الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Dr. YAHIA FARES DE MEDEA

Faculté des Sciences



Projet de fin d'étude
présenté en vue de l'obtention
du
Diplôme de Master en Analyse Mathématiques et Applications
par

DAHMANI Faiza

Sujet

Sur la log-concavité et Unimodalité

Soutenu le 26 Juin 2018

Devant le jury composé de :

Mme. **G. GUETTAI**, MAA à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Présidente
Mr. **M. RAHMANI**, MCA à l'USTHB	Encadreur
Mme. **R. AIT AMRANE**, MAA à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Examinatrice
Mr. **A. SAHRAOUI**, MAA à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Examinateur

2017-2018

Remerciements

Je tiens témoigner ma reconnaissance à **Dieu** tout puissant de m'avoir donnée le courage et la force de mener à terme ce mémoire , qui m'a ouvert les portes du savoir .

Je tiens à exprimer mes sincère remerciments à mon Direcàteur et co-Direcàteur Monsieur Mourad RAHMANI et Monsieur Diffalah LAISSAOUI , qui m'a encadré , tout au long de ce mémoire , ainsi que pour sa précieuse aide , sa disponibilité et ses conseils éclairés pour la réalisation de ce travail , j'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous .

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et grand remerciement à mon mari avec tout mon affection , il m'ent apporté tous leurs soutiens et leur encouragement , notamment lors des moment les plus difficiles .

Je ne pourrais clôturer ces remerciement sans me retourner vers les êtres qui mes sont le plus chers , qui ont eu un rôle essentiel et continu pendant ma réussite , et qui sans eux aucune réussite n'aurait été possible . J'adresse de tout mon coeur mes remerciments à ma famille , particulièrement a mes chers parents .

J'adresse mes remerciements à tous les membres du jury d'avoir accepté d'evaluer cette thèse : Un grand merci
Ainsi à toute l'équipe de la faculté des sciences Département de Mathématique et Informatique de L'Université Dr.Yahia FARES de Médéa .

En fin , je ne pourrai oblier de remercier mes chères amies qui m'ont apporté un grand réconfort de travail dans la joie et la bonne humeur , ainsi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce Travail .

Table des matières

Remerciements i

Table des matières ii

Introduction **1**

1 Géneralités sur les suites classiques **2**

1 La factorielle montante 2

2 La factorielle descendante 3

2.1 Coefficients binomiaux 3

2.2 Triangle de pascal des coefficient binomiaux 4

3 Les nombres de Stirling 4

3.1 Les nombres de Stirling de première espèce 4

3.2 Les nombres de Stirling de seconde espèce 6

4 Stirling géneralisé 7

5 Fonctions Génératrices (FG) 8

5.1 Diverses fonctions génératrices des $S(n,k)$ 9

5.2 Quelques récurrences pour les $S(n,k)$ 11

5.3 Diveres fonction génératrices des $s(n,k)$ 12

5.4 Quelque récurrence pour les $s(n,k)$ 13

2 Convexité et unimodalité **15**

1 Définitions et Préliminaires sur les suites log-concave 15

2 Propriétés PLC et LC-positives 17

3 Liens entre la préservation de la log-concavité et la LC-positivité 21

4 Unimodalité 27

3 Applications sur les nombres de Stirling **30**

1 Sur le maximum des nombres de Stirling de seconde espèce 30

4 Log-concavité des nombres de Stirling généralisés **33**

1 La log-concavité de $c_a(n,k)$ et $S_a(n,k)$ 33

1.1 q-log-concavité et q-log-convexité de quelques polynôme liées à $s_a(n,k)$ et $S_a(n,k)$ 35

1.2 La log-convexité de la transformation linéaire liée à $c_a(n,k)$ 37

Conclusion **39**

Bibliographie **40**

Introduction

Dans l'article "Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres", Balazard [2] à décrit parfaitement la notion d'unimodalité d'une suite :

"En ce qui concerne le sens de variation, l'unimodalité est donc la propriété la plus simple après la monotonie, qui en est d'ailleurs un cas particulier. L'attention particulière portée aux suites unimodales vient de la théorie des probabilités et de la statistique : si u_k est la probabilités qu'une certaine variable aléatoire X prenne la valeur k, k_0 est la valeur la plus probable de X et la probabilité que $X = k$ est d'autant plus faible que $|k - k_0|$ est grand.

Des suites unimodales apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques et les démonstrations d'unimodalité, souvent délicates, sont d'une surprenante variété. Ainsi l'unimodalité de la suite des coefficients du polynôme $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + x^k\right)$ fut démontrée par Huges en 1977 grâce à la théorie des algèbres de Lie et redémontrée par Odlyzko et Richmond en 1982 par la méthode de Laplace d'évaluation des intégrales."

Ce mémoire, intitulé " Sur la log-concavité et Unimodalité" a pour but de présenter les notions de base pour la log-concavité et Unimodalité , ainsi ces applications pour les nombres de Stirling. Il est constitué de quatre chapitres principaux : Géneralités sur les suites classiques, Convexité et unimodalité, Applications sur les nombres de Stirling et Log-concavité des nombres de Stirling généralisée.

Au chapitre premier, nous présentons des généralités sur les suites classiques, comme le coefficient binomial, les nombres de Stirling,...

Le chapitre deux concerne la log-concavité et l'unimodalité et ces propriétés remarquables.

Le chapitre trois concerne les application des résultats de chapitre deux au suites des nombres de Stirling classique.

Le dernier chapitre, on présente une étude de log-concavité des nombres de Stirling généralisées.

1

Géneralités sur les suites classiques

1 La factorielle montante

Soient a un nombre réel ou complexe et n un entier positif. La factorielle montante $\langle a \rangle_n$ est définie par :

$$\langle a \rangle_n := \begin{cases} 1, & \text{si} \quad n = 0, \\ a\,(a+1)\cdots(a+n-1)\,, & \text{si} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

On peut prolonger la définition de $\langle a \rangle_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ en posant :

$$\langle a \rangle_n = \frac{\Gamma\,(a+n)}{\Gamma\,(a)},$$

où $\Gamma(x)$, est la fonction gamma d'Euler donné par :

$$\Gamma\,(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Notons les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\langle 1\rangle_n &= n!,\\ \langle a\rangle_{i+j} &= \langle a\rangle_i \langle a+i\rangle_j,\\ \langle a\rangle_n &= (-1)^n \langle 1-n-a\rangle_n.\end{aligned}$$

2 La factorielle descendante

La factorielle descendante $(a)_n$ est définie par

$$(a)_n := \begin{cases} 1, & \text{si} \quad n=0,\\ a(a-1)\cdots(a-n+1), & \text{si} \quad n\geq 1.\end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}(n)_n &= n!,\\ (a)_n &= \langle a-n+1\rangle_n,\\ \langle a\rangle_n &= (a+n-1)_n.\end{aligned}$$

2.1 Coefficients binomiaux

Soient N un ensemble fini à n éléments, $Card(N) = n \geq 0$, k un entier tel que $0 \leq k \leq n$ et $\mathcal{P}_k(N)$ l'ensemble des parties à k éléments de l'ensemble N. On appelle *coefficient binomial*, ou tout simplement *binomial n et k*, noté par le symbole $\binom{n}{k}$ le cardinal de $\mathcal{P}_k(N)$. En termes de factorielles

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Par convention $\binom{n}{k} = 0$, pour $k < 0$ ou $k > n$.

Les coefficients binomiaux satisfont les relations suivantes :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad n \geq k \geq 1 \tag{1.1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \qquad n \geq k \geq 1, \tag{1.2}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + ... + \binom{n}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}, \qquad n \geq k \geq 0. \tag{1.3}$$

2.2 Triangle de pascal des coefficient binomiaux

Définition 1.1. *On appelle triangle de Pascal le tableau infini obtenu en disposant chaque* $\binom{n}{k}$ *à la croisée de la* $n^{ème}$ *ligne et de la* $k^{ème}$ *colonne* $n, k \geq 0$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	1										⋮
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
⋮	...										

3 Les nombres de Stirling

3.1 Les nombres de Stirling de première espèce

Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$, répertorié $A008275$ dans l'encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers OEIS, sont les coefficients des polynômes factoriels descendants

relativement à la base canonique x^n, c'est-à-dire

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k.$$

Le nombre $(-1)^{n-k} s(n,k)$ est égal au nombre de permutations de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ ayant k cycles.

Proposition 1.2. *Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$ satisfont la récurrence tringulaire :*

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} s(n,0) &= s(n,n+1) = 0 \qquad n = 1,2,3,... \\ s(0,0) &= 1 \end{aligned}$$

Définition 1.3. ***(Table des nombres de Stirling de première espèce)*** *Soit $(s(n,k))_{0\leq k\leq n}$ un triangle, alors d'aprés la relation de récurrence (1.4) on a cette illustration du triangle de Stirling de première espèce, telle que n représenté les lignes et k les colonnes :*

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	1										⋮
1	0	1									
2	0	−1	1								
3	0	2	−3	1							
4	0	−6	11	−6	1						
5	0	24	−50	35	−10	1					
6	0	−120	274	−225	85	−15	1				
7	0	720	−1764	1624	−735	175	−21	1			
8	0	−5040	13068	−13132	6769	−1960	322	−28	1		
9	0	40320	−109584	118124	−67284	22449	−4536	546	−36	1	
⋮	...										

