Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite Dr. Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement des Mathematiques et de l'Informatique



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

par

Abdelkader BRAHIMI et Khaled ALLOUNE

Intitulé par :

Etude des paramètres d'alliances globales dans les graphes et ses applications

A été évalué par

Président :	N. IKHLEF ESCHOUF	M.C.A U.Y.F.M
Examinateur :	M. ZAMIME	M.C.B U.Y.F.M
Examinateur :	K. TABLENNEHAS	M.A.A U.Y.F.M
promoteur :	M. BOUZEFRANE	M.A.A U.Y.F.M

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2019 – 2020

TABLE DES MATIÈRES

Résumé **V**

Abstract **VI**

Introduction générale **1**

1 Généralités sur la théorie des graphes **3**

1.1 Définitions et notations 3

1.1.1 Graphe 3

1.1.2 Voisinages 4

1.1.3 Degré d'un sommet 5

1.1.4 sous-graphe et praphe partiel 5

1.1.5 Connexité 6

1.1.6 Chaîne, Cycle 6

1.2 Quelques invariants de graphes 8

1.3 Graphes particuliers 8

1.3.1 Graphe biparti 8

1.3.2 Graphe cactus 9

1.3.3 Graphe complet 9

1.3.4 Graphe complémentaire 10

1.3.5 Graphe régulier 10
1.3.6 arbre et forêt 10
1.3.7 Les étoiles 11
1.3.8 Le graphe milieu 11
1.3.9 Le graphe total 12
1.3.10 Le graphe roue 12
1.3.11 La chenille 12
1.3.12 Subdivision 12
1.3.13 Courone d'un graphe 13
1.4 Domination 13
1.5 Classes de complexité 14

2 Etat de l'art sur les alliances 16
2.1 Introduction à les alliances 16
2.2 Les types d'alliances globales 16
2.2.1 Alliances défensives 17
2.2.2 Alliances offensives 18
2.2.3 Alliances puissantes 20
2.3 Bornes sur les paramètres d'alliances 20
2.3.1 Bornes sur les paramètres γ_d et $\gamma_{\widehat{d}}$ 20
2.3.2 Bornes sur les paramètres γ_o et $\gamma_{\widehat{o}}$ 21
2.3.3 Bornes sur le paramètre γ_{ap} 22
2.4 Résultatns existants dans les paramètres d'alliance des graphes particuliers 23
2.4.1 Les chaines 23
2.4.2 Les cycles 23
2.4.3 Les graphes complets 24
2.4.4 Les graphes bipartis complets 24
2.4.5 Les étoiles 24
2.4.6 Les doubles étoiles 25

2.4.7 Les graphes milieux 25
2.4.8 Le graphe totaux 26
2.4.9 Les graphes roues 27

3 Etude des paramètres d'alliances globales dans quelques classes de graphes 28

3.1 Calcul des nombres d'alliances défensives et offensives globales fortes dans les chenilles. 28
3.2 Calcul des nombres d'alliances défensives et offensives globales fortes dans les graphes milieux. 31
3.3 Relations entre les paramètres d'alliances globales fortes $\gamma_{\widehat{d}}$ et $\gamma_{\widehat{o}}$ dans quelque classes des graphes 33
3.3.1 Les chaines 33
3.3.2 Les cycles 34
3.3.3 Les graphes complets 35
3.3.4 Les graphes biparti complet 36
3.3.5 Les étoiles 37
3.3.6 Les doubles étoiles 38
3.3.7 Les graphes milieux 39
3.3.8 Les graphes totaux 41
3.3.9 Les graphes roues 41
3.3.10 Les chenilles 41

Conclusion 43

Bibliographie 44

TABLE DES FIGURES

1.1 Représentation d'un sous-graphe de G. 5
1.2 Représentation d'un graphe partiel de G. 6
1.3 une chaine P_4. 7
1.4 Un cycle C_4. 7
1.5 Un graphe biparti et un graphe biparti complet$K_{3,2}$. . . . 9
1.6 Un graphe complet K_5 9
1.7 Un graphe G et son complémentaire. 10
1.8 Un arbre et une foret. 11
1.9 Une étoile. 11
1.10 Une double étoile. 11
1.11 Un graphe G et son courone. 13

2.1 18
2.2 19
2.3 20
2.4 γ_d, $\gamma_{\widehat{d}}$, γ_o, $\gamma_{\widehat{o}}$, γ_{ap} 20

3.1 Le graphe G est une chenille Ch(2,2.....2,2). 28
3.2 Le graphe G est une chenille Ch(p,p,.....,p) 29
3.3 31
3.4 32

3.5 Exemple des cas ou $\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \gamma_{\widehat{d}}(P_n)$ 33
3.6 Exemple des cas ou $\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \gamma_{\widehat{d}}(P_n) + 1$. 33
3.7 Exemple des cas ou $\gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \gamma_{\widehat{o}}(C_n)$. 34
3.8 Exemple des cas ou $\gamma_{\widehat{o}}(C_n) = \gamma_{\widehat{d}}(C_n) + 1$. 35
3.9 35
3.10 Représentation de $\gamma_{\widehat{o}}$ et $\gamma_{\widehat{d}}$ dans $K_{3,3}$, $K_{4,4}$ et $K_{3,5}$. 36
3.11 Représentation de $\gamma_{\widehat{d}}(S_p)$ et $\gamma_{\widehat{o}}(S_p)$. 37
3.12 38
3.13 Représentation de $\gamma_{\widehat{o}}$ et $\gamma_{\widehat{d}}$ dans $M(C_4)$ 40

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous avons donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Monsieur BOUZEFRANE Mohamed, à ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nous remercions également les membres de jury.

Merci également a tous les enseignants qui Aide nous pendant notre cursus, sans oublier leurs conseils précieux. Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail A ma chère famille, en particulier à mes chers parents pour leur soutien durant toute ma formation, pour leur bienveillance, Leurs enorts constants dans mes études, et pour leur encouragement.

A mes frères : Mohamed, Ahmed, Youness Fatmazohra et Amina.

A mes neveux : Abderrahman, Anas, Aya, Wassim, Kawthar et Mahdi.

A mon professeur du Quran M. Boukhari Mohamed.

A notre imam Baba Farid, appelé Chikh Zouhir.

A mon chèr binôme Khaled.

A mes chèrs amis : Boukhari Ayoub, Kirouane Salem et Chikhaoui Brahim.

A mes chèrs amis : Touat Ali, Berkache Mohamed, Kara Med lamin, Khechiche Bilal et Sabour Youcef.

Tout les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Abdelkader

Dédicace

Je dédie ce travail A ma chère famille, en particulier à mes chers parents pour leur soutien durant toute ma formation, pour leur bienveillance, Leurs enorts constants dans mes études, et pour leur encouragement.

A mon chère binôme Abdelkader.

A chers amis : Kirouane Salem et Sabour Youcef.

Tout les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Khaled

RÉSUMÉ

Le but principal de ce mémoire est l'étude de certins paramètres d'alliances globale forte $\gamma\widehat{d}$ et $\gamma\widehat{d}$ dans quelques classes des graphes simples et la relation entre eux.

Nous commençons par donner les definition des alliances globale dans les graphe, ainsi qu'une caractérisation de quelques graphes particulié, ensuite nous calculons les nombres d'alliances globale forte dans Ch(2,2,.....,2), Ch(p,p,.....,p), graphe milieu des étoiles et double étoile.

Par suite, nous caractérisons des relations entre les paramètres d'alliances globale forte $\gamma\widehat{d}$ et $\gamma\widehat{d}$ dans quelques classes des graphes.

ABSTRACT

The principal goal of this memory is the study of the parameters of strong global alliances $\gamma\widehat{d}$ et $\gamma\widehat{o}$ in some classes of simple graphs and the relation between them.

In this work, we start by giving the definition of global alliances in the graph, as well as a characterization of some particular graphs, then we calculate the numbers of strong global alliances in Ch(2,2,.....,2), Ch(p,p,.....,p), mid-graphof stars and double stars.

In the second, we characterize relations between the strong global alliance parameters $\gamma\widehat{d}$ et $\gamma\widehat{o}$ in some classes of the graphs.

ملخص

الهدف الأساسي لهذه المذكرة هو دراسة التحالفات الكلية القوية $\gamma_{\widehat{h}}$، $\gamma_{\widehat{d}}$ في بعض المخططات البسيطة و محاولة إيجاد علاقة بينهما.

في هذا العمل ستبدأ بإعطاء تعريفات التحالفات الكلية في المخططات، فضلا عن توصيف بعض المخططات الخاصة، ثم نقوم بحساب عدد التحالفات الكليةالقوية في ش(٢،٢،.....،٢)، ش(ر،ر،.....،ر)، المخطط الأوسط، النجوم، النجوم المزدوجة.....

ثانيا نقوم بتحديد بعض العلاقات بين محددات التحالفات القوية الكلية $\gamma_{\widehat{h}}$، $\gamma_{\widehat{d}}$ في بعض فئات المحططات.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la théorie des graphes. La théorie de graphe est la branche des mathématiques concernée par la structure et les propriétés des graphes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Ainsi, souvent trouvé dans nos vies quotidiennes, sans s'en rendre compte. Le problème appelé "problème des ponts de Koenigsberg" posé par Euler est à l'origine de cette branche.

Un graphe est un dessin géométrique défini par deux ensembles : un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes, une arête étant une paire de sommets reliés. Il ne faut pas confondre un graphe et son dessin : un même graphe peut être dessiné de plusieurs façon. Les domaines d'applications des graphes sont diverses, justifiant une recherche importante, on peut citer : les réseaux de communication, la gestion de la production et les problèmes d'ordonnancement des tâches, les flots dans les réseaux, la chimie, la physique et en l'économie, etc...

Après une introduction générale, ce mémoire est composée par trois chapitres. Dans le premier chapitre nous rassemblons quelques définitions de base sur les graphes qui sont nécessaires pour les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre nous rassemblons les définitions des paramètres d'alliances globales dans les graphes, ensuit on donne des bornes

et des résultats concernant ces paramètres.

Le troisième chapitre est divisé en trois parties. La première et la deuxième partie nous déterminons quelques résultats dans les chenilles et les graphes milieux qui nous avons trouvé.

La troisième partie nous déterminons quelques relations entre les paramètres d'alliances globales fortes qui nous avons trouvé.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés et propose des perspectives de recherche.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DES GRAPHES

Dans ce chapitre, on va présenté des notions classiques de la théorie des graphes ainsi que des notations usuelles, dont on aura besoin durant la réalisation de ce travail.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe

définition 1.1.1 *Un graphe G=(V,E) est définit par le couple (V,E) telle que :*
V : est fini et dit l'ensemble des sommets.
E : c'est l'ensemble d'arêtes. Une arête de G étant une paire de sommets de G.

Chaque graphe a un ordre et une taille tel que le cardinal de V est appelé l'ordre de G, et noté par n. Le cardinal de E est appelé la taille de G, et noté par m. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres miniscules : u, v, x, y, a, b, etc.Les arête sont notés uv, xy, ab, etc. Si deux sommets sont reliés par une arête, alors nous disons qu'ils sont adjacents. Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont au moins une extrémiié commune.

Graphe simple

définition 1.1.2 *Un graphe simple est un graphe sans boucle et sans arête multiple (c'est-à-dire toute paire de sommets sont reliée par au plus une arête).*

Dans toute la suite de ce document, nous considérerons uniquement des graphes simples.

