RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARES - MÉDÉA

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

Ordre N^0: …….

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT LMD

Filière : GÉNIE MÉCANIQUE

Spécialité : Mécanique Numérique et Matériaux

Présenté par :

Youcef MAHROUG

Intitulé :

Identification de comportement de bifurcation des vibrations d'une turbine à gaz pour l'estimation du processus de leur dégradation

Soutenue publiquement le 15 02 2024, devant le jury composé de :

Pr. Mouloud GUEMANA Université Yahia Fares de Médéa Directeur de thèse	Pr. Mourad BACHENE Université Yahia Fares de Médéa Présidente
Pr. Ahmed HAFAIFA Université de Djelfa Co-directeur de thèse	Dr. Nadji HADROUG Université de Djelfa Examinateur
	Dr. Smain BENTOUATI Université Yahia Fares de Médéa Examinateur

Année académique 2023/2024

À mes parents bien-aimés, dont les encouragements et le soutien inestimables ont rendu mes études possibles dans des conditions optimales.

À mon frère et mes sœurs.

À ma femme, pour son soutien infaillible et sa compréhension tout au long de ces parcours.

À l'ensemble de ma famille.

À tous mes chers amis, qu'ils soient de l'université ou d'ailleurs.

Youcef MAHROUG

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon Directeur de thèse, Monsieur Mouloud GUEMANA, Professeur à l'Université de Médéa, ainsi qu'à mon co-directeur de thèse, Ahmed HAFAIFA, Professeur à l'Université de Djelfa. Ce travail n'aurait pas été possible sans leur inestimable soutien. Je leur suis extrêmement reconnaissant d'avoir créé un environnement propice à la recherche et à l'apprentissage, d'avoir eu confiance en moi, et de m'avoir offert des idées, des suggestions, de l'aide, et des mots d'encouragement à chaque étape de cette thèse. Leur patience et leur engagement jusqu'à l'achèvement de ce travail ont été d'une valeur inestimable.

Je tiens à exprimer ma gratitude sincère envers les membres du jury d'évaluation pour l'attention accordée à cette recherche et pour avoir accepté de juger ce travail.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers l'entreprise Sonatrach pour avoir facilité l'accès aux ressources et aux données cruciales pour la réalisation de cette thèse. Leur collaboration a grandement contribué à la réussite de ce projet de recherche.

Encore une fois, merci infiniment pour votre confiance, vos idées et vos encouragements. Votre contribution restera gravée dans l'aboutissement de cette thèse.

ملخص

تتعرض توربينات الغاز إلى حالات عدم استقرار غير خطية مثل الاهتزازات، مما يعطل عملها السليم ويؤدي إلى انخفاض إنتاجها. في أطروحة الدكتوراه هذه، نقترح التعرف على سلوك التشعب للاهتزازات في توربينات الغاز. للقيام بذلك، قمنا بتطوير نموذج لمراقبة الاهتزازات وتحليل هذه الاهتزازات باستخدام مخططات التشعب لتقييم حالة التشغيل وتحسين استقرار النظام. لقد قمنا بالتحقق من صحة هذا النموذج من خلال مقارنة النتائج التجريبية مع البيانات العددية التي تم الحصول عليها من النموذج المطور. يتيح لنا هذا النموذج مراقبة وفهم سلوك التشعب الاهتزازي لتوربينات الغاز، من خلال تحديد وتحليل الظواهر المختلفة التي تؤثر على ديناميكياتها.

الكلمات المفتاحية: التشعب، الفوضى، الاستقرار، ديناميكيات الدوار، توربينات الغاز، الاهتزازات

Résumé

Les turbines à gaz sont sujettes à des instabilités non linéaires telles que les vibrations, qui perturbent leur bon fonctionnement et entraînent une baisse de leur production. Dans cette thèse de doctorat, nous proposons d'identifier le comportement de bifurcation des vibrations dans les turbines à gaz. Pour ce faire, nous développons un modèle de surveillance des vibrations et analysons ces vibrations à l'aide de diagrammes de bifurcation afin d'évaluer leur état de fonctionnement et d'améliorer la stabilité du système. Nous avons validé ce modèle en comparant les résultats expérimentaux avec les données numériques obtenues à partir du modèle développé. Cette approche nous permet d'observer et de comprendre le comportement de bifurcation de vibration des turbines à gaz, en identifiant et en analysant les différents phénomènes qui influent sur leur dynamique.

