REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MEDEA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DES SCIENCES DE LA MATIERE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présentée pour obtenir le diplôme de

Master Physique

Option : Physique Théorique

Par

Bounebal Nora & Saoudaoui Cherifa

THEME

Discussion de certains systèmes quantiques par l'approche de la Supersymétrie

Soutenu le : 22/06/2020

Devant le Jury :

Président :	M.O.Houhou	M.C.B	Univ. Médéa
Examinateurs :			
	M. Ahmed Ammar	M.C.B	Univ. Médéa
	M. Radjai	M.C.B	Univ. Médéa
Rapporteur :	N. Zaghou	M.C.B	Univ. Médéa

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté un traitement approximatif par l'approche de SUSYQM de deux travaux concernant des sujets d'actualité en théorie quantique relativiste. L'objectif principal de ce travail est déterminé les états liés d'une particule relativiste avoir une masse dépendante de la position.

Le premier travail, nous avons obtenu le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés de l'équation de Klein-Gordon à trois dimensions pour une particule sans spin avec une masse dépendante de l'espace, en présence les deux potentiels vecteur et scalaire du type de Hulthén en utilisant le formalisme de la SUSYQM.

Le deuxième travail, nous avons étudié les états liés de l'équation de Dirac à trois dimensions d'une particule relativiste de spin-1/2, soumise un couplage de potentiels vecteur et scalaire du type Manning-Rosen. Par conséquent, nous avons obtenu les spectres énergétiques et le spineur correspondant en utilisant l'approche de la SUSYQM.

De plus, nous avons discuté certains cas spéciaux pour chaque problème.

Mots clés :

Supersymétrie en mécanique quantique, équation de Klein-Gordon, équation de Dirac, potentiel Hulthén, potentiel de Manning-Rosen, masse dépendante de la position, spectre d'énergie, fonctions propres.

ملخص

في هذه المذكرة، قدمنا معالجة تقريبية من خلال نهج التناظر الفائق الكمي لنموذجين كميين يتعلقان بالمواضيع الحالية في نظرية الكم النسبي. الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تحديد حالات المرتبطة للجسيمات النسبية التي يكون لها كتلة متعلقة بالموضع.

في العمل الأول ، حصلنا على طيف الطاقة ودوال الموجة للحالات المرتبطة لمعادلة كلاين-جوردون ذات ثلاث أبعاد لجسيم ذو سبين يساوي الصفر مع كتلة متعلقة بالموضع ، في وجود كل من الكمون شعاعي و سلمي من نوع كمون هيلتان باستخدام طريقة التناظر الفائق في الميكانيكا الكم.

أما العمل الثاني ، فقد درسنا الحالات المرتبطة لمعادلة ديراك ثلاثية الأبعاد للجسيمات النسبية ذات سبين يساوي 1/2، والتي تخضع لكمون شعاعي و سلمي من نوع كمون مانينغ -روزين. و باستخدام طريقة التناظر الفائق في الميكانيكا الكم حصلنا على أطياف الطاقة و سبينورالموافق للجسيمات الكمية النسبية.

بالإضافة إلى ذلك، ناقشنا بعض الحالات الخاصة لكل مشكلة.

الكلمات المفاتيح::

التناظر الفائق في الميكانيكا الكم ، معادلة كلاين-جوردون ، معادلة ديراك ، كمون هيلتان ، كمون مانينغ -روزين ، الكتلة المتعلقة بالموضع ، طيف الطاقة ، الدوال الذاتية

Abstract

In this master's thesis, we have presented an approximate treatment by the SUSYQM approach of two works concerning topical subjects in the relativistic quantum theory. The main objective of this work is to determine the bound states of a relativistic particle to have a position-dependent mass.

In the first work, we obtained the energy spectrum and the wave functions of the bound states of the three-dimensional Klein-Gordon equation for a spinless particle with a position-dependent mass, in the presence of both vector and scalar potentials of the Hulthén type using the SUSYQM formalism.

in the second work we studied the bound states of of the three-dimensional Dirac equation of a relativistic particle of spin-1/2, subjected to a coupling of vector and scalar potentials of the Manning-Rosen type. Consequently, we obtained the energy spectra and the corresponding spinor using the SUSYQM approach.

In addition, we have discussed some a special cases for each problem.

Keywords :

Supersymmetry in quantum mechanics, Klein-Gordon equation, Dirac equation, Hulthén potential, Manning-Rosen potential, position dependent mass, energy spectrum, eigenfunctions

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique des Techniques Expérimentales et ses Applications (PTEA), Département de Sciences de la Matière, Faculté des Sciences, Université de Médéa. En premiers lien, nous remercions Dieu-Puissant de nous avoir donné la force et la volonté de faire ce travail.

La première personne que nous tenons à remercier est notre encadrant Mr. N. Zaghou, pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Nous tenant à remercier sincèrement Mr.O.Houhou, d'avoir présidé notre jury du mémoire, et Mr. M. Ahmed Ammar et Mr. M.Radjai en tant que examinateurs. Se sont toujours montrés à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Nous voudrions exprimer nos remerciements à tous les enseignants de la physique de l'université de Médéa, ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué à développer ce travail.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos parent nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à toutes et à tous.

Bounebal - Saoudaoui

Dedicace

Je dédie ce travail

À mon encourageant mon Père

À ma chère Mère pour son patient

À ma soeur : HADJER, MARIA

À mes frères : MOHAMMED, SOFAIN

À toutes mes amies surtout ma diamant MALIKA, LEILA qui ma pousser à travail et encouragé

Et spécialement à mon binôme de ce travail Cherifa

Bounebal Nora.

Dedicace

J*e dédie ce travail*

À mes chère parents, pour tous leurs sacrifices leur amour, leur soutien et leur prières tout au lang de mes études

À mes chères frères, Aiman, Abdelmalek , Fatma zohra , pour leur encouragemeant

À mes amis et à mon binôme Nora

Merci d'être toujours là pour moi.

Saoudaoui Cherifa

Table des matières

Introduction **9**

1 Supersymétrie en mécanique quantique **14**

1.1 Introduction 14

1.2 Résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension par la méthode supersymétrique 15

1.2.1 Valeurs propres et fonctions propres des partenaires H_0 et H_1 16

1.2.2 Relation entre les valeurs propres et fonctions propres correspondantes de deux Hamiltoniens partenaires 17

1.3 Factorisation et Hiérarchie d'Hamiltoniens partenaires 19

1.4 Invariance de forme 23

1.4.1 Forme de la fonction f 26

2 Solutions approximatives de l'équation de Klein-Gordon avec une masse dépendante de la position, en présence des potentiels vecteur et scalaire du type Hulthén **27**

2.1 Introduction 27

2.2 Equation de Klein-Gordon stationnaire pour une particule dont la masse dépend de sa position 28

2.3 Particule relativiste de spin zéro soumise à un potentiel du type Hulthén 29

2.4 Valeurs propres et fonctions propres 31

2.4.1 Spectre énergétique 31

2.4.2 Fonctions d'onde normalisées 34

2.5 Cas particuliers 36
2.5.1 Premier cas : Masse constante 36
2.5.2 Deuxième cas : Potentiel vecteur de Hulthèn 37
2.5.3 Troisième cas : Potentiel scalaire de Hulthèn 38

3 Solutions approximatives de l'équation de Dirac d'une particule de spin-1/2 dans des potentiels vecteur et scalaire du type Manning-Rosen **40**
3.1 Introduction 40
3.2 Equation de Dirac pour un potentiel central 41
3.3 Etats liés d'une particule relativiste de spin-1/2 soumise à un potentiel de Manning-Rosen 46
3.4 Spectre d'énergie et spineur des états liés 47
3.4.1 Calcul du spectre d'énergie 47
3.4.2 Détermination du spineur 50
3.5 Cas particulier 51

Conclusion **53**

Bibliographie **55**

Introduction

La mécanique quantique est à la base de toutes les théories modernes décrivant les phénomènes physiques qui se manifestent à l'échelle atomique. Les phénomènes physiques sont décrits par l'état quantique qui contient toutes les informations sur les particules d'un système et son comportement suit l'équation de Schrödinger. Cet état est exprimé par la fonction d'onde de l'Hamiltonien et le spectre d'énergie associé.

Dans l'éspace à trois dimensions, nous considérons un système quantique décrit par un Hamiltonien H indépendant du temps, tel que son évolution obéit à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\mathbf{r},t\right)=H\psi\left(\mathbf{r},t\right);\mathbf{r}\equiv r,\theta,\varphi, \tag{1}$$

où r est une coordonnée radiale, θ et φ sont des coordonnées angulaires. Cependant, en physique quantique, en vertu de la dualité onde-corpuscule, la particule est maintenant décrite par une fonction d'onde $\psi\left(\mathbf{r},t\right)$ dont nous décrirons la signification et l'équation qui donne son évolution. Ainsi, l'équation non relativiste (1) est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire.

Les solutions particulières de l'équation de Schrödinger sont données sous la forme suivante

$$\psi\left(\mathbf{r},t\right)=e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\Phi\left(\mathbf{r}\right), \tag{2}$$

où E est le spectre d'énergie du système, et $\Phi\left(\mathbf{r}\right)$ satisfait l'équation de Schrödinger stationnaire

$$H\Phi\left(\mathbf{r}\right)=E\Phi\left(\mathbf{r}\right), \tag{3}$$

Si on considère une particule de masse constante m, soumise à un potentiel scalaire $V\left(\mathbf{r}\right)$, l'Hamitlonien du système s'écrit

$$H=\frac{\mathbf{p}^{2}}{2m}+V\left(\mathbf{r}\right), \tag{4}$$

où $\mathbf{p}$ est l'opérateur impulsion de la particule, le terme $\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ représente l'énergie cinétique et$V(\mathbf{r})$ est l'énergie potentielle. En revanche, si la masse de la particule dépendante de la position, i.e. $m = M(\mathbf{r})$, on peut écrire l'Hamiltonien du système physique (4) sous la forme

$$H = \left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\} + V(\mathbf{r}), \tag{5}$$

où $\{\}$ représente la forme symétrisée. Il existe plusieurs formes de l'opérateur de l'énergie cinétique $\left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\}$ dans la littérature [1], ce qui conduit à une ambiguïté dans la définition de l'Hamiltonien quantique adéquat, et par conséquent dans le spectre.

En mécanique quantique relativiste, l'équation de Klein-Gordon est une version relativiste de l'équation de Schrödinger décrivant des particules scalaires de spin zéro. D'autre part, l'équation de Dirac est une équation décrit le comportement de particules relativistes de spins demi-entiers, comme les électrons, cette équation, nous pouvons l'écrire également sous la forme d'une équation de type Schrödinger.

Lorsque l'on cherche une solution stationnaire relativiste d'une particule de spin zéro, de masse m, soumise à un potentiel scalaire $S(\mathbf{r})$ et un potentiel vecteur $V(\mathbf{r})$, l'équation de Klein-Gordon s'écrit

$$\left(\mathbf{p}^2 c^2 + \left[\left(mc^2 + S(\mathbf{r}) \right)^2 - \left(E - V(\mathbf{r}) \right)^2 \right] \right) \varphi(\mathbf{r}) = 0, \tag{6}$$

où E est l'énergie de la particule et $\varphi(\mathbf{r})$ est la fonction d'onde correspondante. Il est évident que cette équation n'est pas une équation aux valeurs propres comme celle de Schrödinger, si la masse de la particule est dépendante de sa position, l'équation (6) conserve la même forme.

L'équation de Dirac joue un rôle fondamental en mécanique quantique relativiste, car c'est elle qui régit l'évolution dans le temps du système physique. Ainsi, l'équation de Dirac stationnaire à trois dimensions d'une particule de spin-1/2, de masse m, soumise à un couplage de potentiels scalaire $S(\mathbf{r})$ et vecteur $V(\mathbf{r})$ s'écrit

$$\left[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta \left(c^2 m + S(\mathbf{r}) \right) + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \tag{7}$$

où E est l'énergie de la particule fermionique et $\Psi(\mathbf{r})$ est le spineur correspondant, et $\boldsymbol{\alpha}$ et β sont les matrices de Dirac habituelles. Cependant, l'équation de Dirac conserve la même forme si la masse varie avec sa position.

Ainsi, la recherche de méthodes ou approches générales de résolution de l'équation relativiste stationnaire comme l'équation de Klein-Gordon et Dirac a toujours intéressé par les physiciens. Il existe maintenant plusieurs techniques de résolution exacte ou approximative de l'équation relativiste pour des potentiels radiaux. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode de l'intégrale de chemin, la méthode de Nikiforov-Uvarov, la méthode analytique usuelle, le formalisme de la supersymétrie en mécanique quantique, ...etc

La méthode de supersymétrie en mécanique quantique [3, 4, 5] est une approche purement algébrique pour déterminer les états liés de certains types de potentiels dits invariants de forme. Cette méthode repose essentiellement sur la recherche d'une fonction associée au potentiel étudié, dite superpotentiel, qu'on peut obtenir par la résolution d'une équation du type Riccati, à partir de laquelle on détermine la fonction propre de l'état fondamental.

Dans ce mémoire, nous allons utiliser la méthode supersymétrique pour résoudre approximative l'équation relativiste (équation de Klein-Gordon et Dirac) dans le cas des potentiels centraux pour une masse de particule varie avec sa position. L'idée fondamentale consiste à d'écrire une particule de masse dépendante de l'espace dans une région plongée dans un potentiel à symétrie sphérique. L'équation relativiste est séparée en deux parties, une partie radiale et une partie angulaire. La partie angulaire est la même pour tous les potentiels radiaux. Ainsi, le problème consiste à résoudre la partie radiale de l'équation relativiste dans chaque cas étudié.

Le travail de ce mémoire de Master s'articule sur les thèmes cités plus haut. Dans le chapitre 1, nous développons en bref l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique pour un potentiel à une dimension possédant des états liés. En considérant la notion d'invariance de forme, on dérive l'expression générale de l'énergie du $n^{\text{ième}}$ état ainsi que la fonction propre correspondante.

