complet correspondante à chaque sommets v_i, tel que($u_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) les sommets de chaque graphe complet $K_{i,m}$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(C_n \odot K_m)$ comme suit :

Cas 1: Si n est pair

$V_1 = \{v_1, v_3, \ldots, v_{n-1}\} \cup \{u_{i,1} : i = 2k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2}\}$

$V_2 = \{v_2, v_4, \ldots, v_n\} \cup \{u_{i,1} : i = 2k-1, 1 \leq k \leq \frac{n}{2}\}$

$V_3 = \{u_{i,2} : 1 \leq i \leq n\}$

$V_4 = \{u_{i,3} : 1 \leq i \leq n\}$

$\vdots$

$V_{m+1} = \{u_{i,m} : 1 \leq i \leq n\}$

Cas 2 : Si n est impair

$V_1 = \{v_1, v_3, \ldots, v_{n-2}\} \cup \{u_{i,1} : i = 2k, 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{u_{n,2}\}$

$V_2 = \{v_2, v_4, \ldots, v_{n-1}\} \cup \{u_{i,1} : i = 2k-1, 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}\}$

$V_3 = \{v_n\} \cup \{u_{i,2} : 1 \leq i \leq n-1\}$

$V_4 = \{u_{i,3} : 1 \leq i \leq n\}$

$\vdots$

$V_m = \{u_{i,m-1} : 1 \leq i \leq n\}$

$V_{m+1} = \{u_{i,m} : 1 \leq i \leq n\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq m+1$.

ll est clair que $V_1, \ldots, V_{m+1}$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_{m+1}| = n$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ dans les deux cas. Ceci implique que $\chi_=(C_n \odot K_m) \leq m+1$.

D'autre part le graphe $(C_n \odot K_m)$ contient une clique K_{m+1} comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(C_n \odot K_m) \geq \chi_=(K_{m+1}) = m+1$. Par conséquent $\chi_=(C_n \odot K_m) = m+1$ ■

Exemple 3.7.3

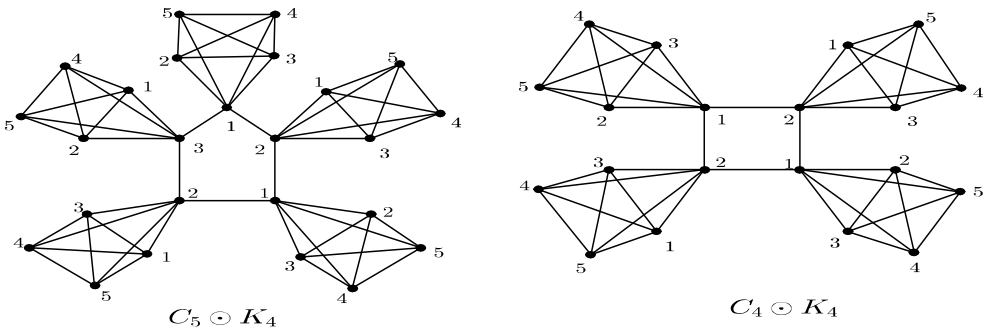


Figure 3.7.3 : Couronne d'un cycle avec un graphe complet avec $\chi_=(C_n \odot K_m) = m + 1$.

3.7.3 Coloration équitable de couronne d'un cycle avec une chaîne

Proposition 3.7.3 *Pour tout $n \geq 3, m = 2, 4$ si m est pair et $m = 3, 5, 7$ si m est impair,*

$$\chi_=(C_n \odot P_m) = 3$$

Preuve. Soit $G(V, E)$ le graphe $C_n \odot P_m$ tel que $V(P_n \odot K_m) = (V(P_n) \cup V(K_m), m \leq 7)$. On note les sommets de C_n par $(v_i : 1 \leq i \leq n)$, et $P_{i,m}$ la chaîne correspondante à chaque sommets v_i, telle que($u_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) les sommets de chaque graphe complet $P_{i,m}$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(C_n \odot P_m)$ comme suit :

Cas 1: Si $m = 2, 4$

• *Cas 1,1 : si* $n \equiv 0 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1, j \equiv 2 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\}$

• *Cas 1,2 :si* $n \equiv 1 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-3\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{n,j} : j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\}$

$V_2 = \{v_n \cup v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-3, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-3, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2, j \equiv 2 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\}$