1.1.2 Voisinages

voisinage ouvert

définition 1.1.3 *Soit un graphe G=(V,E). Pour un sommets $u \in V$, Le voisinage ouvert de u c'est l'ensemble des sommets adjacents à u, et défini par $N_G(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$.*

voisinage fermé

définition 1.1.4 *Le voisinage fermé de u c'est le voisinage ouvert de u union u, et défini par : $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.*

Voisinage d'un sous-ensemble

définition 1.1.5 *Soit S un sous-ensemble de V :*
l'ensemble $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(v)$(respectivement $N_G[S] = N_G(S) \cup S$) est appelé voisinage ouvert de S (respectivement voisinage fermé de S).

voisinage privé

définition 1.1.6 *Le voisinage privé d'un sommet $u \in S$, noté $pn[u, S]$ est l'ensemble des sommets de voisinage fermé de u qui n'ont pas d'autre voisins dans S.*
cet ensemble est définit par $pn[u, S] = \{v : N[v] \cap S = \{u\}\}$.

1.1.3 Degré d'un sommet

définition 1.1.7 *Degré d'un sommet u dans un graphe G c'est le nombre d'arêtes incidentes à u, ou bien il est le cardinal de l'ensembles des voisins ouvert de u noté par $d_G(u)$, et est définit par $d_G(u) = |N_G(u)|$.*

Le degré maximum d'un graphe G est le maximum des degrés de G noté par :$\Delta(G)$. et le degré minimum est le minimum des degrés de G noté par : $\delta(G)$).

* Si le degré d'un sommet d'un graphe est égale à 1, alors cet sommet est dit sommet pendant ou bien une feuille.

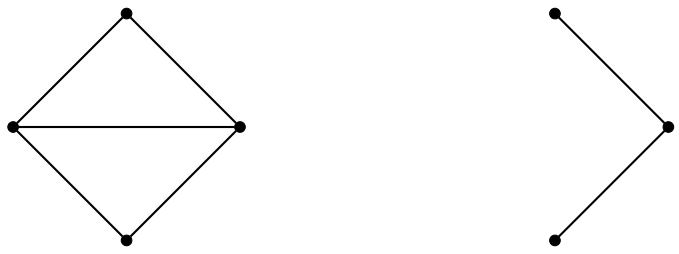
* Si le degré d'un sommet d'un graphe est égale à 0, alors cet sommet est dit sommet isolé .

* Si un sommet est un voisin d'un sommet pendant, alors il est dit sommet support.

1.1.4 sous-graphe et praphe partiel

sous-graphe

définition 1.1.8 *on appelle sous-graphe un graphe obtenu en suppriment des arêtes et des sommets au graphe initiale. Soit un graphe G = (V(G),E(G)). Le graphe H est dit sous-graphe de G si V(H) ⊆ V(G) et E(H) ⊆ E(G)*

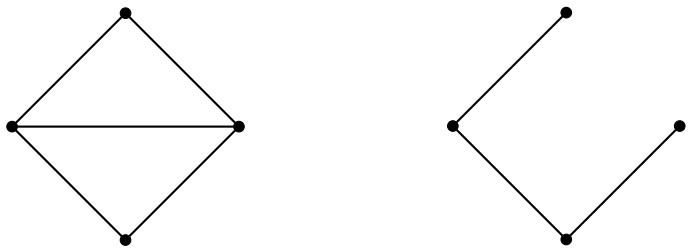


Graphe G. H :sous-Graphe de G.

FIGURE 1.1: Représentation d'un sous-graphe de G.

graphe partiel

définition 1.1.9 *Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en supprimant une ou plusieurs arêtes de G et garder le même ensemble de sommets. Soit un graphe G = (V(G),E(G)).*
Le graphe H est dit graphe partiel de G si V(H) = V(G) et E(H) ⊆ E(G).



Graphe G. H' :Graphe partiel de G.

FIGURE 1.2: Représentation d'un graphe partiel de G.

1.1.5 Connexité

définition 1.1.10 *Un graphe connnexe c'est un graphe simple tel que chaque paire des sommets de G sont relié par une Chaîne.*

Chaque graphe connexe d'ordre n possède au moins n-1 arêtes. Les graphe qui ne sont pas connexes, possède au moins deux composante connexe.

remarque 1.1.1 *Dans ce mémoire on va étudié les graphes connexes seulement.*

1.1.6 Chaîne, Cycle

Chaîne

définition 1.1.11 *Une chaîne est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque deux sommets successifs ont une arête commune.*

* Une chaîne est dite élémentaire si tous ses sommets sont distincts.
* Une chaîne est dite simple si tous ses arêtes sont distincts.
* La longeur d'une chaîne est le nombre de ces arêtes.
* Une corde est une arêtes reliant deux sommets non consécutifs dans une Chaîne.
* Une Chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n est une Chaîne élémentaire sans cordes.

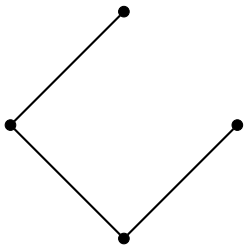


FIGURE 1.3: une chaine P_4.

cycle

définition 1.1.12 *Un cycle est une Chaîne telle que les extrémités sont confondues.*

* Un cycle simple est une Chaîne simple telle que ses extrémités sont confondues.
* Un cycle élémentaire est une Chaîne élémentaire telle que ses extrémités sont confondues.
* La longeur d'un cycle est le nombre de ses arêtes.

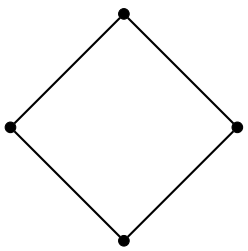


FIGURE 1.4: Un cycle C_4.

1.2 Quelques invariants de graphes

isomorphisme dans les graphes

définition 1.2.1 *Deux graphes sont isomorphes s'il existe une bijection entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que chaque propriétie vérifier dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective vérifier la meme propriétie dans l'autre graphe.*

Les graphes isomorphes ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées invariants de graphes, en d'autres termes un invariant est une propriéte stable par isomorphsime. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

stablilité

définition 1.2.2 *Un ensemble stable dans un graphe G = (V,E), est un sous-ensemble des sommets deux à deux non adjacents. Le nombre de stabilité de G est le cardinalité d'un stable maximum de G et noté $\alpha(G)$*

couplage

définition 1.2.3 *Un couplage M est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes.Le cardinalité d'un couplage maximum de G noté $\beta(G)$. Un couplage est dit parfait s'il sature tius les sommets.*

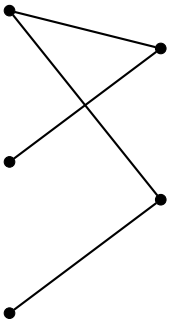
1.3 Graphes particuliers

on va parler à quelque graphe particuliers.

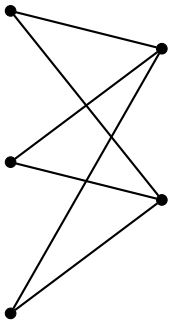
1.3.1 Graphe biparti

définition 1.3.1 *le graphe biparti est un graphe non isolé, possède une partition V_1 et V_2 de V en deux sous-ensemble stable.*

Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de V_1 est adjacents avec tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = \text{p}$ et $|V_1| = \text{q}$ alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.



Graphe biparti.



Graphe biparti complet.

FIGURE 1.5: Un graphe biparti et un graphe biparti complet$K_{3,2}$.

1.3.2 Graphe cactus

définition 1.3.2 *Le graphe cactus G est un graphe tel que chaque arête de G appartient à au plus une cycle. Un graphe contenant un seul cycle est appelé une unicycle.*

1.3.3 Graphe complet

définition 1.3.3 *Le graphe complet G =(V,E) est un graphe simple tel que chaque sommet de G est un voisin avec tous les autres sommets de G.Le graphe complet d'ordre n noté K_n.*

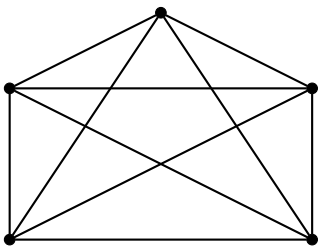


FIGURE 1.6: Un graphe complet K_5

1.3.4 Graphe complémentaire

définition 1.3.4 *Le graphe complimentaire $\overline{G}$ d'un graphe G est un graphe de meme nombre de sommets que G,et son ensemble des aretes est formé de toutes les aretes de K_n qui ne sont pas présent dans G.*

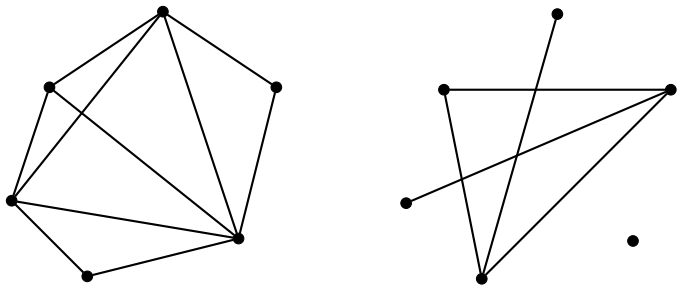


FIGURE 1.7: Un graphe G et son complémentaire.

1.3.5 Graphe régulier

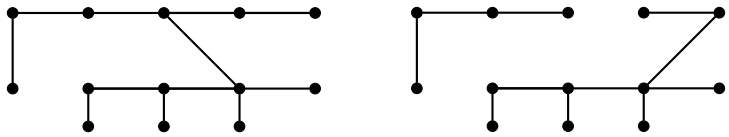
définition 1.3.5 *Un graphe régulier est un graphe tel que tous les sommets ont le meme degré.*

Un graphe G est dit K-régulier si $deg_G(v) = k$ pour chaque sommet v de G.
les graphe complets (respectivement les cycles) sont des (n-1)-régulier (respectivement 2-régulier).

1.3.6 arbre et forêt

définition 1.3.6 *Un arbre T est un graphe simple connexe sans cycle. l'arbre possède exactement (n-1) arêtes.*

définition 1.3.7 *Une forêt est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.*



Une arbre. Une foret.

FIGURE 1.8: Un arbre et une foret.

1.3.7 Les étoiles

définition 1.3.8 *Une étoile est un graphe biparti complet avec* $|V_1| = 1$ *et* $|V_2| = k$ *noté* $K_{1,k}$*, le sommet de* V_1 *appelé sommet centrale de l'étoile.*

Autrement dit une étoile est un arbre d'ordre n de $n-1$ sommets pendants.

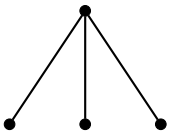


FIGURE 1.9: Une étoile.

définition 1.3.9 *Une double éloile* $S_{r,s}$ *est une deux étoiles* $K_{1,r}$*,* $K_{1,s}$ *et en ajoutant une arete reliant les deux centres.*

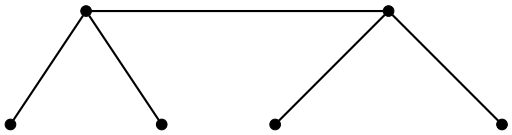


FIGURE 1.10: Une double étoile.

