Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences - Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

Autour de la domination Romaine double dans les graphes

Par

CHETOUI Meriem

Composition du Jury :

Mr.	**K. TABLENNEHAS**	Maître de conférence	UYF Médéa	Président
Mr.	**M. ZAMIME**	Maître de conférence	UYF Médéa	Encadreur
Mr.	**N. IKHLEF ESCHOUF**	Professeur	UYF Médéa	Examinateur

juin 2026

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Parmi les nombreux paramètres de domination existants, on a étudié un nouveau concept de domination, appelé domination Romaine double. Une fonction de domination Romaine double (**FDRD**) sur G est une fonction $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ telle que pour tout sommet $v \in V(G)$: si $f(v) = 0$, alors v est adjacent à un sommet de poids 3 ou bien à au moins deux sommets de poids 2. Si $f(v) = 1$, alors v possède au moins un voisin w tel que $f(w) \geq 2$. Le poids minimum d'une **FDRD** de G est le nombre de domination double romaine $\gamma_{dR}(G)$.

Ce mémoire comporte deux parties. Dans la première partie, on détermine la valeur exacte de γ_{dR} pour quelques graphes particuliers, à savoir les graphes milieux $M(P_n)$ et $M(C_n)$, les graphes totaux $T(P_n)$ et $T(C_n)$, le graphe de friendship F_n, le graphe roue W_n, et les prismes complémentaires $P_n\overline{P_n}$ et $C_n\overline{C_n}$. Dans la deuxième partie, on a initié l'étude de l'effet de la séparation des arêtes et la contraction d'une arête sur le nombre de domination romaine double. La séparation des arêtes dans un graphe consiste pour une chaîne P_3 induite : uxv à supprimer les arêtes ux et vx et à ajouter l'arête uv. On caractérise les graphes γ_{dR}-L-critiques et γ_{dR}-dot-critiques, ainsi que les graphes stables correspondants, pour les valeurs $\gamma_{dR} \in \{3, 4, 5\}$. En outre, nous étudions la criticité (L-criticité et dot-criticité) ainsi que de la stabilité pour les chaînes et les cycles.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. Among all parameters of domination, we study a recent concept of domination, called double Roman domination. A double Roman dominating function (**DRDF**) on G is a function $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ such that for each vertex $v \in V(G)$: if $f(v) = 0$, then v is adjacent to at least one vertex assigned 3 or to at least two vertices assigned 2, if $f(v) = 1$, then v has at least one neighbor w such that $f(w) \geq 2$. The minimum weight of a **DRDF** of G is the double Roman domination number $\gamma_{dR}(G)$. This thesis is structured in two distinct parts. In the first part, we determine the exact value of γ_{dR} for some particular graphs, namely, middle graphs $M(P_n)$ and $M(C_n)$, total graphs $T(P_n)$ and $T(C_n)$, friendship graph F_n, wheel graph W_n, and complementary prisms of $P_n\overline{P_n}$ and $C_n\overline{C_n}$. In the second part, we initiate the study of the effects of edge lifting and contracting of edge on the double Roman domination number of a graph. We characterize γ_{dR}-L-critical and γ_{dR}-dot-critical graphs, and stable graphs, for the values $\gamma_{dR} \in \{3, 4, 5\}$. Furthermore, we study the criticality (L-criticality and dot-criticality) and stability for the paths and cycles.

ملخص

ليكن $G = (V, E)$ غرافاً بسيطاً. من بين معاملات الهيمنة العديدة الموجودة، درسنا مفهوماً جديداً للهيمنة يُسمى الهيمنة الرومانية المزدوجة. دالة الهيمنة الرومانية المزدوجة (**FDRD**) على G هي دالة $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ بحيث لكل رأس $v \in V(G)$: إذا كان $f(v) = 0$، فإن v مجاور لرأس بوزن 3 أو على الأقل لرأسين بوزن 2. وإذا كان $f(v) = 1$، فإن v يمتلك على الأقل جاراً w بحيث $f(w) \geq 2$. الوزن الأدنى لـ **FDRD** على G هو عدد الهيمنة الرومانية المزدوجة $\gamma_{dR}(G)$.

يتكون هذا المذكرة من جزأين. في الجزء الأول، نحدد القيمة الدقيقة لـ γ_{dR} لبعض الغرافات الخاصة، وهي: غرافات الوسط $M(P_n)$ و$M(C_n)$، والغرافات الكلية $T(P_n)$ و$T(C_n)$، وغراف الصداقة F_n، وغرافات العجلة W_n، والمنشورات التكاملية $P_n\overline{P_n}$ و$C_n\overline{C_n}$. في الجزء الثاني، ندرس تأثير فصل الأضلاع وانكماش ضلع على عدد الهيمنة الرومانية المزدوجة. يتمثل فصل الأضلاع في غراف في سلسلة P_3 مستحثة uxv بحذف الضلعين ux وvx وإضافة الضلع uv. نُميّز الغرافات γ_{dR}الحرجة-L- وγ_{dR}-نقطة-الحرجة، فضلاً عن الغرافات المستقرة المقابلة، للقيم $\gamma_{dR} \in \{3, 4, 5\}$. علاوة على ذلك، ندرس الحرجية والاستقرار للسلاسل والدورات.

Remerciements

Au début, je remercie Allah le Tout-Puissant pour m'avoir accordé la réussite dans l'achèvement de ce mémoire.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur, Monsieur Mohamed Zamime, maître de conférences à l'Université Yahia Farès de Médéa, pour ses précieuses orientations et ses conseils tout au long de la réalisation de ce travail.

J'adresse aussi mes vifs remerciements à Monsieur K. TABLENNEHAS, maître de conférences à l'Université Yahia Farès de Médéa, Nouredine Ikhlef Eschouf Professeur à l'Université Yahia Farès de Médéa pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leurs remarques judicieuses.

Je remercie également le personnel administratif ainsi que tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatique pour le savoir et les connaissances qu'ils nous ont transmis.

Un grand merci à nos familles qui ont été là pour nous encourager et nous pousser à faire de notre mieux.

Dédicace

À ceux qui ont été la raison de mon existence, la lumière de mon chemin, et mon soutien à chaque pas...
À mes chers parents, qui m'ont comblé de l'amour et de prières, et qui ont toujours été ma source de force et d'inspiration. *Je prie Allah de les préserver et de les rétribuer de la meilleure des récompenses...*

À mes frères et sœurs, qui ont partagé avec moi les moments de fatigue avant la joie, et qui ont toujours été à mes côtés pour m'épauler, et m'encourager.

Puissiez-vous rester pour moi une fierté, un soutien et un refuge...

À mes chers amis, qui n'ont jamais mesuré leurs mots bienveillants ou leurs encouragements sincères, Et qui furent une merveilleuse compagnie ayant allégé les difficultés de ce parcours...

À quiconque m'a tendu une main secourable, et a contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail,
Ne serait-ce que par une parole ou une prière...

Je dédie ce modeste travail, en signe d'amour et de gratitude, espérant qu'il plaise à Allah de m'accorder le succès et la réussite, et qu'il soit la plume de mon effort pour un avenir meilleur.

Table des matières

Résumé ii

Abstract iii

Remerciements v

Dédicace vi

Table des matières vii

Table des figures vii

Introduction 2

1 NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DES GRAPHES 3

1.1 Définitions et notations . . . 3

1.1.1 Graphe . . . 3

1.1.2 Voisinages et degrés . . . 4

1.1.3 Chaîne et cycle . . . 5

1.1.4 Sous-graphe et graphe partiel . . . 5

1.1.5 Graphes particuliers . . . 6

1.1.6 Quelques paramètres de graphes . . . 9

2 Étude des paramètres de domination romaine et de double domination romaine dans les graphes 10

2.1 La domination . . . 10

2.1.1 Fonction de domination . . . 10

2.1.2 Quelques résultats existants sur la domination . . . 11

2.2 La domination Romaine . . . 12
2.2.1 Quelques résultats sur la domination Romaine . . . 13
2.3 La domination Romaine double . . . 14
2.3.1 Quelques résultats sur la domination Romaine double . . . 14

3 Détermination du nombre de domination Romaine double de certains graphes 17
3.1 Quelques graphes particuliers . . . 17
3.1.1 Graphe milieu . . . 17
3.1.2 Graphe total . . . 18
3.1.3 Graphe friendship . . . 18
3.1.4 La roue . . . 19
3.1.5 Prisme complémentaire d'un graphe . . . 19
3.2 Le nombre de domination Romaine double du graphe milieux . . . 20
3.3 Le nombre de domination Romaine double d'un graphe total . . . 24
3.4 Le nombre de domination Romaine double d'un graphe de friendship . . . 26
3.5 Le nombre de domination Romaine double d'une roue . . . 27
3.6 Le nombre de domination Romaine double du Prisme complémentaire d'un graphe . . . 28

4 La domination Romaine double dans les graphes modéfiés 33
4.1 La séparation d'arête . . . 33
4.1.1 Définition et propriétés fondamentales . . . 33
4.1.2 Les graphes L-critiques . . . 36
4.2 Contraction d'arête dans les graphes . . . 38
4.2.1 Définition et propriétés fondamentales . . . 38
4.2.2 Les graphes *dot*-critiques . . . 39
4.3 Graphes critiques pour la domination romaine . . . 41
4.3.1 Graphes L-critiques pour la domination romaine double . . . 41
4.3.2 Graphes dot-critiques pour la domination romaine double . . . 43

Conclusion 45

Bibliographie 45

Table des figures

1.1 Un graphe simple G 4

1.2 Une chaîne P_5 et un cycle C_4 5

1.3 Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G 6

1.4 (a) Un graphe connexe et (b) deux composantes connexes 6

1.5 (a) Un graphe biparti complet $K_{4,3}$ et (b) un graphe biparti 7

1.6 (a) Un graphe complet K_5 et (b) un graphe 3-régulier 7

1.7 Un graphe G et le complémentaire de G $(\overline{G})$ 8

1.8 (a) Un arbre et (b) une forêt 8

1.9 (a) une étoile S_3 et (b) une double étoile $S_{2,3}$ 8

2.1 un graphe de poids minimum $\gamma(G) = 1$ 11

2.2 Un graphe G avec une fonction de domination Romaine de poids $\gamma_R(G) = 2$ 13

2.3 $\gamma_{dR}(G) = 3$ 14

2.4 $\gamma_{dR}(C_5) = 6$ 14

2.5 (a) $\gamma_{dR}(P_3) = 3$, (b) $\gamma_{dR}(P_4) = 5$ et (c) $\gamma_{dR}(P_5) = 6$ 15

2.6 (a) $\gamma_{dR}(C_6) = 6$ et (b) $\gamma_{dR}(C_7) = 8$ 16

3.1 $M(C_6)$ 18

3.2 (a) Le cycle C_4 (b) $T(C_4)$ 18

3.3 Le graphe de friendship F_5 19

3.4 Le roue W_{11} 19

3.5 Prisme complémentaire des graphes C_6 et P_6 20

3.6 $\gamma_{dR}(M(P_3)) = 5$ et $\gamma_{dR}(M(P_4)) = 6$ 22

3.7 $\gamma_{dR}(M(C_3)) = 5$ et $\gamma_{dR}(M(C_4)) = 6$ 23

3.8 $\gamma_{dR}(T(P_3)) = 3$ et $\gamma_{dR}(T(P_4)) = 6$ 25

3.9 $\gamma_{dR}(T(C_3)) = 5$ et $\gamma_{dR}(T(C_4)) = 6$ 26

3.10 Un graphe avec $\gamma_{dR}(F_2) = 3$, $\gamma_{dR}(F_3) = 3$ et $\gamma_{dR}(F_4) = 3$ 27

3.11 Un graphe de roue avec $\gamma_{dR}(W_4) = 3$, $\gamma_{dR}(W_5) = 3$ et $\gamma_{dR}(W_6) = 3$ 28

3.12 (a) $\gamma_{dR}(P_3 \square \overline{P_3}) = 6$, (b) $\gamma_{dR}(P_4 \square \overline{P_4}) = 7$ et (c) $\gamma_{dR}(P_5 \square \overline{P_5}) = 9$ 30

3.13 (a) $\gamma_{dR}(C_4 \square \overline{C_4}) = 9$, (b) $\gamma_{dR}(C_5 \square \overline{C_5}) = 9$ et (c) $\gamma_{dR}(C_6 \square \overline{C_6}) = 11$ 32

4.1 (a) un graphe G et (b)La séparation d'arête dans graphe G 34

4.2 (a) Un graphe G et (b) Contraction d'arête dans le graphe G 38

4.3 (a) $\gamma_{dR}(G^x_{uv})$ de P_3 et (b) $\gamma_{dR}(G^x_{uv})$ P_4 42

4.4 (a) $\gamma_{dR}(G^x_{uv})$ de C_4 et (b) $\gamma_{dR}(G^x_{uv})$ C_5 43

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes qui occupe une place centrale dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques. L'un des problèmes les plus étudiés est le **problème de domination** : il s'agit de placer un nombre minimal de gardiens dans un réseau modélisé par un graphe, de sorte que chaque nœud non gardé soit adjacent à au moins un gardien. Le **nombre de domination** $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un tel ensemble dominant.

Dans la continuité de ces travaux, la **domination Romaine double** a été introduite par Beeler, Haynes et Hedetniemi en 2016. Elle associe à chaque sommet une valeur dans $\{0, 1, 2, 3\}$ selon des règles de protection renforcées. Ce manuscrit comporte quatre chapitres organisés comme suit :

Chapitre 1 : Notions fondamentales de la théorie des graphes. Nous rappelons les définitions et résultats classiques nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire.