- *Cas 1,3 :si* $n \equiv 2 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n, j \equiv 2 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\}$

Cas 2: Si $m = 3, 5, 7$

- *Cas 2,1 :si* $n \equiv 0 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-2, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-1, j \equiv 0 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\}$

- *Cas 2,2 :si* $n \equiv 1 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-3\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i = n, \equiv j0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\}$

$V_2 = \{v_n \cup v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_{i,j} : i = 1, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 4 \leq i \leq n-3, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1, j \equiv 1 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_{i,j} : i = 1, j \equiv 0 \bmod[2], 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 4 \leq i \leq n, j \equiv 1 \bmod[2], 2 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n-2, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\}$

• *Cas 2,3 :si* $n \equiv 2 \bmod[3]$

$V_1 = \{v_i : i \equiv 1 \bmod[3], 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\}$

$V_2 = \{v_i : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i,j} : i = 1, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 4 \leq i \leq n-1, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\}$

$V_3 = \{v_i : i \equiv 0 \bmod[3], 3 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_{i,j} : i = 1, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 1 \bmod[3], 4 \leq i \leq n-1, j \equiv 1 \bmod[2], 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : i \equiv 2 \bmod[3], 2 \leq i \leq n, j \equiv 0 \bmod[2], 2 \leq i \leq m-1\}$

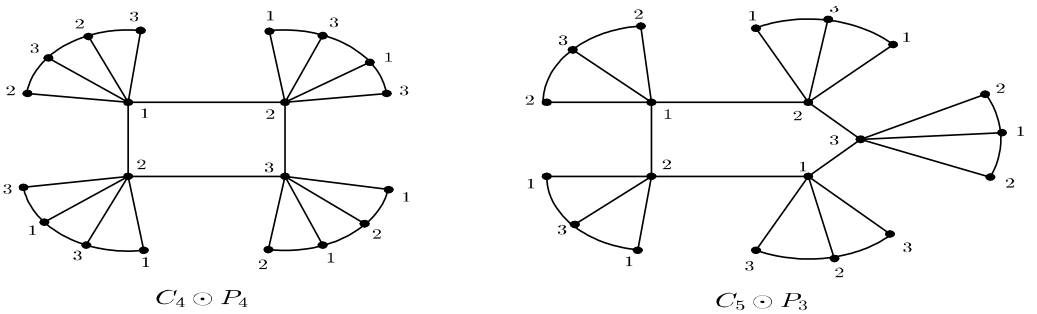
Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 3$.

ll est clair que V_1, V_2, V_3 sont des ensembles indépendants, avec $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$ dans les deux cas, alors $\chi_=(C_n \odot P_m) \leq 3$.

D'autre part le graphe $(C_n \odot P_m)$ contient une clique K_3 comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(C_n \odot P_m) \geq \chi_=(K_3) = 3$.

Par conséquent $\chi_=(P_n \odot K_m) = 3$. ■

Exemple 3.7.4



$C_4 \odot P_4$ $C_5 \odot P_3$

Figure 3.7.4 : Couronne d'un cycle avec une chaîne avec $\chi_=(C_n \odot P_m) = 3$.

3.8 Coloration équitable de prisme complémentaire d'un certains graphes particuliers

Définition 3.8.1 *Soit G un graphe.On appelle* ***prisme complémentaire*** *de G le graphe formé à partir de l'union disjointe de G et son complémentaire $\overline{G}$ en ajoutant les arêtes d'un couplage parfait entre les sommets correspondants G et $\overline{G}$.*

3.8.1 Coloration équitable de prisme complémentaire d'une étoile

Proposition 3.8.1 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_{=}(K_{1,n}\overline{K}_{1,n}) = n$$

Preuve. Soit $K_{1,n}$ une étoile d'ordre $n \geq 3$ avec $V(K_{1,n}) = \{v \cup (v_i : 1 \leq i \leq n)\}$ où v le sommet central de $(K_{1,n})$, soit $\overline{K}_{1,n}$ le complémentaire de $(K_{1,n})$ avec $V(\overline{K}_{1,n}) = \{v' \cup (v'_i, 1 \leq i \leq n)\}$, soit $G = K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$ le prisme complémentaire de $K_{1,n}$ d'ensemble de sommets $V(G) = V(K_{1,n}) \cup V(\overline{K}_{1,n})$ et d'ensemble d'arêtes $E(G) = E(K_{1,n}) \cup E(\overline{K}_{1,n})$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(K_{1,n}\overline{K}_{1,n})$ comme suit :

$V_1 = \{v, v'_1\}$

$V_2 = \{v_1, v_n, v'_2\}$

$V_3 = \{v_2, v'_3\}$

$V_4 = \{v_3, v'_4\}$

$\vdots$

$V_n = \{v_{n-1}, v', v'_n\}$.

