République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure
et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médea
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et l'Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

BENISSANE Loubna

Équations différentielles ordinaires et résolution de problèmes d'optimisation

---

Soutenue publiquement le 22 Juin 2022 devant le jury composé de :

Président	BOUCHOU Ahmed	MCA
Examinateur	BENKACI Azzedine	MAA
Encadreur	ALLECHE Boualem	Professeur

Année universitaire : 2021 / 2022

Remerciements

Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon enseignant **le Professeur Alleche Boualem**, d'avoir accepté de superviser mon mémoire, se fut un grand honneur pour moi. Et pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail toute ma gratitude et mes remerciements.

Je remercie aussi **Docteur Bouchou Ahmed** et **Docteur Benkaci Azzedine** d'avoir été membre du jury et d'avoir examiné ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parent qui sont la source de ma réussite, pour leurs encouragements et leurs sacrifices. Je les remercie pour leur confiance et leur soutien. Je ne sais comment les remercier pour tout ce que je leur dois.

Résumé

Ce mémoire traite de la résolution des inéquations variationnelles par une méthode basée sur une équation différentielle ordinaire construite à cet effet par le biais de l'opérateur de projection sur un convexe fermé. Notre travail étant situé dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, l'équation différentielle ainsi définie correspond à un système d'équations différentielles. Nous montrons que les points d'accumulations de la trajectoire de ladite équation différentielle sont les solutions du problème de l'inéquation variationnelle considérée. Outre la présentation des techniques menant à ce résultat, nous faisons une comparaison entre quelques problèmes d'optimisation et nous donnons des applications pratiques des inéquations variationnelles. Et bien que ce domaine soit vaste, nous étalons, tout de même et tout au long de ce document, plusieurs notions et résultats issus de l'analyse, l'analyse convexe et la théorie des équations différentielles ordinaires qui sont d'intérêt dans ce travail. Enfin, nous étayons notre étude par des applications avec exemples et résultats numériques.

Abstract

This report is devoted to the resolution of variational inequalities by a method based on an ordinary differential equation constructed for this purpose through the projection operator on a closed convex. Our work being located in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, the differential equation thus defined corresponds to a system of differential equations. We show that the accumulation points of the trajectory of said differential equation are the solutions of the variational inequality problem considered. In addition to the presentation of the techniques leading to this result, we make a comparison between some optimization problems and we give practical applications of variational inequalities. And although this domain is vast, we are, all the same and throughout this document, several concepts and results resulting from the analysis, the convex analysis and the theory ordinary differential equations which are of interest in this work. Finally, we support our study by applications with examples and numerical results.

ملخص

هذه المذكرة مخصصة لحل المتراجحات التغايرية بطريقة تعتمد بناءً على معادلة تفاضلية عادية تم إنشاؤها لهذا الغرض من خلال مفهوم الإسقاط على جزء محدب مغلق في الفضاء الإقليدي R^n . المعادلة التفاضلية المحددة على هذا النحو تتوافق مع نظام المعادلات التفاضلية.

سنعمل على تبيين أن نقاط التراكم لمسار المعادلة التفاضلية المذكورة هي حلول المتراجحة التغايرية المعتبرة، بالإضافة إلى عرض التقنيات التي أدت إلى هذه النتيجة ، نقوم بإجراء مقارنة بين بعض مشاكل التحسين ونقدم تطبيقات عملية للمتراجحة التغايرية. وبما أن هذا المجال واسع ، ستتوسع من خلال هذا العمل عدة مفاهيم ونتائج ناتجة عن التحليل ، التحليل المحدب ونظرية المعادلات التفاضلية العادية التي تهم هذا العمل. و في الأخير كتكملة لدراستنا اعتمدنا على أمثلة ونتائج عددية تدعم هذه المذكرة.

Table des matières

Liste de figures **ix**

Liste de notations **x**

Acronymes **xi**

Introduction **1**

1 Problèmes d'optimisation et formulations équivalentes **3**

1.1 Préliminaires 3

1.2 Problème d'optimisation 6

1.3 Les inéquations variationnelles 10

1.3.1 Existence de solutions 11

1.3.2 Méthodes d'approximation et de régularisation 12

1.3.3 Exemples 12

1.3.4 Applications 13

1.4 Autres formulations équivalentes 16

1.4.1 Formulation équations généralisées 16

1.4.2 Formulation en point fixe 17

1.4.3 Formulation primale-duale 19

1.4.4 Formulation sous forme d'équation 20

1.4.5 Formulation en problème d'optimisation 21

2 Résolution par équations différentielles **22**

2.1 Équation différentielle ordinaire 22

2.2 Équation différentielle avec l'opérateur de projection 27

3 Exemples et résultats numériques **32**

Bibliographie **40**

Liste des figures

Figure	Titre	Page
Figure 1.1	Représentation géométrique du cône normal.	16
Figure 1.2	Projection sur l'ensemble défini par les contraintes.	18
Figure 2.1	Représentation géométrique du monotonie cyclique.	24
Figure 3.1	Comportement transitoire de x(t) de l'équation différentielle (2.5) de l'exemple 3.1 avec neuf points initiaux aléatoires.	34
Figure 3.2	Comportement transitoire de x(t) de l'équation différentielle (2.5) de l'exemple 3.2 avec six points initiaux aléatoires.	36
Figure 3.3	Comportement transitoire de x(t) de l'équation différentielle (2.5) de l'exemple 3.3 avec huit points initiaux aléatoires.	37
Figure 3.4	Comportement transitoire de x(t) de l'équation différentielle (2.5) de l'exemple 3.4 avec cinq points initiaux aléatoires.	38

Liste des notations

$\langle ., . \rangle$	produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n$	l'espace euclidien d'ordre n.
C	ensemble convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$.
$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\}$	la boule fermé de centre a et de rayon r
$\|.\|$	la norme euclidien de $\mathbb{R}^n$.
Pr_C	projection orthogonal sur l'ensemble C
Pour une fonction f , on note par	
∇f	le gradient de f.
∂f	la dérivée partielle de f par rapport au temps.
$Div f$	la divergence de f .

Acronymes

$IV(F, X)$	l'inéquation variationnelle en terme de fonction F et l'ensemble convexe X.
EDO	équation différentielle ordinaire.

Introduction

Les problèmes d'optimisation apparaissent dans plusieurs domaines et sont vastes et variés : problème de minimisation, inéquations variationnelles, problème de complémentarité, point selle, point fixe , etc. Ces problèmes sont parfois liés entre eux et la recherche de méthodes pour les résoudre est un domaine actif qui intéresse plusieurs chercheurs. Les applications de ces problèmes dans de divers situations est en croissance prolifique.

Dans ce travail nous présentons les inéquations variationnelles et nous les situons par rapport à d'autres problèmes d'optimisation. Et puisque l'existence de solutions est un sujet important dans ce domaine, nous nous intéressons à quelques méthodes de résolutions. Nous développons en particulier une méthode basée sur une équation différentielle ordinaire construite à cet effet par l'opérateur de projection.

Notre travail est composé de trois chapitres distincts, mais liés par le fond et le contenu.

Dans le premier chapitre, nous faisons une comparaison entre plusieurs problèmes d'optimisation tels que les inéquations variationnelles, les points fixes, et les problèmes de minimisation qui contient des formulations équivalentes aux problèmes précédente, ces formulations permet à nous d'avoir des solutions équivalents. On trouve aussi des notions préliminaires qui vont être emploies dans les deux chapitres suivants comme les caractérisations de projection orthogonal.

Dans le deuxième chapitre, nous établissons une équation différentielle ordinaire définie par le biais de l'opérateur de projection afin de résoudre l'inéquation variationnelle sous-jacente qui lui est associée. Ce chapitre nous permet de voir l'importance de l'utilisation des équations différentielles ordinaires pour résoudre d'autre problèmes dont trouve des difficultés lors de leur résolution. On trouve que les points d'accumulations de la trajectoire du système d'équation différentielle sont les solutions du problème de l'inéquation variation-

nelle.

Finalement le troisième chapitre de ce travail donne des résultats numériques avec des exemples traitant des inéquations variationnelles et de problèmes de minimisations dans $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^5$.

Chapitre 1

Problèmes d'optimisation et formulations équivalentes

Dans ce chapitre, on va donner quelques éléments essentiels des inéquations variationnelles, qui sont nécessaires, pour la suite de notre travail, comme les formulations équivalentes de quelques problèmes d'optimisation tels que les problèmes de minimisation, les inéquations variationnelles et les points fixes.

Dans tous ce travail, $\mathbb{R}^n$ sera munit de son produit scalaire euclidien $\langle .,. \rangle$ et de sa norme associée $\|.\|$.

On rappelle que $\langle .,. \rangle$ est définie par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$; $y = (y_1, ..., y_n)$

1.1 Préliminaires

Définition 1.1.

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

On appelle $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$ la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Définition 1.2.

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

On appelle $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\}$ la boule fermé de centre a et de rayon r.

Définition 1.3.

Un ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert si pour tout $a \in U$, $\exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$.

Définition 1.4.

Un ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est un (ensemble) fermé de $\mathbb{R}^n$ si le complémentaire de C dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5.

Soit C un ensemble de $\mathbb{R}^n$.

C est dit borné s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\quad \forall (x;y) \in C, \|x - y\| \leq M$.

Définition 1.6.

Un ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est compact si l'ensemble C est fermé et borné.

Définition 1.7.

Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe s'il est

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

Définition 1.8.

On dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si elle est

$$\forall (x_1;x_2) \in I^2; \forall \lambda \in [0;1]; f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Définition 1.9.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $x \in U$, on pose $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

— La dérivée partielle par rapport à la variable x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, en un point $a \in U$ si elle existe est notée par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

— Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ sont appelées les dérivées partielles de f.

— On appelle gradient de f et on le note par ∇f le vecteur

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

On a $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

Définition 1.10.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

— On dit que que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire et continue $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_{\mathbb{R}}}{\|x-a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

On écrit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

— On peut aussi écrire, en posant $x - a = h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_{\mathbb{R}}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

L'application L, appelée différentielle de f en a, est unique et est notée par df_a.

— On dit que la fonction f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point $x \in U$. Dans ce cas, on appelle différentielle de f la fonction

$$df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

qui à chaque $x \in U$ associe df_x.