3.2 Les nombres de Stirling de seconde espèce

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $S(n,k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k blocs, c'est à dire en k sous ensembles non vides de $[n]$, disjoints deux à deux, de réunion $[n]$.

On peut aussi définir algébriquement ces nombres comme étant, les coordonnées du monôme x^n dans la base $(x)_n$, plus précisément, les nombres de Stirling de première et seconde espèce peuvent être considérés comme deux systèmes inverses l'un de l'autre, en ce sens que, pour tout nombre naturel n, la matrice formée par les éléments des n premières lignes et des n premières colonnes de la table des nombres de Stirling de première espèce est l'inverse de la matrice correspondante extraite de la table des nombres de Stirling de seconde espèce.

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(x)_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} S(n,k)\,\langle x \rangle_k \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ou encore comme la différence d'ordre k en $x = 0$ du monôme x^n à un facteur $k!$ près. En d'autres termes

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\Delta^k\,(x^n)\mid_{x=0},$$

où Δ se réfère à l'opérateur de différence. A partir du cette définition, nous pouvons obtenir la relation de récurrence suivante :

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) \tag{1.6}$$

on a :

$$\begin{aligned} S(n,0) &= s(n,n+1) = 0 \qquad n = 1,2,3,.. \\ S(0,0) &= 1 \end{aligned}$$

Définition 1.4. ***(Table des nombres de Stirling de seconde espèce)***

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	1										$\vdots$
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
$\vdots$	...										

4 Stirling géneralisé

Définition 1.5. *Soit $(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, ...)$ une suite des nombres réels positifs, on note par $s_a(n,k)$ les nombres de Stirling généralisés de premières espèce, définie par :*

$$(x\backslash a)_n = \sum_{k=0}^{n} s_a(n,k)x^k \tag{1.7}$$

$$< x\backslash a >_n = \sum_{k=0}^{n} |s_a(n,k)|x^k \tag{1.8}$$

où

$$\begin{aligned} (x\backslash a)_n &= (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1}) \qquad n \geq 1 \\ < x\backslash a >_n &= (x+a_0)(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{n-1}) \qquad n \geq 1 \\ (x\backslash a)_n &= (x\backslash a)_n = 1 \qquad\qquad n = 0 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} s_a(0,0) &= 1 \\ s_a(n,k) &= 0 \qquad\qquad pour\ \ n<k \\ s_a(n,0) &= (-1)^n a_0 a_1 a_2 ... a_{n-1} \end{aligned}$$

Remarque 1.6. *On note par* $c_a(n,k) = |s_a(n,k)| = (-1)^{n+k} s_a(n,k)$.

Définition 1.7. *Soit* $(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, ...)$ *une suite des nombres réels positifs, les nombres de Stirling généralisés de seconde espéce notés* $S_a(n,k)$ *sont définis par l'expression suivante :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_a(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-a_0x)(1-a_1x)(1-a_2x)...(1-a_kx)} \tag{1.9}$$

On a :

$$\begin{aligned} S_a(n,0) &= a_0^n \qquad\quad pour \qquad n \geq 1 \\ S_a(n,n) &= 1 \qquad pour \qquad ,n \geq 0 \end{aligned}$$

Remarque 1.8. *Il est claire que* $s_a(n,k)$ *et* $S_a(n,k)$ *sont des généralisations d'une série des nombres combinatoires, en particulier :*

1. *Si* $a_n = n$ *,*$s_a(n,k)$ *et* $S_a(n,k)$ *on retrouve les nombres de Stirling de première espèce* $s(n,k)$ *et de seconde espèce* $S(n,k)$*, respectivement.*
2. *Si* $a_n = -1$ *,* $s_a(n,k)$ *devient le coefficient binomial* $\binom{n}{k}$.

5 Fonctions Génératrices (FG)

Définition 1.9. *Soit* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *une suite réelle positive, on appelle* ***FG*** *ordinaire ,*

FG *exponentielle, et plus généralement* ***FG*** *selon* b_n *, de* a_n*, chacune des trois séries formelles sui-*

vantes Φ , Ψ *et* Φ_b, *où* b_n *est une suite donnée à l'avance :*

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \sum_{n\geq 0} a_n t^n \\ \Psi(t) &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} \\ \Phi_b(t) &= \sum_{n\geq 0} b_n a_n t^n\end{aligned}$$

5.1 Diverses fonctions génératrices des $S(n,k)$

Définition 1.10. *Les nombres de Stirling de seconde espèce* $S(n,k)$ *vérifient :*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n \tag{1.10}$$

dans la relation (1.6) Riordan montre que :

$$S(n+1,k) = \sum_{j=k-1}^{n}\binom{n}{j}S(j,k-1) \tag{1.11}$$

Théorème 1.11. *Les nombres de Stirling de seconde espèce* $S(n,k)$ *on pour FG* $\ll$ *verticale* $\gg$ *:*

$$\Phi_k(t) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t-1)^k \tag{1.12}$$

et pour FG $\ll$ *double* $\gg$ *:*

$$\begin{aligned}\Phi(t,u) &= \sum_{n,k\geq 0} S(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k \qquad (1.13)\\ &= 1+\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}\Big(\sum_{k=1}^{n} S(n,k)u^k\Big) \\ &= \exp(u(e^t-1)).\end{aligned}$$

Démonstration. 1. On a : $\Phi_k(t) = \sum_{n,k\geq 0} S(n,k)\frac{t^n}{n!}$ et d'après (1.10) alors :

$$\begin{aligned}
\Phi_k(t) &= \frac{1}{k!}\sum_{0\le j\le k}(-1)^j\begin{pmatrix}k\\ j\end{pmatrix}(k-j)^n\frac{t^n}{n!}\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{0\le j\le k}\left((-1)^j\begin{pmatrix}k\\ j\end{pmatrix}\sum_{n\ge 0}\frac{(k-j)^n t^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{0\le j\le k}\begin{pmatrix}k\\ j\end{pmatrix}(-1)^j(e^t)^{k-j}\\
&= \frac{1}{k!}(e^t-1)^k
\end{aligned}$$

2. de même avec (1.12) on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(t,u) &= \sum_{k\ge 0}\left(u^k\sum_{n\ge k}S(n,k)\frac{t^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!}u^k(e^t-1)^k\\
&= \exp(u(e^t-1))
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.12. *Les $S(n,k)$ admettent la FG rationnelle :*

$$Q_k(t) = \sum_{k\le n}S(n,k)u^{n-k} \tag{1.14}$$

$$= \frac{1}{(1-u)(1-2u)(1-3u)...(1-ku)} \qquad k\ge 1$$

Démonstration. on a :

$$Q_k(t) = \frac{1}{(1-u)(1-2u)(1-3u)...(1-ku)} \tag{1.15}$$

on multiplier (1.15) par u^k on obtient :

$$\begin{aligned} u^k Q_k(t) &= \frac{u^k}{(1-u)(1-2u)(1-3u)...(1-ku)} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{k!} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \frac{1}{1-(k-j)u} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{(-1)^j}{k!} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \sum_{n\geq 0} (k-j)^n u^n \right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(u^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) (k-j)^n \right) \\ &= \sum_{n\geq k} S(n,k) u^n \end{aligned}$$

□

5.2 Quelques récurrences pour les $S(n,k)$

Théorème 1.13. *Les $S(n,k)$ satisfont les récurrences ≪ verticales ≫ :*

$$S(n,k) = \sum_{l=k-1}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ l \end{array} \right) S(l,k-1) \tag{1.16}$$

$$S(n,k) = \sum_{l=k}^{n} S(l-1,k-1) k^{n-l} \tag{1.17}$$

Démonstration. 1. pour (1.16) on dérive (1.12) par rapport à t , et égale les coefficients de $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ dans les membres extrêmes de :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} S(n,k) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} &= \frac{d\Phi_k}{dt} \\ &= e^t \Phi_{k-1} \\ &= \sum_{l,m\geq 0} S(l,k-1) \frac{t^{l+m}}{l!m!} \end{aligned}$$

2. pour (1.17) , on utilise (1.13) alors

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k} S(n,k)u^{n-k} &= Q_k &= (1-ku)^{-1}Q_{k-1}\\ &&= \sum_{l,m\geq 0} S(l-1,k-1)k^m u^{l-k+m}\end{aligned}$$

□

Théorème 1.14. *Les $S(n,k)$ satisfont les récurrences ≪ horizontales ≫ :*

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j < k+1 >_j S(n+1,k+j+1) \tag{1.18}$$

Démonstration. il suffit avec (1.6) de remplacer $S(n+1,k+j+1)$ de (1.18) par $S(n,k+j)+(k+j+1)S(n,k+j+1)$ et de développer : il ne reste que $S(n,k)$ aprés réductions □