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_1| = |V_3| = |V_4| = \ldots = |V_{n-1}| = 2$ et $|V_2| = |V_n| = 3$, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_{=}(K_{1,n}\overline{K}_{1,n}) \leq n$.

D'autre part le graphe $K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$ contient une clique K_n comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_{=}(K_{1,n}\overline{K}_{1,n}) \geq \chi_{=}(K_n) = n$.

Par conséquent $\chi_{=}(K_{1,n}\overline{K}_{1,n}) = n$. ■

Exemple 3.8.1

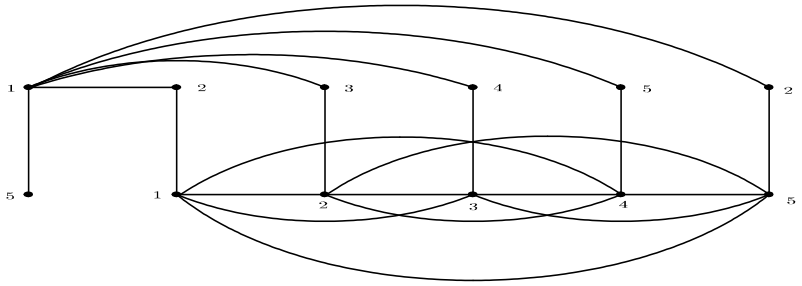


Figure 3.8.1 : Prisme complémentaire d'une étoile avec
$\chi_{=}(K_{1,5}\overline{K}_{1,5}) = 5$.

3.8.2 Coloration équitable de prisme complémentaire d'une couronne de cycle

Proposition 3.8.2 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_{=}(C_r(C_n\overline{C_n})) = n$$

Preuve. Soit $C_r(C_n)$ une couronne de cycle d'ordre $n \geq 3$ avec $V(C_r(C_n)) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\}$ où v_i les sommets de C_n et u_i les sommets pendants correspondants à chaque sommet de C_n, soit $C_r(\overline{C_n})$ le complémentaire de $C_r(C_n)$ avec $V(C_r(\overline{C_n})) = \{v'_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u'_i : 1 \leq i \leq n\}$ où v'_i les sommets de $\overline{C_n}$ et u'_i les sommets pendants correspondants $\overline{C_n}$, Soit $G = (C_r(C_n\overline{C_n}))$ le prisme complémentaire de $C_r(C_n)$ d'ensemble de sommets $V(G) = V(C_r(C_n)) \cup V(C_r(\overline{C_n}))$ et d'ensemble d'arêtes $E(G) = E(C_r(\overline{C_n})) \cup E(C_r(C_n))$

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(C_r(C_n\overline{C_n}))$ comme suit :

$V_1 = \{v_2, u_3, v'_1, u'_1\}$
$V_2 = \{v_3, u_4, v'_2, u'_2\}$
$V_3 = \{v_4, u_5, v'_3, u'_3\}$
$\vdots$
$V_{n-1} = \{v_n, u_1, v'_{n-1}, u'_{n-1}\}$
$V_n = \{v_1, u_2, v'_n, u'_n\}$.

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_1| = |V_3| = \ldots = |V_n| = 4$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_=(C_r(C_n\overline{C_n})) \leq n$.

D'autre part le graphe $C_r(C_n\overline{C_n})$ contient une clique K_n comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(C_r(C_n\overline{C_n})) \geq \chi_=(K_n) = n$.