— Si de plus, df est continue sur U, on dit alors que f est continument différentiable ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Proposition 1.1.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. *Si f est différentiable en $a \in U$, alors f admet des dérivées partielles en a par rapport à toutes les variables et pour tout $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$, on a*

$$\begin{aligned} Df_a h &= \langle \nabla f(a), h \rangle \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + ... + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{aligned}$$

2. *f est continument différentiable sur U si et seulement si f admet des dérivées partielles sur U par rapport à toutes les variables et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue sur U, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

1.2 Problème d'optimisation

En général **optimiser** signifier le fait de chercher une configuration optimale d'un système,c'est à dire, chercher la meilleure configuration parmi tous les configuration possibles du système et ceci, par rapport à un critère donné. Pour décrire un problème d'optimisation nous utilisons la modélisation mathématique,finalement on peut dire que pour décrire un problème d'optimisation on se donne

1. Une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (fonction de cout).
2. Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ (ensemble de contraintes).

On cherche à minimiser F sur C, c'est à dire, on cherche $x^* \in C$ tel que

$$F(x^*) = \min_{x \in C} F(x)$$

ou de manière équivalente

$$F(x^*) \leq F(x) \qquad \forall x \in C$$

La projection orthogonale sur un convexe fermé est importante pour notre travail. Précisons que nous aurons besoin de **la caractérisation de la projection orthogonal** lors de notre prochaine étude, pour cela on va donner la théorème suivante :

Théorème 1.2.

Soit C un ensemble fermée et convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique $y \in C$ tels que

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

Le point y est noté $\mathrm{Pr}_C\, x$ et est appelé projection de x sur C et nous écrivons

$$\begin{cases} y = \mathrm{Pr}_C\, x \\ \mathrm{Pr}_{\mathbb{C}}\, x = x \qquad \textit{pour tout} \quad x \in C \end{cases}$$

De plus, le point y est caractérisé par

$$\begin{cases} y \in C \\ \langle x-y, z-y\rangle \leq 0 \qquad ,\forall z \in C \end{cases} \tag{1.1}$$

Caractérisation variationnelle

Nous allons suivre la méthode présentée dans [1] pour la démonstration de ce théorème.

Démonstration.

Existence

Soit (z_n) une suite minimisante.$z_n \in C$ et

$$d_n = \|x - z_n\| \to d = \inf_{z\in C} \|x - z\|$$

montrons que (z_n) est de Cauchy. Appliquant l'identité de parallélogramme avec $a = x - z_n$,$b = x - z_m$ il vient

$$\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{z_n - z_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Or $\dfrac{z_n + z_m}{2} \in C$ (d'après la convexité) et donc $\left\|x - \dfrac{z_n + z_m}{2}\right\| \geq d$. Par conséquent

$$\left\|\frac{z_n - z_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2.$$

et $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|z_n - z_m\| = 0$

donc $z_n \to y \in C$ et l'on a $d = \|x - y\|$

Unicité

Soient y_1 et y_2 vérifiant 1.1. On a

$$\langle x - y_1, z - y_1\rangle \leq 0 \qquad ,\forall z \in C \tag{1.2}$$

$$\langle x - y_2, z - y_2\rangle \leq 0 \qquad ,\forall z \in C \tag{1.3}$$

Reportant $z = y_2$ dans 1.2 et $z = y_1$ dans 1.3, on obtient après addition, $|y_1 - y_2|^2 \leq 0$ □

Proposition 1.3.

Sous les hypothèses du théorème 1.2 on a

$$\|Pr_C x_1 - Pr_C x_2\| \leq |x_1 - x_2| \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

On peut trouver la démonstration de cet proposition en plus détaille dans [1]

Démonstration.
Posant $z_1 = Pr_C x_1$ et $z_2 = Pr_C x_2$ il vient

$$\langle x_1 - y_1, z - y_1 \rangle \leq 0 \qquad , \forall z \in C \tag{1.4}$$

$$\langle x_2 - y_2, z - y_2 \rangle \leq 0 \qquad , \forall z \in C \tag{1.5}$$

Reportant $z = y_2$ dans 1.4 et $z = y_1$ dans 1.5, on obtient après addition

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle$$

Par suite $\|y_1 - y_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|$ □

Définition 1.11.
Soit F une application d'un ensemble A dans lui même, notée

$$F : A \to A$$

un point $x \in A$ est dit **point fixe** de F si : $F(x) = x$

Brouwer a démontré en 1912 son théorème de Point fixe sur la boule unité fermé, voici maintenant ce théorème sur un ensemble convexe et compact que nous aurons besoin plus tard.

Théorème 1.4. ***(Brouwer)***
Soit C un sous ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ et F une fonction continue de C dans C. Alors F posséde un point fixe x^* appartenant à C, C'est à dire : $F(x^*) = x^*$.

On va donner deux démonstrations différentes du théorème de Brouwer, on trouve le premier dans le référence [4] et le deuxième dans [3].

Première démonstration.
On va montrer que tout convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la boule unité fermée d'un espace $\mathbb{R}^m$ avec $m \leq n$ auquel cas le théorème précédent s'applique, ou bien se réduit à un point, auquel cas il n'y a qu'une seule application de C dans C, qui

a trivialement un point fixe. Soit C un tel convexe. Supposons d'abord que $C^\circ \neq \varnothing$. Par translation (un homéomorphisme !), on peut toujours supposer que $0 \in C^\circ$ et il existe donc une boule $B(0,r)$ incluse dans C. On introduit la jauge du convexe C. C'est la fonction $j(x) = inf\{t > 0; x/t \in C\}$ D'après ce qui précède, on a facilement $j(x) \leq \|x\|/r$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. De même, comme C est compact, il existe une boule $B(0,R)$ qui contient C et l'on en déduit que $\|x\|/R \leq j(x)$. Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

i) si $x \in C$ alors $j(x) \leq 1$,

ii) $j(\lambda x) = \lambda j(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$,

iii)$j(x+y) \leq j(x) + j(y)$. Cette dernière propriété utilise la convexité de C.

En effet, soient $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$ tels que x/t_1 et y/t_2 appartiennent à C. On en déduit que

$$\frac{x+y}{t_1+t_2} = \left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\right)\frac{x}{t_1} + \left(\frac{t_2}{t_1+t_2}\right)\frac{y}{t_2} \in C$$

d'où $j(x+y) \leq t_1 + t_2$ et (iii) par passage aux bornes inférieures dans le membre de droite. Remarquons que réciproquement, si $j(x) \leq 1$, alors $x \in C$. En effet, il existe alors une suite $t_n \to j(x)$ et $y_n \in C$ tels que $x = t_n y_n + (1-t_n)0$. S'il existe un indice n_0 tel que $t_n \leq 1$, alors x est combinaison convexe d'éléments de C, donc appartient à C. Si $t_n > 1$ pour tout n, alors $t_n \to j(x) = 1$ et $y_n \to x$. Comme C est fermé, il vient $x \in C$. On déduit de la sous-additivité de j qu'elle est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. En effet, il vient pour tous x,$y \in \mathbb{R}^n$,

$$-j(-y) \leq j(x+y) - j(x) \leq j(y)$$

avec $max(|j(-y)|,|j(y)|) \leq \|y\|/r$. Définissons alors deux fonctions g et h de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{j(x)}{\|x\|}x & si \quad x \neq 0, \\ 0 \quad si \quad x = 0, \end{cases}$$

$$h(y) \begin{cases} \dfrac{\|y\|}{j(y)}y & si \quad y \neq 0, \\ 0 \quad si \quad y = 0, \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que g et h sont réciproques l'une de l'autre. De plus, elles sont continues en dehors de 0 d'après le continuité de j. Comme $\|g(x)\| \leq j(x) \leq \|x\|/r$, g est continue en 0 et comme $\|h(y)\| \leq \|y\|^2/j(y) \leq R\|y\|$, il en va de même pour h. Donc g et

h sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Pour conclure, il suffit de voir que $g(C) = \overline{B}^n$. Or, si $x \in C$, alors $j(x) \leq 1$, donc $\|g(x)\| \leq 1$, c'est à dire $g(C) \subset \overline{B}^n$. Soit donc $y \in \overline{B}^n$. On a $j(h(y)) = \dfrac{\|y\|}{j(y)} j(y) \leq 1$, donc $h(y) \in C$, c'est à dire $h(\overline{B}^n) \subset C$, d'où en composant par g, $\overline{B}^n \subset g(C)$. Ceci termine l'étude du cas où $C^\circ \neq \varnothing$.

Supposons maintenant que $C^\circ = \varnothing$. On procède par récurrence descendante sur la dimension de l'espace. Si C contient une famille libre de n vecteurs, alors il contient le simplexe engendré par ces vecteurs et le vecteur nul, qui est d'intérieur non vide. Donc, $C^\circ = \varnothing$ implique que C est contenu dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, soit un espace de dimension $n-1$. On a alors l'alternative suivante : soit l'intérieur de C comme sous-ensemble de cet hyperplan est non vide, auquel cas on applique l'étape précédente, soit cet intérieur est vide et on recommence. Au bout d'au plus $n-1$ étapes, on a ainsi établi que C est homéomorphe à une boule de dimension inférieure à n ou bien que C est inclus dans une droite et d'intérieur vide dans cette droite. Dans ce cas, C est réduit à un point. □

Deuxième démonstration.

Soit $\overline{B}$ une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ telle que $C \subset \overline{B}$ et comme

$$\|Pr_C x - Pr_C x'\| \leq \|x - x'\| \qquad pour \qquad x, x' \in \mathbb{R}^n$$

on a Pr_C est continue et

$$F \circ Pr_C : \Sigma \to C \subset \overline{B}$$

est un application continue de $\overline{B}$ lui même, qui admet un point fixe x notée

$$F \circ Pr_C x = x \in C$$

et comme $Pr_C x = x$ donc $F(x) = x$ □

1.3 Les inéquations variationnelles

Les inéquations variationnelles constituent un domaine particulier des problèmes d'optimisation qui est riche, voir [3]. C'est un problème du type suivant :

Problème 1.3.1.

Soit C un ensemble fermée et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $F : C \to \mathbb{R}^n$ continue,

$$\begin{cases} trouver\ x \in C \qquad tq \\ \langle F(x), y - x \rangle \geqslant 0,\ \forall\ y \in C \end{cases}$$

Notez que ce type de problème n'admet pas toujours de solution. En effet, prenons $C = \mathbb{R}$. Le problème $f(x)(y - x) \geq 0$ pour tout $y \in C$ n'a pas de solution si $f(x) = e^x$

Définition 1.12.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, On dit que x^* est une solution de l'inéquation variationnelle $IV(F, X)$ associée à la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et à l'ensemble convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ s'il satisfait l'inéquation :

$$\langle F(x^*), x^* - x \rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in X \qquad \text{(IV(F,X))}$$

Où je dénoterai par X^* le sous-ensemble de X satisfaisant $IV(F, X)$.