Le travail original, réalisé dans ce mémoire fait l'objet des chapitres 2 et 3. Le chapitre 2 est consacré à la résolution approximative de l'équation de Klein-Gordon à trois dimensions d'une particule relativiste de spin zéro avec une masse dépendante de la position, en présence les potentiels scalaire et vecteur par l'utilisation de l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique. Ce problème se réduit à la résolution de l'équation de type Schrödinger avec masse constante pour un potentiel effectif dépendent de l'énergie. Par ailleurs, certains résultats connus dans la littérature sont alors retrouvés comme cas particuliers.

Dans le troisième chapitre 3, tout d'abord, nous présentons en détail la démarche à suivre qui permet de réduire l'équation relativiste de Dirac pour une particule de masse dépendante de la position en une équation aux valeurs propres du type Schrödinger, Ce chapitre est réservé à la résolution approximative de l'équation de Dirac à trois dimensions d'une particule chargée de spin-1/2 où la masse est une fonction dépendente de sa position soumise aux deux potentiels scalaire et vecteur. Le spectre des niveaux d'énergie et les deux composantes de spineur correspondantes sont obtenus en utilisant l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique. En particulier, nous discutons certains cas particuliers qu'on obtient en faisant des ajustements dans les paramètres de notre modèle.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Supersymétrie en mécanique quantique

1.1 Introduction

La supersymétrie est une approche pour la résolution algébrique de l'équation de Schrödinger pour les états liés d'une certaine classe de potentiels dits invariants de forme. Elle peut aussi, servir pour générer de nouveaux potentiels exactement solubles dont les spectres et les fonctions propres associées sont liés à ceux d'un potentiel de référence.

Quand on a commencé à étudier les différents aspects de la mécanique quantique supersymétrique (SUSYQM), il était déjà clair que ce champ est intéressant non seulement comme modèle pour tester les méthodes de la théorie du champs mais il était évident que son application à la résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire constitue une ramification de la méthode de factorisation qui fut initiée par Schrödinger lui-même et développée plus tard par Infeld et Hull [2]. Graduellement, les bases de la SUSYQM se sont développées avec les travaux de Cooper, Junker et essentiellement ceux de Gendeshtein [4], qui ont conduit à la découverte d'une multitudes de potentiels analytiquement solubles.

De façon générale, on peut voir la supersymétrie comme une méthode de résolution de l'équation de Schrödinger [6], basée sur une nouvelle approche purement algébrique. En outre, les méthodes de la SUSY qui incluent le concept de l'invariance de forme sont ensembles des reformulations de l'idée de Riccati concernant l'utilisation de l'équivalence entre les solutions

de l'équation de Riccati et l'équation différentielle linéaire de deuxième ordre.

1.2 Résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension par la méthode supersymétrique

L'Hamiltonien d'une particule quantique en mouvement à une dimension sous l'effet du potentiel scalaire $V(x)$ s'écrit,

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \tag{1.1}$$

où dans un système d'unités, on a $\hbar = 2m = 1$. Si le potentiel satisfait aux conditions de confinement, la particule peut avoir des états stationnaires $\Psi_n(x)$ d'énergies quantifiées E_n, qui sont les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x), \ n = 0, 1, \cdots \tag{1.2}$$

Le nombre de ces états peut être fini ou infini selon l'allure du potentiel. Par ailleurs, il est bien établi qu'à une dimension il n'existe pas de dégénérescence ; autrement dit, à chaque valeur de l'énergie correspond une seule fonction propre. Ainsi, nous allons classer les énergies E_n par ordre croissant, de sorte que E_0 est la plus basse énergie,

$$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots .$$

On cherche à construire deux Hamiltoniens H_0 et H_1, (dénotés parfois aussi H_- et H_+) dits partenaires, donnés par

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) = A_0^+ A_0 \tag{1.3}$$

et

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = A_0 A_0^+, \tag{1.4}$$

avec A_0 donné par

$$A_0 = \frac{d}{dx} + W_0(x), \tag{1.5}$$

et A^+ est son hermitique adjoint. La fonction $W_0(x)$, appelée super potentiel, est reliée au potentiel $V(x)$ et à l'énergie de son état fondamental E_0 par l'équation différentielle non linéaire

$$\begin{aligned} W_0^2(x) - \frac{dW_0(x)}{dx} &= V(x) - E_0 \\ &= V_0(x), \end{aligned} \tag{1.6}$$

ou encore

$$\begin{aligned} W_0^2(x) + \frac{dW_0(x)}{dx} &= V_1(x) \\ &= V_0(x) + 2\frac{dW_0(x)}{dx}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

L'équation de Schrödinger pour les partenaires H_0 et H_1 s'écrit :

$$A_0^+ A_0 \Psi_n^{(0)}(x) = E_n^{(0)} \Psi_n^{(0)}(x), \tag{1.8}$$

et

$$A_0 A_0^+ \Psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)}(x), \tag{1.9}$$

Ainsi, par construction, l'énergie de l'état fondamental de H_0 est nulle alors que les énergies des états excités sont toutes positives :

$$E_0^{(0)} = 0 \text{ et } E_n^{(0)} > 0, \text{ pour } n \geq 1. \tag{1.10}$$

Nous allons montrer dans les sections qui suivent que les valeurs propres du partenaire H_1 et les fonctions propres correspondantes se déduisent directement à partir de celles de H_0 par des relations simples.

1.2.1 Valeurs propres et fonctions propres des partenaires H_0 et H_1

Par construction, nous avons pour $n = 0$

$$\begin{aligned} H_0 \Psi_0^{(0)}(x) &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) \right) \Psi_0^{(0)}(x) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

de sorte que la fonction propre de l'état fondamental est reliée au potentiel par

$$V_0(x) = \frac{\frac{d^2 \Psi_0^{(0)}(x)}{dx^2}}{\Psi_0^{(0)}(x)}. \tag{1.12}$$

Autrement dit, le potentiel $V_0(x)$ est complètement défini par la connaissance de la fonction propre du niveau fondamental et vice versa.

Cependant, sachant que les valeurs propres d'un Hamiltonien à une dimension ne sont pas dégénérées, on en déduit le résultat (1.10). En particulier, pour $n = 0$, il découle que

$$A_0 \Psi_0^{(0)}(x) = 0, \tag{1.13}$$

et donc la fonction propre de l'état fondamental de H_0 est aussi fonction propre de A_0 avec la valeur propre 0. De là, on obtient que

$$W_0(x) = -\frac{\Psi_n^{(0)'}(x)}{\Psi_n^{(0)}(x)}, \tag{1.14}$$

qui s'intègre pour donner la fonction propre de l'état fondamental sous la forme

$$\Psi_0^{(0)}(x) = N_0 \exp\left[-\int^x W(y)\, dy\right], \tag{1.15}$$

où N_0 est une constante de normalisation de l'état fondamental.

Ainsi, connaissant le superpotentiel $W_0(x)$, on peut en déduire directement la fonction propre de l'état fondamental de H_0.

1.2.2 Relation entre les valeurs propres et fonctions propres correspondantes de deux Hamiltoniens partenaires

A partir de maintenant nous supposons que le problème étudié,est caractérisé par le potentiel $V_0(x)$, n'est pas à symétrie brisée.

Pour trouver les relations entre les valeurs propres et fonctions propres des partenaires, nous considérons que les énergies propres des deux partenaires sont classées dans un ordre croissant, i,e

$$E_{n+1}^{(i)} > E_n^{(i)} \text{ pour } i = 0, 1. \tag{1.16}$$

Partons de l'égalité (1.8) et appliquons l'opérateur A_0 à gauche des deux membres. Sachant que le produit des opérateurs linéaires agissant sur le même espace de Hilbert est associatif, il vient

$$A_0 A_0^+ \left(A\Psi_n^{(0)}(x)\right) = E_n^{(0)} \left(A_0 \Psi_n^{(0)}(x)\right), \tag{1.17}$$

qui s'écrit

$$H_1 \left(A_0 \Psi_n^{(0)}(x)\right) = E_n^{(0)} \left(A_0 \Psi_n^{(0)}(x)\right), . \tag{1.18}$$

Ainsi, si $A_0\Psi_n^{(0)}(x) \neq 0$, c'est-à-dire pour $n \neq 0$, il découle que cette fonction est fonction propre de H_1 avec la valeur propre $E_n^{(0)}$.

De la même manière, en agissant sur les deux membres de (1.9) à gauche par A^+, on obtient

$$A_0^+ A_0 \left(A^+ \Psi_n^{(1)}(x)\right) = E_n^{(1)} \left(A_0^+ \Psi_n^{(1)}(x)\right), \tag{1.19}$$

ou encore

$$H_0 \left(A_0^+ \Psi_n^{(1)}(x)\right) = E_n^{(1)} \left(A_0^+ \Psi_n^{(1)}(x)\right). \tag{1.20}$$

Donc, si $A_0^+ \Psi_n^{(1)}(x) \neq 0$, $E_n^{(1)}$ est aussi valeur propre de H_0 pour la fonction propre $\left(A_0 \Psi_n^{(1)}(x)\right)$.

Conséquemment, toutes les valeurs propres de H_0, à l'exception de $E_0^{(0)}$, sont aussi des valeurs propre de H_1, i.e : H_0 et H_1 possèdent le même spectre énergétique sauf pour l'énergie de l'état fondamental $E_0^{(0)}$, qui ne fait pas partie du spectre de H_1. Puisque les spectres vérifient la relation (1.16), on obtient la relation entre les $E_n^{(1)}$ et $E_n^{(0)}$ sous la forme

$$E_{n+1}^{(0)} = E_n^{(1)} \text{ pour } n \geq 1, \text{ et } E_0^{(0)} = 0. \tag{1.21}$$

On peut dresser le schéma suivant :

H_0		H_1
$E_2^{(0)}$	$\vec{A}$	$E_1^{(1)}$
$E_1^{(0)}$	A^+ $\longleftarrow$	$E_0^{(1)}$
$E_0^{(0)}$		

Action des opérateurs A_0 et A_0^+

En comparant (1.9) et (1.18), on obtient la relation entre les fonctions propres de H_0 et H_1 sous la forme

$$\Psi_n^{(1)}(x) = A_0 \Psi_{n+1}^{(0)}(x), \tag{1.22}$$

Si les $\Psi_n^{(1)}(x)$ et $\Psi_{n+1}^{(0)}(x)$ sont normalisées à 1, à partir de l'équation (1.22), on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \Psi_n^{*(1)}(x)\, \Psi_n^{(1)}(x)\, dx &= \int \Psi_{n+1}^{*(0)}(x)\, A_0^+ A_0 \Psi_{n+1}^{(0)}(x)\, dx \\ &= \int^x \Psi_{n+1}^{*(0)}(x)\, \Psi_{n+1}^{(0)}(x)\, dx, \end{aligned} \tag{1.23}$$

On peut donc écrire explicitement

$$\Psi_n^{(1)}(x) = A_0 \Psi_{n+1}^{(0)}(x), \tag{1.24}$$

et

$$\Psi_{n+1}^{(0)}(x) = A_0^+ \Psi_n^{(1)}(x). \tag{1.25}$$

Alors, on déduit que l'opérateur A_0 resp $\left(A_0^+\right)$ transforme la fonction propre de H_0 resp (H_1) en une fonction propre de H_1 resp (H_0). Ceci, veut dire que si l'on connaît toutes les fonctions propres de H_0, on peut déterminer celles de H_1 et vice versa, par application répétée de A_0 ou A_0^+. A chaque étape, la fonction propre obtenue est de carré sommable avec la même valeur propre.

Donc, la première conclusion à tirer de la supersymétrie et qu'elle peut servir pour obtenir de nouveaux potentiels solubles. En effet, à partir des fonctions propres et valeurs propres de H_0 on peut obtenir ceux du partenaire H_1 dont le potentiel $V_1(x)$ est relié à $V_0(x)$ par (1.7) mais dont les allures peuvent avoir des forme très différentes.

1.3 Factorisation et Hiérarchie d'Hamiltoniens partenaires

Dans la section précédente on a vu qu'une fois la fonction propre de l'état fondamental correspondant à un Hamiltonien H_0 est connue, on peut construire le super potentiel $W_0(x)$ et vice versa. Ainsi l'Hamiltonien H_0 peut être factorisé comme le produit des opérateurs A_0 et A_0^+ sous la forme (1.3) et on peut lui associer un partenaire H_1. Le spectre et les fonctions propres correspondantes de ce dernier sont complètement déduites à partir de ceux de H_0.

De la même manière, connaissant la fonction propre de l'état fondamental de H_1, on peut obtenir un nouveau superpotentiel $W_1(x)$, à partir duquel on construit aussi deux nouveaux opérateurs A_1 et A_1^+. Ces derniers serviront pour factoriser H_1 comme $H_1 = A_1^+ A_1$ et définir son partenaire comme $H_2 = A_1 A_1^+$. Cette procédure peut être poursuivie successivement pour construire une hiérachie d'Hamiltoniens partenaires $H_1, H_1, \cdots, H_m, \cdots$ dont les spectres et les fonctions propres correspondantes sont reliés par des relations semblables. Nous allons développer ceci dans ce qui suit.