Par conséquent $\chi_=(C_r(C_n\overline{C_n})) = n$. ■

Exemple 3.8.2

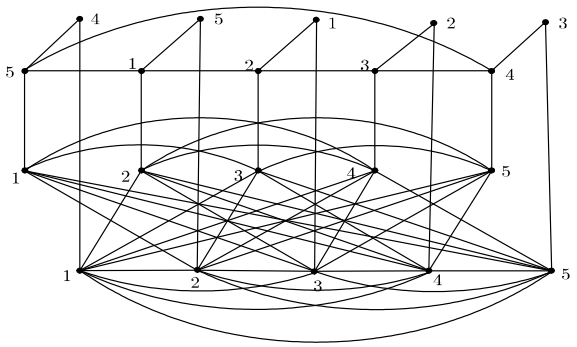


Figure 3.8.2 : Prisme complémentaire d'une couronne de cycle avec $\chi_=(C_r(C_5\overline{C_5})) = 5$.

3.8.3 Coloration équitable de prisme complémentaire de graphe splitting d'un cycle

Proposition 3.8.3 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_=(S'(C_n\overline{C_n})) = n$$

Preuve. Soit $S'(C_n)$ un graphe spliting de cycle d'ordre $n \geq 3$ avec $V(S'(C_n)) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\}$ où v_i les sommets de C_n et u_i les sommets correspondants à chaque sommet v, soit $S'(\overline{C_n})$ le complémentaire de $S'(C_n)$ avec $V(S'(\overline{C_n})) = \{v'_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{u'_i, 1 \leq i \leq n\}$ ou v'_i les sommets de $\overline{C_n}$ et u'_i les sommets correspondants à chaque sommet v', soit $G = (S'(C_n\overline{C_n}))$ le prisme complémentaire de $S'(C_n)$ d'ensemble de sommets $V(G) = V(S'(C_n)) \cup V(S'(\overline{C_n}))$ et d'ensemble d'arêtes $E(G) = E(S'(\overline{C_n})) \cup E(S'(C_n))$

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(S'(C_n\overline{C_n}))$ comme suit :

$V_1 = \{v_1, u_3, v'_2, u'_1\}$
$V_2 = \{v_2, u_4, v'_3, u'_2\}$
$V_3 = \{v_3, u_5, v'_4, u'_3\}$
$V_4 = \{v_4, u_6, v'_5, u'_4\}$
$\vdots$
$V_{n-1} = \{v_{n-1}, u_1, v'_n, u'_{n-1}\}$
$V_n = \{v_n, u_2, v'_1, u'_n\}$.

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_1| = |V_3| = \ldots = |V_n| = 4$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_=(S'(C_n\overline{C_n})) \leq n$.

D'autre part le graphe $S'(C_n\overline{C_n})$ contient une clique K_n comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_=(S'(C_n\overline{C_n})) \geq \chi_=(K_n) = n$.

Par conséquent $\chi_=(S'(C_n\overline{C_n})) = n$. ■

Exemple 3.8.3

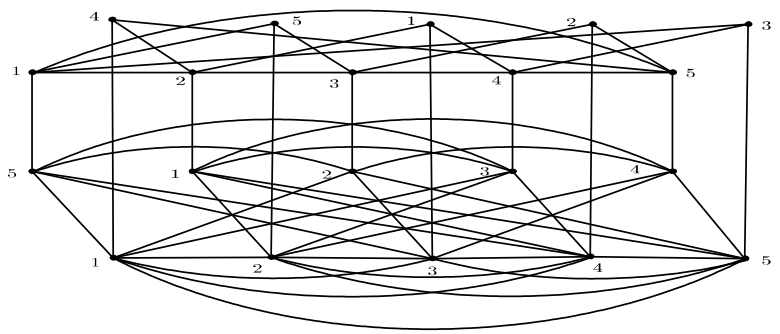


Figure 3.8.3 : Prisme complémentaire de graphe splitting d'un cycle avec $\chi_=(S'(C_5\overline{C_5})) = 5$.