1.3.1 Existence de solutions

Le théorème suivant concerne l'existence de solutions des inéquations variationnelles. Ce résultat traite le cas où l'ensemble des contraintes C est un convexe compact, dit le cas d'un domaine borné. Il existe dans la littérature plusieurs résultats d'existence de solutions sous différents conditions, notamment sous des conditions de monotonie de la fonction f et de coercivité dans le cas d'un domaine non borné.

Théorème 1.5.

Soit C un ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $F : C \to \mathbb{R}^n$ un fonction continue. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\langle F(x), y - x \rangle \geqslant 0,\ \forall y \in C.$$

Démonstration.

Prouver le théorème équivalent à montrer qu'il existe

$$x \in C : \langle x, y - x \rangle \geq \langle x - F(x), y - x \rangle,\ \forall y \in C$$

prenons l'application

$$Pr_C(I - F) : C \to C$$

où $Ix = x$ est continu , donc d'après le théorème 1.4, il admet un point fixe $x \in C$ notée

$$x = Pr_C(I - F)x$$

. Par conséquent par le théorème 2.3, qui est la caractérisation de la projection,

$$(x, y - x) \geq (x - F(x), y - x) \; \forall y \in C$$

. □

1.3.2 Méthodes d'approximation et de régularisation

Il existe plusieurs méthodes d'approximation des solutions des inéquations variationnelles. La plupart de ces méthodes ont été introduites pour divers problèmes d'optimisation et adaptées ensuite aux inéquations variationnelles. On cite parmi ces méthodes : méthode de projection, méthode du gradient, méthode du sous-gradient... Toutes ces méthodes génèrent, grâce à un algorithme, une suite qui converge vers la solution. Il existe également des méthodes, dites de régularisation, qui s'appuient sur des problèmes auxiliaires pour approcher la solution. La plus célèbre de ces méthodes est appelée la méthode de régularisation de Tikhonov. Cette méthode est issue des problèmes bien posés et adaptée aux inéquations variationnelles dans le cas d'unicité de solution. Le lecteur peut consulter la littérature qui abonde sur ce sujet.

Dans le prochain chapitre nous verrons une méthode basée sur une équation différentielle pour approcher la solution de l'inéquation variationnelle en question.

1.3.3 Exemples

Exemple 1.6.

Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^1 sur l'intervalle fermé $I = [a, b]$. On cherche les points $x_0 \in I$ pour lesquels

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$$

trois cas peuvent se présenter :

i) Si $a < x_0 < b$, alors $f'(x_0) = 0$

ii) Si $x_0 = a$ *, alors* $f'(x_0) \geq 0$

iii) Si $x_0 = b$ *, alors* $f'(x_0) \leq 0$

Ces déclarations peuvent être résumées en écrivant

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \qquad \forall\, x \in I$$

une telle inéquation sera appelée inéquation variationnelle.

Exemple 1.7.

Soit f *une fonction à valeurs réelles de classe* C^1 *définie sur l'ensemble convexe* C *de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$ *de dimension. Encore une fois, nous allons caractériser les points* $x_0 \in C$ *tels que*

$$f(x_0) = \min_{x \in C} f(x)$$

Supposons que x_0 *est un point où le minimum est atteint et soit* $x \in C$*. Puisque* C *est convexe, le segment* $(1-t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0),\ 0 \leq t \leq 1$ *appartient à* C *.*

La fonction

$$\Phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)); \qquad 0 \leq t \leq 1$$

atteint son minimum à $t = 0$ *, donc comme dans l'exemple 1 ;*

$$\Phi'(0) = \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle \geq 0; \qquad x \in C$$

par conséquent, le point x_0 *satisfait l'inéquation variationnelle*

$$x_0 \in C : \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle \geq 0; \qquad x \in C$$

si C *est borné, l'existence d'au moins un* x_0 *est immédiate.*

Pour plus de détaille, voir [3]

1.3.4 Applications

Exemple 1.8. ***Équilibre de Nash (2 joueurs)***

Soient deux joueurs cherchant à optimiser, sur des ensembles disjoints, une fonction impliquant leurs stratégies respectives. Soient x_i *le vecteur stratégique du joueur i,* X_i *son*

ensemble de stratégies admissibles et $f_i(x_1, x_2)$ sa fonction de coût convexe. La réaction $x_1(x_2)$ du joueur 1 à la stratégie x_2 adoptée par le joueur 2 satisfait :

$$\min_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1(x_2), x_2)$$

et, symétriquement pour le joueur 2, on obtient :

$$\min_{x_2 \in X_2} f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2(x_1))$$

posons :

$$F_1(x_1, x_2) = f_1(x_1(x_2), x_2)$$

(le gradient est calculé par rapport au vecteur x_1) et

$$F_2(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2(x_1))$$

(ce deuxième gradient est calculé par rapport au vecteur x_2), les "réactions" $x_1(x_2)$ et $x_2(x_1)$ sont caractérisées par les conditions du premier ordre suivantes :

$$\langle F_1(x_1(x_2), x_2), x_1(x_2) - x1 \rangle \leq 0 \qquad \forall x_1 \in X_1$$

$$\langle F_2(x_1, x_2(x_1)), x_2(x_1) x_2 \rangle \leq 0 \qquad \forall x_2 \in X_2$$

. Un équilibre de Nash est obtenu lorsque :

$$x_1(x_2^*) = x_1^*$$

$$x_2(x_1^*) = x_2^*$$

. Le système de conditions nécessaires ci-dessus se reformule comme (5) si nous posons :

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \qquad X = X_1 \times X_2$$

Remarque 1.3.2. Comparaison entre l'équilibre de Nash et l'équilibre de Pareto.

Equilibre de Nash L'equilibre de Nash (1951) est une généralisation de l'équilibre de Cournot et correspond à un ensemble de stratégies (une par joueur) tel qu'aucun joueur ne peut augmenter ses gains en changeant unilatéralement de stratégie.

Equilibre de Pareto L'equilibre de Pareto correspond à un ensemble de stratégies (une par joueur) tel qu'il est impossible d'augmenter les gains d'un joueur sans réduire les gains d'un autre.

Exemple 1.9.

Soit un réseau composé de n chemins (pas forcément disjoints) reliant tous une origine A à une destination B, et d le débit de véhicules, exprimé en véhicules par minute, souhaitant quitter A pour relier B. Le temps de parcours du chemin j est donné par la fonction de délai $F_j(x)$, où $x = (x_1, ..., x_n)^t$. Un Équilibre de Wardrop x^* est atteint lorsque les temps de parcours des chemins utilisés sont tous égaux, et inférieurs aux coûts des chemins non utilisés. Mathématiquement, ces conditions prennent la forme :

$$\begin{aligned} F_j(x^*) &= u^* \forall j : x_j^* > 0 \\ F_j(x^*) &\geq u^* \forall j \\ \sum_{j=1}^{n} x_j^* &= d \\ x^* &\geq 0 \end{aligned}$$

En posant $X = x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = d$, on peut facilement démontrer que les solutions du système ci-dessus correspondent aux solutions de $IV(F, X)$. Ce modèle d'affectation du trafic peut mener à certaines situations paradoxales. Considérons en effet le réseau illustré à la figure 1 où les fonctions de délai sur les arcs (dont l'unique paramètre est le flot d'arc v) sont indiquées. Le délai sur le chemin j est obtenu en additionnant les délais sur les arcs formant le chemin j. Le réseau est formé des trois chemins ACD, ABD et $ABCD$, dont les fonctions de délai sont données 'a la table 1. La demande est fixée à 6 unités de flot entre l'origine A et la destination D. A l'équilibre, 2 unités sont affectées 'a chacun des trois chemins. Ceci résulte en un délai de 92 pour chaque usager, et le coût total pour le système est égal à $6 \times 92 = 552$. On constate qu'il aurait été plus efficace, du point de vue du système et des usagers, d'affecter 3 de ces derniers au chemin ABD, et 3 au chemin ACD, au coût individuel de 83, et au coût total de 498. Malheureusement, cette solution est 'instable' car certains usagers seront immanquablement attirés par le chemin $ABCD$ de coût $70 < 83$. Sans coopération entre les usagers (ce qui serait profitable pour tous) la solution optimale

est irréalisable. Un planificateur astucieux, quant à lui, interdirait l'accès à l'arc diagonal BC, en établissant par exemple un péage prohibitif.

1.4 Autres formulations équivalentes

Dans cette partie, on va donner des formulations équivalentes à l'inégalité variationnelle $IV(F, X)$. Précisons qu'en adaptant à la référence [5] pour tous ces formulations.

1.4.1 Formulation équations généralisées

Définition 1.13.

On définie l'ensemble $N_X(x)$ qui présente le cône normal à l'ensemble X géométriquement (voir figure ci dessous) par l'expression :

$$N_X(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle d, y - x\rangle \leq 0 \qquad \forall y \in X\}$$

D'autre part, on trouve que $N_X(x)$ est l'ensemble des directions qui forment un angle "obtus" avec un l'ensemble $X - x = y - x : y \in X$

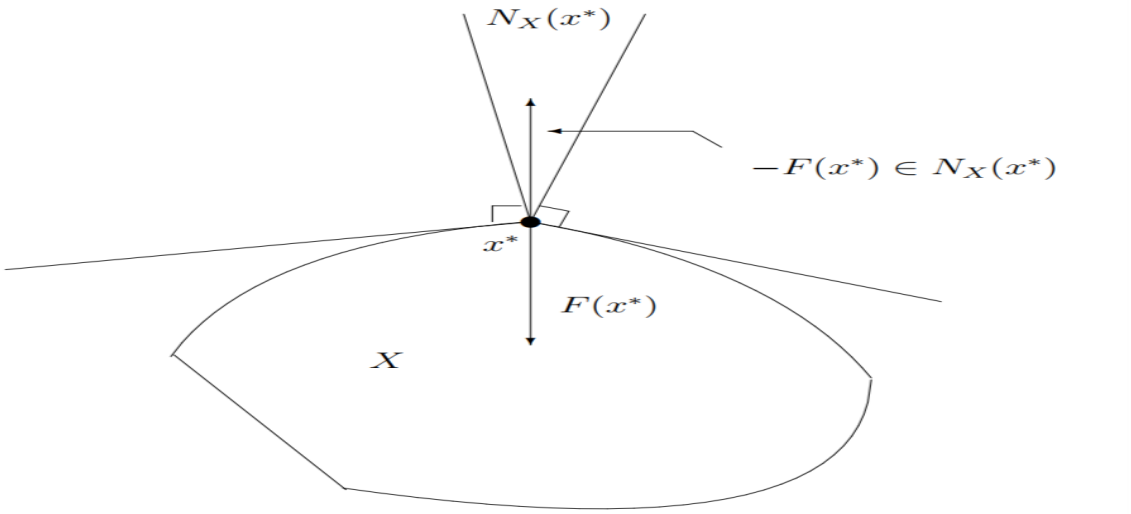


Figure 1.1 : Représentation géométrique du cône normal.