5.3 Diveres fonction génératrices des $s(n,k)$

Définition 1.15. *les $s(n,k)$ on pour FG ≪ double ≫ :*

$$\Psi(t,u) = \sum_{n,k\geq 0} s(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k \tag{1.19}$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} s(n,k)u^k\right)$$

$$= (1+t)^u$$

ou pour FG ≪ verticale ≫ :

$$\begin{aligned}\Psi_k(t) &= \sum_{k\leq n} s(n,k)\frac{t^n}{n!}\\ &= \frac{1}{k!}\log^k(1+t)\end{aligned}$$

Définition 1.16. *Les $s(n,k)$ ont pour FG $\ll$ horizontales $\gg$:*

$$\Psi_n(u) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)u^{n-k} \tag{1.20}$$

$$= (1-u)(1-2u)(1-3u)...(1-(n-1)u)$$

$$\Psi_n(-u) = \sum_{k=1}^{n} |s(n,k)|u^{n-k} \tag{1.21}$$

$$= (1+u)(1+2u)(1+3u)...(1+(n-1)u)$$

Théorème 1.17. *Les $|s(n+1,k+1)|$,n fixé , k variable, sont les fonctions symétriques élémentaire des n premiers entiers, En d'autres termes , pour $l = 1,2,...,n$:*

$$|s(n+1,n+1-l)| = \sum_{1<i_1<i_2<i_3...<i_l<n} i_1 i_2 i_3 ... i_l$$

***par exemple** :*

$|s(6.2)| = s(6,2) = 1.2.3.4 + 1.2.3.5 + 1.2.4.5 + 1.3.4.5 + 2.3.4.5 = 274$

Démonstration. c'est évident avec égalité(1.21) , ou , si l'on préfère :

$$(x+1)(x+2)(x+3)...(x+n) = \sum_{k=0}^{n} |s(n+1,k+1)|x^k$$

$$(1+u)(1+2u)(1+3u)...(1+nu) = \sum_{l=0}^{n} |s(n+1,n+1-l)|u^l$$

□

5.4 Quelque récurrence pour les $s(n,k)$

Définition 1.18. *Les $s(n,k)$ satisfont à la récurrence en particulier :*

$$s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \qquad n \geq 1$$

$$s(n,n-1) = -\binom{n}{2} \qquad n > 1$$

$$s(n,n) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème 1.19. *Les $s(n,k)$ satisfont les récurrences $\ll$ verticales $\gg$:*

$$ks(n,k) = \sum_{l=k-1}^{n-1} (-1)^{n-l-1} \frac{n!}{l!(n-l)!} s(l,k-l) \tag{1.22}$$

$$s(n+1,k+1) = \sum_{l=k}^{n} (-1)^{n-l} (l+1)(l+2)...ns(l,k) \tag{1.23}$$

Démonstration.

1. pour (1.22) ,on égale les coefficients de $u^{k-1}\frac{t^n}{n!}$ dans la dérive de (1.19) par rapport à u , $\frac{\partial \Psi}{\partial u} = \Psi \log(1+t)$
2. pour (1.23) , on utilise de manière analogue $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = u(1+t)^{(-1)}\Psi$

□

Théorème 1.20. *Les $s(n,k)$ satisfont les récurrences $\ll$ horizontales $\gg$:*

$$(n-k)s(n,k) = \sum_{l=k+1}^{n} (-1)^{l-k} \begin{pmatrix} l \\ k-1 \end{pmatrix} s(n,l) \tag{1.24}$$

$$s(n,k) = \sum_{l=k}^{n} s(n+1,l+1) n^{l-k} \tag{1.25}$$

Démonstration.

1. pour (1.24) , on égale les coefficients de x^k dans les expressions à droite de $(*)$ et $(**)$

$$\begin{aligned} x(x-1)_n &= x \sum_l s(n,l)(x-1)^l \\ &= \sum_{h,l} (-1)^{l-h} s(n,l) \begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} x^{h+1} = (x-n)(x) && (*) \\ &= \sum_j s(n,j) x^{j+1} - n \sum_j s(n,j) x_j && (**) \end{aligned}$$

2. pour (1.25) , on égale les coefficient de u^{n-k} dans $\Psi_{n-1} = (1-(n-1)u)^{-1}\Psi_n$

□

2

Convexité et unimodalité

Dans ce chapitre, on présente les notions de convexité et unimodalité. Les principales propriétés on été puisées de [4, 8]

1 Définitions et Préliminaires sur les suites log-concave

Définition 2.1. *Une suite réelle $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, est dite* ***convexe*** *sur un intervalle $[a,b]$ (contenant au moins 3 entiers consécutifs) si :*

$$u_k \leq \frac{1}{2}(u_{k-1}+u_{k+1}),\ \ k\in[a+1,b-1]. \tag{2.1}$$

Dans le cas où l'inégalité est stricte pour tous les k, u_k est dite ***strictement convexe****. La relation (2.1) équivaut à*

$$\triangle^2 u_k = u_{k+2}-2u_{k+1}+u_k \geq 0, \quad \textit{pour tout}\ \ k\in[a,b-2]$$

.

Définition 2.2. *Soit $\{u_k\}_k$ une suite de nombre réels positifs. On dit qu'elle est concave sur un inter-*

valle $[a, b]$ *(contenant au moins 3 entiers consécutifs) si :*

$$u_k \geq \frac{1}{2}(u_{k-1} + u_{k+1}), \;\; k \in [a+1, b-1].$$

Dans le cas où l'inégalité est stricte pour tous les k, u_k *est dite* ***strictement concave****.*

Exemple 2.3. *Soit* $u_n = \binom{n}{m}$ *une suite des coefficients binomiaux, (*m *fixé* ≥ 2*). La suite* u_n *est strictement convexe sur* $[m, \infty[$*, car*

$$\begin{aligned} \triangle^2 u_n &= \binom{n+1}{m} - 2\binom{n+1}{m} + \binom{n}{m} \\ &= \binom{n}{m-1} > 0. \end{aligned}$$

Définition 2.4. *Une suite réelle* $\{u_k\}_k$*, est dite* ***logarithmiquement convexe*** *dans* $[a, b]$ *si :*

$$u_k^2 \leq u_{k-1}u_{k+1}, \;\; k \in [a+1, b-1]. \tag{2.2}$$

Dans le cas où l' inégalité est stricte pour tous les k *,* u_k *est dite* ***strictement logarithmiquement convexe.***

La terminologie adoptée provient de ce que (2.2) équivaut à dire que $w_k = \log u_k$ est convexe.

Définition 2.5. *Soit* $\{u_k\}_k$ *une suite de nombre réels positifs. On dit qu'elle est* ***logarithmiquement concave (LC)*** *sur un intervalle* $[a, b]$ *si :*

$$u_k^2 \geq u_{k-1}u_{k+1}, \;\; k \in [a+1, b-1]. \tag{2.3}$$

Dans le cas où les inégalités est stricte pour tous les k*,* u_k *est dite* ***strictement logarithmiquement concave (SLC)****.*

Théorème 2.6. *Soit* $\{u_k\}_{k\geq 0}$ *une suite de nombre réels strictement positifs, la suite* $\{u_k\}_{k\geq 0}$ *est log-concave sur un intervalle* $[a, b]$ *si et seulement si la suite* $\{\frac{u_k}{u_{k-1}}\}_{k\geq 0}$ *est décroissante.*

Démonstration. On sait que $\{u_k\}_{k\geq 0}$ est log-concave, si pour tout $k \in [a+1, b-1]$ on a

$$\begin{aligned} u_k^2 \geq u_{k-1}u_{k+1} &\Rightarrow u_k \geq \frac{u_{k-1}u_{k+1}}{u_k} \\ &\Rightarrow \frac{u_k}{u_{k-1}} \geq \frac{u_{k+1}}{u_k}. \end{aligned}$$

Si on pose $z_k = \frac{u_k}{u_{k-1}}$ alors $z_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{u_k}$, on aura $z_k \geq z_{k+1} \Rightarrow z_k - z_{k+1} \geq 0$, donc $\frac{u_k}{u_{k-1}}$ est décroissant.

Inversement, si on pose que la suite $\{\frac{u_k}{u_{k-1}}\}_{k\geq 0}$ une suite décroissant alors

$$\begin{aligned}\frac{u_{k+1}}{u_k} - \frac{u_k}{u_{k-1}} \leq 0 \Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} &\leq \frac{u_k}{u_{k-1}} \\ \Rightarrow u_{k+1} &\leq \frac{u_k^2}{u_{k-1}} \\ \Rightarrow u_{k+1}u_{k-1} &\leq u_k^2\end{aligned}$$

donc la suite $\{u_k\}_{k\geq 0}$ est log-concave. □

Théorème 2.7. *Soit $\{u_k\}_{k\geq 0}$ une suite de nombre réels strictement positif , la suite est log-concave si et seulement si $u_{i-1}u_{j+1} \leq u_i u_j$ pour tout $j \geq i \geq 1$.*

Démonstration. La suite $\{u_k\}_k$ est log-concave, si pour $k \geq 1$, $u_k^2 \geq u_{k-1}u_{k+1}$.