Soit donc l'Hamiltonien de départ H_0 et admettons qu'il dépend explicitement d'un ensemble de paramètres réels, décrits par a_0. Admettons aussi que l'énergie de son état fondamental $E_0^{(0)}(a_1)$ et la fonction propre correspondante $\Psi_0^{(0)}(x, a_1)$ sont connues. On peut donc

écrire

$$\begin{aligned} H_0(x,a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x,a_1) \\ &= A_0(a_1) A_0^+(a_1) + E_0^{(0)}(a_0), \end{aligned} \tag{1.26}$$

avec

$$\begin{cases} A_0^+(x,a_1) = -\frac{d}{dx} + W_0(x,a_1) \\ A_0(x,a_1) = -\frac{d}{dx} + W_0(x,a_1) \end{cases}, \tag{1.27}$$

et

$$W_0(x,a_1) = -\frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(0)}(x,a_1). \tag{1.28}$$

Le partenaire supersymétrique est donné par

$$\begin{aligned} H_1(x,a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x,a_1) \\ &= A_0(a_1) A_0^+(a_1) + E_0^{(0)}(a_1), \end{aligned} \tag{1.29}$$

avec

$$\begin{aligned} V_1(x,a_1) &= W_0^2(x,a_1) + W_0'(x,a_1) + E_0^{(0)}(a_1) \\ &= V_0(x,a_1) + 2W_0'(x,a_1) \\ &= V_0(x,a_1) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_0^{(0)}(x,a_1). \end{aligned} \tag{1.30}$$

A partir des équations (1.21), (1.24) et (1.25), les énergies propres et les fonctions propres correspondantes sont reliées par

$$E_{n+1}^{(0)}(a_1) = E_n^{(1)}(a_1), \tag{1.31}$$

et

$$\begin{cases} \Psi_n^{(1)}(x,a_1) = A_0(a_1) \Psi_{n+1}^{(0)}(x,a_1), \\ \Psi_{n+1}^{(0)}(x,a_1) = A_0^+(a_1) \Psi_n^{(1)}(x,a_1). \end{cases} \tag{1.32}$$

Maintenant, on peut refactoriser H_1, dont l'énergie de l'état fondamental est $E_0^{(1)}(a_1) = E_1^{(0)}(a_1)$, pour déterminer son partenaire H_2, et ensuite on peut écrire H_1 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H_1(x,a_1) &= A_0(x,a_1) A_0^+(x,a_1) + E_0^{(0)}(a_1) \\ &= A_1^+(x,a_1) A_1(x,a_1) + E_1^{(0)}(a_1), \end{aligned} \tag{1.33}$$

avec

$$\begin{cases} A_1^+(x,a_1) = -\frac{d}{dx} + W_1(x,a_1), \\ A_1(x,a_1) = -\frac{d}{dx} + W_1(x,a_1), \end{cases} \tag{1.34}$$

où

$$W_1(x,a_1) = -\frac{d}{dx}\ln\Psi_0^{(1)}(x,a_1). \tag{1.35}$$

Le nouveau partenaire de H_1 sera défini par

$$\begin{aligned} H_2(x,a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x,a_1) \\ &= A_1(x,a_1)A_1^+(x,a_1) + E_1^{(0)}(a_1), \end{aligned} \tag{1.36}$$

alors la forme de $V_2(x,a_1)$ est donnée par

$$\begin{aligned} V_2(x,a_1) &= W_1^2(x,a_1) + W_1'(x,a_1) + E_1^{(0)}(a_1) \\ &= V_1(x,a_1) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Psi_0^{(1)}(x,a_1) \\ &= V_0(x,a_1) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\left(\Psi_0^{(0)}(x,a_1)\Psi_0^{(1)}(x,a_1)\right). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Par ailleurs, on a

$$E_n^{(2)}(a_1) = E_{n+1}^{(1)}(a_1) = E_{n+2}^{(0)}(a_1), \tag{1.38}$$

et

$$\Psi_n^{(2)}(x,a_1) = A_1(a_1)\Psi_{n+1}^{(1)}(x,a_1) \tag{1.39}$$

ou bien

$$\Psi_n^{(2)}(x,a_1) = A_1(a_1)A_0(a_1)\Psi_{n+2}^{(0)}(x,a_1). \tag{1.40}$$

L'inversion des relations (1.39) et (1.40) donne

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x,a_1) = A_1^+(a_1)\Psi_n^{(2)}(x,a_1), \tag{1.41}$$

et

$$\Psi_{n+2}^{(0)}(x,a_1) = A_0^+(a_1)A_1^+(a_1)\Psi_n^{(2)}(x,a_1). \tag{1.42}$$

La refactorisation de H_2 pour déterminer son partenaire H_3 conduit à définir $A_2(x,a_1)$ et son hermitique adjoint, de sorte que

$$H_2(x,a_1) = A_2^+(x,a_1)A_2(x,a_1) + E_2^{(0)}(a_1). \tag{1.43}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} A_2^+(x,a_1) = -\frac{d}{dx} + W_2(x,a_1), \\ A_2(x,a_1) = -\frac{d}{dx} + W_2(x,a_1), \end{cases} \tag{1.44}$$

avec

$$W_2(x,a_1) = -\frac{d}{dx}\ln\Psi_0^{(2)}(x,a_1). \tag{1.45}$$

Le partenaire H_3 est alors donné par

$$\begin{aligned} H_3(x,a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x,a_1) \\ &= A_2(x,a_1)A_2^+(x,a_1) + E_2^{(0)}(a_1), \end{aligned} \tag{1.46}$$

avec

$$V_3(x,a_1) = V_0(x,a_1) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\left(\Psi_0^{(0)}(x,a_1)\Psi_0^{(1)}(x,a_1)\Psi_0^{(2)}(x,a_1)\right), \tag{1.47}$$

tel que

$$E_n^{(3)}(a_1) = E_{n+1}^{(2)}(a_1) = E_{n+2}^{(1)}(a_1) = E_{n+3}^{(0)}(a_1), \tag{1.48}$$

et

$$\Psi_n^{(3)}(x,a_1) = A_2(a_1)A_1(a_1)A_0(a_1)\ \Psi_{n+3}^{(0)}(x,a_1), \tag{1.49}$$

Et la relation inversée de cette équation est donnée par

$$\Psi_{n+3}^{(0)}(x,a_1) = A_0^+(a_1)A_1^+(a_1)A_2^+(a_1)\ \Psi_n^{(3)}(x,a_1) \tag{1.50}$$

Puis, on refactorise H_3 pour déterminer son partenaire H_4 et ainsi de suite. Alors, de façon générale, si H_0 possède p états liés, on peut poursuivre cette procédure jusqu'à un ordre p et construire une hiérarchie de $p-1$ partenaires H_m (où $m = 1, 2, 3, \cdots, .p$) à partir de H_0. Chaque Hamiltonien H_m possède $(p-m)$ états liés de valeurs propres $E_n^{(0)}$ et de fonctions propres $\Psi_n^{(0)}$ avec $[m \leq n \leq p]$. Autrement dit, H_m ne possède pas les m premières valeurs propres de H_0 [3,5]. Si la symétrie se brise à une étape quelconque de la construction de cette hiérarchie, on ne peut pas aller plus loin et on doit s'arreter à ce niveau. Ainsi, si la symétrie n'est pas brisé à l'étape m, l'Hamiltonien correspondant H_m sera donné par

$$\begin{aligned} H_m(x,a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x,a_1) \\ &= A_m^+(a_1)A_m(a_1) + E_m^{(0)}(a_1), \end{aligned} \tag{1.51}$$

où

$$\begin{cases} A_m^+(a_1) = -\frac{d}{dx} + W_m(x, a_1) \\ A_m(a_1) = -\frac{d}{dx} + W_m(x, a_1) \end{cases}, \tag{1.52}$$

avec

$$W_m(x, a_1) = -\frac{\Psi_0^{(m)'}(x)}{\Psi_0^{(m)}(x)} = -\frac{d \ln \Psi_0^{(m)}(x, a_1)}{dx}. \tag{1.53}$$

La forme de $V_m(x, a_1)$ est donnée par

$$V_m(x, a_1) = V_0(x, a_1) - 2\frac{d^2 \ln\left(\Psi_0^{(0)}(x, a_1) \cdots \Psi_0^{(m-1)}(x, a_1)\right)}{dx^2}. \tag{1.54}$$

On a aussi

$$E_n^{(m)}(a_1) = E_{n+1}^{(m-1)}(a_1) = \cdots = E_{n+m}^{(0)}(a_1), \tag{1.55}$$

et

$$\Psi_n^{(m)}(x, a_1) = A_{m-1}(a_1) \cdots A_1(a_1) A_0(a_1) \Psi_{n+m}^{(0)}(x, a_1), \ m \geq 1, \tag{1.56}$$

La relation inverse de cette équation est donnée par

$$\Psi_{n+m}^{(0)}(x, a_1) = A_0^+(a_1) A_1^+(a_1) \cdots A_{m-1}^+(a_1) \Psi_n^{(m)}(x, a_1), \tag{1.57}$$

Aussi, on peut écrire

$$V_m(x, a_1) = V_0(x, a_1) - 2\frac{d^2 \ln\left(\Psi_0^{(0)}(x, a_1) \cdots \Psi_0^{(m-1)}(x, a_1)\right)}{dx^2}. \tag{1.58}$$

Enfin, si l'on connaît toutes les énergies propres et fonctions propres de H_0, on peut déduire celles des autres Hamiltoniens H_m.

1.4 Invariance de forme

En 1983, le concept de potentiels invariants de forme dans la structure de la mécanique quantique supersymétrique, a été introduit par Gendeshtein [4]. Comme on va le voir, quand cette propriété est satisfaite par un potentiel, il est aisé de déterminer son spectre d'une manière algébrique, simple et élégante. Autrement dit, l'invariance de forme peut être considérée comme une condition suffisante pour la solvabilité d'un potentiel mais elle n'est toutefois pas une condition nécessaire [3].

Maintenant, si $V_0(x, a_1)$ est un potentiel supersymétrique dépendant d'un ensemble de paramètres a_0, on dit qu'il est invariant de forme si son partenaire $V_1(x, a_1)$ s'écrit sous la forme

$$V_1(x, a_1) = V_0(x, a_2) + R(a_1) \tag{1.59}$$

où $R(a_1)$ est une fonction indépendante de x, appelée reste, et a_2 est un nouveau ensemble de paramètres, reliés aux anciens par une certaine fonction

$$a_2 = f(a_1). \tag{1.60}$$

Ainsi, de l'utilisation de la condition (1.59) et de la hiérarchie d'Hamiltoniens, discutée dans la section précédente, on peut facilement obtenir les valeurs propres et les fonctions propres quand la supersymétrie est non brisée. En effet, on a vu que l'état fondmental de H_0 est caractérisé par

$$\begin{cases} E_0^0(a_1) = 0 \\ \Psi_0^{(0)}(x, a_1) = \exp\left[-\int^x W_0(y, a_1)\, dy\right]. \end{cases} \tag{1.61}$$

Si on ajoute aux deux membres de (1.59) la partie cinétique, on peut écrire

$$\begin{aligned} H_1(x, a_1) &= H_0(x, a_2) + R(a_1) \\ &= A_0^+(x, a_2) A_0(x, a_2) + R(a_1). \end{aligned} \tag{1.62}$$

En comparant(1.33) et (1.62), on peut faire l'identification suivante

$$E_1^{(0)}(a_1) = R(a_1), \tag{1.63}$$

et

$$A_0(x, a_2) = A_1(x, a_1). \tag{1.64}$$

D'où $E_1^{(0)}(a_1)$ est simultanément l'énergie du premier état excité de H_0 et l'énergie de l'état fondamental de H_1, c'est-à-dire

$$E_1^{(0)}(a_1) = E_0^{(1)}(a_1) = R(a_1). \tag{1.65}$$

Par ailleurs, à partir de (1.62), les Hamiltoniens $H_1(x, a_1)$ et $H_0(x, a_2)$ possèdent les mêmes fonctions propres. On peut donc écrire

$$\Psi_n^{(1)}(x, a_1) = \Psi_n^{(0)}(x, a_2). \tag{1.66}$$

A partir de (1.66), on obtient

$$\begin{aligned} H_2(x,a_1) &= H_0(x,a_3)+R(a_2)+R(a_1) \\ &= A_0^+(x,a_4)A_0(x,a_3)+R(a_2)+R(a_1), \end{aligned} \tag{1.67}$$

et en comparant (1.43) et (1.67), on aboutit à l'identification suivante :

$$E_2^{(0)}(a_1) = E_1^{(1)}(a_1) = R(a_2)+R(a_1), \tag{1.68}$$

où $E_2^{(0)}(a_1)$ est l'énergie de premier état excité de H_1 et aussi l'énergie de l'état fondamental de H_2.

Ainsi, on a

$$A_0(x,a_3) = A_2(x,a_1), \tag{1.69}$$

et à partir de (1.67), l'Hamiltonien $H_2(x,a_1)$ et $H_0(x,a_3)$ possèdent les mêmes fonctions propres. Nous pouvons donc écrire

$$\Psi_n^{(2)}(x,a_1) = \Psi_n^{(0)}(x,a_3), \tag{1.70}$$

avec

$$a_3 = f(a_2) = f(f(a_1)). \tag{1.71}$$

Il est maintenant aisé de se rendre compte que de façon générale, on peut écrire

$$\begin{aligned} H_m(x,a_1) &= H_0(x,a_m)+R(a_{m-1})+\cdots+R(a_2)+R(a_1) \\ &= A_0^+(x,a_m)A_0(x,a_m)+\sum_{k=1}^{m-1}R(a_k)\ , \end{aligned} \tag{1.72}$$

avec

$$a_m = f^{m-1}(a_1), \tag{1.73}$$

et f^{m-1} signifie que la fonction f est appliquée $(m-1)$ fois.

On peut définir aussi une nouvelle forme de $H_m(x,a_1)$ comme

$$H_m(x,a_1) = -\frac{d^2}{dx^2}+V_0(x,a_m)+\sum_{k=1}^{m-1}R(a_k). \tag{1.74}$$

En comparant (1.51) et (1.72), on obtient

$$E_m^{(0)}(a_1) = \sum_{k=1}^{m-1}R(a_k)\ ;\ \ E_0^{(0)}(a_1) = 0, \tag{1.75}$$

et

$$A_m(x, a_1) = A_0(x, a_m). \tag{1.76}$$

En utilisant (1.72), il vient que

$$\Psi_n^{(m)}(x, a_1) = \Psi_n^{(0)}(x, a_m). \tag{1.77}$$

En reportant (1.76) et (1.77) dans (1.57), on obtient

$$\Psi_{n+m}^{(0)}(x, a_1) = A_0^+(a_1) A_0^+(a_2) \cdots A_0^+(a_m) \Psi_n^{(0)}(x, a_m), \tag{1.78}$$

Si on pose $n = 0$, on obtient

$$\Psi_m^{(0)}(x, a_0) = A_0^+(a_1) A_0^+(a_2) \cdots A_0^+(a_m) \ \Psi_0^{(0)}(x, a_m), \tag{1.79}$$

Enfin, si l'on connaît la fonction propre de l'état fondamental $\Psi_0^{(0)}(x, a_m)$ de H_0, on peut déterminer toutes les fonctions propres $\Psi_m^{(0)}(x, a_0)$ en appliquant l'opérateur A_0^+. Alors dans un cadre plus général, la relation (1.75) permet de générer la valeur de l'énergie de n'importe quel niveau de H_0 à partir de la fonction de son énergie fondamentale $E_0^{(0)}$ et le reste $R(a_0)$. Parallèlement, la relation (1.77) permet de générer la fonction propre de n'importe quel niveau de Hamiltonien à partir de la fonction propre du niveau fondamental.