3.8.4 Coloration équitable de prisme complémentaire d'un graphe de Helme

Définition 3.8.2 *[11]* ***Un graphe de helme*** *est un graphe obtenu en prenant une roue W_n et ajoute des sommets pendant correspondants à chaque sommet du C_n, et noté par H_n.*

Proposition 3.8.4 *Pour tout $n \geq 4$,*

$$\chi_{=}(H_n\overline{H_n})) = n + 1$$

Preuve. Soit H_n un graphe de helme d'ordre $n \geq 4$ avec $V(H_n) = \{v \cup v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\}$ où v un sommet reliant à tout les sommets du C_n, v_i les sommets du C_n, u_i les sommets pendants correspondants à chaque sommet du C_n, soit $\overline{H_n}$ le complémentaire de H_n avec $V(\overline{H_n}) = \{v' \cup v'_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u'_i : 1 \leq i \leq n\}$. Soit $G = H_n\overline{H_n}$ le prisme complémentaire de H_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(H_n) \cup V(\overline{H_n})$ et d'ensemble d'arêtes $E(G) = E(H_n) \cup E(\overline{H_n})$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(H_n\overline{H_n})$ comme suit :

$V_1 = \{v_2, v'_1, u'_1\}$

$V_2 = \{v_3, u_1, v'_2, u'_2\}$

$V_3 = \{v_4, u_2, v'_3, u'_3\}$

$V_4 = \{v_5, u_3, v'_4, u'_4\}$

$\vdots$

$V_{n-1} = \{v_n, u_{n-2}, v'_{n-1}, u'_{n-1}\}$

$V_n = \{v, u_{n-1}, v'_n, u'_n\}$

$V_{n+1} = \{v_1, u_n, v'\}$.

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n + 1$.

Il est clair que $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$ sont des ensembles indépendants, avec $|V_2| = |V_3| = \ldots = |V_n| = 4$ et $|V_1| = |V_{n+1}| = 3$, aussi on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$. Ceci implique que $\chi_{=}(H_n\overline{H_n}) \leq n + 1$.

D'autre part le graphe $H_n\overline{H_n}$ contient une clique K_{n+1} comme sous graphe, alors d'après le Théorème 2.4.3 $\chi_{=}(H_n\overline{H_n}) \geq \chi_{=}(K_{n+1}) = n + 1$.

Par conséquent $\chi_{=}(H_n\overline{H_n}) = n + 1$. ■

Exemple 3.8.4

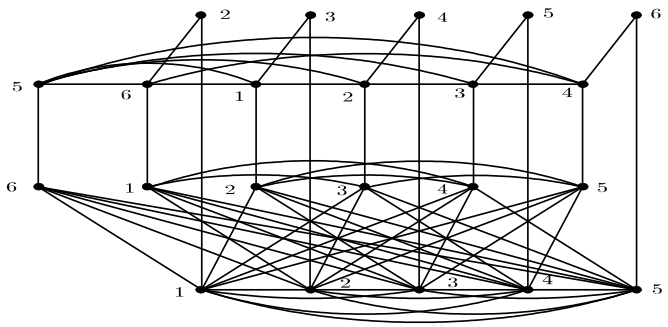


Figure 3.8.4 : Prisme complémentaire de Helm graphe avec
$\chi_{=}(H_5\overline{H_5}) = 6$.

3.9 Coloration équitable du graphe de mycielski de quelque graphes

3.9.1 Coloration équitable du graphe de mycielski de prisme de cycle

Proposition 3.9.1 *Pour tout* $n \geq 4$,

$$\chi_{=}(\mu(Y_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 4 \\ 4 \text{ si } n \geq 5 \end{cases}.$$

Preuve. Soit $G = \mu(Y_n)$ avec $n \geq 4$ et $V(\mu(Y_n) = 4n+1 = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{x'_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y'_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{z\}$ où x_i les sommets de cycle extérieur de Y_n et x'_i les sommets de cycle intérieur de Y_n et $E(G) = E(Y_n) \cup \{y_i x : x \in N_G(x_i) \cup y'_i x' : x' \in N_G(x'_i) \cup y_i z \cup y'_i z, i = 1, \ldots, n\}$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(\mu(Y_n))$ comme suit :

Cas 1: Si $n = 4$

$V_1 = \{x_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x'_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{z\}$

$V_2 = \{x_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x'_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y_1, y'_n\}$

$V_3 = \{y_i : 2 \leq i \leq n\} \cup \{y'_i : 1 \leq i \leq n-1\}$.

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 3$.

Il est clair que V_1, V_2, V_3 sont des ensembles indépendants avec $|V_2| = |V_3| = 6$ et $|V_1| = 5$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $(i \neq j)$, alors $\chi_=(\mu(Y_n) \leq 3$.