Si on pose $i = j = k \geq 1$, on aura

$$u_i u_j \geq u_{i-1}u_{j+1},$$

prenant un $k' > k$, par exemple $k' = k+1$, on aura :

$$\begin{aligned}u_{k+1}^2 \geq u_{k+1}u_{k+2} \Rightarrow u_k u_{k+1}^2 \geq u_k^2 u_{k+2} &\geq u_{k-1}u_{k+1}u_{k+2} \\ \Rightarrow u_k u_{k+1} &\geq u_{k-1}u_{k+2}\end{aligned}$$

alors, si on pose $i = k \geq 1$ et $j = k+1 > i$, on aura $u_i u_j \geq u_{i-1}u_{j+1}$ la preuve est complète. □

Exemple 2.8. *Soit $u_n = \binom{n}{k}$ la n-ième ligne du triangle de pascal pour $n \geq k \geq 0$, elle est log-concave, car*

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} \geq 1.$$

2 Propriétés PLC et LC-positives

Dans cette section, on introduit quelques définitions, notations et résultats liées aux suites log-concave.

Définition 2.9. *Soit $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ un triangle de nombres positifs. En considérant la transformation linéaire suivante :*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} a(n,k)x_k \quad (n \geq 0) \tag{2.4}$$

On dit que la transformation linéaire (2.4) a la propriété de ***PLC*** *si elle préserve la log-concavité des suites, c'est à dire la log-concavité de la suite* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *implique celle de la suite* $\{z_n\}_{n\geq 0}$.

Définition 2.10. *Soit* $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ *un triangle de nombres positifs. En considérant la transformation linéaire suivante :*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} a(n,k)x_k y_{n-k} \qquad (n \geq 0) \tag{2.5}$$

On dit que la transformation linéaire (2.5) a la propriété ***double-PLC*** *si la log-concavité des suites* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{y_n\}_{n\geq 0}$ *entraine celle de la suite* $\{z_n\}_{n\geq 0}$.

Remarque 2.11.

1. *Le triangle correspondant* $\{a(n,k)\}_k$ *s'appelle également* ***PLC*** *et* ***double-PLC*** *respectivement.*
2. *La propriété* ***double-PLC*** *implique la propriété* ***PLC.***

Exemple 2.12. *Il est établi que les transformations linéaires importantes suivantes sont (double) PLC :*

1. *La transformation linéaire*

$$z_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x_k \qquad (n \geq 0)$$

est ***PLC***

2. *Wang a prouvé que :*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{a+n}{b+k} x_k \qquad (n \geq 0)$$

est ***PLC*** *pour* a, b *deux nombres entiers positif tels que* $a \geq b$.

3. *La convolution ordinaire*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} \qquad (n \geq 0)$$

*est d****ouble-PLC***

4. *La convolution exponentielle*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k y_{n-k} \qquad (n \geq 0)$$

est ***double-PLC***

En vue d'énoncer des conditions suffisantes pour que le triangle $\{a(n,k)\}$ soit PLC, on introduit quelques terminologies et notations.

Définition 2.13. *Soient q une indéterminée et $\{f_n(q)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynôme en q. On dit que la suite $\{f_n(q)\}_{n\geq 0}$ est q-**log-concave** si pour chaque $n \geq 1$,*

$$f_n^2(q) - f_{n-1}(q)f_{n+1}(q)$$

où

$$f_{n-1}(q)f_{n+1}(q) - f_n^2(q)$$

à tous ces coefficients positifs en tant que polynôme en q.

Définition 2.14. *Pour $0 \leq r \leq n$, on définit le polynôme*

$$\mathcal{A}_r(n;q) = \sum_{k=r}^{n} a(n,k)q^k$$

*on dit que le triangle $\{a(n,k)\}$ a la propriété **LC-positive** si pour chaque $r \geq 0$, la suite des polynômes $\{\mathcal{A}_r(n;p)\}_{n\geq r}$ est q-log-concave en n.*

Définition 2.15. *On définit le triangle inverse $\{a^*(n,k)\}$ associé à $\{a(n,k)\}$ par :*

$$a^*(n,k) = a(n,n-k) \qquad (0 \leq k \leq n)\,.$$

*On dit que le triangle $\{a(n,k)\}$ a la propriété **double LC-positive** si les deux triangle $\{a(n,k)\}$ et $\{a^*(n,k)\}$ ont la propriété **LC-positive***

Exemple 2.16. *Pour $a(n,k) = 1$ $(0 \leq k \leq n)$ (le traingle constant unitaire), on a*

$$\mathcal{A}_r(n;q) = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

pour $0 \leq r \leq n$, et on établit

$$\mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q) = q^{r+n}.$$

*Ainsi $\{\mathcal{A}_r(n;q)\}$ est q-log-cocave en n. Donc le traingle constant est **LC-positif**, et donc double **LC-positif** car*

$$a^*(n,k) = a(n,k).$$

Exemple 2.17. *Soit* $a(n,k) = \binom{n}{k}$*, on a :*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r(n;q) &= \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} q^k \\ &= \sum_{k=r}^{n} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] q^k \\ &= (q+1)\mathcal{A}_r(n-1;q) + \binom{n-1}{r-1} q^r\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q) &= \mathcal{A}_r(n;q) \left[(q+1)\mathcal{A}_r(n-1;q) + \binom{n-1}{r-1} q^r \right] \\ &\quad - \mathcal{A}_r(n-1;q) \left[(q+1)\mathcal{A}_r(n;q) + \binom{n}{r-1} q^r \right] \\ &= \binom{n-1}{r-1} q^r \mathcal{A}_r(n;q) - \binom{n}{r-1} q^r \mathcal{A}_r(n-1;q) \\ &= \sum_{k=r}^{n} \left[\binom{n-1}{r-1}\binom{n}{k} - \binom{n}{r-1}\binom{n-1}{k} \right] q^{k+r} \\ &= \sum_{k=r}^{n} \left[\binom{n-1}{r-1}\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{r-2}\binom{n-1}{k} \right] q^{k+r}.\end{aligned}$$

laquelle a des coefficients positifs par la log-concavité des coefficients binomiaux. Par conséquent $\{\mathcal{A}_r(n;q)\}$ *est* q*-log-concave en* n *.*

Ainsi, le traingle de pascal $\{a(n,k)\}$ *est* ***LC-positive*** *et donc* ***double LC-positive*** *car* $a^*(n,k) = a(n,k)$*.*

Théorème 2.18. *Soit un triangle* ***PLC*** $\{a(n,k)\}_k$*.*

1. *La suite colonne* $\{a(n,r)\}_{n\geq r}$ *est log-concave pour tout* $r \in \mathbb{N}$*.*
2. *La somme ligne* $a(n) = \sum_{k=0}^{n} a(n,k)$ *est log-concave.*
3. *La suite* $\mathcal{A}_r(n;p) = \sum_{k=r}^{n} a(n,k)p^k$ *est log-concave avec* $r \in \mathbb{N}$ *et* $p > 0$*.*
4. *La suite diagonale* $\{a(n,n)\}_{n\geq 0}$ *est log-concave.*

Démonstration.

— pour prouver 1., il suffit de prendre $x_k = \delta_{r,k}$ (symbole de Kronecker) dans la transformation (2.4)

— pour 2., on prend $x_k = 1$.

— le troisième s'obtient pour $x_k = p^k$, on peut voir $\mathcal{A}_r(n;p)$ comme un polynôme en p. Ainsi, le

polynôme

$$\mathcal{A}_r^2(n;p) - \mathcal{A}_r(n-1;p)\mathcal{A}_r(n+1;p)$$

prend des valeurs positives lorsque $p > 0$, de coefficient dominant

$$a^2(n,n) - a(n-1,n-1)a(n+1,n+1),$$

qui est positif.

— Enfin la dernière s'obtient pour les valeurs de la suite $\{x_k\}$ sont tous nulle sauf $x_n = 1$.

□

3 Liens entre la préservation de la log-concavité et la LC-positivité

Dans cette section nous discutons le LC-positive en détail et nous établissons la relation entre le double LC-positive et la double propriété de PLC .

Théorème 2.19. *Soit $s \in \mathbb{N}$, donnons nous deux suites finies $a_0, ..., a_s$ et $X_0, ..., X_S$ des nombres réels satisfaisants les deux conditions suivantes : si*

1. $\sum_{k=r}^{s} a_k \geq 0$ *pour tout* $0 \leq r \leq s$
2. $0 \leq X_0 \leq ... \leq X_s$

Alors $\sum_{k=0}^{s} a_k X_k \geq X_0 \sum_{k=0}^{s} a_k \geq 0$

Démonstration. C'est une simple conséquence de la formule des sommes partielles d'Abel

$$\sum_{k=0}^{s} a_k X_k = (a_0 + a_1 + ... + a_s)X_0 + (a_1 + ... + a_s)(X_1 - X_0) + ... + a_s(X_s - X_{s-1}).$$

□

Nous considérons d'abord la relation entre le **LC-positive** et la propriété de **PLC**. Soient $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ un triangle des nombres positifs et $\{u_k\}_{k\geq 0}$ une suite log-concave. Soit aussi la suite $\{z_n\}_{n\geq 0}$ définie par (2.3), et notons

$$\triangle_n = z_n^2 - z_{n-1}z_{n+1},$$

on veut montrer que $\triangle_n \geq 0$, pour chaque $n \geq 1$. Notons que

$$\triangle_n = \left[\sum_{k=0}^{n} a(n,k)u_k\right]^2 - \left[\sum_{k=0}^{n-1} a(n-1,k)u_k\right]\left[\sum_{k=0}^{n+1} a(n+1,k)u_k\right] \tag{2.6}$$

est une forme quadratique de $n+2$ variable $u_0, u_1, ..., u_{n+1}$. Généralement, ces formes quadratiques ne sont pas semi définie positives (pour plus de détailles voire le livre : Cours de mathématiques. Tome 4, Algèbre bilinéaire et géométrie, Henri Fraysse, Jean-Marie Arnaudiès). Ainsi la log-concavité de $\{u_k\}$ est une hypothèse raisonnable.