Chapitre 2 : État de l'art sur la domination Romaine et la domination Romaine double dans les graphes. Nous présentons les définitions et les principaux résultats connus sur la domination classique, la domination Romaine et la domination Romaine double dans les graphes.

Chapitre 3 : Détermination du nombre de domination Romaine double de certains graphes. Nous calculons le nombre γ_{dR} pour les graphes milieux $M(P_n)$ et $M(C_n)$, les graphes totaux $T(P_n)$ et $T(C_n)$, les graphes de friendship F_n, les graphes de roue W_n, et les prismes complémentaires $P_n\overline{P_n}$ et $C_n\overline{C_n}$.

Chapitre 4 : La domination Romaine double dans les graphes modifiés. Nous étudions l'effet de la séparation des arêtes et de la contraction d'arête sur le nombre de domination Romaine double dans les graphes. Dans ce contexte, nous étudions les graphes γ_{dR}-L-critiques et γ_{dR}-dot-critiques, et γ_{dR}-stables pour des petites valeurs de γ_{dR}. Enfin nous terminons ce chapitre par la caractérisation des chaînes et des cycles γ_{dR}-L-critiques et γ_{dR}-dot-critiques, γ_{dR}-stables.

Chapitre 1

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DES GRAPHES

Ce chapitre est consacré à la présentation des concepts de base de la théorie des graphes. Les définitions et résultats essentiels qui y sont exposés constitueront les outils nécessaires à la compréhension des chapitres suivants.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis : un ensemble de sommets, noté V, et un ensemble d'arêtes, noté E, dont les éléments sont des paires de sommets de V. Le nombre de sommets d'un graphe est appelé l'ordre du graphe G et est noté $n(G)$. Le nombre d'arêtes d'un graphe est appelé la taille du graphe G et est noté $m(G)$.

Une arête $e \in E$ est une paire de sommets u, v, notée $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e. Les sommets u et v sont alors dits adjacents, et l'arête e est dite incidente aux sommets u et v.

Une boucle est une arête dont les deux extrémités coïncident.

Un graphe est dit simple s'il ne possède ni boucle ni arêtes multiples. Dans tout ce mémoire, nous ne considérerons que des graphes simples et finis. (voir la figure1.1)

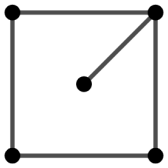


FIGURE 1.1 – Un graphe simple G

1.1.2 Voisinages et degrés

Soit $G = (V; E)$ un graphe, pour tout sommet $u \in V$, on définit le voisinage ouvert de u comme l'ensemble des sommets adjacents à u dans G. On le note :

$$N_G(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

Le voisinage fermé d'un sommet $u \in V$, noté $N_G[u]$, est défini par $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.

Par ailleurs, pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, on définit :

$$N(S) = \bigcup_{u \in S} N(u) \quad \text{et} \quad N[S] = N(S) \cup S$$

Le degré d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$, est le nombre de ses voisins, c'est-à-dire le cardinal de son voisinage ouvert $N(v)$. On a :

$$d_G(x) = |N_G(x)|$$

Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on note $N_S(x) = N(x) \cap S$. Le degré de x dans S est défini par :

$$d_S(x) = |N_S(x)|$$

Le degré maximum d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, est le plus grand degré parmi tous les sommets de G. Autrement dit,

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$$

Le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le plus petit degré parmi tous les sommets de G. Autrement dit,

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$$

Dans le paragraphe suivant, nous donnons les définitions de certaines sommets spéciaux.

• Un sommet isolé est un sommet de degré 0.

• Un sommet universel est un sommet de degré $n-1$.

• Un sommet pendant est un sommet de degré 1.

• Le voisin d'un sommet pendant est dit sommet support.

1.1.3 Chaîne et cycle

Dans un graphe $G = (V; E)$, une chaîne d'ordre n est une suite de sommets $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$ telle que chaque arête relié deux sommets consécutifs v_i, v_{i+1} pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Le sommet v_1 est appelé extrémité initiale de la chaîne et le sommet v_n son extrémité finale.

Une chaîne est dite élémentaire si tous ses sommets sont deux à deux distincts.

Une chaîne est dite simple si toutes ses arêtes sont deux à deux distinctes.

Une corde d'une chaîne est une arête reliant deux sommets non consécutifs de cette chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée P_n, est une chaîne élémentaire sans cordes.

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. La longueur d'un cycle est le nombre de ses arêtes.

Exemple 1.1.1 *La figure1.2 représente une chaîne P_5 et un cycle C_4.*

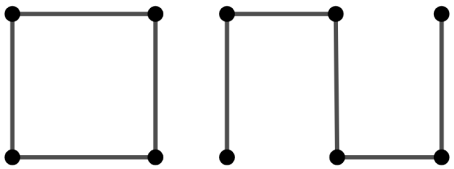


FIGURE 1.2 – Une chaîne P_5 et un cycle C_4

1.1.4 Sous-graphe et graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, on dit qu'un graphe $H = (V_H, E_H)$ et sous graphe de G, et on note $H \subseteq G$ si :

• $V_H \subseteq V$,

• $E_H \subseteq E$,

• Chaque arête de E_H a ses deux extrémités dans V_H

Soit A une partie de l'ensemble des sommets $V(G)$. On appelle **sous-graphe induit** par A, et on note $G[A]$, le graphe qui est obtenu à partir de G en ne conservant que les sommets qui appartiennent à A et les arêtes qui relient ces sommets dans G.

Un graphe $H = (V, E')$ est un graphe partiel de $G = (V, E)$ si l'ensemble de ses sommets est identique à celui de G et si $E^{'} \subseteq E$

Exemple 1.1.2 *Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G (Figure1.3).*

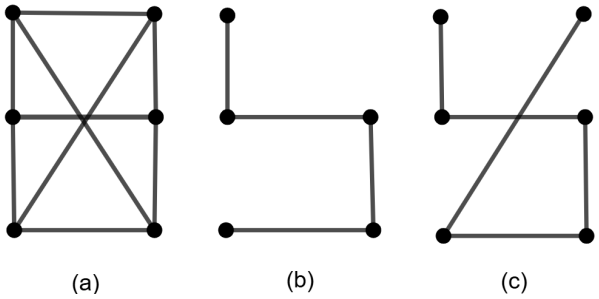


FIGURE 1.3 – Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G

1.1.5 Graphes particuliers

Dans cette partie, nous rappelons les définitions de certains graphes particuliers connus.

• Un graphe $G = (V, E)$ est dit **connexe** si, pour toute paire de sommets $\{u, v\} \subseteq V$, il existe une chaîne reliant u et v. Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal.

Exemple 1.1.3 *Figure 1.4 représente (a) Un graphe connexe et (b) deux composantes connexes.*

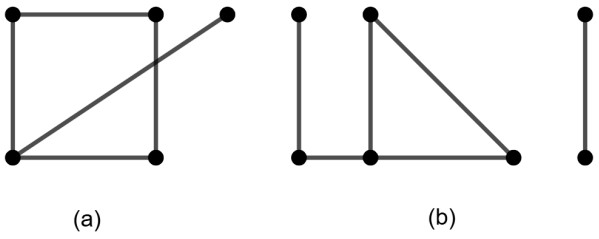


FIGURE 1.4 – (a) Un graphe connexe et (b) deux composantes connexes

• Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe un partition de V en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête de E a une extrémité dans X et l'autre dans Y.

De plus G est dit biparti complet si tous les sommets de X sont adjacents à tous les sommets de Y. Si $\|X\| = p$ et $\|Y\| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{n,m}$.

Exemple 1.1.4 *(a) Un graphe biparti complet $K_{4,3}$ et (b) un graphe biparti (voir la figure1.5)*

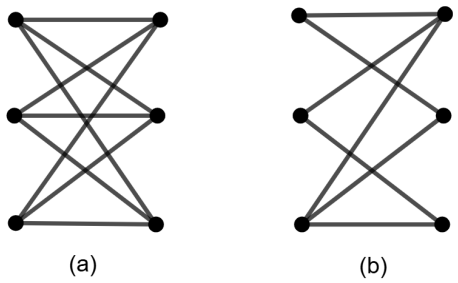


FIGURE 1.5 – (a) Un graphe biparti complet $K_{4,3}$ et (b) un graphe biparti

• Un graphe G est dit d **-régulier** si tous ses sommets ont le même degré d. c'est-à-dire :

• Un graphe G est dit discret si tous ses sommets sont isolés.

• Le graphe complet d'ordre n, noté K_n est le graphe $n-1$-régulier. Autrement dit, deux sommets quelconques de K_n sont adjacents.

Exemple 1.1.5 *La figure1.6 représente un graphe complet K_5 et graphe $3-$régulier.*

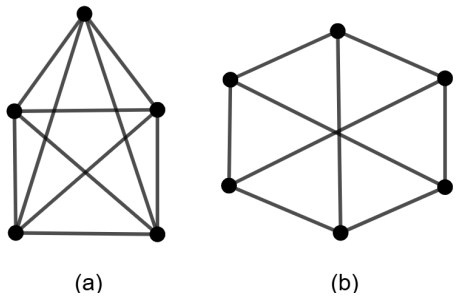


FIGURE 1.6 – (a) Un graphe complet K_5 et (b) un graphe 3-régulier

• Le graphe complémentaire de G, noté $\overline{G}$ est le graphe ayant exactement les mêmes sommets que G et deux sommets dans $\overline{G}$ sont reliés par une arête s'ils ne le sont pas dans G.

Exemple 1.1.6 *La figure1.7 représente un graphe G et complémentaire de G ($\overline{G}$) :*

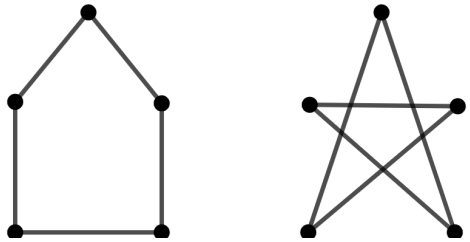


FIGURE 1.7 – Un graphe G et le complémentaire de G ($\overline{G}$)

• Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. Un arbre d'ordre n comporte exactement $n-1$ arêtes.

• Une **forêt** est un graphe dont chaque composante connexes est un arbre. (Figure1.8).

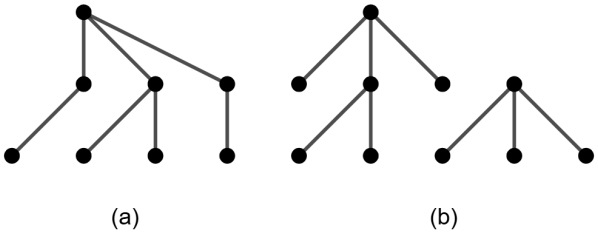


FIGURE 1.8 – (a) Un arbre et (b) une forêt

• Une **étoile** d'ordre n est un graphe biparti complet $K_{1,n-1}$.

• Une **étoile subdivisée** $K^*_{1,q}$ est obtenue en subdivisant une seule fois chacune des arêtes de l'étoile $K_{1,q}$.

• Soit **double étoile**, est un graphe simple obtenu en reliant les centres de deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ par une arête. On la note $S_{r,s}$.

Exemple 1.1.7 *La Figure 1.9 représente (a) une étoile et (b) une double étoile*

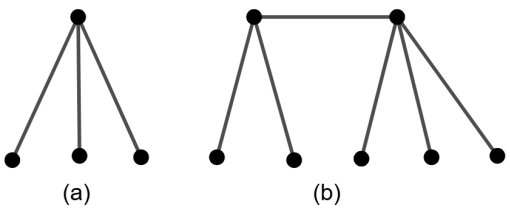


FIGURE 1.9 – (a) une étoile S_3 et (b) une double étoile $S_{2,3}$

1.1.6 Quelques paramètres de graphes

Dans cette partie, nous introduisons les notions fondamentales relatives à certains invariants de graphes et à des classes spécifiques de graphes qui joueront un rôle central dans notre étude.

• Un couplage M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux. Un sommet v de G est dit saturé par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à v. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G. Le cardinal maximum d'un couplage maximal de G, noté $\beta(G)$ est appelé nombre de couplage de G.

• Un stable dans un graphe G tout ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G, noté $\alpha(G)$ est appelé nombre de stabilité de G.

• Une clique d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux adjacents. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets.

Une clique de taille n est notée par K_n. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

Chapitre 2

Étude des paramètres de domination romaine et de double domination romaine dans les graphes

Ce chapitre traite de la domination dans les graphes et de ses différentes généralisations. On y présente d'abord la domination classique, puis la domination romaine, et enfin la domination romaine double. Quelques résultats importants liés à ces concepts sont également discutés, en se référant à certaines classes de graphes qui seront étudiées plus en détail dans les prochains chapitres.

La notion de domination dans les graphes a été introduite pour la première fois par Berge en 1958 [2], puis développée par Ore en 1962 [6]. Pour une étude approfondie de ses nombreuses variantes et extensions, on peut se référer à l'ouvrage de Haynes et al. [**?**, **?**].

Dans cette partie, nous allons donner une définition précise de ce paramètre.