Supposons que $\chi_=(\mu(Y_n)) \leq 2$ et on a $|V_1| = 5 = n + 1$ c-à-d $|V_2| = 3n$, alors $||V_1| - |V_2|| \geq 1$ contradiction avec la définition de la coloration équitable. Ceci implique que $\chi_=(\mu(Y_n)) \geq 3$.

Par conséquent $\chi_=(\mu(Y_n) = 3$.

Cas 2: Si $n \geq 5$

• *cas 2,1*: Si n et pair

$V_1 = \{x_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x'_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{z\}$

$V_2 = \{x_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x'_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$

$V_3 = \{y_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y'_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$

$V_4 = \{y_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y'_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 4$

Il est clair que V_1, V_2, V_3, V_4 sont des ensembles indépendants, avec $|V_2| = |V_3| = |V_4| = n$ et $|V_1| = n + 1$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $(i \neq j)$ alors $\chi_=(\mu(Y_n) \leq 4$.

Supposons que $\chi_=(\mu(Y_n)) = k \leq 3$ et on a $|V_1| = n + 1$. Il est claire que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = 3n$. Pour minimiser $\chi_=(\mu(Y_n))$ et d'après la définition de la coloration équitable ($|V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j$) chaque couleur de l'ensemble restons doit être utilisé $n + 1$ ou $n + 2$ fois. D'autre part, on a $3n = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme $|V_i| \leq n + 2$, $3n \leq (n + 2)(k - 1)$. Vu que $k \leq 3$, $(n + 2)(k - 1) \leq 2(n + 2) = 2n + 4 \neq 3n$, contradiction. Ceci implique que $\chi_=(\mu(Y_n)) \geq 4$.

Par conséquent $\chi_=(\mu(Y_n)) = 4$.

• *cas 2,2*: Si n et impair

$V_1 = \{x_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{x'_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{z\}$

$V_2 = \{x_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{x'_n\} \cup \{y_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$

$V_3 = \{x'_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{x_n\} \cup \{y'_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$

$V_4 = \{y_{2i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}\} \cup \{y'_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{y'_n\}$

Il est clair que V_1, V_2, V_3, V_4 sont des ensembles indépendants avec $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$ et $|V_4| = n + 1$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $(i \neq j)$, alors $\chi_=(\mu(Y_n) \leq 4$.

Supposons que $\chi_=(\mu(Y_n)) = k \leq 3$, on a $|V_1| = n$ Il est claire que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = 3n$. Pour minimiser $\chi_=(\mu(Y_n))$ et d'après la définition de la coloration équitable ($|V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour

tout $i \neq j$) chaque couleur de l'ensemble restons doit être utilisé n ou $n+1$ fois. D'autre part, on a $3n+1 = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme $|V_i| \leq n+1$, $3n+1 \leq (n+1)(k-1)$. Vu que $k \leq 3$, $(n+1)(k-1) \leq 2(n+1) = 2n+2 \neq 3n+1$, contradiction. Ceci implique que $\chi_=(\mu(Y_n)) \geq 4$.

Par conséquent $\chi_=(\mu(Y_n)) = 4$. ■

Exemple 3.9.1

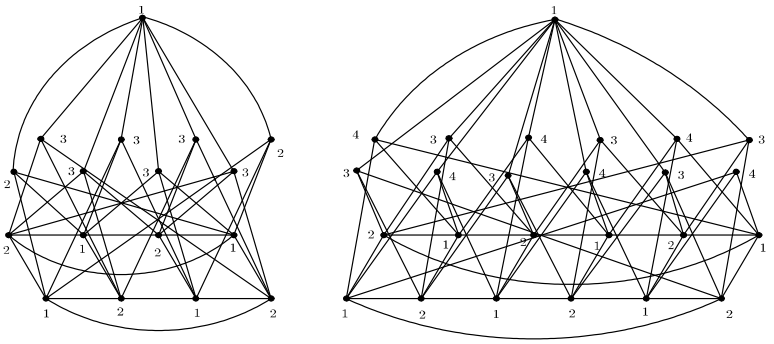


Figure 3.9.1 : Graphe de mycielski de prisme graphe si n est pair.