1.3.8 Le graphe milieu

définition 1.3.10 *[10] Soit G=(V,E) un graphe simple. Le graphe milieu de G, noté M(G) est définie comme suite :l'ensemble des sommets de M(G) est* $V(G) \cup E(G)$*.*

Deux sommets x,y de M(G) sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifie :
** x,y ∈ E(G) et x est adjacent à y dans G.*
** x ∈ V(G), y ∈ E(G) et x est incédent à y dans G.*

1.3.9 Le graphe total

définition 1.3.11 *[11] Le graphe total de G, noté T(G) est défini comme suit :*
L'ensembles des sommets de T(G) est V(G) ∪ E(G). Deux sommets x,y de M(G) sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifie :
** x,y ∈ V(G) et x,y sont adjacents dans G.*
** x,y ∈ E(G) et x est adjacent à y dans G.*
** x ∈ V(G), y ∈ E(G) et x est incédent à y dans G.*

1.3.10 Le graphe roue

définition 1.3.12 *La roue W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ obtenu à partir l'union disjointe d'un cycle d'ordre $n-1$ et un sommet en reliant ce sommet à tous les sommets de cycle.*

1.3.11 La chenille

définition 1.3.13 *Une chenille est un arbre dans lequel tous les sommets sont à la distance* 1 *d'un chemin central.*

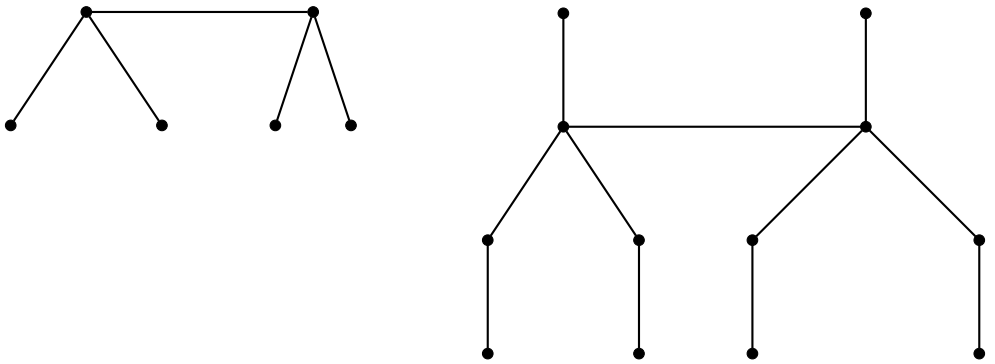
1.3.12 Subdivision

définition 1.3.14 *La subdivision d'une aretes ab d'un graphe G introduit un nouveau sommet c tel que*
$E(G \cup \{z\}) = ((E(G\text{-}\{ab\})) \cup \{ac, cb\})$.

1.3.13 Courone d'un graphe

définition 1.3.15 *Un courone H d'un graphe G est le graphe $H = G \circ K_1$ obtenu à partir de relier chaque sommets de H par un nouveau sommet pendant.*

Il est claire que $|V(H)| = 2|V(G)|$.



Un Graphe G. Un Graphe courone de G.

FIGURE 1.11: Un graphe G et son courone.

1.4 Domination

définition 1.4.1 *Soit un graphe simple G=(V,E). Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble dominant si tout sommet de (V - D) est adjacent à au moins un sommet de D.*

Le cardinal minimum d'un ensemble dominant minimal de G, appelé nombre de de domination inferieure, et noté γ (G).
Un ensemble dominant minimum dans G avec une telle cardinalité est appelé γ(G)-ensemble.

Quelque paramètres de domination

La domination totale

définition 1.4.2 *Un ensemble dominant total S d'un graphe G est un ensemble dominant dont le sous-graphe induit par S ne contient pas de sommets isolés.*

Le nombre de domination total, noté $\gamma_t(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G.

La domination connxe

définition 1.4.3 *Un ensemble dominant connexe d'un graphe G est un ensemble dominant dont le sous-graphe induit est connexe.*

Le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de G, noté $\gamma_c(G)$, est appelé nombre de domination connexe.

La domination stable

définition 1.4.4 *Un ensemble dominant stable d'un graphe G est un ensemble dominant dont le sous-graphe induit est un stable.*

Le cardinal minimum(resp maximum) d'un ensemble dominant stable de G, noté $i(G)$(resp $\beta(G)$), est appelé nombre de domination stable de G.

1.5 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème Q est dans la classe P s'il existe un algorithme déterministe en temps polynomial qui résout Q.
En revanche, un algorithme non déterministe est un algorithme pour lequel un état peut déterminer de nombreux états suivants simultanément. On peut considérer un algorithme non déterministe ayant la capacité de se ramifier en plusieurs copies de lui-même, un pour chaque état suivant. Ainsi, alors qu'un algorithme déterministe doit explorer un ensemble d'alternatives une à la fois, un algorithme non déterministe examine toutes les alternatives en même temps. Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solvable.

Classe NP

Un problème Q est dans la classe NP s'il existe un algorithme en temps polynomiale non déterministe ce qui résout Q. clairement que P $\subseteq$ NP. Parmi les problèmes de NP sont ceux qui sont les plus difficiles dans le sens que si l'on peut être résolu en temps polynomial, alors tout problème peut aussi dans NP. Ce sont des problèmes NP-complets.

* Aucune problème NP-complets peut être résolu par un algorithme polynomial.

Classe NP-complet

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Par exemple, la détermination de l'alliance globale d'un graphe arbitraire est un NP-difficile dans le cas général.

CHAPITRE 2

ETAT DE L'ART SUR LES ALLIANCES

2.1 Introduction à les alliances

Une alliance est une union ou une relation qui se forme entre entre deux États ou un groupe d'États. Il peut s'agir d'un amalgame d'efforts et de capacités entre des forces, des personnes ou des armées pour atteindre un objectif spécifique ou atteindre un objectif spécifique.
Et parmi les premiers à étudier les alliances dans les graphiques est Christiansen, où la source de son travail était l'alliance des pays dans la guerre pour le soutien mutuel, et il a développé deux types d'alliances, une alliance offensive et une alliance défensive, et il a étudié les propriétés mathématiques du second type.
Dans les diagrammes, les états sont désignés par des sommets, tandis que les relations interétatiques sont représentées par des arrêtes.
Dans ce chapitre, nous représeterons les différents types d'alliances et leurs bornes. et rappelant les principaux résultats existants.

2.2 Les types d'alliances globales

on va etudier les alliances défensive, offensive et puisante.

2.2.1 Alliances défensives

définition 2.2.1 *Soit le graphes G = (V,E), un ensemble non vide des sommets $S \subseteq V(G)$ d'un graphe G = (V,E) est dit une alliance défensive si pour tout sommet $v \in S$,$|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$.*

Une alliance défensive S est dite globale si elle est un ensemble dominant.Si l'inégalité est strict, alors l'alliance défensive est dit alliance défensive forte.

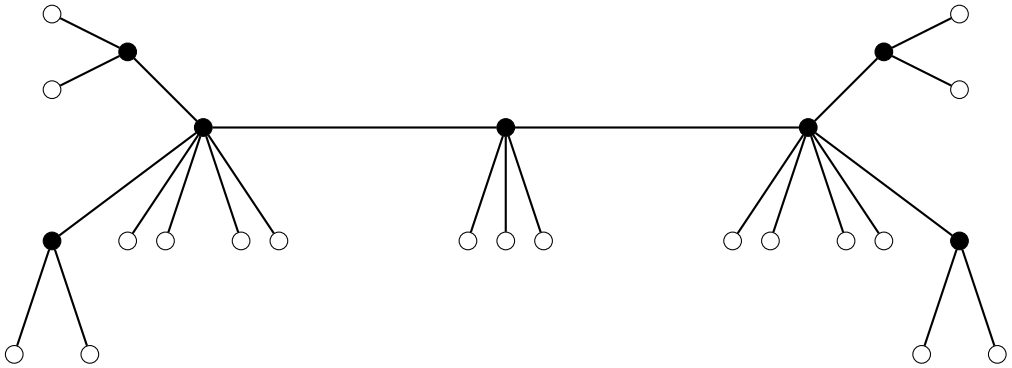
définition 2.2.2 *Une alliance défensive globale forte S c'est un ensemble dominant, qui vérifiée la propriété suivante*
$v \in S$, $|N[v] \cap S| > |N(v) \cap (V - S)|$.

définition 2.2.3 *Le nombre d'alliance défensive globale γ_d est le cardinal minimum d'une alliance défensive, et le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\widehat{d}}$ est le cardinal minimum d'une alliance défensive forte.*

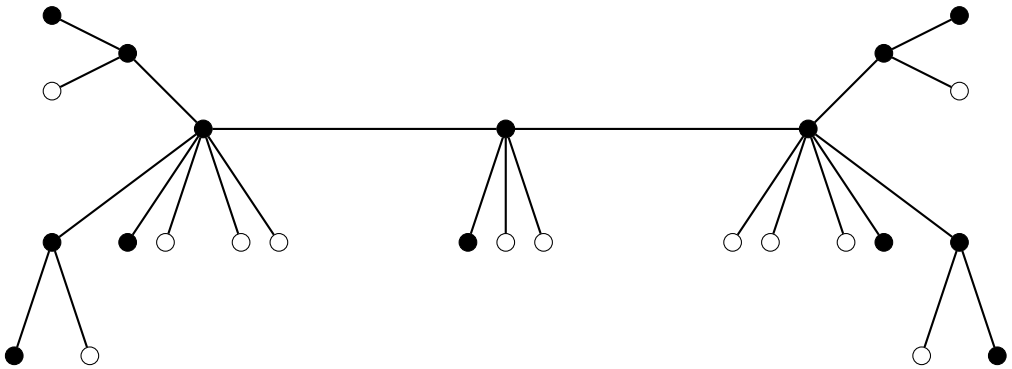
Si un ensemble non vide est une alliance défensive globale de G
et $|S| = \gamma_d$, alors on dit que S est un γ_d(G)-ensemble.
Si un ensemble non vide est un alliance défensive globale forte de G
et $|S| = \gamma_{\widehat{d}}$, alors on dit que S est un $\gamma_{\widehat{d}}$(G)-ensemble.

remarque 2.2.1 *Tout $\gamma_{\widehat{d}}$ (G) - ensemble contenant tous les sommets supports de G.*

La figure suivant représente une alliance défensive globale et une alliance défensive globale forte.



γ_d (G) = 7



$\gamma_{\widehat{d}}$ (G) = 14

FIGURE 2.1:

2.2.2 Alliances offensives

définition 2.2.4 *Soit le graphes G = (V,E), un ensemble non vide des sommets S ⊆ V(G) d'un graphe G = (V,E) est dit une alliance offensive si pour tout sommet v ∈ S ,*$|N(v) \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$.

Une alliance offensive S est dite globale si elle est un ensemble dominant.Si l'inégalité est strict, alors l'alliance offensive est dit alliance offensive forte.