1.4.1 Forme de la fonction f

D'après l'étude présentée plus haut, la fonction f qui caractérise l'invariance de forme d'un potentiel supersymétrique pourrait être arbitraire. Cependant, jusqu'à présent on a trouvé seulement trois formes différentes pour cette fonction. Au début de la découverte de l'invariance de forme, on a constaté pour tous les potentiels connus en mécanique quantique qui sont supersymétriques et invariants de forme, la fonction f génère une translation entre les anciens et les nouveaux paramètres,

$$a_1 = f(a_0) = a_0 + \alpha,$$

où α est un paramètre fixe. On a alors cru que seule l'invariance par translation est admise dans la supersymétrie en mécanique quantique.

En 1993 : Khare et U. Sukhatme [7] montrèrent qu'il peut exisiter d'autres types de fonctions de la forme

$$a_1 = qa_0, \text{ avec } 0 < q < 1, \tag{1.80}$$

Chapitre 2

Solutions approximatives de l'équation de Klein-Gordon avec une masse dépendante de la position, en présence des potentiels vecteur et scalaire du type Hulthén

2.1 Introduction

Les solutions analytiques exactes ou approximatives de l'équation relativiste d'une particule chargée de spin zéro avoir une masse dépendente de sa position, et en présence de deux potentiels Hermitiens vecteur et scalaire ou en l'absence de l'un d'eux, elles ont été d'attirer beaucoup d'attention dans la littérature récente, et cela est dû que aux systèmes avec masse dépendente de l'espace sont très utilisé dans de nombreux domaines pour étudier les propriétés physiques et électroniques de semi-conducteur. Parmi les travaux sont bien connus dans ce domaine dans l'espace à trois dimension, nous mentionnons d'entre eux, le travail de Arda et al [8] qui ont étudié les solutions approximatives de l'équation de Klein-Gordon avec une masse dépendante de la position en présence les deux potentiels scalaire et vecteur par la méthode de Nikiforov-

Uvarov. Malheureusement, les résultats obtenus dans la référence [8] sont incorrects et nous les avons donc recalculés en utilisant la méthode de supersymétrique en mécanique quantique. En 2012, Jia et al [9] ont discuté les solutions exactes des états liés de l'équation de Klein-Gordon avec masse dépendante de la position en présence à deux potentiels vecteur et scalaire par l'approche de la supersymmétrie en mécanique quantique. Le travail publié en 2013, Farrokh et al [10] ont traité les solutions approximatives de l'équation de Klein-Gordon d'une particule de spin zéro, de masse dépendante de sa position, et soumise aux deux potentiels scalaire et vecteur.

Dans ce chapitre, nous intéresserons à étudier un système quantique relativiste concernant à résolution de l'équation Klein-Gordon à trois dimension d'une particule de spin zéro possède une masse variable dépendante de la position soumise aux deux potentiels scalaire et vecteur en utilisant l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique

2.2 Equation de Klein-Gordon stationnaire pour une particule dont la masse dépend de sa position

Nous considérons l'équation de Klein-Gordon indépendante du temps pour une particule de spin zero avec une masse variable $M(r)$ doit être strictement positive, $M(r) > 0$, et soumise à un couplage de potentiel scalaire $S(r)$ et potentiel vecteur $V(r)$, s'écrit

$$\left[-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + \left(c^2 M(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r})\right)^2 - \left(E - V(\mathbf{r})\right)^2\right] \Psi(\mathbf{r}) = 0;\ \mathbf{r} = r, \theta, \varphi \tag{2.1}$$

où E est l'énergie de la particule,$\Psi(\mathbf{r})$ est la fonction d'onde totale correspondante, $\hbar$ est la constante de Planck devisée sur 2π et c est la vitesse de la lumière ($c = 3.10^8$ m/s). Si $M(\mathbf{r})$, $S(\mathbf{r})$ et $V(\mathbf{r})$ sont des fonctions centrales, i.e.,

$$M(\mathbf{r}) \equiv M(r),\ S(\mathbf{r}) \equiv S(r) \text{ et } V(\mathbf{r}) \equiv V(r), \tag{2.2}$$

et en écrivant la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r})$ sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(r, \theta, \varphi) = r^{-1} \phi(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{2.3}$$

où $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ sont les harmoniques sphériques, on obtient l'équation radial de Klein-Gordon sous la forme

$$\left\{-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{r^2}+\beta^2\left[\left(c^2M(r)+S(r)\right)^2+\left(E-V(r)\right)^2\right]\right\}\phi(r)=0. \tag{2.4}$$

où $\beta^2=1/\hbar^2c^2$. Cette équation désigne l'équation de type Schrödinger avec énergie zéro. Afin de résoudre l'équation différentielle (2.4) par la méthode de la sypersymétrie en mécanique quantique, on peut écrire cette équation sous la forme suivante

$$\left\{-\frac{d^2}{dr^2}+V_E(r)\right\}\psi(r)=\varepsilon_{nl}\psi(r), \tag{2.5}$$

avec

$$V_E(r)=\frac{l(l+1)}{r^2}+\beta^2\left[\left(c^2M(r)+S(r)\right)^2+\left(E-V(r)\right)^2\right], \tag{2.6}$$

où$V_E(r)$ est appelé le potentiel effectif dépendent de l'énergie E, le terme $\frac{l(l+1)}{r^2}$ est le potentiel centrifuge. Dans ce cas, on suppose que le paramètre E est considéré comme un constant dans (2.6). Par ailleurs, si les valeurs propres ε_{nl} et les fonctions correspondantes $\psi(r)$ sont obtenus algébriquement par l'approche de l'approche SUSYQM, les énergies E_n du système relativiste sont donnés par les solutions réelles de l'équation

$$\varepsilon_{nl}(E)=0, \tag{2.7}$$

et les fonctions d'onde correspondantes $\phi_{nl}(r)$ peuvent être déduites par

$$\phi(r)=\psi(r)|_{\varepsilon_{nl}(E)=0}. \tag{2.8}$$

où n et l est le nombre quantique radial et angulaire, respectivement.

2.3 Particule relativiste de spin zéro soumise à un potentiel du type Hulthén

Considérons une particule relativiste sans spin avec une masse dépendante l'espace, $M(r)$, soumise à deux potentiels vecteur $V(r)$ et scalaire $S(r)$. Les fonctions de la masse et les potentiels vecteur et scalaire sont données sous les formes suivantes

$$M(r)=m_0+\frac{m_1}{e^{\alpha r}-1}, \tag{2.9}$$

$$S(r) = -\frac{S_0}{e^{\alpha r} - 1}, \tag{2.10}$$

et

$$V(r) = -\frac{V_0}{e^{\alpha r} - 1}, \tag{2.11}$$

où m_0 désigne la masse réduite du système, α, S_0, V_0 et m_1 sont des paramètres réels positives, telles que $S_0 > V_0$. Dans ce chapitre, nous allons résoudre l'équation de Klein-Gordon (2.4) pour les états l d'une particule par l'approache de la supersymétrie. La solution de cette équation est basée sur la méthode d'approximation de potentiel centrifuge, qui permet d'obtenir analytiquement une solution approchée de l'équation. Ainsi, on remplace maintenant le potentiel centrifuge par une expression semblable aux termes des potentiels et de masse [11], qui est donné sous la forme

$$\frac{l(l+1)}{r^2} = \frac{l(l+1)\alpha^2 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2}. \tag{2.12}$$

Une analyse de ce problème a été présentée dans le cadre de l'approche de Nikiforov-Uvarov et en utilisant l'approximation de potentiel centrifuge [8]. Cependant, nous devons signaler que les résultats obtenues dans cette étude ne sont pas correctes.

Insérant (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12) dans (2.6), on obtient le potentiel effectif $V_E(r)$ sous la forme

$$V_E(r) = \frac{\lambda_1 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{\lambda_2}{e^{\alpha r} - 1} + \lambda_3, \tag{2.13}$$

avec

$$\lambda_1 = l(l+1)\alpha^2 + \beta^2 \left(m_1 c^2 - S_0\right)^2 + \beta^2 V_0^2, \tag{2.14}$$

$$\lambda_2 = \Lambda - 2\beta^2 V_0 E, \tag{2.15}$$

$$\lambda_3 = \beta^2 c^4 m_0^2 + \beta^2 E^2, \tag{2.16}$$

et

$$\Lambda = \beta^2 \left(m_1 c^2 - S_0\right)^2 - 2\beta^2 m_0 c^2 \left(m_1 c^2 - S_0\right) + \beta^2 V_0^2 > 0 \tag{2.17}$$

Par conséquent, l'équation différentielle de type Schrödinger s'écrit

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda_1 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{\lambda_2}{e^{\alpha r} - 1} + \lambda_3 \right\} \psi_{nl}(r) = \varepsilon_{nl} \psi_{nl}(r), \tag{2.18}$$

Afin de déterminer les valeurs propres ε_{nl} et les fonctions propres correspondantes $\psi_{nl}(r)$, on applique l'approche de la super symétrie en mécanique quantique et l'invariance de forme dans la section suivante.

2.4 Valeurs propres et fonctions propres

2.4.1 Spectre énergétique

Vu la forme de $V_E(r)$, nous suggérons le superpotentiel sous la forme

$$W_E(r) = A + \frac{B}{e^{\alpha r} - 1}, \tag{2.19}$$

où A et B sont des paramètres réels.

Afin de fixer les paramètres A, B et ε_{0l}, où $\varepsilon_{0l} \equiv \varepsilon_0(E)$ est le spectre d'énergie de l'état fondamental de $V_E(r)$, nous devons résoudre l'équation différentielle non linéaire de Riccati suivante

$$V_E(r) - \varepsilon_0 = W_E^2(r) - \frac{dW_E(r)}{dr}. \tag{2.20}$$

De (2.19), on obtient la première dérivée et le carré du super potentiel, respectivement,

$$\frac{dW_E(r)}{dr} = -\frac{\alpha B e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2}, \tag{2.21}$$

et

$$W_E^2(r) = A^2 + \frac{B^2 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} + \frac{2AB - B^2}{e^{\alpha r} - 1}. \tag{2.22}$$

Substituant (2.21), (2.22) et (2.13) dans (2.20), on obtient

$$\frac{B(B+\alpha)e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{B^2 - 2AB}{e^{\alpha r} - 1} + A^2 = \frac{\lambda_1 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{\lambda_2}{e^{\alpha r} - 1} + \lambda_3 - \varepsilon_{0l} \tag{2.23}$$

Par identification entre les deux membres terme à terme, on obtient

$$B(B+\alpha) = \lambda_1, \tag{2.24}$$

$$B^2 - 2AB = \lambda_2, \tag{2.25}$$

$$\varepsilon_{0l} = \lambda_3 - A^2. \tag{2.26}$$

En vertu de (2.19), la fonction propre de l'état fondamental de $V_E(r)$ s'écrit

$$\psi_{0l}(r) = \exp\left(-\int^r W_E(y)\,dy\right) = e^{-Ar}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{-\frac{B}{\alpha}}, \tag{2.27}$$

Dans le cas des états liés, $\psi_{0l}(r)$ est une fonction de carrée sommable, i.e., $\psi_{0l}(0) = 0$ et $\lim_{r\to\infty}\psi_{0l}(r) = 0$, ces conditions ramène que : $A > 0$ et $B < 0$. La solution négative de l'équation (2.24) par rapport de B est donnée par

$$B = -\frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right). \tag{2.28}$$

D'après (2.21) et (2.22), on obtient l'expressions des potentiels partenaires supersymétriques $V_E^{(-)}(r)$ et $V_E^{(+)}(r)$ sous les formes suivantes

$$V_E^{(-)}(r) = W_E^2(r) - \frac{dW_E(r)}{dr} = \frac{B(B+\alpha)e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r}-1)^2} - \frac{B^2-2AB}{e^{\alpha r}-1} + A^2, \tag{2.29}$$

$$V_E^{(+)}(r) = W_E^2(r) + \frac{dW_E(r)}{dr} = \frac{B(B-\alpha)e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r}-1)^2} - \frac{B^2-2AB}{e^{\alpha r}-1} + A^2. \tag{2.30}$$

De (2.25) et (2.26), on a

$$A = \frac{B}{2} - \frac{\lambda_2}{2B} > 0, \tag{2.31}$$

où λ_2 est un paramètre positif si $2\beta^2 V_0 E < \Lambda$. Le spectre d'énergie de l'état fondamental de $V_E(r)$ s'écrit

$$\varepsilon_{0l} = \lambda_3 - \left(\frac{B}{2} - \frac{\lambda_2}{2B}\right)^2. \tag{2.32}$$

Substituant (2.25) et (2.31) dans (2.29) et (2.30), on obtient

$$V_E^{(-)}(r,B) = \frac{B(B+\alpha)e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r}-1)^2} - \frac{\lambda_2}{e^{\alpha r}-1} + \left(\frac{B}{2} - \frac{\lambda_2}{2B}\right)^2, \tag{2.33}$$

$$V_E^{(+)}(r,B) = \frac{B(B-\alpha)e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r}-1)^2} - \frac{\lambda_2}{e^{\alpha r}-1} + \left(\frac{B}{2} - \frac{\lambda_2}{2B}\right)^2. \tag{2.34}$$