Proposition 1.10.

On a l'inéquation $IV(F, X)$ équivalent à la formule

$$-F(x^*) \in N_X(x^*)$$

cette formule généralise la notion habituelle de système d'équations non linéaires,qui a été nommée équation généralisée par Robinson

Remarque 1.4.1.

Si la fonction F est le gradient d'une fonction f, on obtient alors la condition nécessaire d'optimalité :

$$-f'(x^*) \in N_X(x^*)$$

qui exprime qu'un point x^* , il n'existe pas de direction descente admissible d c'est à dire : $f'(x^*, d)$ positif.

On va donner ce-dessous des exemples de formulation :

1.4.2 Formulation en point fixe

Proposition 1.11.

On dit que x est un solution de $IV(F, X)$ si et seulement si quelque soit $x \in \Gamma(x)$ où

$$\Gamma(x) = arg \max_{y \in X} \langle F(x), x - y \rangle \tag{1.6}$$

Définition 1.14.

On considère le problème suivant :

$$\min_{p \in X} \frac{1}{2} \|p - (x - \alpha F(x))\|^2 \tag{1.7}$$

qui vérifier les conditions d'optimalité qui convient : $\langle p_\alpha - (x - \alpha F(x)), p_\alpha - y \rangle \geqslant 0$
On a $p_\alpha(x) = Proj_X(x - \alpha F(x))$ est la projection suivant la norme euclidienne du point $x - \alpha F(x)$ sur l'ensemble X présente la solution unique de ce problème(voir figure ci dessous).

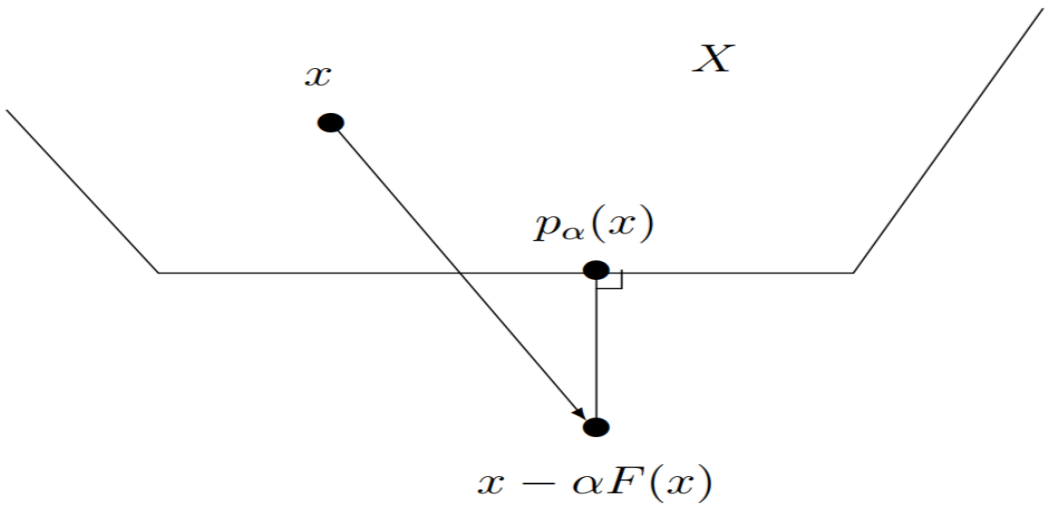


Figure 1.2 : Projection sur l'ensemble défini par les contraintes

Résultat 1.4.2.

Le problème 1.7 présente la première formulation de point fixe qui équivalent à $IV(F,V)$ lorsque $\alpha = +\infty$,donc il est facile de voir que un point x est solution de $IV(F,X)$ si et seulement si $x = p_\alpha(x)$.

Généralisation 1.4.3.

On peut généraliser la formule 1.7 en adoptant le produit scalaire et la norme induits par une matrice symétrique et définie positive K : $\langle x,y\rangle_K = x^tKy$, $\|x\|_K^2 = x^tKx$, On obtient alors le problème d'optimisation :

$$\min_{p\in X} \frac{1}{2}\|p - (x - \alpha K^{-1}F(x))\|_K^2 \tag{1.8}$$

qui est identique à :

$$\min_{p\in X} \frac{1}{2}\langle p - x + \alpha K^{-1}F(x), K(p - x + \alpha K^{-1}F(x))\rangle \tag{1.9}$$

qui admet $p_\alpha^K(x)$ comme une solution satisfait l'inéquation variationnelle :

$$\langle K(p_\alpha^K(x) - x) + \alpha F(x), p_\alpha^K(x) - y\rangle \geqslant 0 \qquad \forall y \in X$$

Remarque 1.4.4.

$p_\alpha^K(x)$ résoudre aussi le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{p\in X}\langle F(x), xp\rangle - \frac{1}{2\alpha}\|x-p\|_K^2 \tag{1.10}$$

Résultat 1.4.5.

Les problèmes 1.8 , 1.9 , 1.10 sont des formulations de point fixe équivalents à l'inégalité variationnelle $IV(F,X)$ donc on a x est solution de l'inégalité variationnelle si et seulement si $x = p_\alpha^K(x)$

Définition 1.15.

Soit x et z de X ,on définie $\widetilde{F}(z,x)$ qui présente l'approximation de la fonction $F(z,x)$ au point x fixé telle que :

$$\widetilde{F}(x,x) = F(x)$$

avec $\widetilde{\Gamma}(x)$ l'ensemble des solutions de $IV(\widetilde{F},X)$

Résultat 1.4.6.

Il est clair que x est un solution de $IV(F,X)$ si et seulement si $x \in \widetilde{\Gamma}(x)$

Remarque 1.4.7.

On peut facilement trouver les formulations de point fixe précédentes si en posant $\widetilde{F}(z,x) = F(x)$ et $\widetilde{F}(z,x) = F(x) + \frac{1}{\alpha}K(zx)$

1.4.3 Formulation primale-duale

Proposition 1.12.

Soit x vecteur de X, on dit que x est un solution de $IV(F,V)$ si et seulement si quelque soit $x \in \Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = arg\max_{y\in X}\langle F(x), x-y\rangle \tag{1.11}$$

$$= arg\min_{y\in X}\langle F(x), y\rangle \tag{1.12}$$

Définition 1.16.

Soit X un ensemble compact c'est à dire $X = \{x : G(x) \leq 0\}$ où la représentation de X

soit régulière ,on définie par la formule qui convient le problème suivant :

$$\min_{y \in X} \langle F(x), y \rangle \tag{1.13}$$

qui vérifier les conditions d'optimalité ci dessous :

$$\begin{aligned} G(x) &\leq 0 \\ F(x) + \lambda G'(y) &= 0 \\ \langle \lambda, G(x \rangle &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Résultat 1.4.8.

Si on prend des nouvelles variables tels que :

$$\begin{aligned} x_j^+ &= \max\{0, x_j\} \\ x_j^- &= \max\{0, -x_j\} \\ x &= x^+ - x^- \\ z &= (x^+, x^-, \lambda \end{aligned}$$

et une nouvelle fonction :

$$H(z) = \begin{bmatrix} F(x^+ - x^-) + G'^t(x^+ - x^-)\lambda \\ -F(x^+ - x^-) - G'^t(x^+ - x^-)\lambda \\ -G(x^+ - x^-) \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

On obtient la formulation de complémentarité non linéaire (formulation primale-duale) :

$$\begin{aligned} H(z) &\leq 0 \\ z &\geq 0 \\ \langle H(z), z \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.4.4 Formulation sous forme d'équation

Définition 1.17.

Soit z de $\mathbb{R}^{m+2n}$ qui présente la solution de 1.15 ,on définie l'équation non différentielle

qu'on a l'obtient par une transformation du problème complémentarité par l'équation qui convient :

$$\sum_{j=1}^{m+2n} [min\{z_j, H_j(z)\}]^2 = 0 \tag{1.16}$$

qui est équivalente à :

$$\sum_{j=1}^{m+2n} [z_j + H_j(z) - \sqrt{z_j^2 + H_j(z)^2}]^2 = 0 \tag{1.17}$$

Remarque 1.4.9.

Il y a des autres formulations sous forme de système d'équations ont été proposées et possèdent grosso modo les mêmes propriétés.

1.4.5 Formulation en problème d'optimisation

Rappel

Soit x , z de $\mathbb{R}^n$, Pour tout matrice $A(x)$ symétrique et définie positive, on rappel la formulation de point fixe telle que : $\widetilde{F}(z, x) = F(x) + A(x)(z - x)$

Proposition 1.13.

Soit x de X , si x est une solution de $IV(F, X)$,alors on a la fonction de mérite $\widetilde{g}$ (parfois appelée "gap function") est non négative (il suffit de poser $y = x$) et l'on a que $\widetilde{g}(x) = 0$. Dans le cas général on trouve la fonction de mérite $\widetilde{g}$ est presque toujours non convexe et parfois non différentiable, même si F l'est.

Remarque 1.4.10.

L'inéquation variationnelle $IV(\widetilde{F}, X)$ se ramène au problème d'optimisation :

$$\max_{y \in X} \langle F(x), x - y \rangle - \frac{1}{2} \|x - y\|^2_{A(x)} \tag{1.18}$$

qui sa valeur optimale est $\widetilde{g}(x)$

Chapitre 2

Résolution par équations différentielles

Dans ce chapitre, notre travail va être baser sur l'opérateur de projection. Nous établissons un système des équations différentielles pour résoudre le problème de l'inéquation variationnelle $IV(F, X)$, en utilisant cette inéquation nous prouvons que les points d'accumulation de la trajectoire des équations différentielles sont les solutions aux problèmes des inéquations variationnelles. L'opérateur de projection à un ensemble convexe est assez utile pour reformuler l'inéquation variationnelle $IV(F, X)$ comme une équation différentielle.

2.1 Équation différentielle ordinaire

Définition 2.1.
Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, du premier ordre est définie de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Où x est une fonction inconnue de la variable réelle t et l'application f est une donné du problème. A chaque instant t, la valeur de $x(t)$ est appelée l'état du système à l'instant t et l'espace dans lequel la fonction inconnue x prend ses valeurs est appelé espace d'états. On parlera souvent de variable de temps pour la variable t et de trajectoire du système pour une solution $t \to x(t)$.