2.1 La domination

Définition 2.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ est dit ensemble domination de G si tout sommet $v \in V \backslash S$ est adjacent à au moins un sommet $u \in S$. Le nombre de domination noté $\gamma(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant de cardinalité $\gamma(G)$ est appelé un $\gamma(G)$-ensemble.*

2.1.1 Fonction de domination

Une fonction de domination (FD) sur un graphe $G = (V, E)$ est une application $f : V \to \{0, 1\}$ telle que pour tout sommet $v \in V$ avec $f(v) = 0$, il existe au moins un voisin $u \in N(v)$ satisfaisant

$f(u) = 1$. Soit (V_0, V_1) une partition ordonnée de V induite par f, où chaque ensemble est défini par $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$ pour $i \in \{0, 1\}$, on peut ainsi identifier la fonction f par sa partition et écrire $f = (V_0, V_1)$. Le poids de la fonction f est la valeur donnée par :

$$w(f) = \sum f(u) = |V_1|$$

Le poids minimum parmi toutes les fonctions de domination sur G est appelé le nombre de domination de G, noté $\gamma(G)$, et défini par :

$$\gamma(G) = \min \{w(f) \ , \ f \ est \ une \ FD \ de \ G\}$$

Exemple 2.1.1 *La fonction de domination $f : V \to \{0, 1\}$ pour un graphe de poids minimum $\gamma(G) = 1$ (voir figure2.1).*

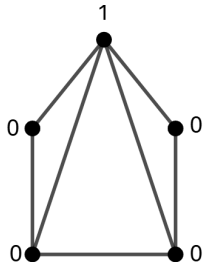


FIGURE 2.1 – un graphe de poids minimum $\gamma(G) = 1$

2.1.2 Quelques résultats existants sur la domination

Théorème 2.1.1 *5 Pour tout graphe simple G avec n sommets et m arêtes et de degré maximum $\Delta(G)$, on a :*

$$\gamma(G) \geq n - m \ et \ \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1}$$

Proposition 2.1.1 *3 Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et de taille m, alors : $\gamma(G) = n - m$ si seulement si G est une étoile.*

Théorème 2.1.2 *2 Soit G un graphe d'ordre n, de degré maximum Δ alors on a :*

$$\gamma(G) \leq n - \Delta$$

Théorème 2.1.3 *6 Si G est un graphe d'ordre n sans sommets isolés, alors on a :*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$$

Théorème 2.1.4 *3 Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$ tel que G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors :*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \frac{n}{2} + 2$$

Théorème 2.1.5 *7 Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors :*

- $3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$
- $2 \leq \gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}) \leq n$

Théorème 2.1.6 *9 Soit G un graphe et $\overline{G}$ son complémentaire. Si G et $\overline{G}$ sont connexes, alors :*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n$$

2.2 La domination Romaine

Une fonction de domination Romaine (**RDF**) sur un graphe $G = (V, E)$ est une application $f : V \to \{0, 1, 2\}$ telle que pour tout sommet $v \in V$ avec $f(v) = 0$, il existe au moins un voisin $u \in N(v)$ satisfaisant $f(u) = 2$. Soit (V_0, V_1, V_2) une partition ordonnée de V induite par f, où chaque ensemble est défini par $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, on peut ainsi identifier la fonction f par sa partition et écrire $f = (V_0 V_1 V_2)$. Le poids de la fonction f est la valeur donnée par :

$$w(f) = \sum f(u) = |V_1| + 2\,|V_2|$$

Le poids minimum parmi toutes les fonctions de domination Romaine sur G est appelé le nombre de domination Romaine de G, noté $\gamma_R(G)$, et est défini par :

$$\gamma_R(G) = \min\{w(f)\ ,\ f \textit{ est une RDF de } G\}$$

Exemple 2.2.1 *Un graphe G avec $\gamma_R(G) = 2$ (voir Figure2.2)*

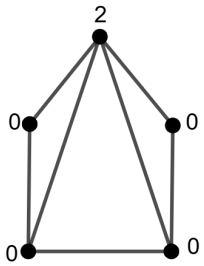


FIGURE 2.2 – Un graphe G avec une fonction de domination Romaine de poids $\gamma_R(G) = 2$

2.2.1 Quelques résultats sur la domination Romaine

Proposition 2.2.1 *8 Pour tout graphe G, on a :*

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$$

Proposition 2.2.2 *8 Si G est un graphe d'ordre n, alors $\gamma(G) = \gamma_R(G)$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.*

Proposition 2.2.3 *8 Un graphe G est dit **Romain** si $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$. Cockayne et al. ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit Romain.*

Proposition 2.2.4 *8 Si G est un graphe connexe d'ordre n, alors :*

- *$\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$ si et seulement s'il existe un sommet $v \in V(G)$ de degré $n - \gamma(G)$.*
- *$\gamma_R(G) = \gamma(G) + 2$ si et seulement si :*
  - *G ne possède pas de sommet $v \in V(G)$ de degré $n - \gamma(G)$.*
  - *soit G possède un sommet de degré $n - \gamma(G) - 1$, soit G possède deux sommets v et w tels que $|N[u] \cup N[w]| = n - \gamma(G) - 2$.*

Proposition 2.2.5 *8 Pour tout graphe G d'ordre n et de degré maximum Δ :*

$$\frac{2n}{\Delta + 1} \leq \gamma_R(G)$$

Proposition 2.2.6 *8 Pour les chaînes P_n et les cycles C_n :*

$$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$

2.3 La domination Romaine double

Définition 2.3.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une fonction de domination Romaine double (**FDRD**) sur G est une fonction $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ qui satisfait les conditions suivantes :*

- *Si $f(v) = 0$, alors v possède au moins deux voisins dans V_2 ou au moins un voisin dans V_3.*
- *Si $f(v) = 1$, alors v possède au moins un voisin dans $V_2 \cup V_3$.*

*Le poids de f est défini par $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le poids minimum d'une **FDRD** de G est appelé le nombre de domination Romaine double de G, noté $\gamma_{dR}(G)$.*

Exemple 2.3.1 *Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G) = 3$(Figure2.3).*

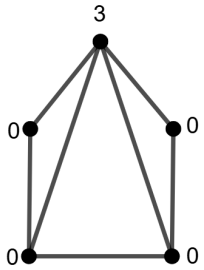


FIGURE 2.3 – $\gamma_{dR}(G) = 3$

2.3.1 Quelques résultats sur la domination Romaine double

Proposition 2.3.1 *11 Dans une fonction de domination Romaine double de poids $\gamma_{dR}(G)$, aucun sommet n'a besoin de recevoir la valeur* 1.

Exemple 2.3.2 *Le graphe C_5 possède deux fonction de domination Romaine double différentes(Figure2.4).*

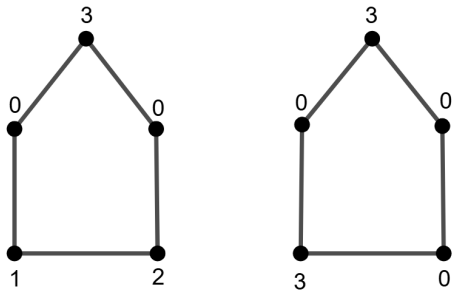


FIGURE 2.4 – $\gamma_{dR}(C_5) = 6$

Proposition 2.3.2 *11 Pour tout graphe G :*

$$2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$$

Proposition 2.3.3 *11 Pour tout graphe G :*

$$\gamma_R(G) \leq \gamma_{dR}(G)$$

Corollaire 2.3.1 *11 Pour tout graphe G connexe non trivial :*

$$\gamma_R(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 2\gamma_R(G)$$

Proposition 2.3.4 *1 Pour $n \geq 1$:*

$$\gamma_{dR}(P_n) = \begin{cases} n & si \quad n \approxeq 0 \pmod 3 \\ n+1 & si \quad n \approxeq 1,2 \pmod 3 \end{cases}$$

Exemple 2.3.3 *(a) $\gamma_{dR}(P_3) = 3$, (b) $\gamma_{dR}(P_4) = 5$, (c) $\gamma_{dR}(P_5) = 6$ (voir la figure 2.5).*

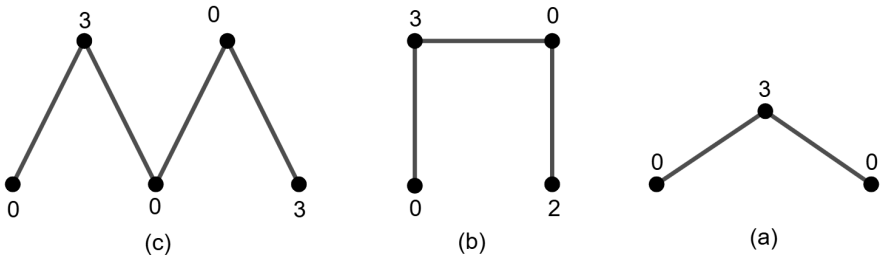


FIGURE 2.5 – (a) $\gamma_{dR}(P_3) = 3$, (b) $\gamma_{dR}(P_4) = 5$ et (c) $\gamma_{dR}(P_5) = 6$

Proposition 2.3.5 *1 Pour $n \geq 3$:*

$$\gamma_{dR}(C_n) = \begin{cases} n & si \quad n \approxeq 0,2,3,4 \pmod 6 \\ n+1 & si \quad n \approxeq 1,5 \pmod 6 \end{cases}$$

Exemple 2.3.4 *(a) $\gamma_{dR}(C_6) = 6$, (b) $\gamma_{dR}(C_7) = 8$ (Figure 2.6).*

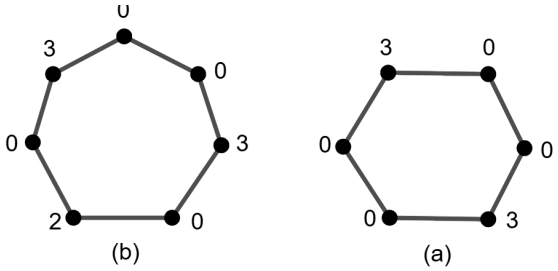


FIGURE 2.6 – (a) $\gamma_{dR}(C_6) = 6$ et (b) $\gamma_{dR}(C_7) = 8$

Proposition 2.3.6 *12 Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors :*

- $\gamma_{dR}(G) = 3$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 1$.
- $\gamma_{dR}(G) = 4$ *si et seulement si* $G = \overline{K}_2 \vee H$ *où* H *est un graphe avec* $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$.
- $\gamma_{dR}(G) = 5$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 2$ *et* $G \neq \overline{K}_2 \vee H$ *pour tout graphe* H *d'ordre* $n - 2$.

Théorème 2.3.1 *12Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$.*

$$\gamma_{dR}(G_n) + \gamma_{dR}\left(\overline{G}_n\right) \leq 2n + 3$$

avec égalité si et seulement si $G = K_n$ *ou* $\overline{K}_n$.

Chapitre 3

Détermination du nombre de domination Romaine double de certains graphes

Dans ce chapitre, nous allons donner la valeur exacte du nombre de domination Romaine double pour différents types de graphes, notamment les graphes milieux et les graphes totaux. Nous allons également considérer quelques cas particuliers, comme les graphes de friendship, la roue et le prisme complémentaire d'un graphe.

3.1 Quelques graphes particuliers

3.1.1 Graphe milieu

Définition 3.1.1 *14 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$, est défini de la manière suivante :*

- *L'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V \cup E$.*
- *Deux sommets x et y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
  - *$x, y \in E$ et x est adjacent à y dans G.*
  - *$x \in V$, $y \in E$ et x est incident à y dans G, c'est-à-dire que x est une extrémité de y.*

Exemple 3.1.1 $M(C_6)(Figure 3.1)$.

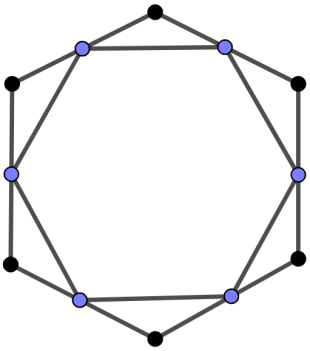


FIGURE 3.1 – $M(C_6)$

3.1.2 Graphe total

Définition 3.1.2 *13Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe total de G, noté $T(G)$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G) \cup E(G)$. Deux sommets $x, y \in V(T(G))$ sont adjacents dans $T(G)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$x, y \in V(G)$ et x, y sont adjacents dans G.*
- *$x, y \in E(G)$ et x, y sont adjacents dans G.*
- *$x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.*

Exemple 3.1.2 *Le cycle C_4 et son graphe total $T(G)$, (Figure3.2).*

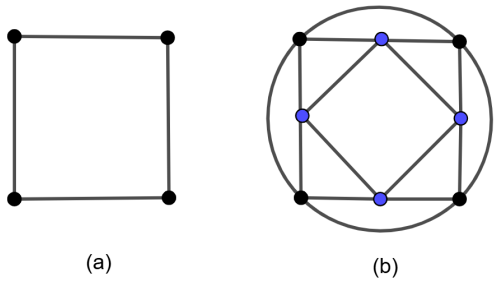


FIGURE 3.2 – (a) Le cycle C_4 (b) $T(C_4)$

3.1.3 Graphe friendship

Définition 3.1.3 *15 Le graphe friendship est un graphe planaire possédant $2n+1$ sommets et $3n$ arêtes, noté F_n , il peut être construit à partir de n copies du cycle C_3, toutes partageant un sommet central commun.*

Exemple 3.1.3 *La figure3.3 représente le graphe de friendship F_5.*

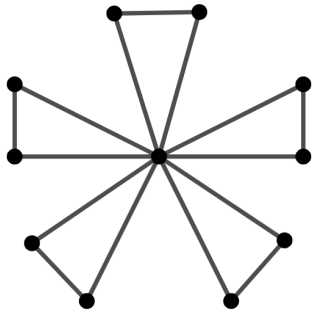


FIGURE 3.3 – Le graphe de friendship F_5

3.1.4 La roue

Définition 3.1.4 *16La roue, noté W_n, est un graphe d'ordre $n \geq 4$ obtenu en ajoutant un sommet central, appelé centre, adjacent à tous les sommets d'un cycle C_{n-1}.*