Ils satisfont à la condition de l'invariance de forme [4], qui s'écrit

$$V_E^{(+)}(r,b_1) = V_E^{(-)}(r,b_2) + R(b_1), \tag{2.35}$$

avec

$$b_1 = B,\ b_2 = f(b_1) = B - \alpha = b_1 - \alpha, \tag{2.36}$$

et le reste $R(b_1)$ est une fonction indépendante de r, donné par

$$R(b_1) = \left(\frac{b_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_1}\right)^2 - \left(\frac{b_2}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2} - \frac{\lambda_2}{2B}\right)^2 - \left(\frac{B-\alpha}{2} - \frac{\lambda_2}{2(B-\alpha)}\right)^2. \tag{2.37}$$

En tenant compte de (2.20) et (2.29), on obtient la relation entre les valeurs propres de deux potentiel $V_E(r)$ et $V_E^{(-)}(r)$

$$\varepsilon_{nl} = \varepsilon_{nl}^{(-)} + \varepsilon_{0l}, \tag{2.38}$$

où $\varepsilon_{nl}^{(-)}$ sont les valeurs propres de $V_E^{(-)}(x)$, qui sont exprimés en termes de la fonction de reste R comme

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{nl}^{(-)} &= \sum_{k=1}^{n} R(b_k) \\
&= \left[\left(\frac{b_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_1}\right)^2 - \left(\frac{b_2}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_2}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{b_2}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_2}\right)^2 - \left(\frac{b_3}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_3}\right)^2\right] + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{b_{n-1}}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_{n-1}}\right)^2 - \left(\frac{b_n}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_n}\right)^2 \\
&= \left(\frac{b_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_1}\right)^2 - \left(\frac{b_n}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_n}\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

avec

$$b_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{(n-1)\text{ fois}}(b_1) \ = b_1 - n\alpha = B - n\alpha. \tag{2.40}$$

où $b_n = B - n\alpha < 0$. Ainsi, en substituant (2.39), (2.40) et (2.32) dans (2.38), les valeurs propres d'énergie ε_{nl} sont donnés par

$$\varepsilon_{nl} = \lambda_3 - \left(\frac{b_n}{2} - \frac{\lambda_2}{2b_n}\right)^2 \tag{2.41}$$

Insérant (2.15), (2.16) et (2.40) dans (2.41), on obtient

$$\varepsilon_{nl} = \beta^2 E^2 + \beta^2 c^4 m_0^2 - \left(\frac{B - n\alpha}{2} - \frac{\Lambda - 2\beta^2 V_0 E}{2(B - n\alpha)}\right)^2 \tag{2.42}$$

Le spectre d'énergie E_{nl} ($E \equiv E_{nl}$) du système est déterminé par la résolution de l'équation $\varepsilon_{nl}(E_{nl}) = 0$. Ainsi, d'après (2.42), les valeurs propres E_{nl} sont données par

$$E_{nl}^{\pm} = \frac{\left(V_0 - \frac{\Lambda V_0}{(B-n\alpha)^2}\right) \mp \sqrt{4c^4 m_0^2 + \left(V_0^2 - \frac{(B-n\alpha)^2}{\beta^2}\right)\left(1 - \frac{\Lambda}{(B-n\alpha)^2}\right)^2}}{2\left(1 - \frac{\beta^2 V_0^2}{(B-n\alpha)^2}\right)}, \tag{2.43}$$

Insérant (2.28) dans (2.43), on obtient

$$E_{nl}^{\pm} = \frac{1}{2\left(1-\frac{2\beta^2V_0^2}{\alpha^2\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}+2n+1\right)^2}\right)}\left[V_0\left(1-\frac{2\Lambda}{\alpha^2\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}+2n+1\right)^2}\right)\right.$$
$$\left.\mp\sqrt{4c^4m_0^2+\left(V_0^2-\frac{\alpha^2\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}+2n+1\right)^2}{2\beta^2}\right)\left(1-\frac{2\Lambda}{\alpha^2\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}+2n+1\right)^2}\right)^2}\right] \tag{2.44}$$

où n est le nombre quantique radial.

2.4.2 Fonctions d'onde normalisées

Afin de déterminer les fonctions d'onde $\phi_{nl}(r)$ ($\phi_{nl}(r) = \psi_{nl}(r)|_{\varepsilon_{nl}(E)=0}$) du système, on remplace les équations (2.8), (2.24), (2.40) et (2.41) dans (2.18), on obtient l'équation différentielle suivante

$$\left\{-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{B(B+\alpha)e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r}-1)^2}-\frac{\lambda_2}{e^{\alpha r}-1}+\frac{1}{4}\left((B-n\alpha)-\frac{\lambda_2}{(B-n\alpha)}\right)^2\right\}\phi_{nl}(r)=0, \tag{2.45}$$

En utilisant le changement de variable : $z = 1-e^{-\alpha r}$; $\phi_{nl}(r) \equiv \bar{\phi}_{nl}(r)$; $z \in]0,1[$, l'équation (2.45) devient

$$\left\{z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}-z\frac{d}{dz}-\frac{1}{\alpha^2}B(B+\alpha)\frac{1}{z}-\frac{1}{4\alpha^2}\left((B-n\alpha)-\frac{\lambda_2}{(B-n\alpha)}\right)^2\frac{z}{(1-z)}+\frac{\lambda_2}{\alpha^2}\right\}\bar{\phi}_{nl}(z)=0, \tag{2.46}$$

Définissant une nouvelle fonction $F(z)$ par

$$\bar{\phi}_{nl}(z) = z^{\nu}(1-z)^{\mu}F(z), \tag{2.47}$$

et en substituant (2.47) dans (2.46), on obtient l'équation différentielle hypergéométrique suivante

$$\left\{z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2}+[2\nu-(2\nu+2\mu+1)z]\frac{dF}{dz}-(\nu+\mu-Q)(\nu+\mu+Q)\right\}F(z)=0, \tag{2.48}$$

où les paramètres ν, μ et Q sont définis par

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right), \tag{2.49}$$

$$\mu = \frac{\lambda_2}{\alpha^2\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right)} - \frac{1}{4}\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right), \tag{2.50}$$

et

$$Q = \frac{\lambda_2}{\alpha^2\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right)} + \frac{1}{4}\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right). \tag{2.51}$$

Introduisons la nouvelle variable

$$x = 2z - 1 = 1 - 2e^{-\alpha r} \text{ et } F(z) \equiv P(x)\,; x \in]-1,1[\tag{2.52}$$

et en notant

$$2\nu = \rho + 1,\ 2\mu = \sigma \text{ et } Q = -\left(n + \frac{\rho}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\right), \tag{2.53}$$

L'équation (2.48) devient

$$\left\{\left(1-x^2\right)\frac{d^2F}{dx^2} + \left[\rho - \sigma - (\rho+\sigma+2)\,x\right]\frac{dF}{dx} + n\,(n+\rho+\sigma+1)\right\}P(z) = 0, \tag{2.54}$$

Ainsi, la solution de cette équation est donnée par le polynôme de Jacobi [12], $P(x) \equiv P_n^{(\sigma,\rho)}(x)$, où $P_n^{(\sigma,\rho)}(x)$ est un polynôme de Jacobi de dégrée n.

En vertu de (2.52), (2.47) et (2.53), la solution de l'équation différentielle (2.45) est donnée par

$$\phi_{nl}(r) = N_{nl}e^{-\frac{\alpha\sigma}{2}r}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{\frac{\rho+1}{2}} P_n^{(\sigma,\rho)}\left(1-2e^{-\alpha r}\right) \tag{2.55}$$

où N_{nl} est un facteur constant. La condition de normalisation est donnée par

$$\int_0^\infty \left|\phi_{nl}(r)\right|^2 dr = 1. \tag{2.56}$$

Insérant (2.52) et (2.55) dans (2.56), on obtient

$$N_{nl} = \left[\frac{2^{\sigma+\rho+1}\alpha}{\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho+1}(1-x)^{\sigma-1}\left|P_n^{(\sigma,\rho)}(x)\right|^2 dx}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.57}$$

En utilisant les deux intégrales suivantes (voir formule (7.391.5) dans [12])

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\sigma-1}(1+x)^{V}\ \left[P_n^{(\sigma,\rho)}(x)\right]^2 dx = \frac{2^{\sigma+\rho}\Gamma(n+\sigma+1)\,\Gamma(n+\rho+1)}{n!\sigma\Gamma(n+\sigma+\rho+1)}, \tag{2.58}$$

qui est valable pour $\mathrm{Re}\,(\sigma) > 0$ et $\mathrm{Re}\,(\rho) > -1$, et (voir formule (7.391.1) dans [12])

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\sigma} (1+x)^{\rho} \left[P_n^{(\sigma,\rho)}(x)\right]^2 dx = \frac{2^{\sigma+\rho+1}\Gamma(n+\sigma+1)\Gamma(n+\rho+1)}{n!\,(2n+\sigma+\rho+1)\,\Gamma(n+\sigma+\rho+1)}, \tag{2.59}$$

où $\mathrm{Re}\,(\sigma) > -1$ et $\mathrm{Re}\,(\rho) > -1$. On obtient finalement la constante de normalisation N_{nl} sous la forme

$$N_{nl} = \sqrt{\frac{\alpha n!\sigma\,(2n+\sigma+\rho+1)\,\Gamma(n+\sigma+\rho+1)}{(2n+\rho+1)\,\Gamma(n+\sigma+1)\,\Gamma(n+\rho+1)}}, \tag{2.60}$$

où Γ est la fonction de Gamma.

2.5 Cas particuliers

2.5.1 Premier cas : Masse constante

Pour $m_1 = 0$, la masse de la particule relativiste de spin zéro est une constante, $M(r)|_{m_1=0} = m_0$. Par conséquent, les paramètres définis par les expressions (2.14), (2.17) et (2.28) peuvent s'écrire, respectivement

$$\bar{\lambda}_1 = l(l+1)\alpha^2 + \beta^2 S_0^2 + \beta^2 V_0^2, \tag{2.61}$$

$$\bar{\Lambda} = \beta^2 S_0^2 + 2\beta^2 m_0 c^2 S_0 + \beta^2 V_0^2 \tag{2.62}$$

et

$$\bar{B} = -\frac{\alpha}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\bar{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right). \tag{2.63}$$

D'après (2.43), on obtient le spectre d'énergie des états liés sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \epsilon_{nl}^{\pm} &= E_{nl}^{\pm}\big|_{m_1=0} \\ &= \frac{\left(V_0 - \frac{\bar{\Lambda}V_0}{(\bar{B}-n\alpha)^2}\right) \mp \sqrt{4c^4m_0^2 + \left(V_0^2 - \frac{(\bar{B}-n\alpha)^2}{\beta^2}\right)\left(1 - \frac{\bar{\Lambda}}{(\bar{B}-n\alpha)^2}\right)^2}}{2\left(1 - \frac{\beta^2 V_0^2}{(\bar{B}-n\alpha)^2}\right)}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

Insérant l'expression $m_1 = 0$ dans les expressions (2.49), (2.50) et (2.51), on obtient

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\bar{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right), \tag{2.65}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\alpha^2\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\bar{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right)} - \frac{1}{4}\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\bar{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right), \tag{2.66}$$

et

$$\bar{Q} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\alpha^2\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\bar{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right)} + \frac{1}{4}\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\bar{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right). \tag{2.67}$$

avec

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\Lambda} - 2\beta^2 V_0 \epsilon_{nl}, \tag{2.68}$$

Cependant, les fonctions d'ondes normalisées sont données par

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{nl}(r) &= \phi_{nl}(r)|_{m_1=0} \\ &= \bar{N}_{nl} e^{-\frac{\alpha\bar{\sigma}}{2}r}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{\frac{\bar{\rho}+1}{2}} P_n^{(\bar{\sigma},\bar{\rho})}\left(1-2e^{-\alpha r}\right), \end{aligned} \tag{2.69}$$

avec

$$\bar{\rho} = 2\bar{\nu} - 1 \text{ et } \bar{\sigma} = 2\bar{\mu}, \tag{2.70}$$

et la constante de normalisation s'écrit

$$\bar{N}_{nl} = \sqrt{\frac{\alpha n!\bar{\sigma}\left(2n+\bar{\sigma}+\bar{\rho}+1\right)\Gamma\left(n+\bar{\sigma}+\bar{\rho}+1\right)}{\left(2n+\bar{\rho}+1\right)\Gamma\left(n+\bar{\sigma}+1\right)\Gamma\left(n+\bar{\rho}+1\right)}}, \tag{2.71}$$

2.5.2 Deuxième cas : Potentiel vecteur de Hulthèn

En posant $S_0 = 0$ dans l'équation (2.43), le spectre d'énergie de la particule relativiste se réduit à

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{nl}^{\pm} &= E_{nl}^{\pm}\big|_{S_0=0} \\ &= \frac{\left(V_0 - \frac{\tilde{\Lambda}V_0}{\left(\tilde{B}-n\alpha\right)^2}\right) \mp \sqrt{4c^4m_0^2 + \left(V_0^2 - \frac{\left(\tilde{B}-n\alpha\right)^2}{\beta^2}\right)\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\left(\tilde{B}-n\alpha\right)^2}\right)^2}}{2\left(1-\frac{\beta^2V_0^2}{\left(\tilde{B}-n\alpha\right)^2}\right)}, \end{aligned} \tag{2.72}$$

avec

$$\tilde{\lambda}_1 = l\left(l+1\right)\alpha^2 + \beta^2 m_1^2 c^4 + \beta^2 V_0^2, \tag{2.73}$$

$$\tilde{\Lambda} = \beta^2 m_1^2 c^4 - 2\beta^2 m_0 m_1 c^4 + \beta^2 V_0^2 \tag{2.74}$$

et

$$\tilde{B} = -\frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\tilde{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right). \tag{2.75}$$

Insérant l'expression $S_0 = 0$ dans (2.49), (2.50) et (2.51), on obtient

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\tilde{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right), \tag{2.76}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\lambda}_2}{\alpha^2\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\tilde{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right)} - \frac{1}{4}\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\tilde{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right), \tag{2.77}$$

et

$$\tilde{Q} = \frac{\tilde{\lambda}_2}{\alpha^2\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\tilde{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right)} + \frac{1}{4}\left(2n+1+\sqrt{1+\frac{4\tilde{\lambda}_1}{\alpha^2}}\right). \tag{2.78}$$

avec

$$\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\Lambda} - 2\beta^2 V_0 \epsilon_{nl}, \tag{2.79}$$