En effet, l'exemple simple suivant peut nous en convaincre. Considérons le triangle $a(n,k) = 1$ pour $0 \leq k \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\triangle_1 &= (u_0+u_1)^2 - u_0(u_0+u_1+u_2)\\ &= u_1^2 + u_0u_1 - u_0u_2.\end{aligned}$$

Il est claire que $\triangle_1$ peut prendre des valeurs négatives, pour des nombres positifs u_k, par contre il demeure positif si u_0, u_1, u_2 est une progression log-concave.

Pour exploiter la log-concavité de $\{u_k\}$, rappelons que $\{u_k\}$ est log-concave si et seulement si $u_{i-1}u_{j+1} \leq u_iu_j$ pour $j \geq i \geq 1$. En d'autres termes les u_iu_j avec le même "hauteur" $i+j$ sont comparables. On rassemble les termes de même hauteur t dans $\triangle_n$ et notons leur somme par S_t .

Pour $0 \leq k \leq \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$, soit $a_k(n,t)$ le coefficient du terme u_ku_{t-k} dans $\triangle_n$. Alors

$$\triangle_n = \sum_{t=0}^{2n} S_t \qquad pour \qquad S_t = \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t)u_ku_{t-k}$$

il suffit d'avoir $S_t \geq 0$, pour chaque $0 \leq t \leq 2n$. Notons que

$$u_0u_t \leq u_1u_{t-1} \leq u_2u_{t-2} \leq ...$$

D'ou par le Théorème précedent, il reste à établir $\sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t)$ pour chaque $0 \leq r \leq \lfloor t/2 \rfloor$.

Via (2.6) on a pour $k < \frac{t}{2}$:

$$a_k(n,t) = 2a(n,k)a(n,t-k) - a(n-1,k)a(n+1,t-k) - a(n+1,k)a(n-1,t-k) \tag{2.7}$$

et pour t pair et $k = \frac{t}{2}$, on a :

$$a_k(n,t) = a(n,k)^2 - a(n-1,k)a(n+1,k)$$

Remarque 2.20. *Ici $a_k(n,t)$ est le coefficient de $u_k u_{t-k}$ dans Δ_n d'indice k (l'évolution de l'indice k est directe) et de hauteur $t = k + (t-k)$ (c'est la somme des seconds arguments des produits qui constituent le second membre de (2.7)). Son expression est donnée par la relation (2.7) .*

Quelle notation devrait-on adopter pour l'expression issue du triangle réciproque $\{a^*(n,k)\}$? le coefficient de $u_k u_{t-k}$ dans ce cas est :

$$2a^*(n,k)a^*(n,t-k) - a^*(n-1,k)a^*(n+1,t-k) - a^*(n-1,t-k)a^*(n+1,k)$$

on conviendra donc de le noter $a^*_{t-k}(n,t)$. Ce coefficient est d'argument $t-k$ (car la lecture de l'argument se fait dans le sens inverse) et de hauteur $t = (t-k) + k$.

Notons

$$\mathcal{A}_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t), \tag{2.8}$$

on voit que $\mathcal{A}_r(n,t)$ est exactement le coefficient de q^t dans le polynôme

$$\mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q)$$

on encore

$$\mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q) = \sum_{t=2r}^{2n} A(n,t)q^t \tag{2.9}$$

d'ou la caractérisation de la LC positivité.

Lemme 2.21. *Avec la notation précédente , le triangle $\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$ est LC-positif si et seulement si $A_r(n,t) \ge 0$, pour tout t, $2r < t < 2n$.*

Lemme 2.22. *Les triangle LC-positif sont PLC.*

Proposition 2.23. *Donnons nous un triangle $\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$ de nombres positifs et deux suite log-concave $\{x\}_{k\ge 0}$ et $\{y\}_{k\ge 0}$. On intrduit les trois triangle suivantes $\{b(n,k)\}$, $\{c(n,k)\}$ et $\{d(n,k)\}$, définis*

par :

$$b(n,k) = a(n,k)x_k$$

$$c(n,k) = a(n,k)y_{n-k}$$

$$d(n,k) = a(n,k)x_k y_{n-k}$$

pour $2r \leq t \leq 2n$ *, on considère les quantités :*

$$B_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} b_k(n,t)$$

avec

$$b_k(n,t) = 2a(n,k)a(n,t-k)x_k x_{t-k} - a(n-1,k)a(n+1,t-k)x_k x_{t-k} \\ - a(n+1,k)a(n-1,t-k)x_k x_{t-k}$$

$$C_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} c_k(n,t)$$

avec

$$c_k(n,t) = 2a(n,k)a(n,t-k)y_{n-k}y_{n-t+k} - a(n-1,k)a(n+1,t-k)y_{n-k-1}y_{n-t+k+1} \\ - a(n+1,k)a(n-1,t-k)y_{n-k+1}y_{n-t+k-1}$$

et

$$D_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} d_k(n,t)$$

avec

$$d_k(n,t) = 2a(n,k)a(n,t-k)x_k x_{t-k}y_{n-k}y_{n-t+k} - a(n-1,k)a(n+1,t-k)x_k x_{t-k}y_{n-k-1}y_{n-t+k+1} \\ - a(n+1,k)a(n-1,t-k)x_k x_{t-k}y_{n-k+1}y_{n-t+k-1}.$$

relatives à ces suites comme pour $\mathcal{A}_r(n,t)$ *donnée en (2.8).*

1. *Si le triangle* $\{a(n,k)\}$ *est LC-positif, alors le triangle* $\{b(n,k)\}$ *est LC-positif et*

$$B_r(n,t) \geq A_r(n,t)x_r x_{t-r}$$

2. *Si le triangle* $\{a(n,k)\}$ *est double LC-positif, alors le triangle* $\{c(n,k)\}$ *est LC-positif et*

$$C_r(n,t) \geq A_r(n,t)y_{n-t+r}y_{n-r} \text{ pour } t > n+r.$$

3. *Si le triangle* $\{a(n,k)\}$ *est double LC-positif, alors le triangle* $\{d(n,k)\}$ *est double LC-positif et*

$$D_r(n,t) \geq A_r(n,t)x_r x_{t-r}y_{n-t+r}y_{n-r} \text{ pour } t > n+r.$$

Démonstration. 1. Soit $0 \leq t \leq 2n$, de la définition il est facile de voir que $b_k(n,t) = a_k(n,t)x_k x_{t-k}$ pour $0 \leq k \leq \lfloor t/2 \rfloor$. Ainsi pour $0 \leq r \leq \lfloor t/2 \rfloor$

$$B_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} b_k(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t)x_k x_{t-k}$$

$\{a(n,k)\}$ est LC-positif et $x_0 x_t \leq x_1 x_{t-1} \leq ...$ par la log-concavité de $\{x_k\}$ du Théorème 2.19, il s'ensuit que :

$$B_r(n,t) \geq x_r x_{t-r} \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t) = A_r(n,t)x_r x_{t-r} \geq 0$$

ainsi le triangle $\{b(n,k)\}$ est LC-positif .