Exemple 3.1.4 *Dans la figure3.4, la roue W_{12}*

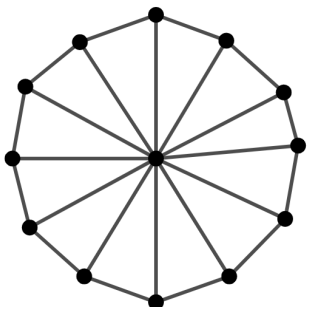


FIGURE 3.4 – Le roue W_{11}

3.1.5 Prisme complémentaire d'un graphe

Définition 3.1.5 *18 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le prisme complémentaire de G, notée $G\overline{G}$, est un graphe obtenu à partir de l'union disjointe de G et de son complémentaire $\overline{G}$. En ajoutant les arêtes d'un couplage parfait entre les sommets correspondants de G et $\overline{G}$. L'ensemble des sommets du prisme complémentaire est donné par :*

$$V(G\overline{G}) = V(G) \cup V(\overline{G})$$

Exemple 3.1.5 *La figure3.5 représente le prisme complémentaire du C_6 et de P_6*

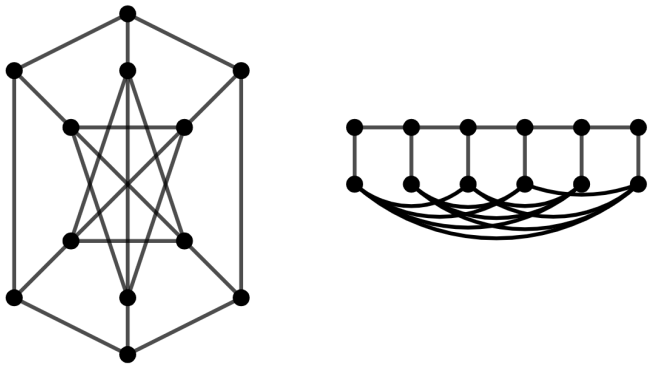


FIGURE 3.5 – Prisme complémentaire des graphes C_6 et P_6

3.2 Le nombre de domination Romaine double du graphe milieux

Proposition 3.2.1 *Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$. Alors*

$$\gamma_{dR}(M(P_n)) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n = 2k \\ \frac{3(n-1)}{2} + 2 & si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

Preuve. Soit $P_n = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ une chaîne d'ordre $n \geq 2$. Soit $f : V(M(P_n)) \to \{0, 1, 2, 3\}$.et soit $E(P_n) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ l'ensemble de ses arêtes où $e_i = v_i v_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

Cas 1 : $n = 2k$

Pour $i = 1, \ldots, n-1$:

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour $j = 1, \ldots, n$: $f(v_j) = 0$.

Cas 2 : $n = 2k+1$

Pour $i = 1, \ldots, n-1$:

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour $j = 1, \ldots, n$:

$$f(v_j) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\gamma_{dR}(M(P_n)) \leq \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n = 2k \\ \frac{3(n-1)}{2} + 2\ si & n = 2k+1 \end{cases}$$

Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse en utilisant la preuve par récurrence sur n : Supposons que l'énoncé est vrai pour tous les graphes milieux des chaînes d'ordre $n \leq 4$. Soit $n \geq 5$ supposons que l'énoncé est vrai pour toutes les graphes milieux des chaînes d'ordre inférieur à n. Soit $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ une (γ_{dR}) fonction de $M(P_n)$ telle que $V_1 = \Phi$ (voir la figure 3.6).

Cas 1 : n = 2k

Supposons que $f(v_n) = 0$. Puisque f est une **FDRD**, le sommet v_n doit être dominé soit par un voisin ayant une valeur 3, ou bien par au moins deux voisins ayant la valeur 2. Comme v_n est un sommet de degrés un, alors $f(e_{n-1}) = 3$. On Définit la fonction $g : V(M(P_{n-2})) \to \{0, 1, 2, 3\}$ de la manière suivante : $g(e_{n-3}) = \min\{3, f(e_{n-3}) + f(e_{n-2})\}$, $g(x) = f(x)$, sinon.

Il est clair que g est une **FDRD** de $M(P_{n-2})$ de poids $w(g) = w(f)-3$. Il s'ensuit que d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\gamma_{dR}(M(P_n)) = w(f) \geq w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(M(P_{n-2})) + 3 \geq \frac{3(n-2)}{2} + 3 \geq \frac{3n}{2}$$

Maintenant, supposons que $f(v_n) + f(e_{n-1}) \geq 3$. Dans ce cas la fonction $g : V(M(P_n)) \to \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $g(v_n) = 0, g(e_{n-1}) = 3$ et $g(x) = f(x)$ sinon, est une (γ_{dR}) fonction de $M(P_n)$. Par le même argument précédent, on obtient l'inégalité inverse. Enfin, supposons que $f(v_n) + f(e_{n-1}) \leq 2$. Alors $f(v_n) = 2$ et $f(e_{n-1}) = 0$. La définition de la fonction Romaine double, implique que $f(v_{n-1}) \geq 2$ ou bien $f(e_{n-2}) \geq 2$. Si $f(v_{n-1}) \geq 2$. Dans ce cas la fonction $g : V(M(P_n)) \to \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $g(v_n) = 0, g(e_{n-1}) = 3, g(v_{n-1}) = 0$ et $g(x) = f(x)$ sinon, est une (γ_{dR}) fonction de $M(P_n)$ avec $w(g) < w(f)$, contradiction. Maintenant supposons que $f(v_{n-1}) = 0$. Ceci implique que $f(e_{n-2}) = 3$ et $f(v_{n-2}) = 0$. Si $f(e_{n-3}) = 0$, alors la minimalité de f implique que $f(e_{n-4}) = 3$ et $f(v_{n-3}) = 0$. Dans ce cas la fonction $g : V(M(P_n)) \to \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $g(v_n) = 0, g(e_{n-1}) = 3, g(e_{n-2}) = 0$, $g(v_{n-2}) = 2$ et $g(x) = f(x)$ sinon, est une (γ_{dR}) fonction de $M(P_n)$. Par le même argument précédent, on obtient l'inégalité inverse.

cas 2 : n = 2k + 1 Supposons que $f(v_n) + f(e_{n-1}) \leq 2$. Dans ce cas la minimalité de f implique que $f(v_n) = 2$ et $f(e_{n-1}) = 0$. Considérons la chaîne $P_{n-1} = P_n - v_n$. Soit la fonction $g : V(M(P_{n-1})) \to \{0, 1, 2, 3\}$ définit par $g(x) = f(x)$. Il est clair que g est une **FDRD** de $M(P_{n-1})$ de poids $w(g) = w(f)-2$. Comme $n-1$ est paire, alors d'après le cas 1, $\gamma_{dR}(M(P_{n-1})) \geq \frac{3(n-1)}{2}$. Ceci implique que $\gamma_{dR}(M(P_n)) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_{dR}(M(P_{n-1})) + 2 \geq \frac{3(n-1)}{2} + 2$. Maintenant supposons que $f(v_n) + f(e_{n-1}) \geq 3$. La définition de f implique que $f(v_n = 0$ et $f(e_{n-1}) = 3$. La minimalité de f implique que $f(v_{n-1}) = 0$.

Supposons que $f(e_{n-2}) > 0$. Dans ce cas $f(e_{n-2}) = 2$, Car si $f(e_{n-2}) = 3$, alors la fonction $g : V(M(P_n)) \to \{0,1,2,3\}$ définit par $g(e_{n-1}) = 0$, $g(v_n = 2, g(x) = f(x)$ sinon, est (γ_{dR}) fonction de $M(P_n)$ de poids $w(g) = w(f) - 1$, contradiction. Supposons maintenant, que $f(e_{n-2}) = 0$. Soit $g : V(M(P_{n-2})) \to \{0,1,2,3\}$ la restriction de f sur $V(M(P_{n-2}))$.

Il est clair que g est une **FDRD** de $M(P_{n-2})$ de poids $w(g) = w(f)-3$. Il s'ensuit que d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\gamma_{dR}(M(P_n)) = w(f) \geq w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(M(P_{n-2})) + 3 \geq \frac{3(n-3)}{2} + 2 + 3 \geq \frac{3(n-1)}{2} + 2$$

.

$$\gamma_{dR}(M(P_n)) \geq \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{si } n = 2k \\ \frac{3(n-1)}{2} + 2 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

■

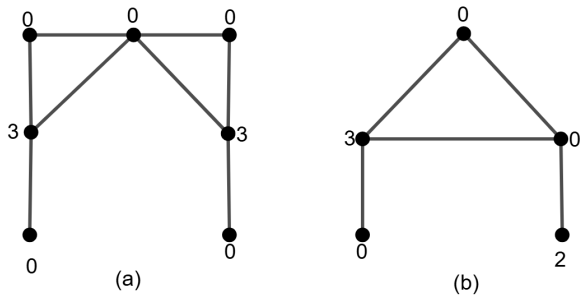


FIGURE 3.6 – $\gamma_{dR}(M(P_3)) = 5$ et $\gamma_{dR}(M(P_4)) = 6$

Proposition 3.2.2 *Pour tout entier $n \geq 3$, le nombre de domination Romaine double du graphe milieux d'un cycle C_n est donné par :*

$$\gamma_{dR}(M(C_n)) = \begin{cases} \dfrac{3n}{2} & si\ n = 2k \\ \dfrac{3(n-1)}{2} + 2 & si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

Preuve. Soit $C_n = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ un cycle d'ordre $n \geq 3$. Soit $f : V(M(C_n)) \to \{0,1,2,3\}$.

Cas 1 : $n = 2k$

Pour tout $i = 1, \ldots, n-1$:

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est impair} \\ 3 & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

$f(v_j) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Cas 2 : $n = 2k+1$

Pour tout $i = 1, \ldots, n-1$:

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est impair} \\ 3 & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

$f(v_n) = 2$, et pour tout $j = 1, \ldots, n-1$: $f(v_j) = 0$.

$$\gamma_{dR}(M(C_n)) \leq \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n = 2k \\ \frac{3(n-1)}{2} + 2\ si & n = 2k+1 \end{cases}$$

Pour prouver l'inégalité inverse, soit f une γ_{dR}-fonction de $M(C_n$ telle que : $v_1 = \Phi$
Tout d'abord on montre que Pour toute (γ_{dR}) fonction de $M(C_n)$, il existe au moins un sommet e_i, tel que $f(e_i) = 0$. Supposons le contraire, il existe (γ_{dR}) fonction f, telle que pour tout sommet e_i, $f(e_i) \geq 2$. Ceci implique que $\gamma_{dR}(M(C_n) \geq 2n$, contradiction avec $\gamma_{dR}(M(C_n) \leq \dfrac{3n}{2}$. Soit f une (γ_{dR}) fonction de $M(C_n)$, et soit e_i tel que $f(e_i) = 0$. Considérons le graphe $G = (M(C_n) - e_i$. Il est clair que $G = (M(P_n)$. Comme $f(e_i) = 0$, f est une **FDRD** dans G. Ceci implique que $\gamma_{dR}(M(C_n)) \geq \gamma_{dR}(M(P_n))$. Ceci entraine l'inégalité inverse.

■

Exemple 3.2.1 *Figure3.7* $\gamma_{dR}(M(C_3)) = 5, \gamma_{dR}(M(C_4)) = 6$

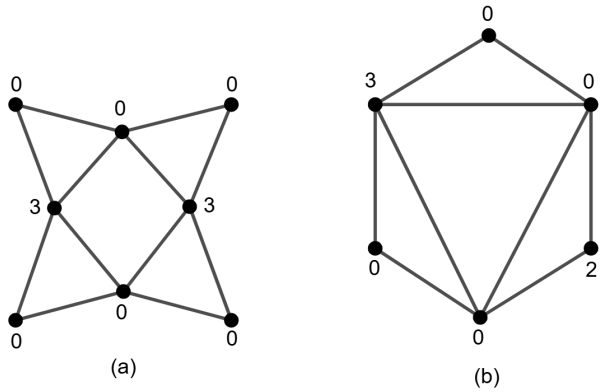


FIGURE 3.7 – $\gamma_{dR}(M(C_3)) = 5$ et $\gamma_{dR}(M(C_4)) = 6$

3.3 Le nombre de domination Romaine double d'un graphe total

Proposition 3.3.1 *Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$. Alors*

$$\gamma_{dR}(T(P_n)) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n = 2k \\ \frac{3(n-1)}{2} & si\ \ n = 2k+1 \end{cases}$$

Preuve. Soit $P_n = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ est une chaîne d'ordre n. et soit $E(P_n) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ l'ensemble de ses arêtes où $e_i = v_i v_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. On définit une fonction $f : V(T(P_n)) \to \{0, 1, 2, 3\}$. Dans les deux cas suivants, on pose $f(e_j) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n-1$.

Cas 1 : $n = 2k$

Pour $1 \leq i \leq n$, on définit les valeurs des sommets par :

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est impair} \\ 3 & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

Cas 2 : $n = 2K + 1$

Pour $1 \leq i \leq n$:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est impair} \\ 3 & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

Donc f est une **FDDR**.

$$\gamma_{dR}(T(P_n)) \leq \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n = 2k \\ \frac{3(n-1)}{2} & si\ \ n = 2k+1 \end{cases}$$

Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse en utilisant la preuve par récurrence sur n : Supposons que l'énoncé est vrai pour tous les graphes totaux des chaînes d'ordre $n \leq 4$. Soit $n \geq 5$ supposons que l'énoncé est vrai pour toutes les graphes totaux des chaînes d'ordre inférieur à n. Soit $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ une (γ_{dR}) fonction de $T(P_n)$ telle que $V_1 = \Phi$(vori le figure 3.8).