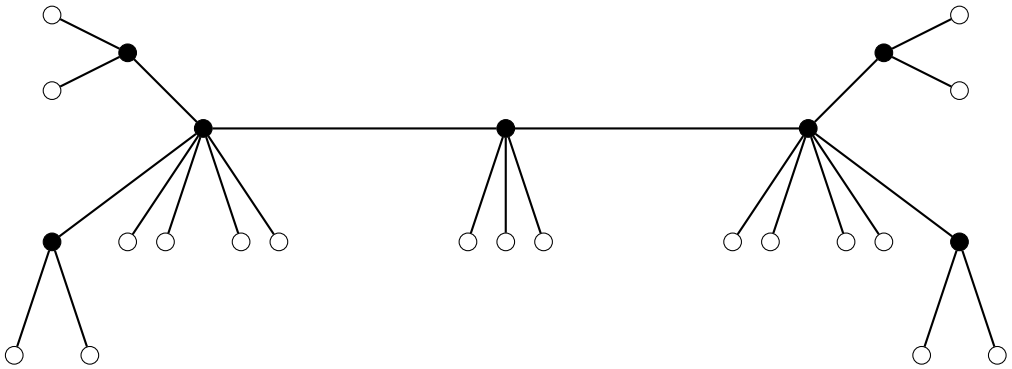
définition 2.2.5 *Une alliance offensive globale forte S c'est un ensemble dominant, qui vérifiée la propriété suivante*
$v \in S$, $|N(v) \cap S| > |N[v] \cap (V - S)|$.

définition 2.2.6 *Le nombre d'alliance offensive globale γ_o est le cardinal minimum d'une alliance offensive, et le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\widehat{o}}$ est le cardinal minimum d'une alliance offensive forte.*

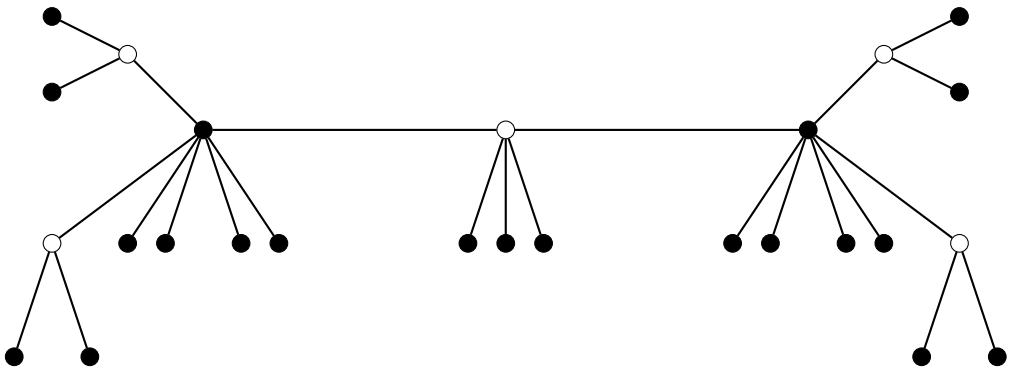
Si un ensemble non vide est une alliance offensive globale de G
et $|S| = \gamma_o$, alors on dit que S est un γ_o(G)-ensemble.
Si un ensemble non vide est une alliance offensive globale forte de G
et $|S| = \gamma_{\widehat{o}}$, alors on dit que S est un $\gamma_{\widehat{o}}$(G)-ensemble.

remarque 2.2.2 *Tout $\gamma_{\widehat{o}}(G)$-ensemble contient tous les feuilles de G.*

La figure suivant représente une alliance offensive globale et une alliance offensive globale forte.



γ_o (G) = 7



$\gamma_{\widehat{o}}$ (G) = 21

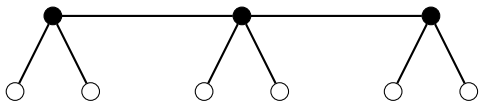
FIGURE 2.2:

2.2.3 Alliances puissantes

définition 2.2.7 *Une alliance est dit puissante si elle est défensive et offensive au meme temps. elle peut exprimée par la condition suivant : pour tout sommet* $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geqslant |N[v] \cap (V - S)|$.
Une alliance puissante est dit globale si elle est dominant.

définition 2.2.8 *Le nombre d'alliance puissante globale est le cardinal minimum d'une alliance puissante globale, et noté* γ_{ap}.

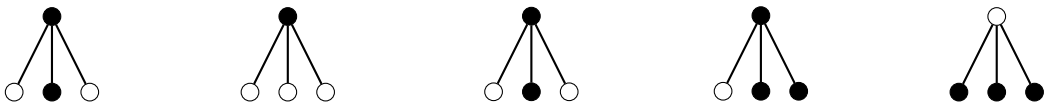
La figure suivant représente γ_{ap} d'une graphe quelconque.



$\gamma_{ap}(\mathrm{G}) = 3.$

FIGURE 2.3:

exemple 2.2.1 *L'exemple suivant représent les ensemples* γ_d , $\gamma_{\widehat{d}}$, γ_o , $\gamma_{\widehat{o}}$, γ_{ap} *respectivement*



$\gamma_d(\mathrm{G}) = 2$ $\gamma_o(\mathrm{G}) = 1$ $\gamma_{ap}(\mathrm{G}) = 2$ $\gamma_{\widehat{d}}(\mathrm{G}) = 3$ $\gamma_{\widehat{o}}(\mathrm{G}) = 3$

FIGURE 2.4: γ_d, $\gamma_{\widehat{d}}$, γ_o, $\gamma_{\widehat{o}}$, γ_{ap}

2.3 Bornes sur les paramètres d'alliances

2.3.1 Bornes sur les paramètres γ_d et $\gamma_{\widehat{d}}$

proposition 2.3.1 *[1] Pour tout graphe G sans sommets isolés et degré minimum* δ
1. $\gamma_d(G) \leq n - \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(G) \leq n - \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$.

corollaire 2.3.1 *[1] Pour tout graphe G,*
$\gamma_d(G) = n$ *si et seulement si* $G = \overline{K_n}$.

théorème 2.3.1 *[1] Si T est un arbre d'ordre* $n \geq 4$, *alors* $\gamma_d(T) \leq \frac{3n}{5}$.

théorème 2.3.2 *[1] Si T est un arbre d'ordre* $n \geq 3$, *alors* $\gamma_d(T) \leq \frac{3n}{4}$.

théorème 2.3.3 *[2] Soit G un graphe simple d'ordre n; et de degré maximum* Δ, *Alors*
1. $\gamma_d(G) \geq \lceil \frac{2n}{\Delta+3} \rceil$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(G) \geq \lceil \frac{n}{\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor + 1} \rceil$.

théorème 2.3.4 *[1] Si G est un graphe simple d'ordre n, alors*
1. $\gamma_d(G) \geq \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(G) \geq \sqrt{n}$.

théorème 2.3.5 *[1] Si G est un graphe simple d'ordre n, alors*
1. $\gamma_d(G) \geq \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(G) \geq \sqrt{n}$.

théorème 2.3.6 *[1] Si T est un arbre d'ordre n, alors*
1. $\gamma_d(G) \geq \frac{n+2}{4}$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(T) \geq \frac{n+2}{3}$.

théorème 2.3.7 *[1] Soit G un graphe biparti d'ordre n, et de degré maximum* Δ, *alors*
1. $\gamma_d(G) \geq \frac{2n}{\Delta+3}$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(G) \geq \frac{2n}{\Delta+2}$.

2.3.2 Bornes sur les paramètres γ_o et $\gamma_{\widehat{o}}$

théorème 2.3.8 *[3] Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés*
$\gamma_o(G) \leqslant \frac{n-l(G)+s(G)}{2}$.

A noter q'une caractérisation constructive des arbres extremaux verifiant $\gamma_o(\mathrm{T}) \leqslant \frac{n-l(G)+s(G)}{2}$ a été faite par Chellali dans le même article. Sigaretta et Rodriguez donne une borne supérieure et une borne inférieure sur γ_o pour tout graphe G en fonction de l'ordre n, le degré minimum δ et maximum Δ.

théorème 2.3.9 *[4] Pour tout graphe G d'ordre n ; et de degré minimum δ et maximum Δ*

$$\frac{2n}{3} \geqslant \gamma_o(G) \geqslant \begin{cases} \lceil \frac{n(\delta+1)}{2\Delta+\delta+1} \rceil & si \ \ \delta \ \ est \ \ impair. \\ \lceil \frac{n\delta}{2\Delta+\delta} \rceil & sinon. \end{cases}$$

Rappelons q'un graphe G est dit d-régulier si tous ses sommets sont de degré d.

théorème 2.3.10 *[4] Pour tout graphe régulier G d'ordre n et de degré δ impair, $\frac{n(\delta+1)}{3\delta+1} \leqslant \gamma_o \leqslant \frac{n}{2}$.*

théorème 2.3.11 *[7] Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec l(T) feuilles et s(T) sommets supports.Alors $\gamma_o(T) \geq \frac{n-l(T)+s(T)+1}{3}$.*

théorème 2.3.12 *[8] Soit G un graphe connexe unicycle d'ordre n avec l(T) feuilles et s(T) sommets supports.Alors $\gamma_o(T) \geq \frac{n-l(T)+s(T)}{3}$.*

théorème 2.3.13 *[3] Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés, $\gamma_{\hat{o}}(G) \leqslant \frac{n+l}{2}$.*

théorème 2.3.14 *[9] Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$*
$\gamma_o(T) \geq \frac{3}{2}\ \gamma_d(T) - 1$.

2.3.3 Bornes sur le paramètre γ_{ap}

théorème 2.3.15 [*Bouzefrane et Chelleli*]
Soit T un arbre d'ordre n ayant l feuilles et s sommets supports. Alors, $\gamma_{ap}(T) \geqslant \frac{3n-2l-s+2}{5}$ et cette borne est atteinte.

proposition 2.3.2 [*Birgham et al*]
Pour tout graphe G d'ordre n, $n \leqslant (\frac{\Delta+\delta+2}{\delta+1})\ \gamma_{ap}(G)$.

corollaire 2.3.2 [*Birgham et al*]
Si G est un graphe régulier d'ordre n, alors $n \leq 2\ \gamma_{ap}(G)$.

2.4 Résultatns existants dans les paramètres d'alliance des graphes particuliers

2.4.1 Les chaines

théorème 2.4.1 (Haynes et al) *Soit une chaine d'ordre n,* $n \geq 3$ *, alors*

$$\gamma_{\widehat{d}}(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}+1 & Si \quad n \equiv 2[4]. \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & Sinon. \end{cases}$$

théorème 2.4.2 *[5] Soit une chaine d'ordre n,* $n \geq 3$ *, alors*
$\gamma_o(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

théorème 2.4.3 *Pour toute chaine* P_n *ona :*

$$\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}+1 & Si \quad n \equiv 0[2]. \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & Sinon. \end{cases}$$

théorème 2.4.4 *[5] Soit une chaine d'ordre n,* $n \geq 3$ *, alors*
$\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

2.4.2 Les cycles

théorème 2.4.5 (Haynes et al) *Soit un cycle d'ordre n,* $n \geq 3$ *, alors*

$$\gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \gamma_d(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & Si \quad n \equiv 0[4]. \\ \frac{n+1}{2} & Si \quad n \equiv 1,3[4]. \\ \frac{n}{2}+1 & Si \quad n \equiv 2[4]. \end{cases}$$

théorème 2.4.6 *[5] Soit un cycle d'ordre n,* $n \geq 3$*, alors* $\gamma_{\widehat{o}}(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

2.4.3 Les graphes complets

théorème 2.4.7 *[1] Pour tout graphe complet K_n ona :*

1. $\gamma_d(G) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(G) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

théorème 2.4.8 *Pour tout graphe complet K_n ona :*

1. $\gamma_o(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
2. $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

2.4.4 Les graphes bipartis complets

théorème 2.4.9 *[1] Pour tout graphe biparti complet $K_{r,s}$ ona :*

1. $\gamma_d\ (K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor\ +\ 1.$
2. $\gamma_d\ (K_{r,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor\ +\ \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ *si* $r,s \geq 2.$
3. $\gamma_{\widehat{d}}\ K_{r,s} = \lceil \frac{s}{2} \rceil\ +\ \lceil \frac{r}{2} \rceil.$

théorème 2.4.10 *Pour tout graphe biparti complet $K_{r,s}$ ona :*

1. $\gamma_o\ (K_{r,s}) = min\ \{\ \lceil \frac{s+1}{2} \rceil\ ,\ \lceil \frac{r+1}{2} \rceil\ \}\ .$