2. Soit $2r \leq t \leq 2n$, il faut établir que $C_r(n,t) \geq 0$. On traitera le cas t impair (le cas pair étant similaire et plus simple). Soit $t = 2s+1$ et notons pour $0 \leq k \leq s$.

$$\alpha_k = a(n,k)a(n,t-k)$$
$$\beta_k = a(n-1,k)a(n+1,t-k)$$
$$\gamma_k = a(n+1,k)a(n-1,t-k)$$
$$Y_k = y_{n-t+k}y_{n-k}$$

ainsi

$$a_k(n,t) = 2\alpha_k - \beta_k - \gamma_k$$

et

$$\begin{aligned} c_k(n,t) &= 2a(n,k)a(n,t-k)y_{n-t+k}y_{n-k} - a(n-1,k)a(n+1,t-k)y_{(n-t+k+1)}y_{n-(k+1)} \\ &\quad - a(n+1,k)a(n-1,t-k)y_{(n-t+k-1)}y_{n-(k-1)} \\ &= 2\alpha_k Y_k - \beta_k Y_{k+1} - \gamma_k Y_{k-1} \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$c_k(n,t) \;=\; \sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k - \beta_{k-1} - \gamma_{k+1})Y_k - \beta_s Y_{s+1} + \gamma_{s+1}Y_s + \beta_{r-1}Y_r - \gamma_r Y_{r-1}$$

comme $Y_{s+1} = Y_s$ et $\gamma_{s+1} = \beta_s$, on a :

$$c_k(n,t) \;=\; \sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k - \beta_{k-1} - \gamma_{k+1})Y_k + \beta_{r-1}Y_r - \gamma_r Y_{r-1}$$

notons que $\{Y_k\}$ est croissante par la log concavité de $\{y_k\}$ et

$$\begin{aligned} 2\alpha_k - \beta_{k-1} - \gamma_{k+1} &= 2a^*(n,n-k)a^*(n,n-t+k) - a^*(n-1,n-k)a^*(n+1,n-t+k) \\ &\quad - a^*(n+1,n-k)a^*(n-1,n-t+k) \\ &= a^*_{n-t+k}(n,2n-t)\,, \end{aligned}$$

alors par la LC-positivité de $a^*(n,k)$, on a :

$$\begin{aligned} C_r(n,t) &= \sum_{j=n-t+r}^{\lfloor (2t-1)/2 \rfloor} a^*_j(n,2n-t)Y_{j-n+1} + \beta_{r-1}Y_r - \gamma_r Y_{r-1} \\ &\geq Y_r \sum_{j=n-t+r}^{\lfloor (2t-1)/2 \rfloor} a^*_j(n,2n-t) + \beta_{r-1}Y_r - \gamma_r Y_{r-1} \\ &= Y_r \sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k - \beta_{k-1} - \gamma_{k+1}) + \beta_{r-1}Y_r - \gamma_r Y_{r-1} \\ &= Y_r \sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k - \beta_k - \gamma_k) + \gamma_r(Y_r - Y_{r-1}) \\ &= A_r(n,t)Y_r + \gamma_r(Y_r - Y_{r-1}) \end{aligned}$$

donc $C_r(n,t) \geq A_r(n,t)y_{n-t+r}y_{n-r}$ vu que $Y_r \geq Y_{r-1}$

3. On a

$$d(n,k) = a(n,k)x_k y_{n-k} = c(n,k)x_k$$

de 2., on sait que $c(n,k)$ est LC-positif , de plus pour $0 \leq r \leq \lfloor t/2 \rfloor$ avec $0 \leq t \leq 2n$, on a :

$$D_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} d_k(n,t) \; = \; \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} c_k(n,t)x_k x_{t-k}$$

ainsi d'après 1. et 2. on a :

$$D_r(n,t) \geq c_r(n,t)x_r x_{t-r} \geq A_r(n,t)x_r x_{t-r} y_{n-t+r} y_{n-r}.$$

□

Théorème 2.24. *Les triangles* ***double LC-positifs*** *sont* ***double-PLC***

Démonstration. Soient $\{a(n,k)\}$ un triangle double LC-positif et $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ deux suites log concaves. Alors le triangulaire $\{a(n,k)x_k y_{n-k}\}$ est LC-positif par 3. de la proposition 2.3 et donc PLC par le lemme précedent, ainsi la suite somme ligne :

$$z_n \; = \; \sum_{k=0}^{n} a(n,k)x_k y_{n-k} \qquad (n \geq 0)$$

est log-concave par 2. du théorème. En d'autres termes, le triangle $\{a(n,k)\}$ est double-PLC. □

4 Unimodalité

Définition 2.25. *Soit $\{u_k\}_{0 \leq k \leq m}$ une suite de nombre réels positifs avec $m \geq 2$, on dit qu'elle est* ***unimodale*** *s'il existe une entier $l \in \{0, 1, 2, ..., m\}$ telle que :*

$$0 \leq k \leq l \Rightarrow u_k \leq u_{k+1}$$
$$l < k < m \Rightarrow u_k \geq u_{k+1}.$$

On dit que la suite $\{u_k\}$ est unimodale avec un ***plateau*** *si et seulement si $k < l$ et unimodale avec un* ***pic*** *si et seulement si $k = l$, dans ce cas un tel entier l est appelé* ***mode*** *de la suite $\{u_k\}_{0 \leq k \leq m}$.*

Exemple 2.26. *Soit $u_k = \binom{n}{k}$ une suite des coefficients binomiaux, (n fixé ≥ 2), est unimodale sur $[0, n]$ avec un pic en $k = n/2$ si n est pair, et un plateau en $k = (n \pm 1)/2$ si n est impair.*

Théorème 2.27. *Toute suite $\{u_k\}_{k\geq 0}$ LC sur son intervalle de définition $[a,b]$ est non décroissante ou non croisante ou unimodale. De plus dans le dernier cas, si $\{u_k\}$ est SLC, $\{u_k\}$ possède ou un pic ou un plateau à 2 points.*

Démonstration. Une suite $\{u_k\}$ est LC sur $[a,b]$ si $u_k^2 \geq u_{k-1}u_{k+1}$ pour $a+1 \leq k \leq b-1$ s'écrit en effet

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} \geq \frac{u_{k+1}}{u_k},$$

ce qui prouve que $z_k = \frac{u_k}{u_{k-1}}$ est décroissante sur $[a+1,b]$ où l'on suppose a et b entiers sans diminuer la généralité .
Si $z_b \geq 1$ alors u_k est croissante sur $[a,b]$, et si $z_{a+1} \leq 1$ alors u_k est décroissante sur $[a,b]$.
Si $z_{a+1} > 1$ et $z_b < 1$ alors u_k est évidement unimodale dans ce dernier cas, si z_k décroissante strictement on a au plus une valeur de k telle que $z_k = 1$, ce qui fournit alors un plateau à 2 points. □

Théorème 2.28. *Soit $\{a_k\}_{0\leq k\leq n}$ une suite des nombres réels, telle que le polynôme*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

n'admet que des racines réelles négative, alors la suite est unimodale avec un pic ou un plateau avec deux élément . De plus chaque mode l de la suite $\{a_k\}_{0\leq k\leq n}$ satisfait :

$$\left\lfloor \frac{p'(1)}{p(1)} \right\rfloor \leq l \leq \left\lceil \frac{p'(1)}{p(1)} \right\rceil$$

où tout simplement

$$\left\lfloor \frac{\sum_{k=0}^{n} k a_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \right\rfloor \leq l \leq \left\lceil \frac{\sum_{k=0}^{n} k a_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \right\rceil$$

telle que $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ dénotent la partie entière par défaut et la partie entière par excès de x, respectivement.

En particulier, on a le Théorème suivant :

Théorème 2.29. ***(l'inégalité de Newton)*** *Soit le polynôme générateur $p(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} u_j x^j$ d'une suite finie positive $\{u_j\}_{0\leq j\leq n}$ a tous ses racines réels alors*

$$u_j^2 \geq u_{j-1}u_{j+1}.$$

Remarque 2.30. *Si nous écrivons* $p(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j x^j$ *tels que* $u_j = \binom{n}{j}$ *alors le condition* $u_j^2 \geq u_{j-1}u_{j+1}$ *devient :*

$$u_j^2 \geq u_{j-1}u_{j+1}\left(\frac{j+1}{j}\right)\left(\frac{n-j+1}{n-j}\right) \qquad j \in [1, n-1] \tag{2.10}$$

ce qui plus fort que $u_j^2 \geq u_{j-1}u_{j+1}$.

Démonstration. Notons $D = \frac{d}{dx}$, par application du théorème de Rolle, le polynôme $Q(x) = D^{j-1}p(x)$ ayant toutes ses racines réels. Soit le polynôme $R(x) = x^{n-j+1}Q(\frac{1}{x})$ aussi par application du théorème du Rolle $D^{n-j+1}R(x)$ ayant des racines réels, par un calcule direct, on obtient :

$$D^{n-j+1}R(x) = \frac{n!}{2}\left(u_{j-1}x^2 + 2a_j x + u_{j+1}\right)$$

finalement ce polynôme quadratique à des racines rèels, d'où $u_j^2 \geq u_{j-1}u_{j+1}$. □

Définition 2.31. ***(Fréquence de Pólya) :*** *Une suite des nombres positifs dont le polynôme générateur a seulement des racines réels s'appelle une suite de fréquence de pólya ou une suite de PF .*

L'inégalité de Newton est une approche classique pour prouver la log-concavité d'une suite finie. En particulier, de l'inégalité de Newton, une suite de **PF** doit être **LC**.

3

Applications sur les nombres de Stirling

1 Sur le maximum des nombres de Stirling de seconde espèce

Pour n fixé, Dobson [5] à montré que le nombre de de Stirling de seconde espèce $S(n,r)$ admet un seul maximum.

Théorème 3.1. *Pour $n \geq 3$, il existe un unique r_n tels que :*

$$\begin{aligned} S(n,k) &> S(n,k-1) \qquad k = 1, \dots r_n \\ S(n,r_n) &\geq S(n,r_n+1) \\ S(n,k) &> S(n,k+1) \qquad k = r_n+1, \dots, n \end{aligned}$$

Aussi, on a $r_n = r_{n-1}$ ou $r_{n-1}+1$.