Supposons que $f(e_{n-1}+)f(v_n \leqslant 2$. On défint la fonction $g : V(T(P_{n-2})) \to \{0, 1, 2, 3\}$ de la maniŁre suivante : $g(v_n) = g(e_{n-1})$, $g(v_{n-1}) = 3$, $f(x) = g(x)$ sinon. Il est clair que g est une **FDRD** de $T(P_{n-2})$ de poids $w(g) = w(f) - 3$. Il s'ensuit que d'après l'hypothèse de récurrence, $\gamma_{dR}(T(P_n)) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(T(P_{n-2})) + 3 \geq \frac{3(n-2)}{2} + 3 \geq \frac{3n}{2}$.

Supposons que $f(v_n) + f(e_{n-1}) \geq 3$. On définit la fonction $g : V(T(P_{n-2})) \to \{0, 1, 2, 3\}$ de la manière suivante : $g(v_{n-2}) = \min\{3, f(v_{n-2}) + f(v_{n-1})$, $g(e_{n-3}) = \min\{3, f(e_{n-3}) + f(e_{n-2})$, $g(x) = f(x)$ sinon. Il est clair que g est une **FDRD** de $T(P_{n-2})$ de poids $w(g) \leq w(f) - 3$. Puisque $n-2$ est un nombre

impair, d'après l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$\gamma_{dR}(T(P_{n-2})) \geq \frac{3((n-2)-1)}{2} = \frac{3(n-3)}{2}$$

Il s'ensuit que :

$$\gamma_{dR}(T(P_n)) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(T(P_{n-2})) + 3 \geq \frac{3(n-3)}{2} + 3 = \frac{3(n-1)}{2}$$

■

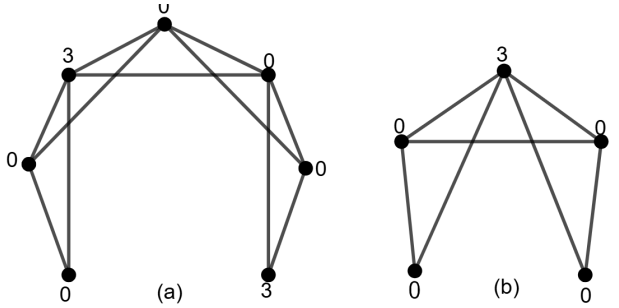


FIGURE 3.8 – $\gamma_{dR}(T(P_3)) = 3$ et $\gamma_{dR}(T(P_4)) = 6$

Proposition 3.3.2 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ alors :*

$$\gamma_{dR}(T(C_n)) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n = 2k \\ \frac{3(n-1)}{2} + 2\ si & n = 2k+1 \end{cases}$$

Preuve. Soit $C_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un cycle d'ordre $n \geq 3$, et soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les sommets d'arêtes de $T(C_n)$ où $e_i = v_i v_{i+1}$ (avec $e_n = v_n v_1$).

On définit une fonction $f : V(T(C_n)) \to \{0, 1, 2, 3\}$ selon la parité de n :

Cas 01 : $n = 2k$

$f(v_i) = 3$ pour $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$

$f(x) = 0$ pour tous les sommets adjacent à au mois sommet de poids 3.

Cas 2 : $n = 2k + 1$

$f(v_i) = 3$ pour $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$

$f(e_n) = 2$

$f(x) = 0$ pour tous les sommets adjacent à au mois sommet de poids 3.

$$\gamma_{dR}(T(C_n)) \leq \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n = 2k \\ \frac{3(n-1)}{2} + 2\ si & n = 2k+1 \end{cases}$$

Pour prouver **l'inégalité inverse**, Soit f une γ_{dR}-fonction de $T(C_n)$. Montrons d'abord qu'il existe au moins un sommet d'arête e_i tel que $f(e_i) = 0$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(e_i) \geq 2$. Cela impliquerait que :

$$\gamma_{dR}(T(C_n)) = w(f) \geq \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \geq 2n$$

Or, pour tout $n \geq 3$, nous avons $2n > \frac{3(n-1)}{2} + 2 \geq \frac{3n}{2}$, ce qui contredit la borne supérieure établie précédemment.

Supposons sans perte de généralité que $f(e_n) = f(v_n v_1 = 0$. En considérant le sous-graphe obtenu en supprimant cette arête, qui est isomorphe au graphe total d'une chaîne $T(P_n)$, et puisque toute FDRD sur $T(C_n)$ induit par restriction une domination sur la structure de la chaîne, par application de la **Proposition 1** (sur les chaînes), nous obtenons la borne inférieure requise. ■

Exemple 3.3.1 *Figure 3.9*$\gamma_{dR}(T(C_3)) = 5$ *et* $\gamma_{dR}(T(C_4)) = 6$.

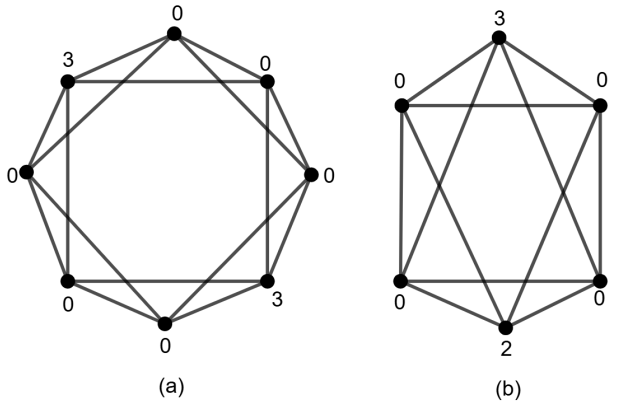


FIGURE 3.9 – $\gamma_{dR}(T(C_3)) = 5$ et $\gamma_{dR}(T(C_4)) = 6$

3.4 Le nombre de domination Romaine double d'un graphe de friendship

Proposition 3.4.1 *Soit $G = F_n$, un graphe de friendship, alors pour $n \geq 2$ on a :*

$$\gamma_{dR}(F_n) = 3$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, et F_n un graphe friendship de degre maximal $\Delta(G) = n-1$ alors d′ d'après le proposition2.3.6 donc

$$\gamma_{dR}(F_n) = 3$$

■

Exemple 3.4.1 *Figure3.10 Un graphe avec* $\gamma_{dR}(F_2) = 3$, $\gamma_{dR}(F_3) = 3$ *et* $\gamma_{dR}(F_4) = 3$.

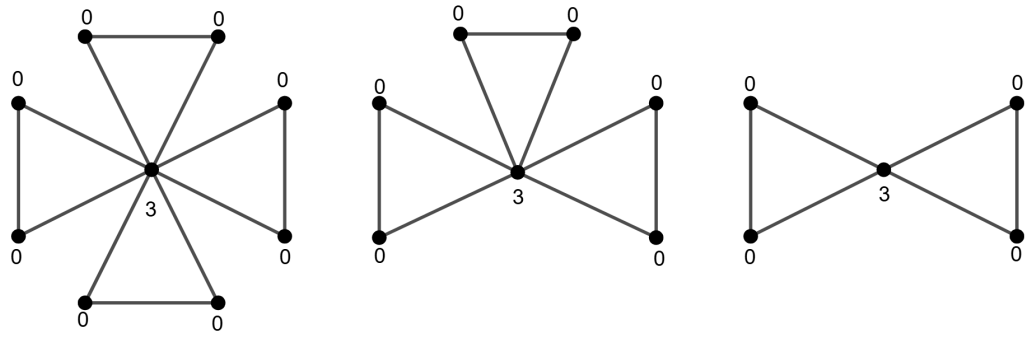


FIGURE 3.10 – Un graphe avec $\gamma_{dR}(F_2) = 3$, $\gamma_{dR}(F_3) = 3$ et $\gamma_{dR}(F_4) = 3$

3.5 Le nombre de domination Romaine double d'une roue

Proposition 3.5.1 *Soit* $G = W_n$ *un graphe de roue d'ordre* $n \geq 3$ *alors :*

$$\gamma_{dR}(W_n) = 3$$

Preuve. Soit $G = W_n$ un graphe de degré maximale $n-1$ alors d'aprée (le proposition2.3.6) donc :

$$\gamma_{dR}(W_n) = 3$$

■

Exemple 3.5.1 *Figure3.11 Un graphe de roue avec* $\gamma_{dR}(W_4) = 3$, $\gamma_{dR}(W_5) = 3$ *et* $\gamma_{dR}(W_6) = 3$

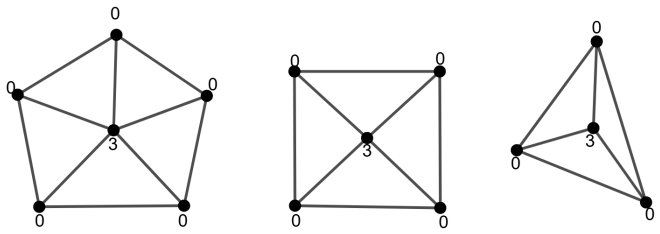


FIGURE 3.11 – Un graphe de roue avec $\gamma_{dR}(W_4) = 3$, $\gamma_{dR}(W_5) = 3$ et $\gamma_{dR}(W_6) = 3$

3.6 Le nombre de domination Romaine double du Prisme complémentaire d'un graphe

Proposition 3.6.1 *Soit P_n un chaîne d'ordre $n \geq 3$ alors :*

$$\gamma_{dR}\left(P_n\overline{P}_n\right) = \begin{cases} n+3 \ si \ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ n+4 \ si \ n \equiv 1,2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

Preuve. Soit $P_n = (v_{1,}v_2, v_3, ...v_n)$ une chaîne et $\overline{P_n} = (v'_{1,}v'_2, v'_3, ...v'_n)$ son complémentaire. On défini $f : V(P_n\overline{P_n}) \to \{0,1,2,3\}$

Cas 1 : $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$

Pour $j = 1...n$

$$f(v_j) = \begin{cases} 0 \ si \ j \neq 3i-1 \\ 3 \ si \ j = 3i-1 \end{cases} \text{ et}$$

$$f(v'_j) = \begin{cases} 0si \ j \neq n \\ 3si \ j = n \end{cases},$$

Cas 2 :$n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$

Pour $j = 1...n$

$$f(V_j) = \begin{cases} 0 \ si \ j \neq 3i-1 \\ 3 \ si \ j = 3i-1 \end{cases}$$

$$f(v'_j) = \begin{cases} 0 \ si \ j \neq n-1; n \\ 3 \ si \ j = n \\ 2 \ si \ j = n-1 \end{cases}$$

Cas 3 :$n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$

Pour $j = 1...n$

$$f(V_j) = \begin{cases} 0 \ si \ j \neq 3i-1 \\ 3 \ si \ j = 3i-1 \end{cases}$$

$$f(v_j^{'}) = \begin{cases} 0si \ j \neq 1 \\ 3si \ j = 1 \end{cases}$$

Donc f est une **FDDR**.

$$\gamma_{dR}\left(P_n\overline{P}_n\right) \leq \begin{cases} n+3 \ si \ n \approxeq 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ n+4si \ n \approxeq 1,2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. La preuve se fait par récurrence sur n. Supposons que l'énoncé est vrai pour toutes les chaînes d'ordre $n \leq 5$. Pour l'hypothèse de récurrence, (Figure 3.12).

Soit $n \geq 6$. Supposons que pour tout chaîne d'ordre inférieur à n considerons $f = (V_0, V_1, V_2V_3)$, γ_{dR} un fonction de double domination romaine de $P_n\overline{P}_n$

tel que :$V_1 = \Phi$

Cas 1 :$f(v_n) = 0$

$f(v_{n-1}) = 3$ et $f(v_n^{'}) = 3$, défini $g : V(P_{n-1-1}\overline{P}_{n-1}) \rightarrow \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{n-1}) = 3$ et $g(v_1^{'}) = 3$ et $f(v_i) = g(v_i)$ pour $i = 1....n-2$, clairement g est **FDDR** alors $W(f) = W(g)$

$\gamma_{dR}(P_n\overline{P}_n) = w(f) = w(g) \geq \gamma_{dR}(P_{n-1}\overline{P}_{n-1}) \geq n-1+4 = n+3$

Cas 2 : $f(v_{n-1}) + f(v_{n-1}^{'}) \leq 2$

$f(v_{n-1}) = 0$ et $f(v_{n-1}^{'}) = 2$ et $f(V_1^{'}) = 3$ défini $g : V(P_{n-2}\overline{P}_{n-2}) \rightarrow \{0,1,2,3\}$ $g(v_n) = 3$ et $g(v_n^{'}) = 0$ et$f(x) = g(x)$, clairement g est un **FDDR** de $P_{n-2}\overline{P}_{n-2}$ de poids $W(f) - 2$ il découle de l'hypothèse de récurrence

$\gamma_{dR}(P_n\overline{P}_n) = w(f) = w(g) - 2 \geq \gamma_{dR}(P_{n-2}\overline{P}_{n-2}) + 2 \geq (n-2) + 4 + 2 = n+4$