Mots-clés : bifurcation, chaos, stabilité, dynamique des rotors, turbine à gaz, vibrations

Abstract

Gas turbines are subject to non-linear instabilities such as vibrations, which disrupt their proper operation and lead to a drop in their production. In this doctoral thesis, we propose to identify the bifurcation behavior of vibrations in gas turbines. To do this, we develop a vibration monitoring model and analyze these vibrations using bifurcation diagrams to evaluate their operating status and improve the stability of the system. We validated this model by comparing the experimental results with the numerical data obtained from the developed model. This approach allows us to observe and understand the vibration bifurcation behavior of gas turbines, by identifying and analyzing the different phenomena that influence their dynamics.
Keywords: bifurcation, chaos, stability, rotor dynamics, gas turbine, vibrations

Table des matières

Liste des figures..... I

Liste des tableaux..... M

Nomenclature……..……...…N

Introduction générale ……..……..…….17

CHAPITRE I : Systèmes dynamiques : théorie et analyse de stabilité……...……..... 19

I.1 Introduction …….…….. 20

I.2 Bref Historique sur les Systèmes Dynamiques……...……..……..21

I.3 Système dynamique ……..…….23

I.6 Orbites, point d'équilibre et cycle limite ……..…… 24

I.8 Ensembles invariants ……. 24

I.9 Points et ensembles limites …… 25

I.10 Ensemble attractif ……..….. 25

I.11 Cartes de retour : Section de Poincaré ……. 25

I.12 Stabilité des systèmes dynamiques …….. 28

I.12.1 Stabilité des trajectoires …… 29

I.12.3 Point d'équilibre hyperbolique …….. 30

I.12.4 Analyse linéaire de la stabilité ……..… 30

I.12.5 Stabilité d'un point fixe …… 32

I.12.6 Stabilité des solutions périodiques …… 33

I.12.8 Théorie de la fonction de Liapounov …… 34

I.13 Conclusion ……...… 36

CHAPITRE II : État de l'art sur les bifurcations et le chaos dans les systèmes dynamiques ……..……...…….…...37

II.1 Introduction ……...38

II.2 Théorème des fonctions implicites ……...…… 39

II.3 Point d'équilibre non hyperbolique …….... 40

II.4 Bifurcation des points fixes des champs vectoriels ……..… 40

II.4.1 Bifurcation selle-nœud …….. 41

II.4.2 Bifurcation transcritique …… 44

II.4.3 Bifurcation Fourche ……... 47

II.4.4 Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf ……... 50

II.5 Théorie du chaos ……..... 51

II.5.1 Propriétés des systèmes chaotiques ……... 55

II.5.1.1 Sensibilité aux conditions initiales ……..…55

II.5.1.2 Déterminisme ……..55

II.5.1.3 Non-linéarité ……...… 56

II.5.1.4 Instabilité …… 56

II.5.1.5 Attracteurs étranges ……..56

II.5.1.6 Dimensionnalité fractale ……..56

II.5.2 Routes vers le chaos …….. 57

II.5.2.1 Dédoublement de période ……... 57

II.5.2.2 Intermittence ……... 57

II.5.2.3 Quasi-périodicité …… 58

II.5.3 Méthode d'identification du chaos ……. 58

II.5.4 Exemple de système chaotique : La carte logistique ……..…59

II.6 Applications de la théorie de bifurcation en ingénierie ……60

II.6.1 Ingénierie des structures ……61

II.6.2 Génie mécanique ……61

II.6.3 Génie civil ……..62

II.6.4 Ingénierie automobile ……62

II.6.5 Ingénierie des turbines à gaz ……..63

II.7 Conclusion …… 65

CHAPITRE III : Les turbines à gaz : constitution, défaillance et méthodes de surveillance vibratoire ……..……66