La proposition suivante est démontré dans [7].

Proposition 2.1.

x^* est une solution de $IV(F,X)$ si et seulement si x^* est une solution de l'équation $\Phi_\mu(x) = 0$, pour tout $\mu > 0$, où

$$\Phi_\mu(x) = Pr_C(x - \mu f(x)) - x \tag{2.1}$$

Démonstration.

On a x^* solution de $IV(F,X)$ signifie

$$\langle f(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \ , \ \forall y \in C$$

équivalent à

$$\langle \mu f(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \ , \ \forall y \in C$$

alors on a

$$\langle x^* - x^* + \mu f(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \ , \ \forall y \in C$$

$$\langle x^* - (x^* - \mu f(x^*)), y - x^* \rangle \geq 0 \ , \ \forall y \in C$$

donc on a d'après la Caractérisation variationnelle

$$Pr_C(x^* - \mu f(x^*)) = x^*$$

□

Nous donnons maintenant la définition de la monotonie cyclique.

Définition 2.2.

Une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite cycliquement monotone si

$$\langle x_1 - x_0, T(x_0) \rangle + \langle x_2 - x_1, T(x_1) \rangle + ... + \langle x_0 - x_m, T(x_m) \rangle \leq 0$$

pour tout ensemble de points $\{x_0, x_1, ..., x_m\} \subset \mathbb{R}^n$.

(Voir figure ci dessous)

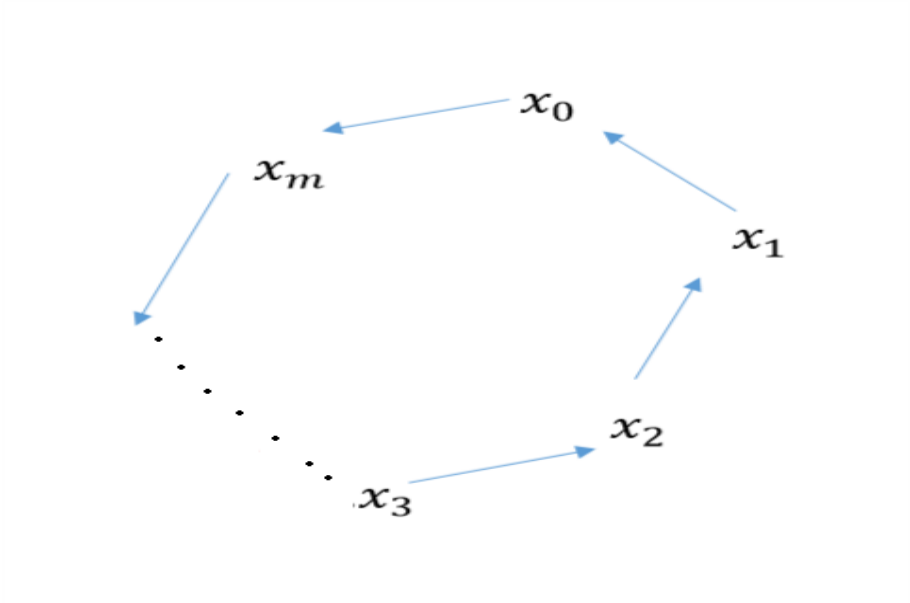


Figure 2.1 : Représentation géométrique du monotonie cyclique.

La monotonie cyclique est une généralisation de la monotonie. Rappelons qu'une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite *monotone* si pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle T(x_1) - T(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Il est bien connu qu'en dimension 1, la monotonie coïncide avec la monotonie cyclique, voir [6].

La monotonie est la convexité sont des propriétés assez liées, comme le montrent les résultats qui vont suivre. Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,1].$$

Il est bien connu que si $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de dérivée croissante, alors T est convexe.

Et qu'une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son gradient ∇f est monotone (voir aussi, par exemple, [2, 6]. Nous démontrons maintenant un résultat analogue pour la monotonie cyclique. En particulier, ce résultat montre qu'en présence de la différentiabilité et en utilisant la convexité, la monotonie est équivalente à la monotonie cyclique pour le gradient. Pour d'autres propriétés de la monotonie cyclique faisant intervenir la sous-différentielle, le lecteur peut consulter [6], par exemple.

Proposition 2.2.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors f est convexe si et seulement si ∇f est cycliquement monotone.

Démonstration.

Supposons que f est convexe. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Le cas où $x_i = x_j$ étant trivial, on suppose que $x_i \neq x_j$ dans ce qui suit. Par la convexité de f, on a

$$f\left(tx_i + (1-t)\, x_j\right) \leq tf\left(x_i\right) + (1-t)\, f\left(x_j\right) \quad \forall t \in [0,1]\,.$$

Donc, pour $t \in [0,1]$, on a $f\left(tx_i + (1-t)\, x_j\right) - f\left(x_j\right) \leq t\left(f\left(x_i\right) - f\left(x_j\right)\right)$. En remarquant que $tx_i + (1-t)\, x_j = x_j + t\left(x_i - x_j\right)$, et en divisant par $t > 0$, on a alors

$$\frac{f\left(x_j + t\left(x_i - x_j\right)\right) - f\left(x_j\right)}{t} \leq f\left(x_i\right) - f\left(x_j\right).$$

On écrit

$$\frac{f\left(x_j + t\left(x_i - x_j\right)\right) - f\left(x_j\right)}{t} =$$
$$\|x_i - x_j\| \frac{f\left(x_j + t\left(x_i - x_j\right)\right) - f\left(x_j\right) - \left\langle \nabla f\left(x_j\right), t\left(x_i - x_j\right)\right\rangle + \left\langle \nabla f\left(x_j\right), t\left(x_i - x_j\right)\right\rangle}{t\|x_i - x_j\|},$$

et ce dernier est égal à

$$\|x_i - x_j\| \frac{f\left(x_j + t\left(x_i - x_j\right)\right) - f\left(x_j\right) - \left\langle \nabla f\left(x_j\right), t\left(x_i - x_j\right)\right\rangle}{t\|x_i - x_j\|} + \left\langle \nabla f\left(x_j\right), x_i - x_j\right\rangle.$$

Par passage à la limite quand $t \to 0$, on obtient

$$\lim_{t \to +0} \frac{f\left(x_j + t\left(x_i - x_j\right)\right) - f\left(x_j\right)}{t} = \left\langle \nabla f\left(x_j\right), x_i - x_j\right\rangle.$$

On en déduit alors que $\left\langle \nabla f\left(x_j\right), x_i - x_j\right\rangle \leq f\left(x_i\right) - f\left(x_j\right)$. Il s'en suit alors, en posant $x_{m+1} = x_0$ que

$$\sum_{i=0}^{m} \left\langle \nabla f\left(x_i\right), x_{i+1} - x_i\right\rangle \leq \sum_{i=0}^{m} \left(f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right)\right) = 0.$$

Inversement, pour $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, on définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi\left(t\right) = f\left(x_t\right)$, où $x_t = tx_1 + (1-t)\, x_0 = x_0 + t\left(x_1 - x_0\right)$. L'application φ est différentiable et on a

$$\varphi'\left(t\right) = \left\langle \nabla f\left(x_t\right), x_1 - x_0\right\rangle.$$

Alors pour tous $0 \leq t' < t \leq 1$, on a

$$\varphi'(t) - \varphi'(t') = \langle \nabla f(x_t) - f(x_{t'}), x_1 - x_0 \rangle = \frac{1}{t-t'} \langle \nabla f(x_t) - f(x_{t'}), x_t - x_{t'} \rangle \geq 0$$

car ∇f est monotone (cycliquement monotone). Donc φ' est croissante et donc φ est convexe. Pour voir que f est convexe, on a $x_t = tx_1 + (1-t)x_0$. Donc

$$f(x_t) = \varphi(t) = \varphi(t \times 1 + (1-t) \times 0) \leq t\varphi(1) + (1-t)\varphi(0) = tf(x_1) + (1-t)f(x_0).$$

□

L'inégalité suivante joue un rôle important dans la démonstration du théorème de convergence de la trajectoire du système d'équation différentielle que nous allons considérer plus loin.

Théorème 2.3.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application cycliquement monotone et Lipschitz. On a l'inéquation suivante est vraie :

$$\langle f(x_1) - f(x_3), x_2 - x_1 \rangle \leq 2L\|x_3 - x_2\|^2 \tag{2.2}$$

pour tout $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$ et L est une constante.

Démonstration.
Puisque f est une application cycliquement monotone, on a pour tout $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x_2 - x_1, f(x_1) \rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2) \rangle + \langle x_1 - x_3, f(x_3) \rangle \leq 0 \tag{2.3}$$

et on a pour tout $x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x_3 - x_2, f(x_2) \rangle + \langle x_2 - x_3, f(x_3) \rangle \leq 0$$

équivalent à

$$\langle x_3 - x_2, f(x_2) \rangle + \langle x_3 - x_2, -f(x_3) \rangle \leq 0$$

alors

$$\langle x_3 - x_2, f(x_2 - f(x_3) \rangle \leq 0 \tag{2.4}$$

sommet les deux relations précédents 2.3 et 2.4, nous obtenons que

$$\langle x_2 - x_1, f(x_1) \rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2) \rangle + \langle x_1 - x_3, f(x_3) \rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2 - f(x_3) \rangle \leq 0$$

qui équivalent à

$$\langle x_2 - x_1, f(x_1)\rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2)\rangle + \langle x_1 + x_2 - x_2 - x_3, f(x_3)\rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2 - f(x_3)\rangle \leq 0$$

donc

$$\langle x_2 - x_1, f(x_1)\rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2)\rangle + \langle x_1 - x_2, f(x_3)\rangle + \langle x_2 - x_3, f(x_3)\rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2 - f(x_3)\rangle \leq 0$$

on trouve

$$\langle x_2 - x_1, f(x_1)\rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2)\rangle + \langle x_2 - x_1, -f(x_3)\rangle + \langle x_3 - x_2, -f(x_3)\rangle + \langle x_3 - x_2, f(x_2 - f(x_3)\rangle \leq 0$$

nous obtenons alors

$$\langle x_2 - x_1, f(x_1 - f(x_3))\rangle + 2\langle x_3 - x_2, f(x_2) - f(x_3)\rangle \leq 0$$

ce qui signifie

$$\begin{aligned}\langle x_2 - x_1, f(x_1 - f(x_3))\rangle &\leq 2\langle x_2 - x_3, f(x_2) - f(x_3)\rangle \\ &\leq 2\|x_2 - x_3\|.\|f(x_2) - f(x_3)\| \\ &\leq 2\|x_2 - x_3\|L\|x_2 - x_3\| \\ &= 2L\|x_2 - x_3\|\end{aligned}$$

□

2.2 Équation différentielle avec l'opérateur de projection

Définition 2.3.