Cas 3 :$f(v_{n-3}) + f(v_{n-3}^{'}) \geq 3$

$f(v_{n-3}) = 3 \ et \ f(v_{n-3}^{'}) = 0$ défini $g : V(P_{n-3}\overline{P}_{n-3}) \rightarrow \{0,1,2,3\}$ $g(v_n) = 3$ et $g(v_n^{'}) = g(v_{n-1}) = g(v_{n-1}^{'}) = 0$, $g(v_{n-3}) = \max\{2, f(v_{n-3})\}$et $f(x) = g(x)$,clairement$g$ est **FDDR** de $P_{n-3}\overline{P}_{n-3}$ de poids $W(f) - 3$ il découle de l'hypothèse de récurrence

$$\gamma_{dR}(P_n\overline{P}_n) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(P_{n-3}\overline{P}_{n-3}) + 3 \geq (n-3) + 4 + 3 = n+4$$

Clairement, g est une **FDDR** de $P_n\overline{P_n}$ de poids $w(f) - 3$

D'après l'hypothèse de récurrence, on conclut de manière analogue :

$$\gamma_{dR}\left(P_n\overline{P}_n\right) \geq \begin{cases} n+3 \ si \ n \approxeq 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ n+4 si \ n \approxeq 1,2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

■

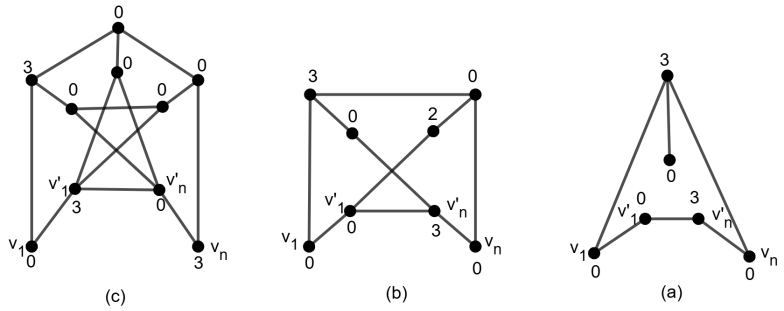


FIGURE 3.12 – (a) $\gamma_{dR}(P_3\square\overline{P_3}) = 6$, (b) $\gamma_{dR}(P_4\square\overline{P_4}) = 7$ et (c) $\gamma_{dR}(P_5\square\overline{P_5}) = 9$

Proposition 3.6.2 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ alors :*

$$\gamma_{dR}\left(C_n\overline{C}_n\right) = \begin{cases} n+4 \ si \ n \approxeq 1,2,3,4 \,(\mathrm{mod}\, 6) \\ n+5 \ si \ n \approxeq 0,4 \,(\mathrm{mod}\, 6) \end{cases}$$

Preuve. Soit $C_n = (v_1, v_2, v_3 .... v_n)$ un cycle et $\overline{C_n}$=$(v_1^{'}, v_2^{'}, v_3^{'}, ... v_n^{'})$ un complémentaire de C_n d'ordre n. défini f :$V(C_n\overline{C_n}) \to \{0,1,2,3\}$

Cas 1 : $n \approxeq 0(\mathrm{mod}\, 6)$

Pour $1 \leq i \leq \frac{n+1}{3}$ et $j = 1...n$

$$f(V_j) = \begin{cases} 0 & si \ j \neq 3i-1 \\ 3 & si \ j = 3i-1 \end{cases}$$

Pour $1 \leq i \leq \frac{n+1}{3}$

$$f(V_j^{'}) = \begin{cases} 0 & si \ j \neq 1; n \\ 2 & si \quad j = 1 \\ 3 & si \quad j = n \end{cases}$$

Cas 2 : $n \approxeq 1(\mathrm{mod}\, 6)$

Pour $1 \leq i \leq \frac{n-1}{3}$.et $j = 1...n$

$$f(V_j) = \begin{cases} 0 & si \ j \neq 3i-1 \\ 3 & si \ j = 3i-1 \end{cases}$$

$$f(V_j^{'}) = \begin{cases} 0 & si \ j \neq 1; n \\ 3 & si \ j = 1; n \end{cases}$$

Cas 3 :$n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 6)$

Pour $1 \leq i \leq \frac{n+2}{3}$et $j = 1...n$

$$f(V_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq 3i-1 \\ 3 & si\ j = 3i-1 \end{cases}$$

$$f(V'_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq 1 \\ 3 & si\ j = 1 \end{cases}$$

Cas 4 :$n \equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$

Pour $1 \leq i \leq \frac{n}{3}$et $j = 1...n$

$$f(V_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq 3i-1 \\ 3 & si\ j = 3i-1 \end{cases}$$

$$f(V'_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq 1; n \\ 2 & si \quad j = 1 \\ 3 & si \quad j = n \end{cases}$$

Cas 5 :$n \equiv 4(\mathrm{mod}\,6)$

Pour $1 \leq i \leq \frac{n}{3}$et $j = 1...n$

$$f(V_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq 3i-1 \\ 3 & si\ j = 3i-1 \end{cases}$$

$$f(V'_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq 1; n \\ 3 & si\ j = 1; n \end{cases}$$

Cas 6 :$n \equiv 5(\mathrm{mod}\,6)$

Pour $1 \leq i \leq \frac{n+2}{3}$et $j = 1...n$

$$f(V_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq 3i-1 \\ 3 & si\ j = 3i-1 \end{cases}$$

$$f(V'_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq 1 \\ 3 & si\ j = 1 \end{cases}$$

Donc f est une **FDDR**.

$$\gamma_{dR}\left(C_n\overline{C}_n\right) \leq \begin{cases} n+4\ si\ n \approxeq 1,2,3,5\,(\mathrm{mod}\,6) \\ n+5\ si\ n \approxeq 0,4\,(\mathrm{mod}\,6) \end{cases}$$

Pour montrer l'égalité,il suffit de montrer que

$$\gamma_{dR}\left(C_n\overline{C}_n\right) \geq \begin{cases} n+4\ si\ n \approxeq 1,2,3,5\,(\mathrm{mod}\,6) \\ n+5\ si\ n \approxeq 0,4\,(\mathrm{mod}\,6) \end{cases}$$

Maintenant, on montons que

$$\gamma_{dR}\left(C_n\overline{C_n}\right) \geq \begin{cases} n+4 \ si \ n \approxeq 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ n+5 \ si \ n \approxeq 0,1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

Pour cela, on montrer que :

$$\gamma_{dR}\left(C_n\overline{C}_n\right) \geq \gamma_{dR}\left(P_n\overline{P}_n\right)$$

Il est clair que le graphe obtenu à partir de $C_n\overline{C_n}$ en supprimant l'arête v_1v_n et en ajoutant l'arête $v_1'v_n'$ est le complémentaire prisme de chaîne $P_n = C_n - \{v_1v_n\}$

Cas 1 : $n \equiv 0$ mod(3)

comme $f(v_n) = f(v_1) = 0$ alors $f(v_1') = 2$ et $f(v_n') = 3$

Cas 2 : $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$

comme $f(v_n) = f(v_1) = 0$,

Cas 3 : $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$

comme $f(v_n) = 3$ et $f(v_1) = 0$ alors $f(v_1) = 0$ et $f(v_n') = 3$

Ainsi, f reste une fonction de domination Romaine double sur $P_n\overline{P_n}$ ■

Exemple 3.6.1 *(a)* $\gamma_{dR}(C_4\overline{C_4}) = 9$, *(b)* $\gamma_{dR}(C_5\overline{C_5}) = 9$,*(c)* $\gamma_{dR}(C_6\overline{C_6}) = 11$ (*Figure* 3.13)

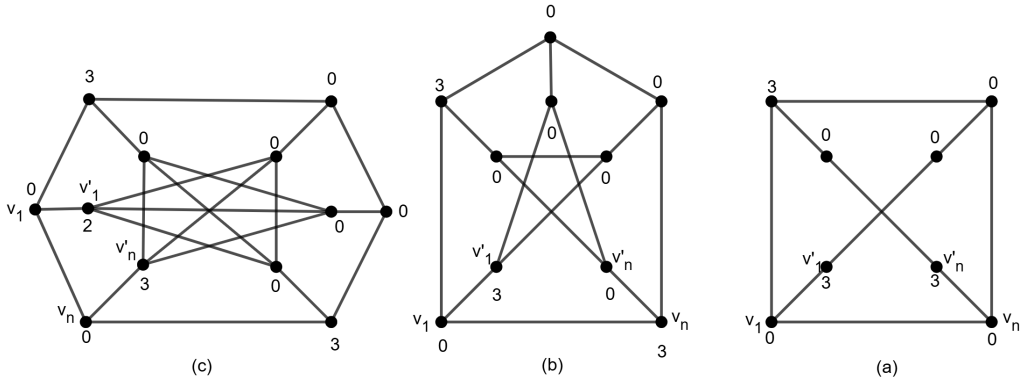


FIGURE 3.13 – (a) $\gamma_{dR}(C_4\square\overline{C_4}) = 9$, (b) $\gamma_{dR}(C_5\square\overline{C_5}) = 9$ et (c) $\gamma_{dR}(C_6\square\overline{C_6}) = 11$

Chapitre 4

La domination Romaine double dans les graphes modéfiés

4.1 La séparation d'arête

4.1.1 Définition et propriétés fondamentales

Définition 4.1.1 *19 Soient u et v deux sommets d'un graphe G tel que la distance entre eux soit égale à 2, et soit x un voisin commun à u et v. La chaîne formée par les sommets (u, x, v) est notée uxv.*

La suppression d'arête défini sur uxv est une opération qui consiste à supprimer les deux arêtes ux et vx, puis à ajouter l'arête uv.

Le graphe obtenu après cette opération est noté G^x_{uv} tel que :

- $V(G^x_{uv}) = V(G)$
- $E(G^x_{uv}) = E(G) \setminus \{ux, vx\} \cup \{u, v\}$

Soit $A(G)$ l'ensemble de tous les sommets induit des copies de chaînes P_3 dans G.

$$A^+(G) = \{uxv \in A(G) \mid \gamma_{dR}(G^x_{uv}) > \gamma_{dR}(G)\}$$

$$A^-(G) = \{uxv \in A(G) \mid \gamma_{dR}(G^x_{uv}) < \gamma_{dR}(G)\}$$

$$A^0(G) = \{uxv \in A(G) \mid \gamma_{dR}(G^x_{uv}) = \gamma_{dR}(G)\}$$

Exemple 4.1.1 *La figure 4.1 présente une opération de La séparation d'arête.*

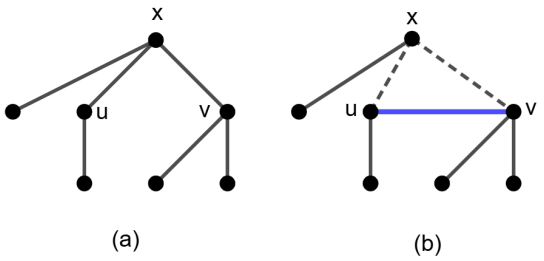


FIGURE 4.1 – (a) un graphe G et (b)La séparation d'arête dans graphe G

Théorème 4.1.1 *Soit G un graphe et soit $uxv \in A(G)$, alors :*

$$\gamma_{dR}(G) - 2 \leq \gamma_{dR}(G_{uv}^{x}) \leq \gamma_{dR}(G) + 3$$

Preuve. Soit $uxv \in A(G)$.

Soit $f : V(V_0, V_1, V_2, V_3) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ une γ_{dR}-fonction dans G. On distingue deux cas. **Cas 01 :** $f(x) = 0$

On défini la fonction g sur G_{uv}^{x} comme suit :

$$g(w) = \begin{cases} f(x) & \text{si } w \neq x \\ 2 & \text{si } w = x \end{cases}$$

Il est claire que g est une fonction double Romaine dans G_{uv}^{x} de poids au plus $\gamma_{dR}(G) + 2$

Cas 02 : $f(x) = 3$

Sous-cas 01 : $f(u) = f(v) = 0$

On définit la fonction g sur G_{uv}^{x} comme suit :

$$g(w) = \begin{cases} f(x) & \text{si } w \neq v \\ 3 & \text{si } w = v \end{cases}$$

Il est clair que g est une fonction double Romaine dans G_{uv}^{x} de poids au plus $\gamma_{dR}(G) + 3$.

Sous-cas 02 : $f(u) \geq 0, f(v) \geq 0$

Dans ce cas, f reste une fonction romaine double dans G_{uv}^{x}.

Sous-cas 03 : $f(u) \geq 0, f(v) = 0$

$$g(w) = \begin{cases} f(x) & \text{si } w \neq v \\ 2 & \text{si } w = v \end{cases}$$

Il est clair que g est une fonction double Romaine dans G_{uv}^{x} de poids au plus $\gamma_{dR}(G) + 2$.

Cas 03 : $f(x) = 2$

Sous-cas 1 : $f(u) = 0$ **et** $f(v) = 0$

$$g(w) = \begin{cases} f(x) & \text{si } w \neq u, v \\ 3 & \text{si } w = v \\ 0 & \text{si } w = u \end{cases}$$

Il est clair que g est une fonction double Romaine dans G_{uv}^{x} de poids au plus $\gamma_{dR}(G) + 3$.

Pour démontrer la borne inférieure, Soit g une γ_{dR}-fonction double Romaine dans G_{uv}^{x}. On ajoute deux arêtes vx et xu et on supprime uv, alors :

Cas 1 : $\{u, v\} \subset V_0$**, ou** $\{u, v\} \subset V_2$**,ou** $\{u, v\} \subset V_3$

Dans ce cas, g reste une fonction romaine double dans G.

Cas 2 : $g(v) + g(u) \leq 3$

Si $g(v) = 2$ et $g(u) = 0$:

$$f(w) = \begin{cases} g(w) & \text{si } w \neq u \\ 2 & \text{si } w = u \end{cases}$$

Il est clair que f est une fonction double Romaine dans G de poids au plus $\gamma_{dR}(G_{uv}^{x}) + 2$.