III.1 Introduction ……. 67

III.2 Définition et Principe de fonctionnement ……... 68

III.3 Classification et utilisations des Turbines à Gaz …… 69

III.3.1 Turbines à gaz à usage lourd ……..…69

III.3.2 Turbines à gaz aérodérivative …….. 69

III.3.3 Turbines à gaz de type industriel ……..… 69

III.3.4 petites turbines à gaz …… 70

III.3.5 Microturbines ……... 70

III.4 Type d'entraînement ……... 70

III.5 Composants majeurs de turbine à gaz ……. 70

III.5.1 Section d'entrée …… 71

III.5.2 Compresseur ……..…… 71

III.5.3 Chambres de combustion ……. 73

III.5.3.1 Chambre de combustion annulaire …… 73

III.5.3.2 Système d'injection de carburant ……...73

III.5.3.3 Tube à flamme …….. 73

III.5.3.4 Système d'allumage ……..…… 74

III.5.3.5 Contrôle des émissions ……..…… 74

III.5.4 Turbine ……. 75

III.5.5 Système d'échappement ……...…. 76

III.5.6 Palier …… 76

III.5.6.1 Palier à film fluide …… 77

III.5.6.2 Paliers lisse …… 77

III.5.6.3 Palier à patins oscillants …… 79

III.5.6.4 Paliers de turbine à gaz …… 79

III.6 Défaillances courantes dans les turbines à gaz ……..… 81

III.6.1 Endommagement des aubes ……..… 81

III.6.2 Érosion et corrosion ……..81

III.6.3 Problèmes du système de combustion ……..… 81

III.6.4 Défaillances des paliers et des arbres ……... 82

III.6.5 Encrassement et dépôts …… 82

III.6.6 Défaillances du système de refroidissement …… 83

III.6.7 Problèmes du système de lubrification …..…… 83

III.6.8 Contrainte thermique ……..…….. 84

III.6.9 Problème de vieillissement ……..……..……... 84

III.6.10 Dysfonctionnements du système de contrôle ……..……... 84

III.6.11 Problème de vibrations ……... 84

III.6.11.1 Causes des vibrations …….. 84

III.6.11.2 Effets des vibrations …… 85

III.7 Surveillance des vibrations de turbine à gaz ……..…… 86

III.7.1 Analyse des vibrations ……..…… 86

III.7.1.1 Acquisition des données …… 86

III.7.1.2 Prétraitement des données …….. 87

III.7.1.3 Analyse temporelle ……... 87

III.7.1.4 Analyse spectrale ……..…. 87

III.7.1.5 Diagnostic et interprétation ……..…… 88

III.7.2 Systèmes d'alarme et de surveillance ……..… 89

III.7.2.1 Surveillance d'une turbine à gaz avec le système de commande GE Speedtronic™ Mark VIe ……..……...89

III.7.3 Entretien et atténuation …… 95

III.7.4 Normes et lignes directrices ……. 95

III.8 Conclusion …….. 95

CHAPITRE IV Étude de bifurcation des vibrations dans une turbine à gaz ……..……96

IV.1 Introduction ……..… 97

IV.2 La turbine à gaz MS5002B ……. 98

IV.3 Modélisation du système palier-rotor de turbine MS5002B ……..……100

IV.4 Équations gouvernant le système palier-rotor de la turbine MS5002B …..…….. 105

IV.5 Comportement de bifurcation des vibrations du système palier-rotor de turbine MS5002B ……..……...……...108

IV.6 Investigations et analyse des résultats obtenus …….……...… 109

IV.6.1 Modélisation des paramètres du système palier-rotor examiné …….…..……...111

IV.6.2 Comportement dynamique du système palier-rotor de turbine examiné …….…..…114

IV.7 Conclusion ……..…130

Conclusion générale …….. 131

Liste des Travaux..... 132

Bibliographie ……. 134

Liste des Figures

Figure I.1 Illustration du concept d'attracteur : (a) point fixe, (b) cycle limite et (c) étrange..25

Figure I.2 Construction de la surface d'intersection de Poincaré S ……..… 26

Figure I.3 Si l'évolution est de période 1, alors la section de Poincaré est à un point n= 1, si l'évolution est de période alors la section de Poincaré est à deux points n= 2, et ainsi de suite ……..……..…27

Figure I.4 Si l'évolution du système dynamique est quasi-périodique, alors la section de Poincaré est une suite de points définissant un cycle limite fermé ...……..… 27

Figure I.5 Si l'évolution du système dynamique est chaotique, la section de Poincaré est un ensemble de points qui montrent des motifs intéressants sans répétition apparente ……..….. 27

Figure I.6 a : Stabilité de Liapounov, b : Stabilité asymptotique …….……..……. 30

Figure I.7 : Allure des différentes solutions d'équilibre pour les systèmes bidimensionnels...33

Figure II.1 : Bifurcation selle-nœud ……..……. 41

Figure II.2 : Bifurcation selle-nœud supercritique (a : $\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) > 0$) et sous-critique (b : $\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) < 0$) ……..……..... 44

Figure II.3 : Bifurcation transcritique ……..… 44

Figure II.4 Bifurcation transcritique supercritique (a : $\frac{d\alpha}{dx}(0) >$) et sous-critique (b : $\frac{d\alpha}{dx}(0) < 0$) ……..…… 47