On définie le système d'équation différentielle suivante qui va être basé sur l'équation 2.1 comme suit

$$x'(t) + x = Pr_C(x(t) - \mu f(x(t)) \qquad \mu > 0 \tag{2.5}$$

on peut écrire l'EDO ci dessus d'autre manière comme suit

$$x'(t) = g(x(t))$$

Où $g(z) = Pr_C(z + \mu f(z)) - z \qquad z \in \mathbb{R}^n$

Pour l'existence et l'unicité du solutions de système d'équation différentielle 2.5 voir [8]

Théorème 2.4.

Si f est Lipschitzienne, alors g est lipschitzienne de module M.

Démonstration.

Pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned}
\|g(z_1) - g(z_2)\| &= \|Pr(z_1 + \mu f(z_1)) - z_1 - Pr(z_2 + \mu f(z_2)) + z_2\| \\
&\leq \|Pr(z_1 + \mu f(z_1)) - Pr(z_2 + \mu f(z_2))\| + \|z_2 - z_1\| \\
&\leq \|z_1 + \mu f(z_1) - z_2 + \mu f(z_2)\| + \|z_1 - z_2\| \\
&\leq \|\mu f(z_1) - \mu f(z_2)\| + 2\|z_1 - z_2\| \\
&\leq \mu M \|\mu z_1 - z_2\| + 2\|z_1 - z_2\| \\
&= (\mu M + 2)\|z_1 - z_2\|
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.5.

Le système d'équation différentielle 2.5 *est équivalent à l'inéquation variationnelle suivante (d'après la caractérisation variationnel)*

$$\langle x'(t) + \mu f(x), y - x'(t) - x(t) \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in C \tag{2.6}$$

Nous rappelons le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence des solutions des équations différentielles.

Théorème 2.6. ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz)***

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution unique définie sur tout $\mathbb{R}$

Maintenant nous prouvons le théorème de convergence de la trajectoire $x(t)$ du système d'équation différentielle. On trouve sa démonstration dans [7].

Théorème 2.7.

Soit f une application cycliquement monotone et lipschitzienne. Supposons que l'ensemble de solutions de problème $IV(F,X)$ n'est pas vide. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $0 < \mu < \dfrac{1}{2L}$ où L est un constant le point d'accumulation de la trajectoire $x(t)$ du système d'équation différentielle 2.5 est une solution au problème de l'inéquation variationnelle $IV(F,X)$

Démonstration.

Soit x^* l'un des solutions au problème $IV(F,X)$. On pose $y = x^*$ dans 2.6 on trouve :

$$\langle x' + \mu f(x), x^* - x' - x\rangle \geq 0$$

et aussi, On pose $y = x' + x$ dans $IV(F,X)$, on trouve :

$$\langle f(x^*), x' + x - x^*\rangle \geq 0$$

On sommet les deux inégalités précédentes, nous obtenons

$$\langle x' + \mu(f(x) - f(x^*)), x^* - x' - x\rangle \geq 0 \tag{2.7}$$

En utilisant l'inégalité 2.2 , on trouve

$$\langle f(x) - f(x^*), x^* - x' - x\rangle \leq 2L\|x'\|^2 \tag{2.8}$$

il est facile de voire que 2.7 équivalent à

$$\langle x', x^* - x' - x\rangle + \langle \mu(f(x) - f(x^*)), x^* - x' - x\rangle \geq 0$$

on a donc

$$-\langle x', x^* - x' - x\rangle \leq \langle \mu(f(x) - f(x^*)), x^* - x' - x\rangle$$

En appliquant l'inégalité 2.8 , on trouve

$$\langle x', x + x' - x^*\rangle \leq 2\mu L\|x'\|^2$$

équivalent à

$$\langle x', x - x^*\rangle + \langle x', x'\rangle - 2\mu L\|x'\|^2 \leq 0$$

Qui implique que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x - x^*\| + \|x'\|^2 - 2\mu L\|x'\|^2 \leq 0$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x - x^*\| + (1 - 2\mu L)\|x'\|^2 \leq 0$$

Et comme $0 < \mu < 2L$ on a $1 - 2\mu L > 0$. En intégrant l'inéquation précédente sur intervalle $[t_0, t]$, on obtient

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(\tau) - x^*\|d\tau + (1 - 2\mu L)\int_{t_0}^{t} \|x'\|^2 d\tau \leq 0$$

on a alors

$$\frac{1}{2}\|x(t) - x^*\| - \frac{1}{2}\|x(t_0) - x^*\| + (1 - 2\mu L)\int_{t_0}^{t} \|x'\|^2 d\tau \leq 0$$

donc

$$\frac{1}{2}\|x(t) - x^*\| + (1 - 2\mu L)\int_{t_0}^{t} \|x'\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\|x(t_0) - x^*\| \tag{2.9}$$

et comme $x(t_0) = x_0$ on a

$$\|x(t) - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\| \tag{2.10}$$

et

$$\int_{t_0}^{t} \|x'\|^2 d\tau < \infty, \qquad t \to \infty \tag{2.11}$$

L'inéquation 2.11 montre qu'il existe une suite $\{t_i\}$ telle que $\|x'(t_i)\| \to 0, i \to \infty$. Sinon nous supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ telle que $\|x'\| \geq \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$, alors nous obtenons une contradiction avec 2.11.

L'inéquation 2.10 montre que $x(t)$ est finie, d'où la suite $\{x(t_i)\}$ est aussi finie, nous pouvons choisir une sous suite $\{x(t_{i_j})\}$ de la suite $\{x(t_i)\}$ telle qu'il existe $x' \in \mathbb{R}^n$ et $x(t_{i_j}) \to x', j \to \infty$ et $\|x'(t_{i_j})\| \to 0, j \to \infty$

Considérons l'inégalité 2.6 pour $x(t_{i_j})$ et prenant la limite comme $j \to \infty$ et comme on a

$$\langle f(x'), y - x' \rangle \geq 0, \qquad \forall y \in C$$

qui implique que x' est la solution du problème de l'inéquation variationnel IV(F,X). Cela complète la preuve. □

Maintenant on fait rappelle de la stabilité exponentielle dans une point d'équilibre x^* par la définition ci-dessous.

Définition 2.4.

On dit que le point d'équilibre x^* est exponentiellement stable (E.S) s'il existe des constants positives c, k et λ tel que

$$\|x(t)\| \leqslant k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall \|x(t_0)\| < c$$

Proposition 2.8.

Soit $\{x(t_{i_j})\}$ une sous suite de $\mathbb{R}^n$. La convergence de la sous suite $\{x(t_{i_j})\}$ de la trajectoire $x(t)$ du système d'équation différentielle 2.5 est exponentiellement stable.

La proposition précédente est démontré dans [7].

Démonstration.

Sous la certaine condition, nous pouvons prouver que la convergence de la sous suite $\{x(t_{i_j})\}$ est stable exponentielle.

En fait, s'il existe un $\alpha > 0$, $\omega > 0$ et $c > 0$ tel que

$$\|x'(t_{i_j})\|^2 \geq \frac{\alpha\|x_0 - x^*\|^2}{t_{i_j} - t_0} \tag{2.12}$$

et

$$0 < \mu \leq \frac{2\alpha - [1 - (ce^{-\omega t_{i_j}})^2]}{4L\alpha} \tag{2.13}$$

De l'inégalité 2.9, nous avons

$$\frac{1}{2}\|x(t_{i_j}) - x^*\|^2 + (1 - 2\mu L)\int_{t_0}^{t_{i_j}} \|x'(t_{i_j})\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\|x_0 - x^*\|^2 \tag{2.14}$$

Où $x_0 = x(t_0)$

L'inégalité 2.12 signifie que

$$(1 - 2\mu L)\int_{t_0}^{t_{i_j}} \|x'(t_{i_j})\|^2 d\tau \geq (1 - 2\mu L)\alpha\|x_0 - x^*\|^2$$

Soumettre l'inégalité ci dessus dans 2.14 nous obtenons que

$$\|x(t_{i_j}) - x^*\|^2 \leq [1 - 2(1 - 2\mu L)]\|x_0 - x^*\|^2 \tag{2.15}$$

de l'inégalité 2.13 et 2.15 nous déduisons que

$$\|x(t_{i_j}) - x^*\| \leq ce^{-\omega t_{i_j}}\|x_0 - x^*\|^2$$

Qui montre que la convergence de la sous suite $\{x(t_{i_j})\}$ de la trajectoire $x(t)$ du système d'équation différentielle 2.5 est exponentiellement stable. Par conséquent la conclusion du théorème 2.7 a garantis la stabilité de la convergence d'une sous suite. □

Chapitre 3

Exemples et résultats numériques

Dans ce chapitre, nous donnons des exemples d'applications du système d'équations différentielles 2.5. Tous les résultats de chapitre sont issus de la référence [7]. Pour chaque problème de test, nous comparons également les performances numériques du système d'équation différentielle proposé 2.5 de divers points initiaux, en utilisant le programme de Matlab. Dans tous cette partie l'implémentation numérique est codée par Matlab 7.8 fonctionnant sur un PC Intel Pentium IV de 2,93 GHz CPU et le solveur d'équation différentielle ordinaire adopté est ode45, qui utilise un formule de Runge-Kutta (4,5). Le paramètre est choisi comme $\mu = 0,03$ dans tous les exemples.

Exemple 3.1.

On considère le problème des inéquations variationnelles suivante

$$\langle Dx + b, y - x\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{3.1}$$

Où $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *;* $b = (-8, -6, -4, 3)^T$ *et* $C = [-5, 5]^4$

On cherche la solution $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *de l'équation*

$$x - Pr_C(x - \mu f(x)) = 0$$

avec $f(x) = Dx + b$

On trouve $x^* = (-5/6, 19/6, 5, -5)^T$.