Ainsi, les fonctions d'onde normalisées sont données par

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{nl}(r) &= \phi_{nl}(r)|_{S_0=0} \\ &= \tilde{N}_{nl} e^{-\frac{\alpha\sigma}{2}r}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{\frac{\rho+1}{2}} P_n^{(\sigma,\rho)}\left(1-2e^{-\alpha r}\right)\end{aligned} \tag{2.80}$$

avec

$$\tilde{\rho} = 2\tilde{\nu} - 1 \text{ et } \tilde{\sigma} = 2\tilde{\mu}, \tag{2.81}$$

et la constante de normalisation s'écrit

$$\tilde{N}_{nl} = \sqrt{\frac{\alpha n!\tilde{\sigma}\left(2n+\tilde{\sigma}+\tilde{\rho}+1\right)\Gamma\left(n+\tilde{\sigma}+\tilde{\rho}+1\right)}{\left(2n+\tilde{\rho}+1\right)\Gamma\left(n+\tilde{\sigma}+1\right)\Gamma\left(n+\tilde{\rho}+1\right)}}, \tag{2.82}$$

2.5.3 Troisième cas : Potentiel scalaire de Hulthèn

En faisant $V_0 = 0$ dans l'équation (2.43), le spectre d'énergie se réduit à

$$\begin{aligned}E_{nl}^{\pm} &= E_{nl}^{\pm}\big|_{V_0=0} \\ &= \mp\sqrt{c^4 m_0^2 - \frac{\left(B-n\alpha\right)^2}{2\beta^2}\left(1-\frac{\Lambda}{\left(B-n\alpha\right)^2}\right)^2},\end{aligned} \tag{2.83}$$

où les paramètres Λ et B sont définis par

$$\Lambda = \beta^2 \left(m_1 c^2 - S_0\right)^2 - 2\beta^2 m_0 c^2 \left(m_1 c^2 - S_0\right), \tag{2.84}$$

et

$$B = -\frac{\alpha}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right). \tag{2.85}$$

avec

$$\lambda_1 = l\left(l+1\right)\alpha^2 + \beta^2\left(m_1 c^2 - S_0\right)^2. \tag{2.86}$$

Insérant l'expression $V_0 = 0$ dans (2.49), (2.50) et (2.51), on obtient

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right), \tag{2.87}$$

$$\mu = \frac{\Lambda}{\alpha^2\left(2n + 1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right)} - \frac{1}{4}\left(2n + 1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right), \tag{2.88}$$

et

$$Q = \frac{\Lambda}{\alpha^2\left(2n + 1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right)} + \frac{1}{4}\left(2n + 1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda_1}{\alpha^2}}\right). \tag{2.89}$$

Ainsi, les fonctions d'onde normalisées sont données par

$$\begin{aligned} \phi_{nl}\left(r\right) &= \phi_{nl}\left(r\right)|_{S_0=0} \\ &= N_{nl} e^{-\frac{\alpha\sigma}{2}r}\left(1 - e^{-\alpha r}\right)^{\frac{\rho+1}{2}} P_n^{(\sigma,\rho)}\left(1 - 2e^{-\alpha r}\right) \end{aligned} \tag{2.90}$$

avec

$$\rho = 2\nu - 1 \text{ et } \sigma = 2\mu, \tag{2.91}$$

où la constante de normalisation N_{nl} est donnée par

$$N_{nl} = \sqrt{\frac{\alpha n!\sigma\left(2n + \sigma + \rho + 1\right)\Gamma\left(n + \sigma + \rho + 1\right)}{\left(2n + \rho + 1\right)\Gamma\left(n + \sigma + 1\right)\Gamma\left(n + \rho + 1\right)}}, \tag{2.92}$$

Chapitre 3

Solutions approximatives de l'équation de Dirac d'une particule de spin-1/2 dans des potentiels vecteur et scalaire du type Manning-Rosen

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons de résoudre approximative de l'équation de Dirac à trois dimension d'une particule relativiste de spin demi-entier, de masse m, soumise à un couplage de potentiel scalaire et potentiel vecteur du type Manning-Rosen. Ce Potentiel est défini par [15]

$$U_{\mathrm{MR}}(r) = \frac{a}{\left(e^{\alpha r}-1\right)^2} - \frac{b}{e^{\alpha r}-1}, \tag{3.1}$$

où a, b et α sont des constantes réelles. Le potentiel de Manning-Rosen est utilisé dans la description des vibrations et de la rotation des molécules diatomiques et constitue un modèle convenable pour d'autres situations physiques dans le calcul des états de diffusion et des états liés. Le potentiel (3.1) peut être considéré comme une généralisation du potentiel de Hulthén

3.2 Equation de Dirac pour un potentiel central

L'équation de Dirac indépendante du temps à trois dimensions pour une particule relativiste de spin-1/2, de masse m_0, soumise au couple de potentiels scalaire $S(r)$ et vecteur $V(r)$ est donnée par

$$H_D \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \tag{3.2}$$

avec

$$H_D = c\overrightarrow{\alpha}\,\overrightarrow{p} + \beta\left(m_0c^2 + S(r)\right) + V(r), \tag{3.3}$$

où $\overrightarrow{\alpha}$ et β sont des martices de Dirac habituelles. Dans la représentation de standard, les matrices $\overrightarrow{\alpha}$ et β sont données par

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

où I est une matrice unité 2×2 et $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Le paramètre E désigne le spectre d'énergie relativiste, $\Psi_{jm}(\vec{r})$ est le spineur a quatre composantes complexes, i.e.

$$\Psi_{jm}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \Theta_{jlm}(\vec{r}) \\ \varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r}) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

avec

$$\Theta_{jlm}(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \text{ et } \varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

où j et l sont des nombres quantiques de moment cinétique total et orbital, respectivement, m est le nombre magnétique, et $\langle \Psi_{jm} | \Psi_{jm} \rangle = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$.

Pour exprimer l'équation (3.2) en coordonnées sphériques, on suppose que $S(r)$ et $V(r)$ sont des fonctions potentielles radiales, il faut également définir l'expression du terme $\overrightarrow{\alpha}\,\overrightarrow{p}$ dans ce système de coordonnées. Ainsi, on peut écrire l'opérateur d'impulsion radiale p_r et la vitesse radiale α_r sous les formes suivantes [13]

$$p_r = -i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right), \tag{3.8}$$

et

$$\alpha_r = \vec{\alpha}.\frac{\vec{r}}{r}, \tag{3.9}$$

et on a

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{r})(\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}) &= (\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{r})(\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{r}.\overrightarrow{p} + i\sigma(\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}) \\ &= \overrightarrow{r}.\overrightarrow{p} + i\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L},\end{aligned} \tag{3.10}$$

avec

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}, \tag{3.11}$$

$$\overrightarrow{r}.\overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{r}.\vec{\nabla} = -i\hbar r\frac{\partial}{\partial r}, \tag{3.12}$$

et

$$rp_r = -i\hbar\left(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{3.13}$$

où $\overrightarrow{L}$ est le moment cinétique orbital.

De (3.12) et (3.13), on obtient

$$\overrightarrow{r}.\overrightarrow{p} = rp_r + i\hbar, \tag{3.14}$$

Il s'ensuit que

$$(\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{r})(\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}) = rp_r + i\left(\hbar + \overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}\right), \tag{3.15}$$

D'après (3.9), on a

$$\alpha_r^2 = \left(\vec{\alpha}.\frac{\vec{r}}{r}\right)\left(\vec{\alpha}.\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{r^2}{r^2} + i\overrightarrow{\sigma}.(\vec{r}\times\vec{r}) = 1 \tag{3.16}$$

En tenant compte des relations (3.15), (3.9) et (3.16), on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p} &= \alpha_r^2\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p} = \left(\vec{\alpha}.\frac{\vec{r}}{r}\right)\left(\vec{\alpha}.\frac{\vec{r}}{r}\right)(\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}) \\ &= \left(\vec{\alpha}.\frac{\vec{r}}{r^2}\right)(\vec{\alpha}.\vec{r})(\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}) \\ &= \frac{\alpha_r}{r}\left[rp_r + i\left(\hbar + \overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}\right)\right] \\ &= \alpha_r p_r + i\frac{\alpha_r}{r}K.\end{aligned} \tag{3.17}$$

où $\hat{K}=\hbar+\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}$ désigne l'opérateur spin-orbite. Par ailleurs, l'opérateur de moment cinétique total est défini par

$$\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}=\vec{L}+\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \tag{3.18}$$

où $\vec{S}$ est l'opérateur de spin qui commute avec l'opérateur $\vec{L}$, i.e., $\left[\vec{L},\vec{S}\right]=0$. Sachant que l'opérateur $\vec{J}$ est commute avec l'Hamiltonien de Dirac. En vertu de (3.18), on a

$$\vec{J}^2=\vec{L}^2+\frac{\hbar^2}{4}\vec{\sigma}^2+\hbar\vec{\sigma}\vec{L}=\vec{L}^2+\frac{3\hbar^2}{4}+\hbar\vec{\sigma}.\vec{L}. \tag{3.19}$$

On obtient donc

$$\hat{K}=\hbar+\vec{\sigma}.\vec{L}=\frac{1}{\hbar}\left(\vec{J}^2-\vec{L}^2+\frac{\hbar^2}{4}\right). \tag{3.20}$$

Par conséquent, l'équation (3.17) devient

$$\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}=\alpha_r p_r+i\frac{\alpha_r}{r}\hat{K}. \tag{3.21}$$

Si H_D commute à la fois avec l'opérateur de la parité $\mathcal{P}$ $(\vec{r}\rightarrow-\vec{r})$, le carré de l'opérateur du moment cinétique $\vec{J}^2$ et la composante J_z de $\overrightarrow{J}$, on peut donc définir le spineur $\Psi(r)$ comme de vecteurs propres communs aux trois observables, telle que

$$\vec{J}^2\begin{pmatrix}\Theta_{jlm}(\vec{r})\\ \varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r})\end{pmatrix}=\hbar^2 j(j+1)\begin{pmatrix}\Theta_{jlm}(\vec{r})\\ \varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r})\end{pmatrix},\ J_z\begin{pmatrix}\Theta_{jlm}(\vec{r})\\ \varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r})\end{pmatrix}=\hbar m\begin{pmatrix}\Theta_{jlm}(\vec{r})\\ \varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r})\end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

et

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix}\Theta_{jlm}(\vec{r})\\ -\varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r})\end{pmatrix}=(-1)^{j+\frac{\varpi}{2}}\begin{pmatrix}\Theta_{jlm}(\vec{r})\\ -\varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r})\end{pmatrix}\ \text{avec}\ \varpi=\pm1, \tag{3.23}$$

où $\grave{l}=l+1$. Il est clair que le spineur $\Theta_{jlm}(\vec{r})$ doit avoir une parité opposée à celle du spineur $\varphi_{j\grave{l}m}(\vec{r})$. Ainsi, on peut définir le spineur (3.6) sous la forme suivante

$$\Psi_{njmk}(r)=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}F_{nk}(r)\,\Omega_{jlm}(\theta,\phi)\\ iG_{nk}(r)\,\Omega_{j\grave{l}m}(\theta,\phi)\end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

où $F_{nk}(r)$ et $G_{nk}(r)$ sont les composantes supérieure et inférieure de spineur Ψ, respectivement.

Les quantités $\Omega_{jlm}(\theta,\phi)$ et $\Omega_{j\grave{l}m}(\theta,\phi)$, appelées spineurs harmoniques sphériques, sont liées aux harmoniques sphériques $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ par les relations suivantes

$$\Omega_{jlm}(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{j+m}{2l+1}}Y_{l,m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\\ \sqrt{\frac{j-m}{2l+1}}Y_{l,m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\end{pmatrix}\ \text{pour}\ l=j-\frac{1}{2}, \tag{3.25}$$

et

$$\Omega_{j\grave{l}m}(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{j-m+1}{2l+1}}Y_{l,m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2l+1}}Y_{l,m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\end{pmatrix}\text{ pour } l=j+\frac{1}{2}, \tag{3.26}$$

La relation entre les spineurs harmoniques sphériques est donnée par [14]

$$\left(\vec{\sigma}\frac{\vec{r}}{r}\right)\Omega_{jlm}=-\Omega_{j\grave{l}m}\text{ et }\left(\vec{\sigma}\frac{\vec{r}}{r}\right)\Omega_{j\grave{l}m}=-\Omega_{jlm}, \tag{3.27}$$

de sorte que

$$\alpha_r=\begin{pmatrix}0&\sigma_r\\ \sigma_r&0\end{pmatrix},\ \alpha_r\ \beta=\begin{pmatrix}0&-\sigma_r\\ \sigma_r&0\end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

où $\sigma_r=\vec{\sigma}\frac{\vec{r}}{r}$. En tenant compte des équations (3.20), (3.25) et (3.26), les valeurs propres de l'opérateur spin-orbite $\hat{K}$ sont données par

$$k=\begin{cases}-(l+1)=-\left(j+\frac{1}{2}\right)\text{ pour } j=j+\frac{1}{2}\\ l=j+\frac{1}{2}\text{ pour } j=l-\frac{1}{2}\end{cases}, \tag{3.29}$$

où $|k|=j+\frac{1}{2}$. Par conséquent, les équations aux valeurs propres de l'opératuer $\hat{K}$ sont données par

$$\hat{K}\Omega_{jlm}(\theta,\phi)=-\hbar k\Omega_{jlm}(\theta,\phi)\text{ et }\hat{K}\Omega_{j\grave{l}m}(\theta,\phi)=\hbar k\Omega_{j\grave{l}m}(\theta,\phi). \tag{3.30}$$

Substituant (3.8) et (3.21) dans (3.3), l'Hamiltonien de Dirac H_D devient

$$H_D=c\alpha_r\left(p_r+i\frac{\hat{K}}{r}\right)+\beta\left(mc^2+S(r)\right)+V(r), \tag{3.31}$$