Figure II.5 : Bifurcations fourche ……..……...… 47

Figure II.6 : Bifurcations fourche supercritique (a :$\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) > 0$) et sous-critique (b : $\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) < 0$) ……..……. 50

Figure II.7 : passage des solutions stationnaires aux solutions périodiques ….…….. 50

Figure II.8 : Bifurcations de Hopf supercritique ……..…… 52

Figure II.9 : Bifurcation de Hopf supercritique dans l'espace des paramètres de phase …… 52

Figure II.10 : Bifurcations de Hopf sous-critique ……... 53

Figure II.11 : Bifurcation de Hopf sous-critique dans l'espace des paramètres de phase ..… 53

Figure II.12 : Bifurcation de Hopf dans le plan complexe de valeurs propres ….…….. 54

Figure II.13 La courbe de Koch ……..…… 57

Figure II.14 : Esquisse d'intermittence ……..... 58

Figure II.15 : (a) diagramme de bifurcation, (b) L'évolution des exposants de Liapounov… 60

Liste des Figures

Figure III.1 Turbine à gaz de production d'électricité à usage lourd Alstom GT13E2 …….. 69
Figure III.2 : Conception de turbines à gaz industrielles ……70
Figure III.3 : La section d'entrée de turbine MS5002B …….. 71
Figure III.4 : Section compresseur de turbine MS5002B ……..….72
Figure III.5 : Compression d'air par étages de compresseur ……...72
Figure III.6 : Position des aubes directrices d'entrée IGV et de sortie EGV ……..….. 73
Figure III.7 : Section de combustion de turbine MS5002B ……..…….. 74
Figure III.8 : Composants du système de combustion ……...…. 74
Figure III.9: Tube de transition …….. 75
Figure III.10: Roues HP et BP …… 75
Figure III.11: Section d'échappement de turbine MS5002B ……..……... 76
Figure III.12 : Rotor HP et LP de la turbine MS5002B … ……..76
Figure III.13 : Géométrie et nomenclature du palier lisse …….. 78
Figure III.14 : Séquence du mouvement du tourillon depuis le démarrage jusqu'à l'état d'équilibre ……..…….78
Figure III.15 : Géométrie et nomenclature du palier à patins oscillants ……. 79
Figure III.16 : Différent paliers de la turbine MS5002B …… 80
Figure III.17 : Principe de fonctionnement des paliers sur les Rotors HP et BP …… 80
Figure III.18 : Endommagement des aubes …… 81
Figure III.19 : Dépôt de calamine sur la face d'injecteur …… 82
Figure III.20 : (a) Usure dans le demi-palier inférieur ;(b) Usure du déflecteur d'huile ……. 82
Figure III.21 : (a) Dépôt important d'huile avec du sable sur la partie inférieure du caisson d'admission ; (b) Dépôt de saleté sur les IGV … ……83
Figure III.22 : Signal brut dans le domaine temporel, Ainsi que ce même signal après avoir été filtré ……. 87
Figure III.23 : Signal temporel et spectrecorrespondant…….…… 88
Figure III.24 : Interface Utilisateur Graphique pour la turbine PGT25 : Régulateur de débit de carburant FSR……...90
Figure III.25 : Interface Utilisateur Graphique pour la turbine MS5000B : Vitesse du rotor HP ……...91
Figure III.26 : Interface Utilisateur Graphique pour PGT25 : Température d'échappement…91
Figure III.27 : Interface Utilisateur Graphique pour PGT25 : Pression et vibrations du générateur de gaz …….92