Démonstration. Le Théorème ce démontre par récurrence sur n. La relation est vrai pour $n = 3$ il suffit de prendre $r_3 = 2$.

— Pour $k = 1$ le théorème est vérifé

— Pour $k = 2, ..., r_n$, par l'hypothèse $S(n,k) > S(n,k-1)$ et ainsi $2S(n,k-1) > S(n,k-2)$. En utilisant la relation de récurrence (1.6) alors on obtient :

$$\begin{aligned} S(n+1,k) - S(n+1,k-1) &= S(n,k-1) + kS(n,k) - (S(n,k-2) + (k-1)S(n,k-1)) \\ &= k\left(S(n,k) - S(n,k-1)\right) + 2S(n,k-1) - S(n,k-2) > 0 \end{aligned}$$

Par conséquant :

$$S(n+1,k) > S(n+1,k-1) \quad k = 2, .., r_n.$$

— Pour $m = 3, ..., n$; Par l'hypothèse $S(m,k) \geq S(m,k+1)$, $k = r_m, ..., m$, et en utilisant (1.11) nous obtenons :

$$\begin{aligned} S(n+1,k+1) - S(n+1,k+2) &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} S(j,k) - \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} S(j,k+1) \\ &= \binom{n}{k} S(k,k) + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} S(j,k) - \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} S(j,k+1) \\ &= \binom{n}{k} S(k,k) + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} \left(S(j,k) - S(j,k+1)\right) > 0 \end{aligned}$$

alors

$$S(n+1,k) - S(n+1,k+1)$$

— Pour $k = r_n, ..., n$, comme $S(k,k) = 1$ pour tout k . Ainsi

$$S(n+1,k) > S(n+1,k+1) \qquad k = r_n + 1, ..., n+1.$$

Mainentenant, nous dconsidérons trois possibilités :

étape 1 Si $S(n,r_n) = S(n,r_n+1)$ on laissé $r_{n+1} = r_n + 1$. Supposons $S(n,r_n) > S(n,r_n-1)$ et en utilisant (1.6) nous avons

$$\begin{aligned} S(n+1,r_n) - S(n+1,r_n+1) &= S(n,r_n-1) + r_n S(n,r_n) - (S(n,r_n) + (r_n+1)S(n,r_n+1)) \\ &= (r_n-1)(S(n,r_n) + S(n,r_n+1)) - 2S(n,r_n+1) + S(n,r_n-1) \\ &= S(n,r_n-1)2S(n,r_n) < 0 \end{aligned}$$

alors dans cette étape on obtient :

$$S(n+1,k) > S(n+1,k-1) \qquad k = 1,...,r_{n+1}$$

et

$$S(n+1,k) > S(n+1,k+1) \qquad k = r_{n+1},...,n+1$$

étape 2 Si $S(n,r_n) > S(n,r_n+1)$ et $S(n+1,r_n) < S(n+1,r_n+1)$, en mettre $r_{n+1} = r_n + 1$ alors :

$$\begin{aligned} S(n+1,k) &> S(n+1,k-1) \qquad k = 1,...,r_{n+1} \\ et \qquad S(n+1,k) &> S(n+1,k+1) \qquad k = r_{n+1},...,n+1 \end{aligned}$$

étape 3 si $S(n,r_n) > S(n,r_n+1)$ et $S(n+1,r_n) \geq S(n+1,r_n+1)$, en mettre $r_{n+1} = r_n$ alors :

$$\begin{aligned} S(n+1,k) &> S(n+1,k-1) \qquad k = 1,...,r_{n+1} \\ S(n+1,r_{n+1}) &\geq S(n+1,r_{n+1}+1) \\ et \qquad S(n+1,k) &> S(n+1,k+1) \qquad k = r_{n+1}+1,...,n+1 \end{aligned}$$

□

4

Log-concavité des nombres de Stirling généralisés

1 La log-concavité de $c_a(n,k)$ et $S_a(n,k)$

Théorème 4.1. *La suite* $\{c_a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ *est log concave et donc unimodale.*

Démonstration. on a :

$$\sum_{k=0}^{n} c_a(n,k)X^k =< X \setminus a >_n \tag{4.1}$$

$$c_a(n,k) = c_a(n-1,k-1) + a_{n-1}c_a(n-1,k) \qquad 1 \leq k \leq n \tag{4.2}$$

par (4.2) nous pouvons écrire $c_a(n,k) = |s_a(n,k)|$, donc d'après (4.1) et le Théorème 2.29 la suite $\{c_a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ est log concave et par conséquent elle est unimodale.

nous avons le resultat suivant □

Théorème 4.2. *Supposons la suite* $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ *satisfait* $a_n > 0$ *pour chaque* $n \geq 0$. *puis*

chaque mode k_0 de la suite $\{c_a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ satisfait

$$\left\lfloor \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j} \right\rfloor \leq k_0 \leq \left\lceil \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j} \right\rceil \qquad pour \qquad n \geq 2$$

Démonstration. soit $p(X) = \sum_{k=0}^{n} c_a(n,k)X^k =< X \setminus a >_n$ et d'apres le Théorème 2.28 on a

$$\left\lfloor \frac{\sum_{k=0}^{n} kc_a(n,k)}{\sum_{k=0}^{n} c_a(n,k)} \right\rfloor \leq k_0 \leq \left\lceil \frac{\sum_{k=0}^{n} kc_a(n,k)}{\sum_{k=0}^{n} c_a(n,k)} \right\rceil$$

et d'autre par nous avons

$$\frac{p'(1)}{p(1)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} kc_a(n,k)}{\sum_{k=0}^{n} c_a(n,k)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j}$$

□

Théorème 4.3. *Soit $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ une suite des nombres réeles positif, tels que $a_0 = 0$, $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$, et $a_j > 0$ pour $j > 1$. pour $\forall k$ fixé ≥ 2, $\{S_a(n,k)\}_{n\geq k}$ est log concave*

Démonstration. — nous considérons d'abord le cas où $k = 2$, d'après (1.9) on :

$$S_a(n,2) = \frac{a_2^{n-1} - a_1^{n-1}}{a_2 - a_1}$$

alors pour chaque $n \geq 2$ on a :

$$S_a^2(n,2) - S_a(n-1,2)S_a(n+1,2) = a_1^{n-1}a_2^{n-1} \geq 0$$

. ce que signifie que $\{S_a(n,2)\}$ est log concave.

— supposons que $\{S_a(n,k)\}$ est log concave quand $k > 3$. il est suffisant de prouver que $\{S_a(n+k+1,k+1)\}$ est log concave. Ainsi, par (1.9) nous avons

$$S_a(n+k+1,k+1) = \sum_{j=0}^{n} S_a(j+k,k)a_{k+1}^{n-j}$$

pour $n \geq 0$. Notons que $\{S_a(j+k,k)a_k^{-j}\}$ est log concave, et d'aprés le lemme (2.22) $\{S_a(n+k+1,k+1)\}$ est log concave.

□

1.1 q-log-concavité et q-log-convexité de quelques polynôme liées à $s_a(n,k)$ et $S_a(n,k)$

Théorème 4.4. *on considère les deux polynômes suivante :*

$$\begin{aligned} & F_{n,1}(q) = \sum_{k=0}^{n} c_a(n,k)q^k \\ \textit{et} \qquad & G_{n,1}(q) = F_{n,1}^2(q) - F_{n-1,1}(q)F_{n+1,1}(q) \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

alors on a :

1. $\{F_{n,1}(q)\}_{n\geq 0}$ *est q-log-concave si* $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ *est une suite décroissant monotonique. réciproquement,* $\{F_{n,1}(q)\}_{n\geq 0}$ *est q-log-convexe si* $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ *est croissant monotonique.*

2. $\{G_{n,1}(q)\}_{n\geq 1}$ *est q-log-convexe si* $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ *est croissant monotonique et* $\{a_n - a_{n-1}\}_{n\geq 1}$ *est log-convexe. réciproquement,* $\{G_{n,1}(q)\}_{n\geq 1}$ *est q-log-concave si* $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ *est décroissant monotonique et* $\{a_{n-1} - a_n\}_{n\geq 1}$ *est log-concave.*

Démonstration. 1. il est évident que :

$$F_{n,1}^2(q) - F_{n-1,1}(q)F_{n+1,1}(q) = < q \setminus a >_{n-1} < q \setminus a >_n (a_{n-1} - a_n)$$

et les coefficients de $< q \setminus a >_n$ sont tous positifs pour $n \geq 0$.
donc, $\{F_{n,1}(q)\}_{n\geq 0}$ est q-log-concave quand $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ est décroissant monotonique et, équivalente, $\{F_{n,1}(q)\}_{n\geq 0}$ est q-log-convexe quand $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ est croissant monotonique.