En tenant compte de (3.2), (3.24), (3.27), (3.28), (3.30) et (3.31) et aprés un calcul simple, on obtient un systéme d'équations couplées du premier ordre pour les composantes $F_{n,k}(r)$ et $G_{n,k}(r)$, données par

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)F_{n,k}(r)=\frac{1}{\hbar c}\left(m_0c^2+E-\Delta(r)\right)G_{n,k}(r), \tag{3.32}$$

et

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)G_{n,k}(r)=\frac{1}{\hbar c}\left(m_0c^2-E+\Sigma(r)\right)F_{nk}(r), \tag{3.33}$$

avec

$$\Delta(r)=V(r)-S(r), \tag{3.34}$$

$$\Sigma(r) = V(r) + S(r). \tag{3.35}$$

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de Dirac en présence de deux potentiels vecteur et scalaire égaux par l'approche de super symétrie en mécanique quantique,$V(r) = S(r)$, i.e., $\Delta(r) = 0$ et $\Sigma(r) = 2V(r)$. Ainsi, l'Hamiltonien de Dirac possède une symétrie de spin exacte. Par conséquent, l'équation (3.32) devient

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right) F_{n,k}(r) = \frac{1}{\hbar c}\left(m_0 c^2 + E\right) G_{n,k}(r), \tag{3.36}$$

Maintenant, notre but est de découpler les équations (3.33) et (3.36) pour aboutir à des équations différentielles du second ordre pour chaque composante. En fait, il existe deux procédures différentes à suivre mais qui sont entièrement équivalentes. La première consiste à éliminer la composante $G_{n,k}(r)$ en faveur de la composante $F_{nk}(r)$ pour obtenir une équation différentielle du second ordre pour cette dernière et ensuite en déduire la composante $G_{n,k}(r)$ en utilisant (3.36). On peut aussi obtenir d'abord une équation différentielle du second ordre pour la composante $F_{nk}(r)$ par élimination de la composante $G_{n,k}(r)$ et ensuite en utilisant(3.36) pour trouver la solution de cette dernière. Ici, nous allons suivre la première démarche. Ainsi, en dérivant l'équation (3.33) par rapport à r, on obtient

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + V_E(r)\right) F_{nk}(r) = 0, \tag{3.37}$$

avec

$$V_E(r) = \frac{k(k+1)}{r^2} + 2\left(\delta^2 m_0 c^2 + \delta^2 E\right) V(r) + \delta^2 m_0^2 c^4 - \delta^2 E^2, \tag{3.38}$$

où $\delta^2 = 1/\hbar^2 c^2$. Cependant, les solutions acceptables sont celles qui correspondent à des énergies réelles et dont les spineurs correspondants sont normalisables, ce qui implique que chaque composante doit être de carré sommable sur l'intervalle du mouvement de la particule. Par conséquent, on peut récrire l'équation (3.37) sous la forme de l'équation de type Schrödinger

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + V_E(r)\right) \Phi_{nk}(r) = \varepsilon_{nk}(E)\, \Phi_{nk}(r), \tag{3.39}$$

pour obtenir les états liés du potentiel effectif $V_E(r)$, c'est-à-dire les valeurs propres, $\varepsilon_{nk}(E)$, réelles et les fonctions propres correspondantes,$\Phi_{nk}(E, r)$, de carré sommable et en déduire ensuite les niveaux d'énergie et les composantes des spineurs correspondants du problème original.

La résolution de l'équation (3.39) par l'approche de la SUSYQM dans le cas où $V_E(r)$ est supersymétrique conduit à des valeurs propres ε_{nk} réelles et des fonctions propres Φ_{nk} de carré sommable.

Les énergies E_n du problème original sont déterminés par les solutions réelles de l'équation

$$\varepsilon_{nk}(E) = 0, \tag{3.40}$$

et les composantes des spineurs correspondants sont données par

$$F_{nk}(r) = \Phi_{nk}(r)|_{\varepsilon_{nk}(E)=0}, \tag{3.41}$$

et la composante inférieure de spineur $G_{n,k}(r)$ est donnée par

$$G_{n,k}(r) = \frac{\hbar c}{m_0c^2 + E}\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)F_{n,k}(r) \tag{3.42}$$

3.3 Etats liés d'une particule relativiste de spin-1/2 soumise à un potentiel de Manning-Rosen

Dans cette section, nous allons étudier les états liés d'une particule relativiste de spin-1/2 dans le cas des potentiels vecteur et scalaire sont égaux,

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{MR}}(r) &= V(r) = S(r) \\ &= \frac{a}{(e^{\alpha r}-1)^2} - \frac{b}{e^{\alpha r}-1} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Substituant (3.43) dans (3.38) et d'après (3.39), on obtient l'équation différentielle du type Schrödinger pour la composante supérieure sous la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nk}(E)\,\Phi_{nk}(r) &= \left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2a\left(\delta^2 m_0c^2 + \delta^2 E\right)}{(e^{\alpha r}-1)^2} - \frac{2b\left(\delta^2 m_0c^2 + \delta^2 E\right)}{e^{\alpha r}-1}\right. \\ &\quad \left. + \frac{k(k+1)}{r^2} + \delta^2 m_0^2c^4 - \delta^2 E^2\right]\Phi_{nk}(r), \end{aligned} \tag{3.44}$$

Cette équation n'admet pas de solutions analytiques pour $k \neq 0$ et $k \neq -1$ à cause du potentiel centrifuge. Par contre, en appliquant la méthode d'approximation de terme centrifuge, on

obtient analytiquement des solutions approchées de l'équation (3.44). Ainsi, en utilisant dans ce travail l'approximation de Green-Aldrich de terme $1/r^2$ [11],

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{\alpha r}}{\left(e^{\alpha r}-1\right)^2} \tag{3.45}$$

Insérant (3.45) dans (3.44), on obtient l'équation différentielle du type de Schrödinger sous la forme

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}+V_\varepsilon\left(r\right)\right]\Phi_{nk}\left(r\right)=\varepsilon_{nk}\left(E\right)\Phi_{nk}\left(r\right), \tag{3.46}$$

avec

$$V_\varepsilon\left(r\right)=\frac{\tau_1 e^{\alpha r}}{\left(e^{\alpha r}-1\right)^2}-\frac{\tau_2}{e^{\alpha r}-1}+\tau_3, \tag{3.47}$$

où les paramètres τ_1, τ_2 et τ_3 sont définis par

$$\tau_1=2a\left(\delta^2 m_0 c^2+\delta^2 E\right)+k\left(k+1\right)\alpha^2, \tag{3.48}$$

$$\tau_2=2\left(a+b\right)\left(\delta^2 m_0 c^2+\delta^2 E\right), \tag{3.49}$$

et

$$\tau_3=\delta^2 m_0^2 c^4-\delta^2 E^2. \tag{3.50}$$

3.4 Spectre d'énergie et spineur des états liés

3.4.1 Calcul du spectre d'énergie

Pour résoudre l'équation de type de Schrödinger (3.46) avec le potentiel effectif $V_E\left(r\right)$, nous suivons la même démarche similaire à celle du chapitre précédent. Ainsi, nous avons l'équation non linéaire de type Riccati sous la forme

$$\begin{aligned} W^2(r)-\frac{dW(r)}{dr} &= V_\varepsilon\left(r\right)-\varepsilon_{0k} \\ &= \frac{\tau_1 e^{\alpha r}}{\left(e^{\alpha r}-1\right)^2}-\frac{\tau_2}{e^{\alpha r}-1}+\tau_3-\varepsilon_{0k}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

où ε_{0k} est le spectre d'énergie de l'état fondamental de $V_\varepsilon\left(r\right)$. Par conséquent, en choisissant le superpotentiel sous la forme

$$W_\varepsilon\left(r\right)=A+\frac{B}{e^{\alpha r}-1}, \tag{3.52}$$

où A et B sont des paramètres réels.

En reportant (3.52) dans (3.51), on obtient

$$\frac{B\left(B+\alpha\right)e^{r\alpha}}{\left(e^{r\alpha}-1\right)^{2}}-\frac{B^{2}-2AB}{e^{\alpha r}-1}+A^{2}=\frac{\tau_{1}e^{\alpha r}}{\left(e^{\alpha r}-1\right)^{2}}-\frac{\tau_{2}}{e^{\alpha r}-1}+\tau_{3}-\varepsilon_{0k}, \tag{3.53}$$

En identifiant les deux membres terme à terme, on obtient le système d'équations suivant

$$B\left(B+\alpha\right)=\tau_{1}, \tag{3.54}$$

$$B^{2}-2AB=\tau_{2} \tag{3.55}$$

et

$$\varepsilon_{0k}=\tau_{3}-A^{2}. \tag{3.56}$$

En vertu de (3.52), la fonction d'onde de l'état fondamental $\Phi_{0k}\left(r\right)$ de $V_{\varepsilon}\left(r\right)$, s'écrit

$$\Phi_{0k}\left(r\right)=\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{-\frac{B}{\alpha}}e^{-Ar} \tag{3.57}$$

cette fonction doit être satisfaite les conditions suivantes : $\Phi_{0k}\left(0\right)=0$ et $\lim\limits_{r\rightarrow\infty}\Phi_{0k}\left(r\right)=0$, ainsi, le paramètre A est strictement positif et B est un paramètre négatif.

Ainsi, la solution de l'équation (3.54) se donne

$$B=-\frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\tau_{1}}{\alpha^{2}}}\right). \tag{3.58}$$

En termes de superpotentiel $W_{\varepsilon}\left(r\right)$, donnée par (3.52), on peut construire les potentiels partenaires supersymétriques $V_{\varepsilon}^{(\mp)}\left(r\right)=W_{\varepsilon}^{2}\left(r\right)\mp\frac{dW_{\varepsilon}(r)}{dr}$ de la façon suivante

$$V_{\varepsilon}^{(-)}\left(r\right)=\frac{B\left(B+\alpha\right)e^{r\alpha}}{\left(e^{r\alpha}-1\right)^{2}}-\frac{B^{2}-2AB}{e^{\alpha r}-1}+A^{2}, \tag{3.59}$$

$$V_{\varepsilon}^{(+)}\left(r\right)=\frac{B\left(B-\alpha\right)e^{r\alpha}}{\left(e^{r\alpha}-1\right)^{2}}-\frac{B^{2}-2AB}{e^{\alpha r}-1}+A^{2}. \tag{3.60}$$

D'après (3.55) et (3.56), on obtient les solutions suivantes

$$A=\frac{B}{2}-\frac{\tau_{2}}{2B} \tag{3.61}$$

et

$$\varepsilon_{0k} = \tau_3 - \left(\frac{B}{2} - \frac{\tau_2}{2B}\right)^2. \tag{3.62}$$

Substituant (3.61) et (3.55) dans eqs. (3.59) et (3.60), on btient

$$V_\varepsilon^{(-)}(r) = \frac{B(B+\alpha)e^{r\alpha}}{(e^{r\alpha}-1)^2} - \frac{\tau_2}{e^{\alpha r}-1} + \left(\frac{B}{2} - \frac{\tau_2}{2B}\right)^2, \tag{3.63}$$

$$V_\varepsilon^{(+)}(r) = \frac{B(B-\alpha)e^{r\alpha}}{(e^{r\alpha}-1)^2} - \frac{\tau_2}{e^{\alpha r}-1} + \left(\frac{B}{2} - \frac{\tau_2}{2B}\right)^2. \tag{3.64}$$

qui satisfont à la condition de l'invariance de forme [4],

$$V_\varepsilon^{(+)}(r, b_2) = V_\varepsilon^{(-)}(r, b_1) + R(b_1), \tag{3.65}$$

où le paramètre $b_1 = B$, et b_2 est une fonction de b_1, i.e.,

$$b_2 = f(b_1) = b_1 - \alpha = B - \alpha, \tag{3.66}$$

et le reste $R(b_1)$ est une fonction indépendante de r, donné par

$$\begin{aligned} R(b_1) &= \left(\frac{b_1}{2} - \frac{\tau_2}{2b_1}\right)^2 - \left(\frac{b_2}{2} - \frac{\tau_2}{2b_2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{B}{2} - \frac{\tau_2}{2B}\right)^2 - \left(\frac{B-\alpha}{2} - \frac{\tau_2}{2(B-\alpha)}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.67}$$

En vertu de (3.66), on a

$$a_i = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{(i-1) \text{ fois}}(a_1) = a_1 - i\alpha. \tag{3.68}$$

En utilisant l'approche de l'invariance de forme, on peut déterminer les spectres d'énergie de potentiel partenaire $V_\varepsilon^{(-)}(r)$ qui sont donnés par

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nk}^{(-)} &= \sum_{i=1}^{n} R(a_i) \\ &= \left\{\left(\frac{b_1}{2} - \frac{\tau_2}{2b_1}\right)^2 - \left(\frac{b_2}{2} - \frac{\tau_2}{2b_2}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{b_2}{2} - \frac{\tau_2}{2b_2}\right)^2 - \left(\frac{b_3}{2} - \frac{\tau_2}{2b_3}\right)^2\right\} \\ &\quad + \ldots + \left\{\left(\frac{b_{n-1}}{2} - \frac{\tau_2}{2b_{n-1}}\right)^2 - \left(\frac{b_n}{2} - \frac{\tau_2}{2b_n}\right)^2\right\} \\ &= \left(\frac{b_1}{2} - \frac{\tau_2}{2b_1}\right)^2 - \left(\frac{b_n}{2} - \frac{\tau_2}{2b_n}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.69}$$

où $\varepsilon_{0k}^{(-)}=0$. De (3.68), on a

$$\varepsilon_{nk}^{(-)}=\left(\frac{B}{2}-\frac{\tau_2}{2B}\right)^2-\left(\frac{B-n\alpha}{2}-\frac{\tau_2}{2\left(B-n\alpha\right)}\right)^2. \tag{3.70}$$

En vertu de (3.51), on a

$$\varepsilon_{nk}=\varepsilon_{nk}^{(-)}+\varepsilon_{0k}. \tag{3.71}$$

Insérant (3.56) et (3.70) dans (3.71), on obtient le spectre d'énergie de $V_\varepsilon(r)$ sous la forme

$$\varepsilon_{nk}=\tau_3-\left(\frac{B-n\alpha}{2}-\frac{\tau_2}{2\left(B-n\alpha\right)}\right)^2 \tag{3.72}$$

Pour l'existence des états liés, on a $|E|\leq m_0c^2$. D'après l'équation $\varepsilon_{nk}\left(E_{nk}\right)=0$, les valeurs propres E_{nk} du problème original sont données par

$$\begin{aligned}E_{nk}^2 &= m_0^2c^4-\left\{\frac{\alpha\left(\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2a\delta^2m_0c^2}{\alpha^2}+\frac{2a\delta^2}{\alpha^2}E_{nk}}+n+\frac{1}{2}\right)}{2\delta}\right.\\ &\left.-\frac{\left(a+b\right)\delta m_0c^2+\left(a+b\right)\delta E_{nk}}{\alpha\left(\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2a\delta^2m_0c^2}{\alpha^2}+\frac{2a\delta^2}{\alpha^2}E_{nk}}+n+\frac{1}{2}\right)}\right\}^2.\end{aligned} \tag{3.73}$$

où n est un nombre quantique principal.