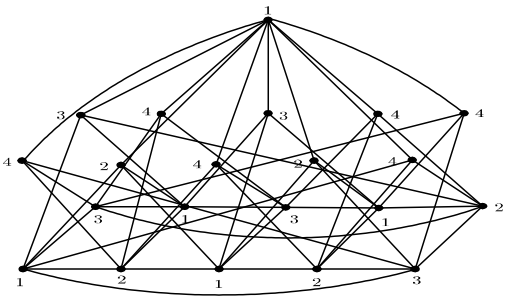


Figure 3.9.2 : Graphe de mycielski de prisme graphe si n est impair.

3.9.2 Coloration équitable du graphe mycielski de graphe circulant

Proposition 3.9.2 *Soit ML_n un circulant graphe avec n est pair ,$n \geq 4$, alors*

$$\chi_=(\mu(ML_n)) = 4$$

Preuve. Soit $G = \mu(ML_n)$ avec $n \geq 4$ et $V(\mu(ML_n) = 4n + 1 = \{x_i : 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{y_i : 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{z\}$ où x_i les sommets de ML_n et $E(G) = E(ML_n) \cup \{y_i x : (x \in N_G(x_i)) \cup y_i z \cup, i = 1, \ldots, 2n\}$.

On partitionne l'ensemble des sommets de $V(\mu(ML_n))$ comme suit :

$V_1 = \{x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{x_{n+2}, x_{n+4}, \ldots, x_{2n-2}\} \cup \{z\}$

$V_2 = \{x_2, x_4, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+3}, x_{n+5}, \ldots, x_{2n-1}\} \cup \{y_{2n-1}\}$

$V_3 = \{x_{n+1}, x_{2n}\} \cup \{y_3, y_5, \ldots, y_{2n-3}\}$

$V_4 = \{y_1\} \cup \{y_2, y_6, \ldots, y_{2n}\}$.

Colorons les sommets de V_i par la couleur i, $1 \leq i \leq 4$.

Il est claire que V_1, V_2, V_3, V_4 sont des ensembles indépendants, avec $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$ et $|V_4| = n + 1$. De plus on a $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $(i \neq j)$, alors $\chi_=(\mu(ML_n) \leq 4$.

Supposons que $\chi_=(\mu(ML_n)) = k \leq 3$, on a $|V_1| = n$ Il est clair que $\sum_{i=2}^{i=k} |V_i| = 3n+1$. Pour minimiser $\chi_=(\mu(ML_n))$ et d'après la définition de la coloration équitable $(|V_i| - |V_j|| \leq 1$ pour tout $i \neq j)$ chaque couleur de l'ensemble restons doit être utilisé n ou $n + 1$ fois. D'autre part, on a $3n + 1 = \sum_{i=2}^{i=k} |V_i|$. Comme $|V_i| \leq n + 1$, $3n + 1 \leq (n + 1)(k - 1)$. Vu que $k \leq 3$, $(n + 1)(k - 1) \leq 2(n + 1) = 2n + 2 \neq 3n + 1$, contradiction. Ceci implique que $\chi_=(\mu(ML_n)) \geq 4$.