2. $\gamma_{\widehat{o}}\ (K_{r,s}) = min\{\ s,r\ \}.$

2.4.5 Les étoiles

théorème 2.4.11 *Pour toute étoile S_r ona :*

1. $\gamma_d\ (S_r) = \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor.$
2. $\gamma_{\widehat{d}}\ (S_r) = 1\ +\ \lceil \frac{r}{2} \rceil.$

théorème 2.4.12 *Pour toute étoile S_r ona :*

1. $\gamma_o\ (S_r) = 1.$
2. $\gamma_{\widehat{o}}\ (S_r) = r.$

2.4.6 Les doubles étoiles

théorème 2.4.13 *Pour toute double étoile $S_{r,s}$ ona :*

1. $\gamma_o\ (S_{r,s}) = 2.$
2. $\gamma_{\widehat{o}}\ (S_{r,s}) = r+s.$

théorème 2.4.14 *[1] Pour toute double étoile $S_{r,s}$ ona :*

1. $\gamma_d\ (S_{r,s}) = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2.$
2. $\gamma_{\widehat{d}}\ (S_{r,s}) = 2 + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor.$

2.4.7 Les graphes milieux

Le graphe milieux d'une chaine

théorème 2.4.15 *[6] Pour tout graphe milieu G d'une chaine P_n d'ordre $n \geq 2$, ona :*

1. $\gamma_o(G) = n - 1.$
2. $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \begin{cases} 2 \quad Si \quad n = 2. \\ 1 + n \qquad Sin \geq 3. \end{cases}$

théorème 2.4.16 *[6] Pour tout graphe milieu G d'une chaine P_n d'ordre $n \geq 2$, ona :*

1. $\gamma_{\widehat{d}}(G) = \begin{cases} n \quad Si \quad n = 2, 3. \\ n + 1 \qquad Sil \geq 4. \end{cases}$
2. $\gamma_d(G) = \begin{cases} 2 \quad Si \quad n = 2. \\ n - 1 \qquad Si \quad n \geq 3. \end{cases}$

Le graphe milieu d'un cycle

théorème 2.4.17 *[6] Pour tout graphe milieu G d'un cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, ona :$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \gamma_o(G) = n.$*

théorème 2.4.18 *[6] Pour tout graphe milieu G d'un cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, ona :$\gamma_{\widehat{d}}(G) = \gamma_d(G) = n$.*

corollaire 2.4.1 *[6] Pour tout graphe milieu G d'un cycle C_n d'ordre n, $n \geq 3$, ona : $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \gamma_{\widehat{d}}(G) = n$.*

2.4.8 Le graphe totaux

Le graphe total d'une chaine

théorème 2.4.19 *[6] Pour tout graphe total G d'une chaine P_n d'ordre n, $n \geq 2$, ona :*

1. $\gamma_{\widehat{d}}(G) = \begin{cases} 3 & Si \quad n = 4. \\ n & Sinon. \end{cases}$
2. $\gamma_d(G) = \begin{cases} 2 & Si \quad n = 2. \\ n-1 & n \geq 3. \end{cases}$

théorème 2.4.20 *[6] Pour tout graphe total G d'une chaine P_n d'ordre n, ona : $\gamma_o(G) = \gamma_{\widehat{o}}(G) = n$.*

Le graphe total d'un cycle

théorème 2.4.21 *[6] pour tout graphe total G d'un cycle C_n d'ordre n, $n \geq 3$, ona : $\gamma_d(G) = \gamma_{\widehat{d}}(G) = n$.*

théorème 2.4.22 *[6] pour tout graphe total G d'un cycle C_n d'ordre n, $n \geq 3$, ona :*

$$\gamma_o(G) = \gamma_{\widehat{o}}(G) = \begin{cases} n & Si \quad n \equiv 0[2]. \\ n+1 & n \equiv 1[2]. \end{cases}$$

2.4.9 Les graphes roues

théorème 2.4.23 *[6] Soit W_n la roue d'ordre n, alors*

1. $\gamma_d(W_n) = 1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(W_n) = 1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

théorème 2.4.24 *[6] Soit W_n la roue d'ordre n, alors*

1. $\gamma_o(G) = \begin{cases} 1 + \frac{n-1}{3} & Si \quad n \equiv 1[3]. \\ 2 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil & n \equiv 2, 0[3]. \end{cases}$
2. $\gamma_{\widehat{o}}(W_n) = 1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

CHAPITRE 3

ETUDE DES PARAMÈTRES D'ALLIANCES GLOBALES DANS QUELQUES CLASSES DE GRAPHES

Dans ce chapitre, nous étudions certains paramètres d'alliances globales fortes. Dans la première partie de ce chapitre, nous calculons les nombres d'alliances globales fortes dans des graphes particuliers. Dans la deuxième partie, nous donnons quelques relations entre les paramètres d'alliances globales fortes.

3.1 Calcul des nombres d'alliances défensives et offensives globales fortes dans les chenilles.

définition 3.1.1 *Une chenille est un arbre dans lequel tous les sommets sont à la distance* 1 *d'un chemin central.*

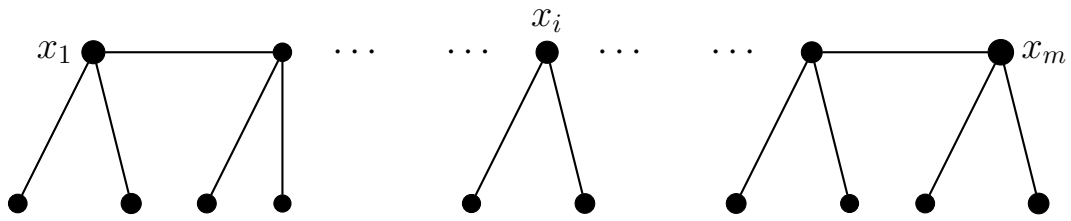


FIGURE 3.1: Le graphe G est une chenille Ch(2,2.....2,2).

proposition 3.1.1 *Soit G un graphe chenille Ch*$(2, 2.....2, 2)$*, de m sommets supports avec* $m \geq 2$*, alors*

1. $\gamma_{\widehat{d}}\ (G) = m + 2.$

2. $\gamma_{\widehat{o}}\ (G) = 2\ m + \lceil \frac{m}{3} \rceil.$

preuve 3.1.1

1. *Soit G un graphe chenille Ch*$(2, 2.....2, 2)$ *de m sommets supports et de p feuilles* $(p = 2m)$ *et soit* $S = \gamma_{\widehat{d}}$*-ensemble et soit* x_1 *et* x_m *les deux sommets supports d'extrimités et soit* l_1 *une feuille de* x_1 *et* l_m *une feuille de* x_m *et soit x un sommet support différent de* x_1 *et* x_2 *dans la chaine* P_n=$\{x_1, ..., x_i, ...x_m\}$.

Par la remarque 2.2.1, *tous sommets supports sont dans S .*

$|N[x] \cap S| = 3$ *et* $|N(x) \cap (V - S)| = 2$ *d'ou* $|N[x] \cap S| > |N(x) \cap (V - S)|$.

D'autre part

$|N[x_1] \cap S| = |N[x_m] \cap S| = 2$ *et* $|N(x_1) \cap S| = |N(x_m) \cap S| = 2.$

Ajoutons l_1 *et* l_m *à S on obtient* $\gamma_{\widehat{d}}$*-ensemble de G d'ou* $|S| = m + 2.$

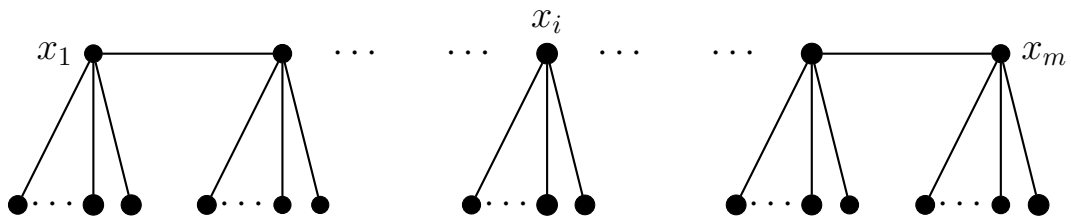


FIGURE 3.2: Le graphe G est une chenille Ch(p,p,.....,p)

proposition 3.1.2 *Soit G un graphe chenille Ch(p,p,.....,p) de m sommets support et (m.p) feuilles avec m,p* $\geq$ *3, alors*

1. $\gamma_{\widehat{d}}\ (G) = \begin{cases} 2 + m\frac{p}{2} & Si \quad p \equiv 0[2]. \\ m + m\lfloor \frac{p}{2} \rfloor & Si \quad p \equiv 1[2]. \end{cases}$

2. $\gamma_{\widehat{o}}\ (G) = \begin{cases} p + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor & Si \quad p = 3. \\ p & si \quad p \geq 4. \end{cases}$

preuve 3.1.2

1. *Soit G un graphe chenille Ch*$(p, p.....p, p)$ *de m sommets supports et de (m.p) feuilles et soit* $S = \gamma_{\widehat{d}}$*-ensemble et soit* x_1 *et* x_m *les deux*

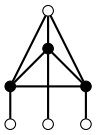
sommets supports d'extrimités et soit x un sommet support différent de x_1 *et* x_m *dans la chaine* $P_n = \{x_1, ..., x_i, ...x_m\}$ *avec* $m, p \geq 3$
et $1 \leq k \leq p$.
Par la remarque 2.2.1, *tous sommets supports sont dans S.*
$|N[x] \cap S|$=3 *et* $|N(x) \cap (V - S)|$=*p, d'ou* $|N[x] \cap S| < |N(x) \cap (V - S)|$.
Donc il faut ajouter k sommets à x pour vérifier l'iégalité, donc
$|N[x] \cap S| + k >$ *p-k* $\Rightarrow 3 + 2k > p \Rightarrow k > \frac{p-3}{2}$.
Si p est pair, alors $k \geq \frac{p}{2}$ *- 1 et* $k \geq \frac{p-1}{2}$ *si p est impair.*
D'autre part
$|N[x_1] \cap S|$=$|N[x_m] \cap S|$ =2 *et* $|N(x_1) \cap (V - S)|$=$|N(x_m) \cap (V - S)|$=*p*
d'ou $|N[x_1] \cap S| < |N(x_1) \cap (V - S)|$ *et* $|N[x_m] \cap S| < |N(x_m) \cap (V - S)|$.
donc il faut ajouter k' sommets à x_1 *et* x_m *pour vérifier l'iégalité, donc*
$|N[x_1] \cap S|$ + *k'* > *p-k'* $\Rightarrow$ *2 + 2k'* $> p \Rightarrow$ *k'* $> \frac{p-2}{2}$.
Si p est pair alors $k \geq \frac{p}{2}$ *et si p est impair, alors* $k \geq \frac{p-1}{2}$.
Finallement si p est pair, alors on obtient $\gamma_{\widehat{d}}$*-ensemble de G, d'ou*
$|S| = m + 2(\frac{p}{2}) + (m-2)(\frac{p}{2} - 1) = 2 + m\frac{p}{2}$.
Si p est impair, alors on obtient $\gamma_{\widehat{d}}$*-ensemble de G, d'ou*
$|S| = m + 2(\frac{p-1}{2}) + (m-2)\frac{p-1}{2} = m + m\lfloor\frac{p}{2}\rfloor$.