Si $g(v) = 3$ et $g(u) = 0$:

$$f(w) = \begin{cases} g(w) & \text{si } w \neq u \\ 2 & \text{si } w = u \end{cases}$$

Il est clair que f est une fonction double Romaine dans G de poids au plus $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) + 2$.

Donc, des deux bornes, on conclut :

$$\gamma_{dR}(G) - 2 \leq \gamma_{dR}(G^x_{uv}) \leq \gamma_{dR}(G) + 3$$

■

4.1.2 Les graphes L-critiques

Définition 4.1.2 *On dit que G estγ^-_{dR}-L-critique si $A^-(G) = A(G)$*
On dit que G estγ^+_{dR}-L-critique si $A^+(G) = A(G)$
On dit que G estγ_{dR}-L-stable si $A^0(G) = A(G)$

Les graphes $3 - \gamma_{dR}$-L Critique

Proposition 4.1.1 *1. Il n'existe pas des graphes $3 - \gamma^-_{dR}$-L Critique*

2. G est $3 - \gamma_{dR}$-L stable si et seulement si G content au moins deux sommets universels.

3. Il existe des graphes $3 - \gamma^+_{dR}$-L Critique

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit z un sommet de G de degre maximum $\Delta(G) = n-1$. D'après **la proposition** 2.3.6, $\gamma_{dR}(G) = 3$. Si G est un graphe complet tous les sommets sont adjacents ente eux, ce qui signifie qu'il n'y a pas de chemin induit de longueur 2. Par conséquent, il est impossible d'appliquer le lifting. Donc, on peut supposer que G est défferent d'un graphe complet.Deux cas se présentent :

Cas 1 : $u, x, v \in N(z)$. Dans ce cas, $d_{G^x_{uv}}(x) = \Delta(G^x_{uv}) = n - 1$. D'après **la proposition2.3.6** , $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = 3$. par conséquent il n'existe pas des graphes $3 - \gamma^+_{dR}$-L critique, et des graphes $3 - \gamma^-_{dR}$-L Critique.

Cas 2 : $u, v \in N(z), x = z$. Si z est l'unique sommet universele dans G, alors $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) \geq 4$. Si G contient au moins deux sommets universels, alors $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = 3$. Donc G est $3 - \gamma_{dR}$-L stable si et seulement si G content au moins deux sommets universels. ■

Les graphes 4-γ_{dR}-L-Critique

Proposition 4.1.2 *1. Il n'existe pas de graphes 4-γ^-_{dR}-L-Critique*

2. Il n'existe pas de graphes 4-γ_{dR}-L-stable

3. Il n'existe pas de graphes 4-γ^+_{dR}-L-Critique

Preuve. Soit G un graphe tel que $\gamma_{dR}(G) = 4$. D'après la proposition 2.3.6, $G = \overline{K_2} \vee H$, avec H un graphe de degré maximum $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$. Soit $uxv \in A(G)$, et soit $G^x_{uv} = \overline{K_2} \vee H^x_{uv}$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant les deux arêtes ux, xv et en ajoutant l'arête uv.

Cas 1 : $ux, xv \in E(H)$, il est clair que $\Delta(H^x_{uv}) \leq |V(H^x_{uv})| - 2$. D'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = 4$.

Cas 2 : $u, v \in \overline{K_2}, x \in H$. Dans ce cas, le graphe $G^x_{uv} \neq \overline{K_2} \vee H$, il n'existe aucun sommet universel dans G^x_{uv}. D'après la Proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) > 4$.

Donc, des deux cas, on conclut : Il n'existe pas de graphes 4-γ^-_{dR}-L-Critique, ni de graphes 4-γ^+_{dR}-L-critique, ni de graphes 4-γ_{dR}-L-Stable. ■

Les graphes 5-γ_{dR}-L-Critique

Proposition 4.1.3 *1. Il n'existe pas de graphes 5-γ^-_{dR}-L-Critique*

2. *G est 5-γ^+_{dR}-L-Critique si et seulement si $G \neq \overline{K_2} \vee H$ et G contient exactement un seul sommet de degré maximum $\Delta(G) = n - 2$.*
3. *G est γ_{dR}-L-stable si et seulement si $G \neq \overline{K_2} \vee H$ et G contient au moins deux sommets de degré maximum $\Delta(G) = n - 2$.*

Preuve. Soit G un graphe simple de degré maximum $\Delta(G) = n - 2$, et $G \neq \overline{K_2} \vee H$. D'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G) = 5$. Soit $uxv \in A(G)$, et soit G^x_{uv} le graphe obtenu en supprimant les deux arêtes ux, xv et en ajoutant l'arête uv. Dans ce cas, G ne contient aucun sommet universel et comme $G^x_{uv} \neq \overline{K_2} \vee H$, $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) \geq 5$. Par conséquent, G n'est pas 5-γ^-_{dR}-L-critique. Deux cas se présentent :

Cas 1 : Il existe x un sommet unique de degré maximum $\Delta(G) = n - 2$. Dans ce cas, $\Delta(G^x_{uv}) < n - 2$, alors d'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) > 5$.

Cas 2 : G contient au moins deux sommets de degré maximum $\Delta(G) = n - 2$. Dans ce cas, $\Delta(G^x_{uv}) = n - 2$ et d'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = 5$.

D'après les cas précédents, il n'existe pas de graphes 5-γ^-_{dR}-L-critique.

G est 5-γ^+_{dR}-L-critique si et seulement si $G \neq \overline{K_2} \vee H$ et G contient exactement un seul sommet de degré maximum $\Delta(G) = n - 2$.

G est γ_{dR}-L-stable si et seulement si $G \neq \overline{K_2} \vee H$ et G contient au moins deux sommets de degré maximum $\Delta(G) = n - 2$. ■

4.2 Contraction d'arête dans les graphes

4.2.1 Définition et propriétés fondamentales

Définition 4.2.1 *21 Pour une paire de sommets adjacents x, y dans un graphe G, nous notons par $G.(xy)$ le graphe obtenu par la contraction de l'arête xy. Ainsi, $G.(xy)$ peut être considéré comme le graphe obtenu à partir de G en supprimant les sommets x et y et en ajoutant un nouveau sommet, désigné par (xy), qui est adjacent à tous les sommets de $G - x - y$ qui étaient initialement adjacents soit à x soit à y*

Exemple 4.2.1 *La Figure 4.2 illustre une contraction d'arête dans G.*

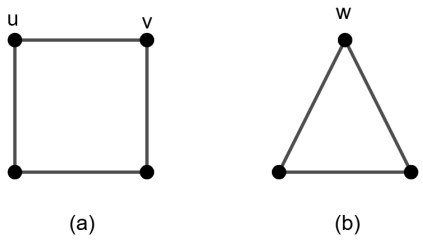


FIGURE 4.2 – (a) Un graphe G et (b) Contraction d'arête dans le graphe G

Théorème 4.2.1 $\gamma_{dR}(G) - 3 \leq \gamma_{dR}(G_{uv}) \leq \gamma_{dR}(G)$

Preuve. Borne supérieure : $\gamma_{dR}(G_{uv}) \leq \gamma_{dR}(G)$

Soit $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ une fonction de domination romaine double sur G. Soit w le sommet obtenu après avoir contracté l'arête uv. On définit g sur G_{uv} comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq w \\ \max\{f(v), f(u)\} & \text{si } x = w \end{cases}$$

$$\gamma_{dR}(G_{uv}) \leq \omega(g) \leq \omega(f) = \gamma_{dR}(G)$$

Borne inférieure : $\gamma_{dR}(G) - 3 \leq \gamma_{dR}(G_{uv})$ Soit g une fonction de domination romaine double sur G_{uv}. En scindant le sommet w en deux sommets u et v, on obtient le graphe G. Soit alors $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ la fonction définie sur G par :

Cas 1 : $g(w) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq u, v \\ 0 & \text{si } x = u \\ 0 & \text{si } x = v \end{cases}$$

$$\gamma_{dR}(G) \leq \omega(f) = \omega(g) = \gamma_{dR}(G_{uv})$$

Cas 2 : $g(w) > 0$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq u, v \\ g(w) & \text{si } x = u \\ g(w) & \text{si } x = v \end{cases}$$

$$\gamma_{dR}(G) \leq \omega(f) = \omega(g) + g(w) \leq \gamma_{dR}(G_{uv}) + 3$$

Puisque $g(w) \leq 3$, alors :

$$\gamma_{dR}(G) \leq \omega(f) \leq \gamma_{dR}(G_{uv}) + 3$$

Donc des deux bornes, on conclut :

$$\gamma_{dR}(G) - 3 \leq \gamma_{dR}(G_{uv}) \leq \gamma_{dR}(G)$$

■

4.2.2 Les graphes *dot*-critiques

Définition 4.2.2 *On dit que G estγ_{dR}^{-}-dot-critique si pour touts les aretes $\gamma_{dR}(G) > \gamma_{dR}(G_{uv})$*

On dit que G estγ_{dR}^{+}-dot-critique si pour touts les aretes $\gamma_{dR}(G) < \gamma_{dR}(G_{uv})$

On dit que G estγ_{dR}-dot-stable si pour touts les aretes $\gamma_{dR}(G) = \gamma_{dR}(G_{uv})$

Les graphes $3 - \gamma_{dR}$-dot Critique

Proposition 4.2.1 *1) G est $3 - \gamma_{dR}$-dot stable si et seulement si G un graphe de degre maximum $\Delta(G) = n' - 1$*

2) Il n'existe pas de graphes $3 - \gamma_{dR}^{-}$-dot Critique

3) Il n'existe pas de graphes $3 - \gamma_{dR}^{+}$-dot Critique

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, et soit x un sommet de G de degre maximum $\Delta(G) = n-1$. D'après la proposition 2.3.6 $\gamma_{dR}(G) = 3$. supposons que uv une arête quelconque et G_{uv} le graphe obtenu par la contraction de l'arête uv on a $d_{G_{uv}}(x) = n' = n - 1$

Cas.1 : $u, v \in N(x)$:

Dans ce cas le sommet x reste dans G_{uv} et est adjacent au nouveau sommet (uv) et à tous les autres sommets, donc $\Delta(G_{uv}) = n' - 1$. D'après la propostion 2.3.6 $\gamma_{dR}(G_{uv}) = 3$ par conséquent Il n'existe pas des graphes $3 - \gamma^{+}_{dR}$-dot critique et des graphes $3 - \gamma^{-}_{dR}$-dot Critique

cas.2 : $x \in \{u, v\}$. supposons que $x = u$:

Le nouveau sommet uv hérite de tous les voisins de x. Par conséquent, il est adjacent à tous les autres sommets de G_{uv}. Cela signifie que le sommet uv est connecté à tous les sommets de G_{uv}, tout comme x l'était précédemment. dans ce cas $\Delta(G_{uv}) = n' - 1$. D'après la proposition 2.3.6 $\gamma_{dR}(G_{uv}) = 3$

Donc G est $3 - \gamma_{dR}$-dot stable si et seulement si G un graphe de degre maximum $\Delta(G) = n' - 1$

et Il n'existe pas des graphes $3 - \gamma^{+}_{dR}$-dot critique , ni des graphes $3 - \gamma^{-}_{dR}$-dot Critique ■

Les graphes 4-γ_{dR}-dot-Critique

Proposition 4.2.2 *1. Il existe des graphes 4-γ_{dR}-dot-stable*

2. Il n'existe pas des graphes 4-γ^{-}_{dR}-dot-Critique

3. Il n'existe pas des graphes 4-γ^{+}_{dR}-dot-Critique

Preuve. Soit $G = \overline{K_2} \vee H$ un graphe simple, et H un graphe de degré maximum $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$. D'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G) = 4$. Supposons que uv une arête quelconque, et G_{uv} le graphe obtenu par la contraction de l'arête uv, on a $d_{G_{uv}}(uv) \leq n' = n - 1$.

Cas 1 : $uv \in E_H$, dans ce cas $\Delta(H_{uv}) \leq |V(H_{uv})| - 2$. D'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G_{uv}) = 4$.

Cas 2 : $u \in \overline{K_2}$, $v \in H$, dans ce cas $\Delta(H_{uv}) \leq |V(H_{uv})| - 2$. D'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G_{uv}) = 4$.

Donc, il existe des graphes 4-γ_{dR}-dot-stable, et il n'existe pas des graphes 4-γ^{+}_{dR}-dot-critique, ni des graphes 4-γ^{-}_{dR}-dot-Critique. ■

Les graphes $5 - \gamma_{dR}$-dot Critique

Proposition 4.2.3 *1. Il existe de graphes $5 - \gamma^{-}_{dR}$-dot Critique*

2. Il existe de graphes $5 - \gamma_{dR}$-dot stable

3. Il n'existe pas de graphes $5 - \gamma^{+}_{dR}$-dot Critique

Preuve. Soit G un graphe simple, de degré maximum $\Delta(G) = n - 2$, et $G \neq \overline{K_2} \vee H$. D'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G) = 5$. Supposons que uv soit une arête quelconque, et G_{uv} le graphe obtenu par la contraction de l'arête uv. On a $d_{G_{uv}}(uv) = n' = n - 1$.