2. d'autre part on a :
$$\begin{aligned} & G_{n,1}^2(q) - G_{n-1,1}(q)G_{n+1,1}(q) \\ & = F_{n-2,1}(q)F_{n-1,1}(q)F_{n,1}^2(q)\left[(q + a_{n-2})(a_{n-1} - a_n)^2\right] \\ & \quad - F_{n-2,1}(q)F_{n-1,1}(q)F_{n,1}^2(q)\left[(q + a_n)(a_{n-2} - a_{n-1})(a_n - a_{n+1})\right] \\ & = F_{n-2,1}(q)F_{n-1,1}(q)F_{n,1}^2(q)\left[(a_{n-1} - a_n)^2 q + q_{n-2}(a_{n-1} - a_n)^2\right] \\ & \quad - F_{n-2,1}(q)F_{n-1,1}(q)F_{n,1}^2(q)(a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n+1} - a_n)q \\ & \quad - F_{n-2,1}(q)F_{n-1,1}(q)F_{n,1}^2(q)a_n(a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n+1} - a_n). \end{aligned}$$
si $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ est croissant monotonique et, pour $n \geq 1$, la suite $\{a_n - a_{n-1}\}$ est log-

convexe, nous avons alors :

$$\begin{aligned}(a_{n-1}-a_n)^2-(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n+1}-a_n) &\leq 0,\\ a_{n-2}(a_{n-1}-a_n)^2-a_n(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n+1}-a_n) &\leq 0,\end{aligned}$$

ce qui implique que $G^2_{n-1,1}(q)G^2_{n+1,1}(q)-G^2_{n,1}(q)$ a des coefficient positifs car un polynôme dans q et par conséquent $\{G_{n,1}(q)\}_{n\geq 1}$ est q-log-convexe. réciproquement, si $a=(a_0,a_1,...,a_n,...)$ est décroissante et $\{a_{n-1}-a_n\}_{n\geq 1}$ est log-cocave, nous avons

$$\begin{aligned}(a_{n-1}-a_n)^2-(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n+1}-a_n) &\geq 0,\\ a_{n-2}(a_{n-1}-a_n)^2-a_n(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n+1}-a_n) &\geq 0,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $G^2_{n,1}(q)-G^2_{n-1,1}(q)G^2_{n+1,1}(q)$ a des coefficient positifs car un polynôme dans q et par conséquent $\{G_{n,1}(q)\}_{n\geq 1}$ est q-log-concave

□

Théorème 4.5. *Supposons la suite $a=(a_0,a_1,...,a_n,...)$ satisfait $a_0=0$, $a_i\neq a_j$ pour $i\neq j$, et $a_j>0$ pour $j\geq 1$. alors pour $k\geq 2$ est donné, $\{T_{n,k}(q)\}$ est q-log-concave, si $T_{n,k}(q)=\sum_{j=0}^{n} S_a(j+k,k)q^j$.*

Démonstration. pour $n\geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}&T^2_{n,k}(q)-T_{n-1,k}(q)T_{n+1,k}(q)\\ &=\left[S_a(n+k,k)q^n-S_a(n+k+1,k)q^{n+1}\right]T_{n,k}(q)+S_a(n+k,k)S_a(n+k+1,k)q^{2n+1}\\ &=S_a(n+k,k)q^n+\sum_{j=1}^{n}\left[S_a(n+k,k)S_a(j+k,k)-S_a(n+k+1,k)S_a(j-1+k,k)\right]q^{n+j}.\end{aligned}$$

notons que $\{S_a(n,k)\}$ est log-concave, nous avons :

$$\frac{S_a(n+k,k)}{S_a(n+k+1,k)} \geq \frac{S_a(j-1+k,k)}{S_a(j+k,k)} \qquad (1\leq j\leq n),$$

alors

$$S_a(n+k,k)S_a(j+k,k)-S_a(n+k+1,k)S_a(j-1+k,k) \geq 0 \qquad (1\leq j\leq n).$$

par conséquent $\{T_{n,k}(q)\}$ est q-log-concave. □

1.2 La log-convexité de la transformation linéaire liée à $c_a(n,k)$

Théorème 4.6. *Supposons la suite* $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ *satisfait* $a_{n+1} - a_n \geq 1$ *pour* $n \geq 0$. *si* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *est log-convexe et décroissant monotonique alors,* $\{z_n(q) = \sum_{k=0}^{n} c_a(n,k)x_k\}$ *est log-concave pour* $n \geq 2$.

Démonstration. de (4.2) on a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} z_n^2 - z_{n-1}z_{n+1} &= z_n^2 - a_n z_{n-1}z_n - z_{n-1}\sum_{k=1}^{n+1} c_a(n,k-1)x_k \\ &= z_n\left[a_{n-1}z_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} c_a(n-1,k-1)x_k - a_n z_{n-1}\right] - z_{n-1}\sum_{k=1}^{n+1} c_a(n,k-1)x_k \\ &= (a_{n-1}-a_n)z_{n-1}z_n + z_n\sum_{k=0}^{n-1} c_a(n-1,k)x_k \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} c_a(n-1,k)(x_{k+1}-x_k) - z_{n-1}\sum_{k=1}^{n+1} c_a(n,k-1)x_k. \end{aligned}$$

pour $a_{n-1} - a_n \leq -1$ et $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est décroissant monotonique, alors $z_n^2 - z_{n-1}z_{n+1} \leq 0$, ce qui indique que $\{z_n\}$ est log-concave pour $n \geq 2$. □

Théorème 4.7. *Supposons la suite* $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ *satisfait* $a_{n+1} - a_n \geq 1$ *pour* $n \geq 0$ *et* $a_0 = 0$. *alors* $\{z_n(q) = \sum_{k=0}^{n} c_a(n,k)k\}$ *est log-concave pour* $n \geq 2$.

Démonstration. de (4.1) on a :

$$\begin{aligned} z_n^2 - z_{n-1}z_{n+1} &= (<1\setminus a>_n)^2\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{1+a_j}\right)^2 - <1\setminus a>_{n-1}<1\setminus a>_{n+1}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{1+a_j}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{1+a_j} \\ &= <1\setminus a>_{n-1}<1\setminus a>_n\left[(a_{n-1}-a_n)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{1+a_j}\right)^2 + \frac{a_n-a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{1+a_j} + \frac{1}{1+a_j}\right]. \end{aligned}$$

soit

$$g_n = (a_{n-1}-a_n)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{1+a_j}\right)^2 + \frac{a_n-a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{1+a_j} + \frac{1}{1+a_n}$$

. il est suffisant de montrer par l'induction $g_n \leq 0$ pour $n \geq 2$. Ainsi $a_2 - a_1 \geq 1$ et $a_0 = 0$, nous

avons :

$$\begin{aligned} g_2 &= (a_1 - a_2)\left(1 + \frac{1}{1+a_1}\right)^2 + \frac{a_2 - a_1}{1+a_1}\left(1 + \frac{1}{1+a_1}\right) + \frac{1}{1+a_1} \\ &= a_1 - a_2 + \frac{a_1 - a_2}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1} \\ &< 0. \end{aligned}$$

supposons que $g_n \leq 0$ pour $n \geq 3$, alors

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= (a_n - a_{n+1})\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+a_j} + \frac{1}{1+a_j}\right)^2 + \frac{a_{n+1} - a_n}{1+a_n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+a_j} + \frac{1}{1+a_j}\right) + \frac{1}{1+a_n} \\ &= (a_n - a_{n+1})\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+a_j}\right)^2 + \frac{a_{n+1} - a_n}{1+a_n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+a_j} + \frac{1}{1+a_j} \\ &\leq a_n - a_{n+1} + \frac{a_{n+1} - a_n}{1+a_n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+a_j} + 1 \\ &< 0. \end{aligned}$$

□

Conclusion

Tout au long de ce mémoire, nous avons fait une étude sur la log-concavité et l'unimodalité ainsi que l'application sur les nombres de Stirling généralisée.

Dans le chapitre un, nous avons donné les suites classiques, qui sont indispensable dans les chapitres trois et quatre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté l'essentiel de notre travail, la log-concavité et l'unimodalité et quelques propriètés).

Au troisième chapitre, nous avons présenté des propriétés sur les nombres de Stirling de deuxième espèce. Nous avons aussi étudié les nombres de Stirling généralisés dans le dernier chapitre.

Bibliographie

[1] M. Ahmia. *Sur la log-concavité des suites numériques*. Mémoire de Magister en Mathématiques, USTHB, 2009.

[2] M. Balazard. Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres. *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)*, 2(1) :13–30, 1990.

[3] C. A. Charalambides. *Enumerative combinatorics*. CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[4] L. Comtet. *Analyse Combinatoire*. PUF, 1970.

[5] A. J. Dobson. A note on Stirling numbers of the second kind. *J. Combinatorial Theory*, 5 :212–214, 1968.

[6] D. C. Kurtz. A note on concavity properties of triangular arrays of numbers. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13 :135–139, 1972.

[7] E. H. Lieb. Concavity properties and a generating function for Stirling numbers. *J. Combinatorial Theory*, 5 :203–206, 1968.

[8] Y. Wang and Y.-N. Yeh. Log-concavity and LC-positivity. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(2) :195–210, 2007.

[9] F.-Z. Zhao. On log-concavity of a class of generalized Stirling numbers. *Electron. J. Combin.*, 19(2) :Paper 11, 10, 2012.