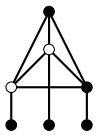
2. *Soit G un graphe chenille Ch(p, p.....p, p) de m sommets supports et de (m.p) feuilles et soit* $S = \gamma_{\widehat{o}}$*-ensemble et soit* x_1 *et* x_m *les deux sommets supports d'extrimités et soit x un sommet support différent de* x_1 *et* x_m *dans la chaine* $P_n = \{x_1, ..., x_i, ...x_m\}$ *avec m,p* $\geq$ *3.*
Par la remarque 2.2.2, *tous les feuilles sont dans S.*
Si $p \geq 4$, *alors* $|N[x] \cap (V - S)| = 3 < |(x) \cap S| = m.p.$
D'autre part
$|N(x_1) \cap S| = |N(x_m) \cap S| = m.p > |N[x_1] \cap (V - S)|$=$|N[x_m] \cap (V - S)|$=2,
on obtient $\gamma_{\widehat{o}}$*-ensemble de G, d'ou* $|S|$= *(m.p).*

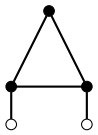
3.2 Calcul des nombres d'alliances défensives et offensives globales fortes dans les graphes milieux.

Le graphe milieu d'une étoile

L'exemple suivant précise $\gamma_{\widehat{d}}$ et $\gamma_{\widehat{o}}$ dans le graphe milieu de S_2 et S_3


$\gamma_{\widehat{d}}\,\mathrm{M}(S_3) = 3.$


$\gamma_{\widehat{o}}\,\mathrm{M}(S_3) = 5.$


$\gamma_{\widehat{d}}\,\mathrm{M}(S_2) = 3.$

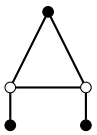

$\gamma_{\widehat{o}}\,\mathrm{M}(S_2) = 3.$

FIGURE 3.3:

proposition 3.2.1 *Pour tout graphe milieu G d'une étoile S_n d'ordre n avec $n \geq 2$, ona :*

1. $\gamma_{\widehat{d}}(G) = \begin{cases} 3 & Si \quad n = 2. \\ n & Si \quad n \geq 3. \end{cases}$
2. $\gamma_{\widehat{o}}(G) = 1 + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

preuve 3.2.1

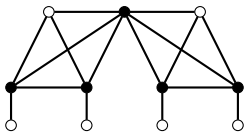
1. *Soit G un graphe milieu d'une étoile S_n avec $n \geq 3$ et soit $S = \gamma_{\widehat{d}}$-ensemble, et soit x_i les sommet supports de G avec $i = \overline{1,n}$.*

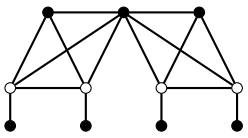
Par la remarque 2.2.1 tous les sommets supports sont dans S.

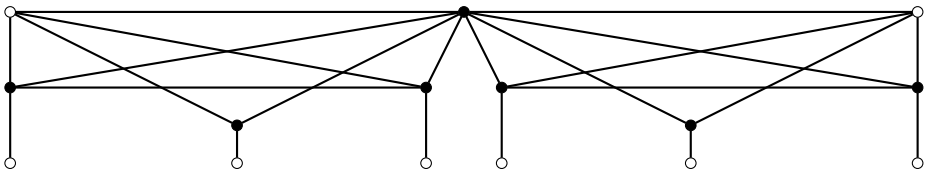
$|N[x_i] \cap S| = n > |N(x_i) \cap (V - S)| = 2$, on obtient $\gamma_{\widehat{d}}$-ensemble, d'ou $|S| = n$.

Le cas de $n = 2$, on a le précisé dans la figure précédente.

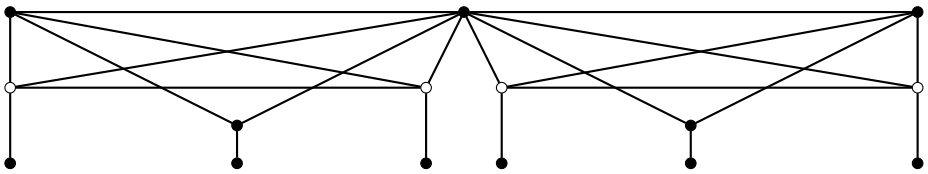
Le graphe milieu d'une double étoile


$\gamma_{\widehat{d}}\,\mathrm{M}(S_{2,2}) = 5.$


$\gamma_{\widehat{o}}\,\mathrm{M}(S_{2,2}) = 7.$



$\gamma_{\widehat{d}}\,\mathrm{M}(S_{3,3}) = 7.$



$\gamma_{\widehat{o}}\,\mathrm{M}(S_{3,3}) = 11.$

FIGURE 3.4:

proposition 3.2.2 *Pour tout graphe milieu G d'une double étoile $S_{p,q}$ avec p,q ≥ 2 ona :*

1. $\gamma_{\widehat{d}}(G) = \begin{cases} p+q \quad Si \quad p,q \geq 4. \\ p+q+1 \quad si \quad (p,q=3,2) \quad ou \quad (q=3). \end{cases}$
2. $\gamma_{\widehat{o}}(G) = 3 + p + q + \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor.$

preuve 3.2.2

1. *Soit G un graphe milieu d'une double étoile $S_{p,q}$ de m sommets supports (m = p + q) avec p,q ≥ 4, et soit S = $\gamma_{\widehat{d}}$-ensemble et soit x un sommet support de G.*

Par la remarque 2.2.1, tous les sommets support sont dans S.

$|N[x] \cap S| \geq 4$ et $|N(x) \cap (v - S)| = 3$, donc $|N[x] \cap S| > |N(x) \cap (V - S)|$, on obtient $\gamma_{\widehat{d}}$-ensemble de G, d'ou $|S| = p + q$.

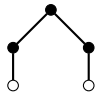
Le reste des cas particuliers, on a les précisés dans les graphes de la figure précédente.

3.3 Relations entre les paramètres d'alliances globales fortes $\gamma_{\widehat{d}}$ et $\gamma_{\widehat{o}}$ dans quelque classes des graphes

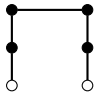
Dans cette section nous donnons quelques relations entre les paramètres d'alliance globale forte $\gamma_{\widehat{d}}$ et $\gamma_{\widehat{o}}$ dans quelque classes des graphes : chaines, cycles, étoiles, doubles étoiles, graphes complet, graphes biparti complet, chenilles, graphes milieu d'une chaine et d'une cycle, graphes total d'une chaine et d'une cycle.

3.3.1 Les chaines

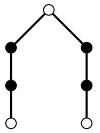
Dans les deux figures suivantes on va voir la relation entre $\gamma_{\widehat{d}}(P_n)$ et $\gamma_{\widehat{o}}(P_n)$, dans les cas ou n = $\{5, 6, 7, 8\}$.



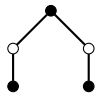
$\gamma_{\widehat{d}}(P_5) = 3.$



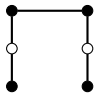
$\gamma_{\widehat{d}}(P_6) = 4.$



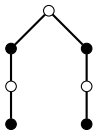
$\gamma_{\widehat{d}}(P_7) = 4.$



$\gamma_{\widehat{o}}(P_5) = 3.$

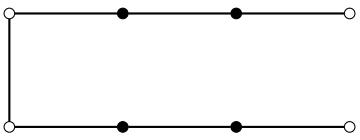


$\gamma_{\widehat{o}}(P_6) = 4.$

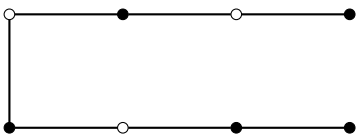


$\gamma_{\widehat{o}}(P_7) = 4.$

FIGURE 3.5: Exemple des cas ou $\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \gamma_{\widehat{d}}(P_n)$.



$\gamma_{\widehat{d}}(P_8) = 4.$



$\gamma_{\widehat{o}}(P_8) = 5.$

FIGURE 3.6: Exemple des cas ou $\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \gamma_{\widehat{d}}(P_n) + 1$.

proposition 3.3.1 *Pour toute chaine d'ordre $n \geq 2$, ona*

$$\gamma_{\widehat{d}}(P_n) = \begin{cases} \gamma_{\widehat{o}}(P_n) & si \quad n \equiv 0[4]. \\ \gamma_{\widehat{o}}(P_n) + 1 & sinon. \end{cases}$$

preuve 3.3.1 *Pour toute chaine d'ordre n*≥ 2

Par la théorème 2.4.1 *et la théorème* 2.4.3*, on distingue les cas suivants :*

* *Si* $n \equiv 0[4]$

$\gamma_{\widehat{d}}(P_n) = \frac{n}{2}$*, et* $\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \frac{n}{2} + 1$*, d'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \gamma_{\widehat{d}}(P_n) + 1$.

* *Si* $n \equiv 1[4]$

$\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \gamma_{\widehat{d}}(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

* *Si* $n \equiv 2[4]$

$\gamma_{\widehat{d}}(P_n) = \gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \frac{n}{2} + 1$.

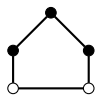
* *Si* $n \equiv 3[4]$

$\gamma_{\widehat{d}}(P_n) = \gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Pour toute chaine d'ordre n, ona : $\gamma_{\widehat{d}}(P_n) \leq \gamma_{\widehat{o}}(P_n) + 1$.

3.3.2 Les cycles

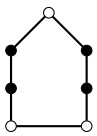
Dans les deux figures suivantes on va voir la relation entre $\gamma_{\widehat{d}}(C_n)$ et $\gamma_{\widehat{o}}(C_n)$ dans les cas ou n = $\{4, 5, 6, 7\}$.



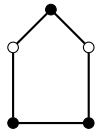
$\gamma_{\widehat{d}}(C_5) = 3.$



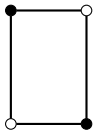
$\gamma_{\widehat{d}}(C_4) = 2.$



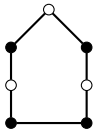
$\gamma_{\widehat{d}}(C_7) = 4.$



$\gamma_{\widehat{o}}(C_5) = 3.$

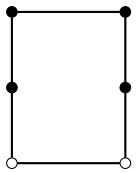


$\gamma_{\widehat{o}}(C_4) = 2.$

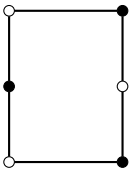


$\gamma_{\widehat{o}}(C_7) = 4.$

FIGURE 3.7: Exemple des cas ou $\gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \gamma_{\widehat{o}}(C_n)$.



$\gamma_{\widehat{d}}(C_6) = 4.$



$\gamma_{\widehat{o}}(C_6) = 3.$

FIGURE 3.8: Exemple des cas ou $\gamma_{\widehat{o}}(C_n) = \gamma_{\widehat{d}}(C_n) + 1$.

proposition 3.3.2 *Pour tout cycle d'ordre n avec* $n \geq 3$, *ona :*

$$\gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \begin{cases} \gamma_{\widehat{o}}(C_n) + 1 \quad si \quad n \equiv 2[4]. \\ \gamma_{\widehat{o}}(C_n) \quad sinon. \end{cases}$$

preuve 3.3.2 *Pour tout cycle d'ordre* $n \geq 3$

Par la théorème 2.4.5 *et la théorème* 2.4.6, *on distingue les cas suivants :*

* *Si* $n \equiv 2[4]$

$\gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \frac{n}{2} + 1$, *et* $\gamma_{\widehat{o}}(C_n) = \frac{n}{2}$, *d'ou* $\gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \gamma_{\widehat{o}}(C_n) + 1$.

* *Si* $n \equiv 0[4]$

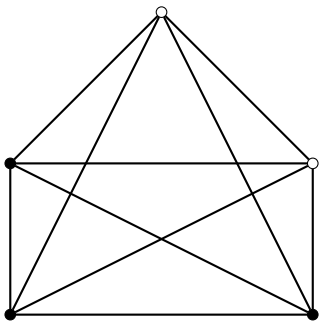
$\gamma_{\widehat{o}}(C_n) = \gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \frac{n}{2}$.