Cas 1 : il existe x un seule sommet de degre maximum $\Delta(G) = n-2$. Dans ce cas $\Delta(G_{uv}) = n'-2$. D'après la proposition 2.3.6 $\gamma_{dR}(G_{uv}) = 5$

Sous cas 1 : Si y un sommet unique non adjacent à x. On considère le graphe obtenu en contractant y avec un sommet z adjacent à x. Dans ce cas $\Delta(G_{uv}) = n'-1$. D'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G_{uv}) = 3 < 5$

Cas 2 : il existe au moins deux sommet de degre maximum $\Delta(G) = n-2$. Dans ce cas $\Delta(G_{uv}) = n'-1$. D'après la proposition 2.3.6, $\gamma_{dR}(G_{uv}) = 3 < 5$

Donc de ces deux cas, on conclut : 1) Il n'existe des graphes $5-\gamma_{dR}$-dot stable

2) Il n'existe pas des graphes $5-\gamma_{dR}$-dot Critique

3) Il n'existe pas des graphes $5-\gamma^{+}_{dR}$-dot Critique ■

4.3 Graphes critiques pour la domination romaine

4.3.1 Graphes L-critiques pour la domination romaine double

P_n-L-critiques pour la domination romaine double

Proposition 4.3.1 *P_n est γ^{+}_{dR}-L critique si et seulement si $n \not\equiv 1[3]$.*

P_n est γ_{dR}-L stable si et seulement si $n \cong 1[3]$

Preuve. Soit $G = P_n$ un chaîne d'ordre $n \geq 3$, Soit $uxv \in A(G)$ et soit G^x_{uv} graphe obtenu en supprimant les deux arêtes ux, xv et en ajoutant l'arête uv, alors x un sommet isole, donc $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = \gamma_{dR}(P_{n-1}) + 2$. Deux cas se présentent :

Cas 1 : $n \not\equiv 1[3]$

Si $n \cong 0[3]$ d'après la proposition 2.3.4 $\gamma_{dR}(P_n) = n$ alors :

$n-1 = 3k-1$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = n+2 > n$

Si $n \cong 2[3]$ d'après la proposition 2.3.4 $\gamma_{dR}(P_n) = n+1$ alors :

$n-1 = 3k+1$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = n+2 > n+1$

Cas 2 : $n \cong 1[3]$

D'après la proposition 2.3.4 $\gamma_{dR}(P_n) = n+1$, alors :

$n-1 = 3k$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = (n+1)+2-2 = n+1 = \gamma_{dR}(P_n)$

Donc de ces deux cas, on conclut : P_n est γ^{+}_{dR}-L critique si et seulement si $n \not\equiv 1[3]$, et P_n est γ_{dR}-L stable si et seulement si $n \cong 1[3]$ ■

Exemple 4.3.1 *4.3 (a) $\gamma_{dR}(G^x_{uv})$ de P_3 et (b) P_4.*

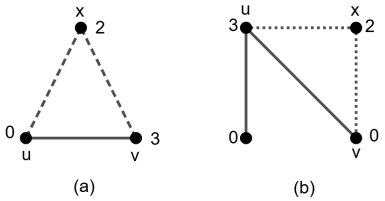


FIGURE 4.3 – (*a*) $\gamma_{dR}(G^x_{uv})$ de P_3 et (*b*) $\gamma_{dR}(G^x_{uv})$ P_4

C_n L-critiques pour la domination romaine double

Proposition 4.3.2 *C_n est γ^+_{dR}-L-critique si et seulement si $n \not\equiv 1, 5 \pmod 6$, et C_n est γ_{dR}-L-stable si et seulement si $n \equiv 1, 5 \pmod 6$.*

Preuve. Soit G un graphe simple et C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Soit $uxv \in E(G)$, et soit G^x_{uv} le graphe obtenu en supprimant les deux arêtes ux, xv et en ajoutant l'arête uv, alors x est un sommet isolé, donc $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = \gamma_{dR}(C_{n-1}) + 2$. Deux cas se présentent :

Cas 1 : $n \not\equiv 1, 5 \pmod 6$

Si $n \equiv 0 \pmod 6$, d'après la proposition 2.3.5, $\gamma_{dR}(C_n) = n$, alors : $n - 1 = 6k - 1$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = (n-1) + 1 + 2 > n$.

Si $n \equiv 2 \pmod 6$, d'après la proposition 2.3.5, $\gamma_{dR}(C_n) = n$, alors : $n - 1 = 6k + 1$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = (n-1) + 1 + 2 > n$.

Si $n \equiv 3 \pmod 6$, d'après la proposition 2.3.5, $\gamma_{dR}(C_n) = n$, alors : $n - 1 = 6k + 2$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = n + 2 > n$.

Si $n \equiv 4 \pmod 6$, d'après la proposition 2.3.5, $\gamma_{dR}(C_n) = n$, alors : $n - 1 = 6k + 3$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = n + 2 > n$.

Cas 2 : $n \equiv 1, 5 \pmod 6$

Si $n \equiv 1 \pmod 6$, d'après la proposition 2.3.5, $\gamma_{dR}(C_n) = n + 1$, alors : $n - 1 = 6k$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = n - 1 + 2 = n + 1$.

Si $n \equiv 5 \pmod 6$, d'après la proposition 2.3.5, $\gamma_{dR}(C_n) = n + 1$, alors : $n - 1 = 6k + 4$, dans ce cas $\gamma_{dR}(G^x_{uv}) = n - 1 + 2 = n + 1$.

Donc, des deux cas, on conclut : C_n est γ^+_{dR}-L-critique si et seulement si $n \not\equiv 1, 5 \pmod 6$, et C_n est γ_{dR}-L-stable si et seulement si $n \equiv 1, 5 \pmod 6$. ■

Exemple 4.3.2 *4.4 (a) $\gamma_{dR}(G^x_{uv})$ de C_4 et (b) C_5.*

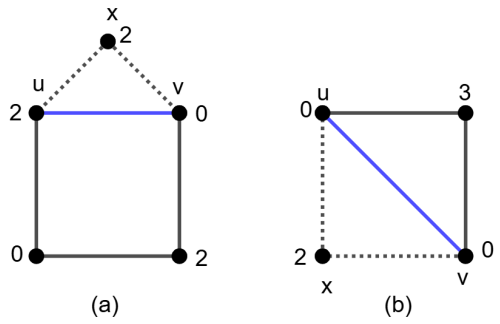


FIGURE 4.4 – (a) $\gamma_{dR}(G_{uv}^{x})$ de C_4 et (b) $\gamma_{dR}(G_{uv}^{x})$ C_5

4.3.2 Graphes dot-critiques pour la domination romaine double

P_n dot-critiques pour la domination romaine double

Proposition 4.3.3 *P_n est γ_{dR}^{-}-dot critique si et seulement si $n \not\equiv 0[3]$.*

P_n est γ_{dR}-dot stable si et seulement si $n \equiv 0[3]$.

Preuve. Soit G un graphe simple, et P_n un chaine de dégre, $n \geq 3$.

Supposons que uv une arête quelconque et $G_{uv} = P_n - v$ un graphe obtenu par la contraction de l'arête uv on a $d(G_{uv}) = n - 1$ deux cas se présentent :

- **Cas 1 :** $n \not\equiv 0[3]$

  Si $n \equiv 1[3]$ d'après la proposition**??** $\gamma_{dR}(P_n) = n + 1$ alors :

  $n - 1 = 3k$ dans ce cas $\gamma_{dR}(P_n - v) = n - 1$.

  Si $n \equiv 2[3]$ d'après la proposition**??** $\gamma_{dR}(P_n) = n + 1$ alors :

  $n - 1 = 3k + 1$ dans ce cas $\gamma_{dR}(P_n - v) = n$.

- **Cas 2 :** $n \equiv 0[3]$

  D'après la proposition**??** $\gamma_{dR}(P_n) = n$ alors :

  $n = 3k \Rightarrow n - 1 = 3k - 1$ dans ce cas $\gamma_{dR}(P_n - v) = n$.

Donc, de ces deux cas, on conclut : P_n est γ_{dR}^{-}-dot critique si et seulement si $n \not\equiv 0[3]$.

P_n est γ_{dR}-dot stable si et seulement si $n \equiv 0[3]$. ■

C_n dot-critiques pour la domination romaine double

Proposition 4.3.4 *C_n est γ_{dR}-dot critique si et seulement si $n \equiv 1, 4, 5[6]$.*

C_n est γ_{dR}-dot stable si et seulement si $n \equiv 0, 2, 3[6]$.

Preuve. Soit G un graphe simple et C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$.

Supposons que uv une arête quelconque et $G_{uv} = C_n - uv$ un graphe obtenu par la contraction de l'arête uv on a $d_{G_{uv}}(uv) = n - 1$.

- **Cas 1 :** $n \equiv 0, 2, 3[6]$

  Si $n \equiv 0[6]$ d'après la proposition2.3.5 $\gamma_{dR}(C_n) = n$ alors $n-1 = 3k-1$ dans ce cas $\gamma_{dR}(C_n - uv) = n$

  Si $n \equiv 2[6]$ d'après la proposition2.3.5 $\gamma_{dR}(C_n) = n$ alors $n-1 = 3k+1$ dans ce cas $\gamma_{dR}(C_n - uv) = n$

  Si $n \equiv 3[6]$ d'après la proposition2.3.5 $\gamma_{dR}(C_n) = n$ alors $n-1 = 3k+2$ dans ce cas $\gamma_{dR}(C_n - uv) = n$

- **Cas 2 :** $n \equiv 1, 4, 5[6]$

  Si $n \equiv 1[6]$ d'après la proposition2.3.5 $\gamma_{dR}(C_n) = n+1$ alors $n - 1 = 3k$ dans ce cas $\gamma_{dR}(C_n - uv) = n < n + 1$

  Si $n \equiv 4[6]$ d'après la proposition2.3.5 $\gamma_{dR}(C_n) = n$ alors $n - 1 = 3k + 3$ dans ce cas $\gamma_{dR}(C_n - uv) = n - 1 < n$

  Si $n \equiv 5[6]$ d'après la proposition2.3.5 $\gamma_{dR}(C_n) = n+1$ alors $n-1 = 3k+4$ dans ce cas $\gamma_{dR}(C_n - uv) = n < n + 1$

Donc de ces deux cas on conclut :

C_n est γ_{dR}-dot stable si et seulement si $n \equiv 0, 2, 3[6]$

C_n est γ_{dR}-dot critique si et seulement si $n \equiv 1, 4, 5[6]$. ■

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à la notion de la domination romaine double dans les graphes simples. De ce fait, nous nous sommes focalisés sur deux points importants.

* La détermination de la valeur exacte de $\gamma_{dR}(G)$ pour les graphes milieu $M(P_n)$, $M(C_n)$, les graphes totaux $T(P_n)$, $T(C_n)$, les graphes de friendship F_n, les graphes roue W_n, et les prismes complémentaires $P_n\overline{P_n}$ et $C_n\overline{C_n}$.

* L'étude de l'effet du lifting et de la contraction d'arête sur γ_{dR}, en caractérisant les graphes critiques et stables pour $\gamma_{dR} \in \{3, 4, 5\}$, ainsi que pour les chaînes P_n et les cycles C_n.

Bibliographie

[1] A.H. Ahangar, M. Chellali and S. M. Sheikholeslami, " On the double Roman domination in graphs". Discrete Appl. Math. 232 (2017) 1-7.

[2] C.Berge, Theory of Graphs and its Applications, Methuen, London, 1962

[3] T.W Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc. New York (1998)

[4] T.W Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), Domination in Graphs : Advanced Topics, Marcel Dekker, New York (1998)

[5] H.B Walikar and B.D. Acharya and E. Sampathkumar. "Recent developments in the theory of domination in graphs". In MRI Lecture Notes in Math., Mehta Research Inst., Allahabad volume 1,(1979).

[6] O.Ore, "theory of graphs", Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962)

[7] F.Jaeger and C. Payan. Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 274 (1972) 728-730

[8] E.J Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, Roman domination in graphs, Discrete Mathematic 278 (2004) 11-22

[9] R. Laskar and K. Peters, " Domination and irredundance in graphs. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983)

[10] R.A Beeler, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, " Double Roman domination ". Discrete Appl. Math. (211), 23-29 (2001) : Mathematics, (159), 1-11 (1996)

[11] Robert A Beeler, Teresa W. Haynes and Stephen T. Hedetniemi, Double Roman domination, Discrete Applied Mathematics 211, 23-29, 2016

[12] N.Jafari Rad and H. Rahbani, " Some progress on the Double Roman domination in graphs ", Discussiones Mathematica Graph Theory (39) 41-53 (2019).doi :10.7151/dmgt.2069.

[13] Behzad, M (1965) Graphs and Their Chromatic Numbers. Ph.D. Thesis, Michigan State University

[14] Hamada, T., & Yoshimura, I. (1976). Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Mathematics, 14(3), 247-255.

[15] P. Erdős, A. Rényi and V. T. Sós, *On a problem of graph theory*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 1 (1966), 215–235.

[16] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[17] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R., Graph Theory, Springer, 2008

[18] T. W. Haynes, M. A. Henning, P. J. Slater and L. C. van der Merwe, *Complementary prisms of graphs*, Discrete Mathematics, 307 (2007), 2115–2125.

[19] Desormeaux, W. J., Haynes, T. W., and Henning, M. A., "Domination edge lift critical trees", Quaestiones Mathematicae, 2012

[20] Desormeaux,W. J, Haynes ,T. W , and Henning M. A., "Edge lifting and total domination in graphs", Graphs and Combinatorics, Vol. 27, No. 6, pp. 819-830, 2011. ;

[21] N. J. Rad, L. Volkmann and S. Arumugam, *Roman domination dot-critical trees*, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, vol. 8, no. 1, pp. 75–83,2011. https ://doi.org/10.1080/09728600.2011.12088932