On a x^* solution de l'équation précédente équivalent que x^* vérifier l'inéquation 3.1. C'est à dire on va vérifier que $\langle Dx^* + b, y - x^* \rangle \geq 0$ qui signifier que la solution x^* est valide.
Pour cela en multipliant la matrice D avec le vecteur x^*

$$Dx^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/6 \\ 19/6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/6 + 38/6 + 10 - 5 \\ -10/6 + 76/6 - 5 \\ -10/6 + 10 - 10 \\ -5/6 + 19/6 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -10/6 \\ 74/6 \end{pmatrix}$$

alors on trouve que $Dx^* + b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -34/6 \\ 92/6 \end{pmatrix}$

d'autre part on a $y - x = \begin{pmatrix} y_1 + 5/6 \\ y_2 - 19/6 \\ y_3 - 5 \\ y_4 + 5 \end{pmatrix}$

maintenant en calcule le produit scalaire des deux vecteurs $Dx^* + b$ et $y - x^*$

$$\begin{aligned} \langle Dx^* + b, y - x^* \rangle &= -\frac{34}{6}(y_3 - 5) + \frac{92}{6}(y_4 + 5) \\ &= 46y_4 - 17y_3 + 315 \end{aligned}$$

et comme $-5 \leq y_3 \leq 5$ *et* $-5 \leq y_4 \leq 5$
on trouve que $-85 \leq -17y_3 \leq 85$ *et* $-230 \leq 46y_4 \leq 230$
on additionne les deux relations précédentes

$$0 \leq 46y_4 - 17y_3 + 315 \leq 630$$

donc on a

$$46y_4 - 17y_3 + 315 \geq 0 \quad \forall\, y_3, y_4 \in [-5; 5]$$

La figure suivante présente les comportements de convergence de la trajectoire $x(t)$ du système d'équation différentielle 2.5 à neuf points initiaux aléatoires convergeant vers sa solution

$(-0.8333, 3.1666, 4.9998, -5.0000)^T$.

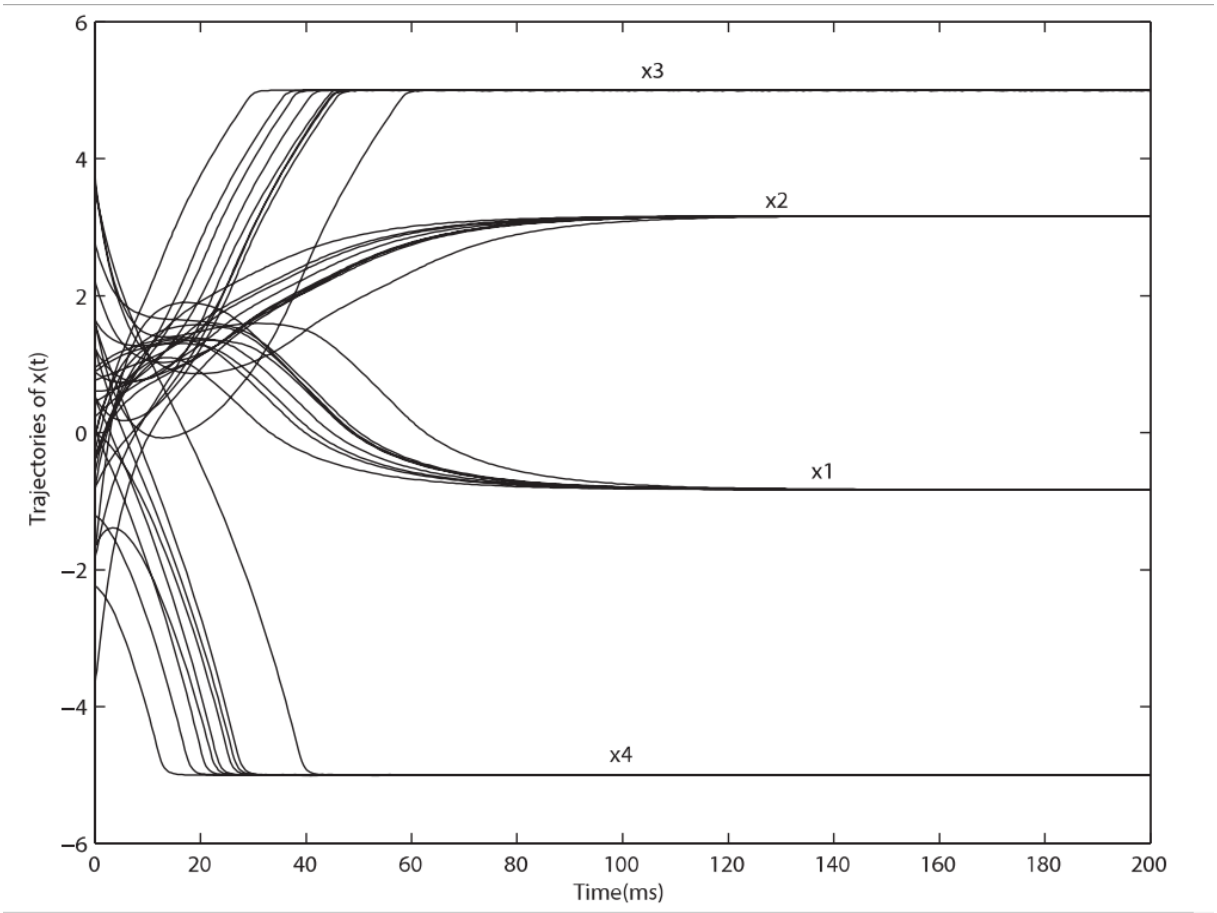


Figure 3.1 : Comportement transitoire de x(t) de l'équation différentielle (2.5) de l'exemple 3.1 avec neuf points initiaux aléatoires

Exemple 3.2.

On considère le problème d'inéquation variationnelle suivant

$$\langle f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{3.2}$$

$$Où\ f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^3 - 8 \\ x_2 - x_3 + x_2^3 + 3 \\ -x_2 + x_3 + 2x_3^3 - 3 \\ x_4 + 2x_4^3 \end{pmatrix} ,C = \{x \in \mathbb{R}^4 / a \leq x \leq b\} \ , \ a = (-1, 0, -2, -8)^T$$

et $b = (6, 3, 5, 0)^T$

On cherche la solution $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ *de l'équation* $x - Pr_C(x - \mu f(x)) = 0$

On trouve $x^* = (2, 0, 1, 0)^T$.

On a x^* *solution de l'équation précédente équivalent que* x^* *vérifier l'inéquation 3.1. C'est à dire on va vérifier que* $\langle Dx^* + b, y - x^* \rangle \geq 0$ *qui signifier que la solution* x^* *est valide.*

Pour cela on calcule les deux vecteurs $f(x^*)$ *et* $y - x^*$

$$On\ a\ f(x^*) = \begin{pmatrix} 3(2)^3 - 8 \\ 0 - 1 + 3 \\ 11 + 2 - 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d'autre\ part,\ on\ a\ pour\ tout\ y \in C\ :\ y - x^* = \begin{pmatrix} y_1 - 2 \\ y_2 \\ y_3 - 1 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

maintenant on calcule le produit scalaire des deux vecteurs $f(x^*)$ *et* $y - x^*$

$$\begin{aligned} \langle f(x^*), y - x^* \rangle &= 16(y_1 - 2) + 2(y_2) \\ &= 16y_1 + 2y_2 - 32 \end{aligned}$$

et comme $16y_1 \geq 0$ *et* $2y_2 \geq 0$ *donc on a*

$$16y_1 + 2y_2 - 32 \geq 0 \quad \forall\ y_1, y_2 \in C$$

La trajectoire solution $x(t)$ *du système d'équation différentielle 2.5 convergeant vers* $(2.0000, 0.0000, 1.0000, 0.0000)^T$ *pour le problème d'inéquation variationnelle avec six points initiaux aléatoires sont illustrés à la figure*

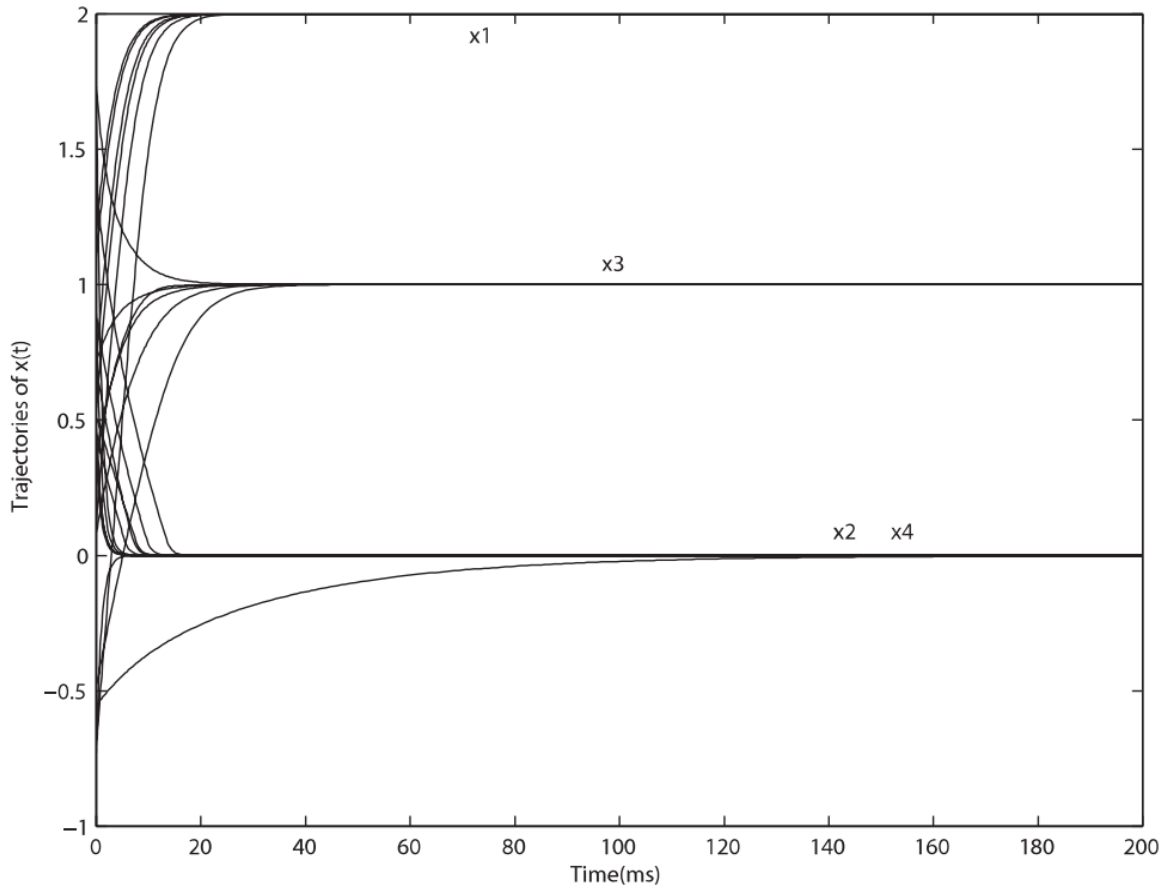


Figure 3.2 : Comportement transitoire de x(t) de l'équation différentielle (2.5) de l'exemple 3.2 avec six points initiaux aléatoires

Exemple 3.3.