* *Si* $n \equiv 1, 3[4]$

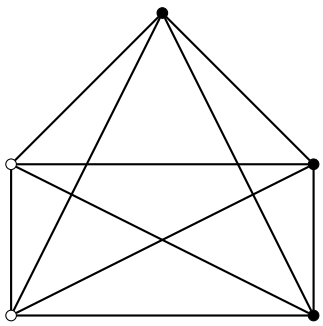
$\gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \frac{n+1}{2} = \gamma_{\widehat{o}}(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Pour tout cycle d'ordre n avec n ≥ 3, $\gamma_{\widehat{o}}(C_n) \leq \gamma_{\widehat{d}}(C_n) + 1$.

3.3.3 Les graphes complets



$\gamma_{\widehat{d}}(K_5) = 3.$



$\gamma_{\widehat{o}}(K_5) = 3.$

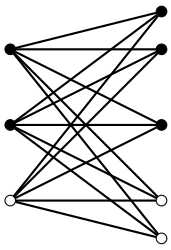
FIGURE 3.9:

proposition 3.3.3 *Pour tout graphe complet K_n, d'ordre $n \geq 2$ ona :* $\gamma_{\widehat{d}}(K_n) = \gamma_{\widehat{o}}(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

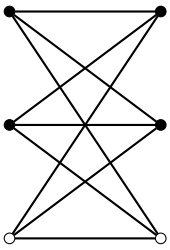
preuve 3.3.3 *Par la théorème* 2.4.7 *et la théorème* 2.4.8.

3.3.4 Les graphes biparti complet

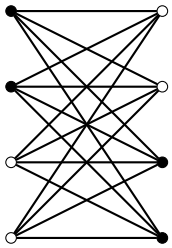
On va précésée la relation entre $\gamma_{\widehat{d}}(K_{m,n})$ et $\gamma_{\widehat{o}}(K_{m,n})$ avec touts les cas possibles dans le figure suivante.



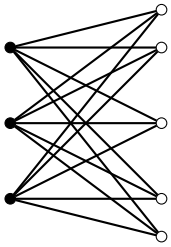
$\gamma_{\widehat{d}}(K_{3,5}) = 5.$



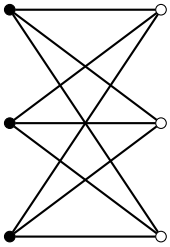
$\gamma_{\widehat{d}}(K_{3,3}) = 4.$



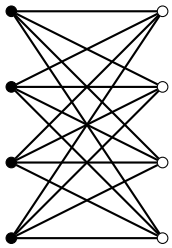
$\gamma_{\widehat{d}}(K_{4,4}) = 4.$



$\gamma_{\widehat{o}}(K_{3,5}) = 3.$



$\gamma_{\widehat{o}}(K_{3,3}) = 3.$



$\gamma_{\widehat{o}}(K_{4,4}) = 4.$

FIGURE 3.10: Représentation de $\gamma_{\widehat{o}}$ et $\gamma_{\widehat{d}}$ dans $K_{3,3}$, $K_{4,4}$ et $K_{3,5}$.

proposition 3.3.4 *Pour tout graphe biparti complet $K_{n,m}$, $m \geq n \geq 2$ ona :* $\gamma_{\widehat{d}}(K_{m,n}) \geq \gamma_{\widehat{o}}(K_{m,n})$

preuve 3.3.4 *Pour tout graphe biparti complet $K_{m,n}$ avec $m \geq n \geq 2$ et par la théorème* 2.4.9 *et la théorème* 2.4.10, $\gamma_{\widehat{d}}(K_{m,n}) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ *et* $\gamma_{\widehat{o}}(K_{m,n}) = n$.
Ona $m \geq n \Rightarrow \frac{m}{2} \geq \frac{n}{2} \Rightarrow \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{m}{2} \rceil \geq 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq n$.
D'ou $\gamma_{\widehat{d}}(K_{m,n}) \geq \gamma_{\widehat{o}}(K_{m,n})$.

corollaire 3.3.1 *Pour tout graphe biparti complet $K_{n,n}$ ona :*
1. $\gamma_{\widehat{o}}(K_{n,n}) = n$.

2. $\gamma_{\widehat{d}}(K_{n,n}) = \begin{cases} \gamma_{\widehat{o}}(K_{n,n}) & Si \quad n \ \ est \ \ pair. \\ \gamma_{\widehat{o}}(K_{n,n}) + 1 & Sinon. \end{cases}$

3.3.5 Les étoiles

Dans la figure suivante on va voir la relation entre $\gamma_{\widehat{d}}(S_p)$ et $\gamma_{\widehat{o}}(S_p)$.

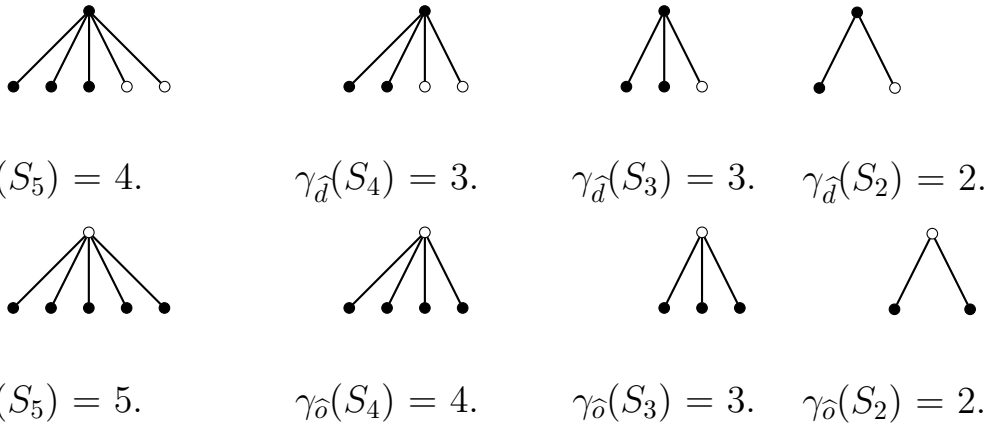


FIGURE 3.11: Représentation de $\gamma_{\widehat{d}}(S_p)$ et $\gamma_{\widehat{o}}(S_p)$.

proposition 3.3.5 *Pour toute étoile (S_p), $p \geq 2$ ona :*

$\gamma_{\widehat{o}}(S_p) = \begin{cases} 2\gamma_{\widehat{d}}(S_p) - 2 & Si \quad p \equiv 0[2]. \\ 2\gamma_{\widehat{d}}(S_p) - 3 & Si \quad p \equiv 1[2]. \end{cases}$

preuve 3.3.5 *Pour toute étoile (S_p), $p \geq 2$*

Par la théorème 2.4.11 et la théorème 2.4.12, on distingue les cas suivants :

** p est pair :*

$\gamma_{\widehat{d}}(S_p) = 1 + \frac{p}{2} = 1 + \frac{1}{2}\ \gamma_{\widehat{o}}(S_p).$

D'ou $\gamma_{\widehat{o}}(S_p) = 2\ \gamma_{\widehat{d}}(S_p) - 2.$

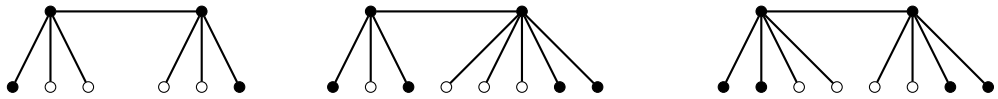
** p est impair :*

$\gamma_{\widehat{d}}(S_p) = 1 + \frac{p+1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ \gamma_{\widehat{o}}(S_p).$

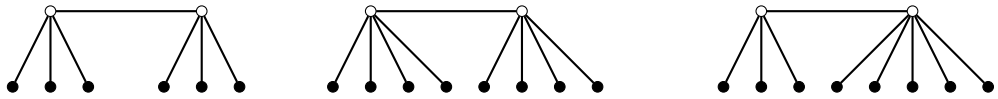
D'ou $\gamma_{\widehat{o}}(S_p) = 2\ \gamma_{\widehat{d}}(S_p) - 3.$

3.3.6 Les doubles étoiles

La figure suivante représente quelques cas de $\gamma_{\widehat{d}}(S_{p,q})$ et $\gamma_{\widehat{o}}(S_{p,q})$



$\gamma_{\widehat{d}}(S_{3,3}) = 4.$ $\gamma_{\widehat{d}}(S_{3,5}) = 5.$ $\gamma_{\widehat{d}}(S_{4,4}) = 6.$



$\gamma_{\widehat{o}}(S_{3,3}) = 6.$ $\gamma_{\widehat{o}}(S_{4,4}) = 8.$ $\gamma_{\widehat{o}}(S_{3,5}) = 8.$

FIGURE 3.12:

proposition 3.3.6 *Pour toute double étoile $(S_{p,q})$ avec $p,q \geq 3$ ona :*

$$\gamma_{\widehat{o}}(S_{p,q}) = \begin{cases} 2\gamma_{\widehat{d}} - 4 & Si \quad p,q \equiv 0[2]. \\ 2\gamma_{\widehat{d}} - 2 & Si \quad p,q \equiv 1[2]. \\ 2\gamma_{\widehat{d}} - 3 & Si \quad p \equiv 1[2] \quad ou \quad q \equiv 1[2]. \end{cases}$$

preuve 3.3.6 *Soit une double étoile $S_{p,q}$ avec $p,q \geq 3$.*

Par la théorème 2.4.13 et la théorème 2.4.14, on distingue les cas suivants :

** p,q sont pairs :*

$\gamma_{\widehat{d}}\ (S_{p,q}) = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + 2 = \frac{1}{2}\ \gamma_{\widehat{o}}(S_{p,q}) + 2$, *d'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(S_{p,q}) = 2\ \gamma_{\widehat{d}}\ (S_{p,q}) - 4.$

** p,q sont impairs :*

$\gamma_{\widehat{d}}\ (S_{p,q}) = \frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2} + 2 = \frac{p+q}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ \gamma_{\widehat{o}}(S_{p,q}) + 1$, *d'ou*

$\gamma_{\widehat{o}}(S_{p,q}) = 2\ \gamma_{\widehat{d}}\ (S_{p,q}) - 2.$

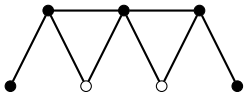
** p ou q est impair : (on pose que p est impair)*

$\gamma_{\widehat{d}}\ (S_{p,q}) = \frac{p-1}{2} + \frac{q}{2} + 2 = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\ \gamma_{\widehat{o}}(S_{p,q}) + \frac{3}{2}$, *d'ou*

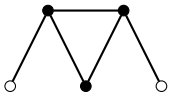
$\gamma_{\widehat{o}}(S_{p,q}) = 2\ \gamma_{\widehat{d}}\ (S_{p,q}) - 3.$

3.3.7 Les graphes milieux

Le graphe milieu d'une chaine



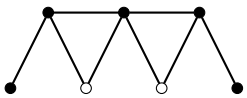
$\gamma_{\widehat{d}}\, M(P_4) = 5.$



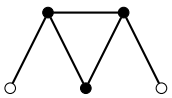
$\gamma_{\widehat{d}}\, M(P_3) = 3.$



$\gamma_{\widehat{d}}\, M(P_2) = 2.$



$\gamma_{\widehat{d}}\, M(P_4) = 5.$



$\gamma_{\widehat{d}}\, M(P_3) = 3.$



$\gamma_{\widehat{d}}\, M(P_2) = 2.$

proposition 3.3.7 *Pour tout graphe milieu G d'une chaine d'ordre n avec $n \geq 2$, ona :*

$$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \begin{cases} \gamma_{\widehat{d}} + 1 & Si \quad n = 3. \\ \gamma_{\widehat{d}} & Sinon. \end{cases}$$

preuve 3.3.7 *Pour tout graphe milieu G d'une chaine d'ordre $n \geq 2$*
Par la théorème 2.4.16 et la théorème 2.4.17, on distingue les cas suivants :

* $n = 2$:

$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \gamma_{\widehat{d}}(G) = 2.$

* $n = 3$:

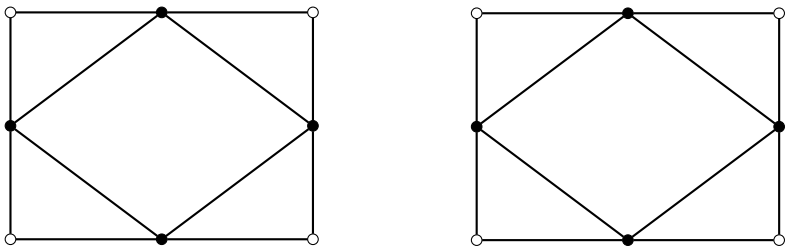
$\gamma_{\widehat{o}}(G) = 4$ *et* $\gamma_{\widehat{d}}(G) = 3$. *D'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \gamma_{\widehat{d}}(G) + 1$.