Par conséquent $\chi_=(\mu(ML_n)) = 4$. ■

Exemple 3.9.2

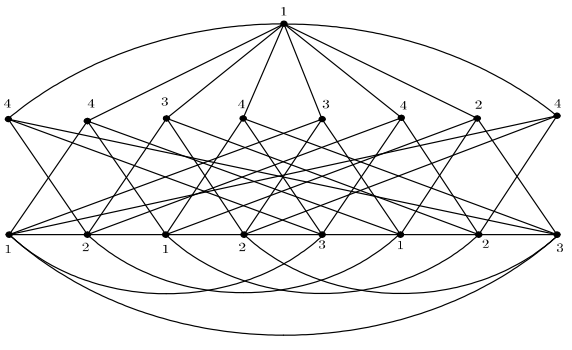


Figure 3.9.3 : Graphe de mycielski de circulant graphe avec $\chi_=(\mu(ML_4)) = 4$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à la notion de la coloration équitable dans les graphes. Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques résultats existant sur la coloration dans les graphes. Ensuite, nous avons déterminé le nombre de la coloration équitable, de quelques graphes particuliers. D'abord nous avons donné les valeurs exactes de nombre chromatique équitable du graphe milieu, total et central de graphe moulin C_n^3, graphe circulant ML_n, graphe de fan $F_{1,n}$ et graphe double fan $F_{2,n}$, couronne d'une chaîne $C_r(P_n)$ et couronne d'un cycle $C_r(C_n)$. De plus, nous avons déterminé les valeurs exactes de nombre chromatique équitable pour les graphes suivant : graphe splitting de roue $S'(W_n)$, graphe splitting de étoile $S'(K_{1,n})$, couronne d'un graphe complet avec une chaîne $K_n \odot P_m$, couronne d'un cycle avec un graphe complet $C_n \odot K_m$, couronne d'un cycle avec une chaîne $C_n \odot P_m$, prisme complémentaire d'un étoile $K_{1,n}\overline{K}_{1,n}$, prisme complémentaire d'un couronne de cycle $C_r(C_n\overline{C}_n)$, prisme complémentaire de graphe splitting d'un cycle $S'(C_n\overline{C}_n)$, prisme complémentaire de graphe Helme $H_n\overline{H}_n$. Enfin nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique $k-$équitable du graphe de mycielski de graphe circulant $\mu(ML_n)$ et le prisme graphe $\mu(Y_n)$. On conclut que la détermination de ce paramètre en général n'est pas facile. Comme perspective, nous proposons d'étudier les problèmes suivants:

- Déterminer le nombre chromatique équitable du graphe moulin C_p^m, si $p \geq 4$.
- Déterminer le nombre chromatique équitable du couronne voisinage d'un graphe $G_1 \star G_2$.

Bibliographie

[1] K. Appel and W.Haken. The existance of unavoidable sets of geographically good configurations. Illinois. Math, $20 : 218 - 297, 1976$.

[2] C. Berge. Graph. North Holland, 1985.

[3] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a netwok. Proc.Cambridge Phil. Soc; 37 : $194 - 197 : 1941$(cité en page 14).

[4] B.-L Chen, K.-W Lih ,J.-H Yan, Equitable coloring of graph products, manuscript, 1998.

[5] L. Foissy, Cours théorie des graphes. 2010.

[6] H. Furmanczyk, A. Jastrzebski and M. Kubale, Equitable coloring of graphs. Recent the oretical results and practical algorithms. Archives of control sciences, vol . $26(LXII), no.3.PP.281 - 295.2016$.

[7] H. Furmanczyk. Equitable coloring of graph products, Opuscula Mathematica. Vol. 26. $No.1$. 2006.

[8] H. Furmanczyk. A.Jastrzebski. M. Kubale. Equitable coloring of graphs. Gdansk University of Technology. Déc 2011.

[9] Jha P. K. Hypercubes, Median graphs and products of graphs : Some algorithmic and combinatorial results, Ph.D. Thesis, Iowa State Univ. 1990.

[10] P. John. McSorley. Counting structures in the Möbius ladder. Michigan Technological University.1997.

[11] K. Kaliraj.J. Vernold Vivin. On equitable coloring of Helm graph and gear graph.University of Technology Tirunelveli. India. 2010.

[12] W. Meyer. Equitable coloring, Amer. Math. Monthly 80(1973), 920922.

[13] D. Muller. Introduction à la théorie des graphes, City Editions, France2007.

[14] K. Praveena, M. Venkatachalam, A. Rohini, Dafik, Equitable coloring of prism graph and it's central, middle, total and line graph. International journal of scientific et technology research volume 8, issue 08, august 2019.

[15] K. Praveena, M. Venkatachalam, On équitable chromatic number of tadpole graph. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. Volume 68, Number 2,Pages 1638 − 1646(2019).

[16] N. Sujitha. M. Pauline. On equitable coloring of star graph familiers. Coibatore-641018, India.

[17] A. Souadkia. F. Dahmani avec Ms R. Lemdani. Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes. Univ de Médéa 2016.

[18] k. Vesztergombi. Some remarks on the chromatic number of the strong product of graphs, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 25(1981), 819$\tilde{n}$825.

[19] J. Vernold Vivin. K. Kaliraj. Equitable Coloring of Mycielskian of Some Graphs. University of Madras 2016.

[20] P. Zhang. Graphs and digraphs 6 eme Èdition Taylor et Francis Group . 2016(cit 2 page15 et 14).

[21] Equitable coloring of central graphe and total graphe of some families graphs.\shdhgange.inflibnet.ac.in.

[22] Equitable coloring of Mycielski's graph of graphs. \shdhgange.inflibnet.ac.in.