On considère le problème de programmation convexe non linéaire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^5_+} f(x)$$

Où $f(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2} + \frac{x_4^2}{2} + \frac{x_5^2}{2} + \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{50} - 3x_2 - x_3 + \frac{x_4}{2}$.
Sa solution optimale est $x^* = (0, 3, 1, 0, 0)^T$.

Ce problème peut être transformé en problème de complémentarité non linéaire suivant

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2x_3x_4x_5/50 \\ x_2 + x_1x_3x_4x_5/50 - 3 \\ x_3 + x_1x_2x_4x_5/50 - 1 \\ x_4 + x_1x_2x_3x_5/50 + 1/2 \\ x_5 + x_1x_2x_3x_4/50 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Pour le problème de complémentarité 3.3, cette figure présente les comportements de convergence de la trajectoire $x(t)$ du système d'équation différentielle 2.5 avec huit initiaux aléatoires convergeant vers sa solution $(0.0000, 3.0000, 1.0000, 0.0000, 0.0000)^T$

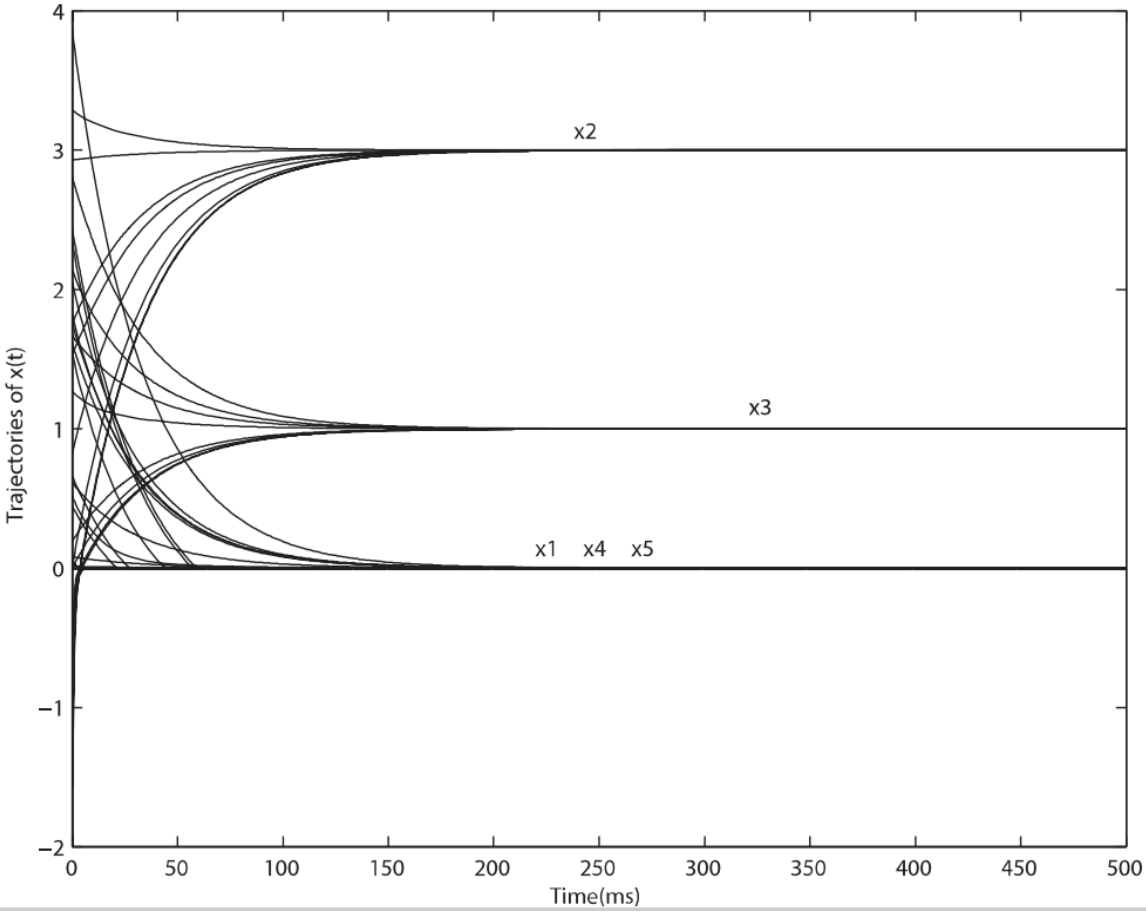


Figure 3.3 : Comportement transitoire de x(t) de l'équation différentielle (2.5) de l'exemple 3.3 avec huit points initiaux aléatoires

Exemple 3.4.

On considère le problème de programmation convexe non linéaire

$$\min_{x \in C^5} exp\left(\sum_{i=1}^{5}(x_i - i + 2)^2\right)$$

Où $C^5 = x \in \mathbb{R}^5 / x_n \geq \|x_t\|$, $x^t = (x_1, x_2, .., x_{n-1})$ *et* $\|.\|$ *induit par la norme euclidien.*
Sa solution optimale est $x^* = (-1, 0, 1, 2, 3)^T$.
Ce problème peut être transformé en l'inéquation variationnelle suivant

$$\langle f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C^5 \tag{3.4}$$

Où

$$f(x) = 2exp\left(\sum_{i=1}^{5}(x_i - i + 2)^2\right)(x_1 + 1, x_2, x_3 - 1, x_4 - 2, x_5 - 3)$$

La trajectoire solution $x(t)$ *du système d'équation différentielle 2.5 convergeant vers* $(-1.0000, 0.0000, 1.9999, 2.9999)^T$ *pour le problème d'inéquation variationnelle avec cinq points initiaux aléatoires sont illustrés dans la figure.*

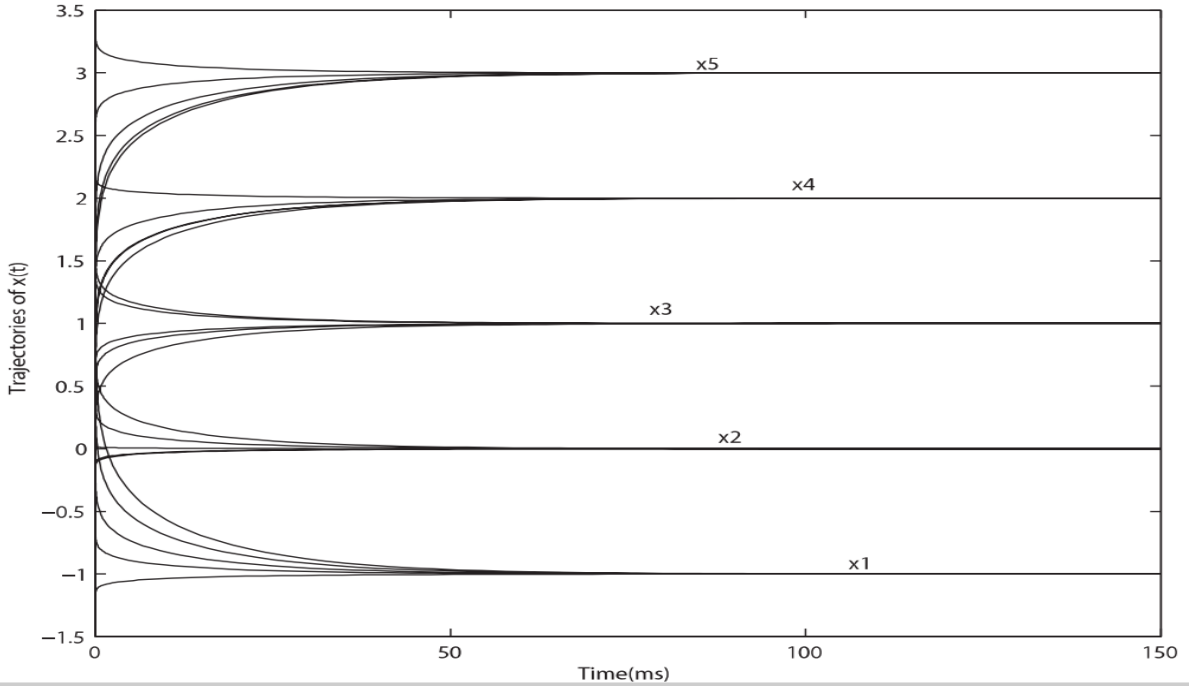


Figure 3.4 : Comportement transitoire de x(t) de l'équation différentielle (2.5) de l'exemple 3.4 avec cinq points initiaux aléatoires

Conclusion

Nous nous sommes intéressé dans ce travail à l'étude d'une méthode pour la résolution des inéquations variationnelles en utilisant une équation différentielle ordinaire définie par l'opérateur de projection sur un convexe fermé. Non seulement ce travail montre l'intérêt de cette approche mathématique, mais met aussi la lumière sur d'autres techniques pour appréhender le problème de résolution de inéquations variationnelles. Ce rapprochement entre le monde statique des inéquations variationnelles et le monde dynamique des équations différentielles (et des systèmes dynamiques en général), qui s'avère d'intérêt certain, ne cesse d'attirer l'attention de plusieurs chercheurs. Ainsi, d'autres types d'équations différentielles, et notamment ce que l'on appelle système dynamique projeté, sont considérés et étudiés. Ce travail est une ébauche dans ce domaine qui reste large avec des études allant de méthodes numériques à des études qualitatives telle que la stabilité. Nous espérons approfondir à l'avenir nos compétences dans cette direction et de développer des idées fructueuses dans ce domaine qui regorge de perspectives utiles.

Bibliographie

[1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Masson, 1987. 2^{e}tirage.

[2] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Springer, Heidelberg, volume i edition, 1993.

[3] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their applications*. Academic Press, Inc, 1980.

[4] H. Le Dret. *Notes de cours M2 Équations aux dérivées partielles elliptiques*. 2010. Université Pierre Et Marie Curie.

[5] P. Marcotte. *Inéquations Variationnelles : motivation, algorithmes de résolution et quelques applications*. Révision 27 février 2014. Cours donné à Zinal, Suisse, 4-8 mars 1997.

[6] R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets. *Variational Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3 edition, 2009.

[7] L. Wang, X. Chen, and J. Sun. A differential equations methods for solving the variational inequality problem with the cyclically monotone mapping. *Linear and NonLinear Analysis*, 6(2) :287–296, 2020.

[8] J. Zabczyk *Mathematical Control Theory : An Introduction*. Birkhauser, Boston, 1992.