* $n \geq 4$:

$\gamma_{\widehat{d}}(G) = n + 1$ *et* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = n + 1$. *D'ou* $\gamma_{\widehat{d}}(G) = \gamma_{\widehat{o}}(G)$.

Pour tout G graphe milieu d'une chaine d'ordre n, $\gamma_{\widehat{o}}(\mathrm{G}) \leq \gamma_{\widehat{d}}(\mathrm{G}) + 1$.

Le graphe milieu d'une cycle



$\gamma_{\widehat{d}}(M(C_4)) = 4.$ $\gamma_{\widehat{o}}(M(C_4)) = 4.$

FIGURE 3.13: Représentation de $\gamma_{\widehat{o}}$ et $\gamma_{\widehat{d}}$ dans $M(C_4)$.

proposition 3.3.8 *Pour tout G graphe milieu d'une cycle d'ordre n, ona : $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \gamma_{\widehat{d}}(G) = n$.*

preuve 3.3.8 *Par la théorème* 2.4.17 *et la théorème* 2.4.18.

Le graphe milieu d'une étoile

proposition 3.3.9 *Pour tout graphe milieu G d'une étoile S_n d'ordre n avec $n \geq 2$, ona :*

$$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \begin{cases} \gamma_{\widehat{d}}(G) + 1 \quad Si \quad n = 2. \\ (\frac{3}{2})\gamma_{\widehat{d}}(G) + 1 \qquad Si \quad n \equiv 0[2] \quad et \quad n \geq 3. \\ (\frac{3}{2})\gamma_{\widehat{d}}(G) + \frac{1}{2} \qquad Si \quad n \equiv 1[2] \quad et \quad n \geq 3. \end{cases}$$

preuve 3.3.9 *pour tout graphe milieu G d'une étoile S_n d'ordre n, par la proposition 3.2.1, on distingue les cas suivants :*

* $n = 2$:

$\gamma_{\widehat{d}}(G) = 3$ *et* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = 4$. *D'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \gamma_{\widehat{d}}(G) + 1$.

* $n \geq 3$ *et pair :*

$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \frac{3n}{2} + 1$ *et* $\gamma_{\widehat{d}}(G) = n$, *d'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \frac{3}{2}\ \gamma_{\widehat{d}}(G) + 1$.

* $n \geq 3$ *et impair :*

$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \frac{3n}{2} + \frac{1}{2}$ *et* $\gamma_{\widehat{d}}(G) = n$, *d'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \frac{3}{2}\ \gamma_{\widehat{d}}(G) + \frac{1}{2}$.

corollaire 3.3.2 *Pour tout graphe milieu G d'une étoile S_n d'ordre n avec $n \geq 2$, ona : $\gamma_{\widehat{o}}(G) \leq \frac{3}{2}\ \gamma_{\widehat{d}}(G) + 1$.*

3.3.8 Les graphes totaux

Le graphe total d'une chaine

proposition 3.3.10

Pour tout G graphe total d'une chaine d'ordre $n \geq 2$

$$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \begin{cases} \gamma_{\widehat{d}}(G) + 1 & Si \quad n = 4. \\ \gamma_{\widehat{d}}(G) & Sinon. \end{cases}$$

preuve 3.3.10 *Par la théorème* 2.4.20 *et la théorème* 2.4.21.

Le graphe total d'une cycle

proposition 3.3.11

Pour tout G graphe total d'une cycle d'ordre $n \geq 3$

$$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \begin{cases} \gamma_{\widehat{d}}(G) & Si \quad n \quad est \quad pair. \\ \gamma_{\widehat{d}}(G) + 1 & Sinon. \end{cases}$$

preuve 3.3.11 *Par la théorème* 2.4.22 *et la théorème* 2.4.23.

3.3.9 Les graphes roues

proposition 3.3.12 *Pour tout G graphe roue d'ordre* $n \geq 3$

$\gamma_{\widehat{o}}(G) = \gamma_{\widehat{d}}(G)$

preuve 3.3.12 *Par la théorème* 2.4.25 *et la théorème* 2.4.25.

3.3.10 Les chenilles

proposition 3.3.13 *Pour tout G graphe chenille Ch(p,p,.....,p) de m sommets supports et (m.p) feuilles avec* $p \geq 3$ *et* $m \geq 2$*, ona :*

$\gamma_{\widehat{o}}\ (G) \geq 2\ \gamma_{\widehat{d}}(G) - 4.$

preuve 3.3.13 *Pour tout G graphe chenille Ch(p,p,.....,p) de m sommets supports avec* $p \geq 3$ *et* $m \geq 2$*, par la théorème 3.1.2, on distingue les cas suivants :*

** p est pair :*

$\gamma_{\widehat{d}}(G) = m\frac{p}{2} + 2$ *et* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = m.p$, *alors* $\gamma_{\widehat{d}}(G) = \frac{1}{2}\ \gamma_{\widehat{o}}(G) + 2$, *d'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = 2\ \gamma_{\widehat{d}}(G)$ - 4.

** p est impair :*

$m\frac{p}{2} > m\lfloor\frac{p}{2}\rfloor \Rightarrow m + m\frac{p}{2} > m + m\lfloor\frac{p}{2}\rfloor$, *alors* $\frac{1}{2}\ \gamma_{\widehat{o}}(G) + m > \gamma_{\widehat{d}}\ (G)$, *donc pour toute* $m \geq 2\ \gamma_{\widehat{o}}(G) > 2\ \gamma_{\widehat{d}}(G)$ - $2m$, *on prend* m=2, *d'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(G) > 2\ \gamma_{\widehat{d}}(G)$ - 4.

corollaire 3.3.3 *Pour tout G graphe chenille Ch(p,p,.....,p) de m sommets supports et (m.p) feuilles avec* $m \geq 2$ *et* $p \geq 3$.
$\gamma_{\widehat{o}}\ (G) = 2\ \gamma_{\widehat{d}}(G)$ - 4 *Si* $p \geq 3$ *et* $p \equiv 0[2]$.

proposition 3.3.14 *Pour tout G graphe chenille Ch*$(2, 2, ..., 2)$ *de m sommets supports et p feuilles avec* $m \geq 2$ *et* $p = 2m$, *ona :*
$\gamma_{\widehat{o}}(G) \geq \frac{5}{2}\ \gamma_{\widehat{d}}(G) - 5$.

preuve 3.3.14 *Pour tout G graphe chenille Ch*$(2, 2, ..., 2)$ *de m sommets supports avec* $m \geq 2$.
Par la théorème 3.1.1, on distingue les cas suivants :

** $m \equiv 0[3]$:*

$\gamma_{\widehat{d}}(G) = m + 2$ *et* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = 2m + \frac{m}{3} = \frac{7m}{3}$.
Ona $7m \leq \frac{15m}{2} = \frac{15(m+2)}{2}$ - 15 $\Rightarrow \frac{7m}{3} \leq \frac{5(m+2)}{2}$ - 5, *d'ou* $\gamma_{\widehat{o}}(G) \leq \frac{5}{2}\ \gamma_{\widehat{d}}(G)$ - 5.

** $m \equiv 1[3]$: ($m = 3k + 4$)*

$\gamma_{\widehat{d}}(G) = 3k + 6$ *et* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = 7k + 10$, *et ona* $7k + 10 \leq \frac{15}{2}k + 10$.
D'ou $\gamma_{\widehat{o}}(G) \leq \frac{15}{2}\ \gamma_{\widehat{d}}(G)$ - 5.

** $m \equiv 2[3]$: ($m = 3k + 5$)*

$\gamma_{\widehat{d}}(G) = 3k + 7$ *et* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = 7k + 12$, *et ona* $7k + 12 \leq \frac{15}{2}k + \frac{25}{2}$.
D'ou $\gamma_{\widehat{o}}(G) \leq \frac{5}{2}\ \gamma_{\widehat{d}}(G)$ - 5.

corollaire 3.3.4 *Pour tout G graphe chenille Ch*$(2, 2...., 2)$ *de m sommets supports,* $\gamma_{\widehat{o}}(G) = (\frac{5}{2})\gamma_{\widehat{d}}(G)$ - 5, *Si* $m = 4, 2$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de certins paramètres d'alliances dans les graphes. Dans un premier temps nous avons donner les principaux résultats éxistants sur ce concept.
Dans un second temps, nous avons établi quelques propriétés sur les nombres d'alliances défensives et offensives globales fortes, et on a déterminé les relations entre tes paramètres dans des classes des graphes particuliers.
Par ailleur, nous avons recevé, tout au long de ce mémoire, des problèmes non encore résolus, nous proposons ces questions pour des recherches futur :
Trouver des relations entre tes paramètres d'alliances globales dans d'autres classes de graphes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et M.A. Henning, *Global defensive alliances in graphs*,The Electronic. J. combin 10 (2003) R47.

[2] J.A. Rodriguez et J. M. Sigarreta, *Spectral study of alliances in graphs*,Discussiones Mathematices graph theory 27 (1) (2007) 143 § 157.

[3] M. chelleli, *Offensive alliances in bipartits graphs*, J. combin. Math. Combin. Comput. Accepté.

[4] J. A. Rodriguez-Velazquez, J. M. Sigarreta, *Offensive alliances in cubic graphs*, Internationalmathematical forum 1 (36) (2006) 1773-1782.

[5] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, et S. T. Hedetniemi, *Powerful alliances in Grephs*, Discrete math., Vol. 309, Issue 8 (2009), pp. 2140-2147.

[6] F. Souad, M. Fatma zohra, *etude des alliances dans les Grephes*, Mémoire de master math universié de Medea.(2017).

[7] M. Bouzefrane, M.chellali, *on the global offensive alliance number of a tree*, Opuscula math.29(3)(2009) 223-228.

[8] M. Bouzefrane, S.ouatiki, *on the global offensive alliance in unicycle graphs*, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 15 (2018) 72-78.

[9] M. Bouzefrane, M.Chellali, *A note on global alliances in trees*, Opuscula math.31(2)(2011)

[10] M. Behzad, *A criterion for the planarity of the total graph of a graph*, Proc.Camb.Philos. Soc. 63 : 679-681,1967.

[11] T. Hamada, I. Yoshimura, *Traversabilitiy and connectivitiy of the middle graphe of a graph*, Discrete Math. 14 : 247-256, 1976