3.4.2 Détermination du spineur

Pour obtenir les fonctions propres des états excitées $F_{nk}\left(r\right)$ $\left(F_{nk}\left(r\right)=\Phi_{nk}\left(r\right)|_{\varepsilon_{nk}(E)=0}\right)$ du problème original, nous utilisons de la même procédure précédente au premier chapitre. En tenant compte de (3.46), (3.47), (3.54) et (3.72), nous conduits à résoudre l'équation suivante

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{B\left(B+\alpha\right)e^{\alpha r}}{\left(e^{\alpha r}-1\right)^2}-\frac{\tau_2}{e^{\alpha r}-1}+\frac{1}{4}\left(\left(B-n\alpha\right)-\frac{\tau_2}{\left(B-n\alpha\right)}\right)^2\right]F_{nk}\left(r\right)=0, \tag{3.74}$$

En utilisant la transformation suivante

$$x=1-2e^{-\alpha r};x\in\left]-1,1\right[\tag{3.75}$$

et en définissant une nouvelle fonction $P\left(x\right)$ par

$$F_{nk}\left(r\right)=\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\mu}P\left(x\right), \tag{3.76}$$

En appliquant la même manière du calcul dans le chapitre précédent et d'après un calcul simple, on obtient l'équation différentielle hypergéométrique satisfaite par le polynôme de Jacobi $P(x)$ [12],

$$\left\{\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}+\left[\rho-\sigma-\left(\rho+\sigma+2\right)x\right]\frac{d}{dx}+n\left(n+\rho+\sigma+1\right)\right\}P(x)=0, \tag{3.77}$$

où $P(x)\equiv P_n^{(\sigma,\rho)}(x)$, $P_n^{(\sigma,\rho)}(x)$ est un polynôme de Jacobi de dégrée n, et les paramètres ρ et σ sont définis par

$$\rho=\sqrt{1+\frac{4\tau_1}{\alpha^2}}, \tag{3.78}$$

et

$$\sigma=\frac{2\tau_2}{\alpha^2\left(2n+1+\rho\right)}-\frac{1}{2}\left(2n+1+\rho\right). \tag{3.79}$$

En tenant compte des équations (3.75), (3.76), (3.78) et (3.79), la composante supérieure de spineur est donnée par

$$F_{nk}(r)=e^{-\frac{\alpha\sigma}{2}r}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{\frac{\rho+1}{2}}P_n^{(\sigma,\rho)}\left(1-2e^{-\alpha r}\right). \tag{3.80}$$

En utilisant l'équation (3.42) et la relation de récurrence (voir la relation (8.961.3) dans [12]),

$$\begin{aligned}\left(2n+\alpha+\beta\right)\left(1-x^2\right)\frac{dP_n^{\alpha,\beta}(x)}{dr} &= n\left[\left(\alpha-\beta\right)-\left(2n+\alpha+\beta\right)x\right]P_n^{\alpha,\beta}(x)\\ &\quad+2\left(n+\alpha\right)\left(n+\beta\right)P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x),\end{aligned} \tag{3.81}$$

on obtient l'expression de la composante inférieure de spineur $G_{n,k}(r)$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned}G_{n,k}(r) &= \frac{\hbar c}{m_0c^2+E}\alpha e^{-\frac{\alpha\sigma}{2}r}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{\frac{\rho-1}{2}}\left\{\frac{\left(n+\sigma\right)\left(n+\rho\right)}{\left(2n+\sigma+\rho\right)}P_{n-1}^{\sigma,\rho}\left(1-2e^{-\alpha r}\right)\right.\\ &\quad\left.+\left[-\frac{\sigma}{2}+\frac{\left(2n+\sigma+\rho+1\right)}{2}e^{-\alpha r}-\frac{n\left(\rho+n\right)}{\left(2n+\sigma+\rho\right)}+\frac{k}{r}\left(1-e^{-\alpha r}\right)\right]P_n^{(\sigma,\rho)}\left(1-2e^{-\alpha r}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{3.82}$$

3.5 Cas particulier

- En posant $a=0$ dans (3.1), on obtient l'expression de potentiel de Hulthèn sous la forme suivante [16]

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{H}}(r) &= V(r)=S(r)\\ &= -\frac{b}{e^{\alpha r}-1}.\end{aligned} \tag{3.83}$$

Le spectre d'énergie des états liés peuvent être déduits à partir d'équation (3.73), on obtient donc

$$\epsilon_{nk}^{\pm} = E_{nk}^{\pm}\big|_{a=0} \tag{3.84}$$

$$= \frac{\left(\frac{b}{2} - \frac{b^2\delta^2 m_0 c^2}{\alpha^2(k+n+1)^2}\right) \pm \sqrt{\left[c^4 m_0^2 + bc^2 m_0 - \frac{\alpha^2(k+n+1)^2}{4\delta^2}\right]}}{1 + \frac{b^2\delta^2}{\alpha^2(k+n+1)^2}}, \tag{3.85}$$

avec

$$0 \leq n < \sqrt{\frac{4\delta^2\left(c^4 m_0^2 + bc^2 m_0\right)}{\alpha^2}} - (k+1), \tag{3.86}$$

et

$$k + 1 \geq \sqrt{\frac{4\delta^2\left(c^4 m_0^2 + bc^2 m_0\right)}{\alpha^2}}. \tag{3.87}$$

Remplaçant $a = 0$ dans les éqs. (3.78), (3.79), (3.80), (3.82) , (3.48) et (3.49), la composante supérieure de spineur se réduite à

$$\bar{F}_{nk}(r) = F_{nk}(r)\big|_{a=0}$$

$$= e^{-\frac{\alpha\bar{\sigma}}{2}r}\left(1 - e^{-\alpha r}\right)^{\frac{\bar{\rho}+1}{2}} P_n^{(\bar{\sigma},\bar{\rho})}\left(1 - 2e^{-\alpha r}\right). \tag{3.88}$$

avec

$$\bar{\rho} = \rho\big|_{a=0}$$

$$= 2\left|k + \frac{1}{2}\right|, \tag{3.89}$$

et

$$\bar{\sigma} = \sigma\big|_{a=0}$$

$$= \frac{4b\delta^2\left(m_0 c^2 + \epsilon\right)}{\alpha^2\left(2n + 1 + \bar{\rho}\right)} - \frac{1}{2}\left(2n + 1 + \bar{\rho}\right). \tag{3.90}$$

et la composante inférieure de spineur de potentiel de Hulthèn se réduite à

$$G_{n,k}(r) = \frac{\hbar c}{m_0 c^2 + \epsilon}\alpha e^{-\frac{\alpha\bar{\sigma}}{2}r}\left(1 - e^{-\alpha r}\right)^{\frac{\rho-1}{2}}\left\{\frac{(n+\bar{\sigma})(n+\bar{\rho})}{(2n+\bar{\sigma}+\bar{\rho})} P_{n-1}^{\bar{\sigma},\bar{\rho}}\left(1 - 2e^{-\alpha r}\right)\right.$$

$$\left. + \left[-\frac{\bar{\sigma}}{2} + \frac{(2n+\bar{\sigma}+\bar{\rho}+1)}{2}e^{-\alpha r} - \frac{n(\bar{\rho}+n)}{(2n+\bar{\sigma}+\bar{\rho})} + \frac{k}{r}\left(1 - e^{-\alpha r}\right)\right] P_n^{(\bar{\sigma},\bar{\rho})}\left(1 - 2e^{-\alpha r}\right)\right\}$$

(3.9

- En faisant $a = 0$, $b = \alpha\eta$ et en prenant la limite $\alpha \to 0$ dans l'équation (3.1), le potentiel de Manning-Rosen se réduit au potentiel de coulomb,

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{C}}(r) &= V(r) = S(r) \\ &= -\frac{\eta}{r}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Ainsi, le spectre d'énergie de la particule de spin-1/2, d'après (3.73), se réduit à

$$\mathrm{E}_{nk}^{\pm} = \frac{m_0c^2\left(\pm 1 - \frac{\eta^2\delta^2 m_0c^2}{(k+n+1)^2}\right)}{1 + \frac{\eta^2\delta^2}{(k+n+1)^2}}, \tag{3.93}$$

où le nombre des niveaux d'énergies est illimité, i.e., $0 \leq n < \infty$.

Conclusion

Le travail de ce mémoire s'articule sur l'approche de la supersymétrie pour résoudre approximative de l'équation relativiste (équation de Klein-Gordon et Dirac) associée à un problème à trois dimensions avec masse dépendante de la position. Tout d'abord, nous avons donné un aperçu général sur l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique et le concept de l'invariance de forme, qui sont appliquées dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté l'écriture de l'équation relativiste de Klein-Gordon à trois dimension d'une particule de spin zéro avec une masse variable dépendante de la position, et soumis à un couplage de potentiel scalaire et potentiel vecteur sous la forme équivalente à une équation du type Schrödinger pour une particule de masse constante soumise à un potentiel effectif dépendent de spectre d'énergie. De plus, nous avons discuté les solutions approximatives de l'équation de Klein-Gordon stationnaire relatives aux états liés avec une masse variable dépendante de l'espace, soumise aux potentiels vecteur et scalaire du type Hulthén. Nous avons montré que, pour une meilleure utilisation de l'approche de SUSYQM, le problème relativiste peut être transformé à une équation du type Schrödinger avec une masse constante soumise à un potentiel effectif dépendant de spectre d'énergie. Par conséquent, nous avons obtenu les valeurs propres et les fonctions d'onde correspondantes sont exprimées en termes de polynômes de Jacobi. En ajustant les paramètres du modèle, nous avons obtenu les résultats de certains modèles particuliers.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution approximative de l'équation de Dirac à trois dimensions d'une particule relativiste de spin-1/2 possède une masse varie avec sa position, soumise aux potentiels vecteur et scalaire du type Manning-Rosen. Par conséquent, le problème se réduit à résoudre l'équation de type Schrödinger avec une masse constante soumise à un potentiel effectif de Manning-Rosen. En utilisant le formalisme SUSYQM, nous avons

obtenus les valeurs propres de spectre d'énergie et les composantes supérieure et inférieure de spineur correspondantes sont exprimées en termes de polynômes de Jacobi. De plus, nous avons également discuté certains cas particuliers.

Bibliographie

[1] O. Von Roos and H. Mavromatis, position dependent effective masses in semiconductor theory II, Phys. Rev. B **31**, 2294 (1985).

[2] L. Infeld et T. E.Hull.Rev.Mod Phys 23(1951)21 ; L.Infeld, Phys Rev **59**, 737 (1941) ; L. Infeld et T. E. Hull. Phys. Rev. **74** , 1497 (1948).

[3] F. Cooper, A. Khare et U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995) ; F. cooper, A.Khare, U.Sukhatme, Supersymmetry in Quantum Mechanics (Singapore : World Scientific) ; F. Cooper, A. Khare et U. Sukhatmi, arXiv, hep-th/9405029.

[4] L. Gendenshtein, Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry, JETP Lett. **38**, 356 (1983) ; L. Gendenshtein, I.V. Krive, Supersymmetry in quantum mechanics, Sov. Phys. Usp. **28** 654 (1985).

[5] N. Zaghou, Mémoire de Magister intitulé : *Supersymétrie et $\mathcal{PT}$ symétrie en mécanique quantique*, Université de Jijel, 2005.

[6] A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, C. Rasinariu and U. Sukhatme : Chin. Jour. Phys. **39**, 2 (2001).

[7] D. T. Barclay, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, A. Pagnamenta et U. Sukhatme, Phys. Rev. A **48**, 2786 (1993).

[8] Altug Arda, Ramazan Sever, Cevdet Tezcan, Approximate analytical solutions of the Klein-Gordon equation for the Hulthén potential with the position-dependent mass ; Phys. Scr. **79,** 015006 (2009)

[9] C. S. Jia, X. P. Li and L. H. Zhang, Exact solutions of the Klein-Gordon equation with position dependent mass for mixed vector and scalar Kink-Like potentials, Few-Body Syst. **52**, 11 (2012).

[10] M. Farrokh, M.R. Shojaeia, and A.A. Rajabi, Klein-Gordon equation with Hulthén potential and position-dependent mass, Eur. Phys. J. Plus, **128**,14 (2013)

[11] R. L. Greene and C. Aldrich, variational wave functions for a screened Coulomb potential, Phys. Rev. A **14**, 2363 (1976)

[12] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 2007).

[13] A. Messiah, *Quantum Mechanics, Tome 2* (Dunod, Paris,1972)

[14] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics : Wave Equations,* (Springer, Berlin,1990)

[15] M.F. Manning, N. Rosen, A potential function for the vibrations of diatomic molecules, Phys. Rev. **44**, 953 (1933) ; N. Rosen, P.M. Morse, On the vibrations of polyatomic molecules, Phys. Rev. **42**, 210(1932).

[16] L. Hulthén, Ark. Mat. Astron. Fys. A **28**, 5 (1942).