Figure III.28 : Interface Utilisateur Graphique pour la turbine MS5002B : Régulateur de vannes SRV et GCV ……92
Figure III.29 : Interface Utilisateur Graphique pour PGT25 : Vibrations de la turbine de puissance ……93
Figure III.30 : Interface Utilisateur Graphique pour PGT25 : Phase de démarrage ……94
Figure IV.1 : Turbine à gaz MS5002B installée dans la station de compression de gaz CS2 / TFT dans le sud-est de l'Algérie ……. 99
Figure IV.2 : Structure de fonctionnement de la turbine à gaz MS5002B ……..…. 100
Figure IV.3 : Structure du système palier-rotor de turbine à gaz étudié ……..….101
Figure IV.4 : Représentation de la répartition de pression du film d'huile ……..……102
Figure IV.5 : Position du capteur de vibrations ……..……..110
Figure IV.6 : Position du capteur magnétique (Magnetic Speed Pickup) ..…….. 110
Figure IV.7 : Position du capteur thermocouple ……..…… 111
Figure IV.8: Diagramme de bifurcation du centre du rotor dans le palier N°1 ……..……...113
Figure IV.9: Diagramme de bifurcation du centre du compresseur ……...113
Figure IV.10: Diagramme de bifurcation du centre du rotor dans le palier N°2 ……..… 113
Figure IV.11: Diagramme de bifurcation du centre de la turbine …….....… 113
Figure IV.12 : Mouvement périodique du centre de la turbine à $\omega = 98$ rad/s avec une double période $2T_0$ ……115
Figure IV.13 : Mouvement périodique du centre du rotor dans le palier N°2 à $\omega = 98$ rad/s avec triple période $3T_0$ ……116
Figure IV.14 : Mouvement quasi-périodique du centre de la turbine à $\omega = 110$ rad/s ……...117
Figure IV.15 : Mouvement quasi-périodique du centre du rotor dans le palier N°2 à $\omega = 110$ rad/s ……..……..……118
Figure IV.16 : Mouvement périodique du centre de la turbine à $\omega = 300$ rad/s avec NT_0 périodes ……..120
Figure IV.17 : Mouvement périodique du centre du rotor dans le palier N°2 à $\omega = 300$ rad/s avec NT_0 périodes ……... 121
Figure IV.18 : Mouvement périodique du centre du compresseur à $\omega = 10$ rad/s avec quatre périodes $4T_0$ …….. 122
Figure IV.19 : Mouvement périodique du centre de rotor dans le palier N°1 à $\omega = 50$ rad/s avec période T_0 …… 123
Figure IV.20 : Mouvement quasi-périodique du centre du compresseur à $\omega = 110$ rad/s ….124

Figure IV.21: Mouvement quasi-périodique du centre du rotor dans le palier N°1 à $\omega = 51\,\text{rad/s}$ …….…….. 125

Figure IV.22 : Mouvement périodique du centre du compresseur à $\omega = 300\,\text{rad/s}$ avec de période NT_0 ……...… 126

Figure IV.23 : Mouvement périodique du centre du rotor dans le palier N°1 à $\omega = 300$ rad/s avec période NT_0 ……... 127

Figure IV.24: Comportement dynamique du système palier-rotor de la turbine à gaz …..… 128

Figure IV.25 : comportement dynamiques du système palier-rotor : (a) vitesse du rotor HP, (b) Mouvement du centre du rotor dans le palier N °1, (c) température du film d'huile ……...…...…….. 129

Liste des Tableaux

Tableau II.1 : Classification des attracteur selon l'exposant et dimension de Liapunov …… 59

Tableau III.1 : Différent paliers de la turbine MS5002B …… 80

Tableau III.2 : Principales anomalies …….. 89

Tableau IV.1 : Spécifications de la turbine à gaz MS5002B ……..… 99

Tableau IV.2 : Alarmes de vibrations dans la turbine à gaz MS5002B ..…….. 100

Tableau IV.3 : paramètres du système palier-rotor de turbine étudié ……..…. 112

Nomenclature

Terme	Désignation	Unité
$\varphi_{t_0}^{\tau}, H_n^T$	Opérateur d'évolution	
R^n	Ensemble des nombres reels	
Ω	Ensemble ouvert de R^n	
S	Ensemble invariant	
w^s	Variété stable	
w^u	Variété instable	
B	Ensemble attractif	
$P(x)$	Fonction de retour	
S	Surface	m^2
$\varepsilon, a, b, \delta$	Constantes	
$\overline{x}_s$	Points d'équilibre	
J, A	Matrice jacobienne	
s_i	Valeurs propres	
e_i	Vecteurs propres	
λ_i	Exposants caractéristiques de Liapounov	
M_T	Matrice de monodromie	
μ_i^T	Multiplicateurs du T-cycle de M_T	
$V(x)$	Fonction de Liapounov	
i	Unité imaginaire $i^2 = 1$	
z	Variable complexe	
Re	Partie réelle	
Im	Partie imaginaire	
d_l	Dimension de Lyapunov	
O_1, O_3	Respectivement, les centres géométriques des paliers N° 1 et N° 2	
O_2, O_4	Respectivement, les centres géométriques du compresseur et de la turbine	
k	Rigidité du rotor	N/m
R, L	Respectivement, Rayon et Longueur du palier	m
z	Déplacement axial adimensionnelle	
p	Pression adimensionnelle du film d'huile	
C_b	Jeu radial du palier	m
x	Vecteur d'état	
h	Épaisseur adimensionnelle du film d'huile	
e	Excentricité relative du rotor	m
X	Espace d'états	
Or	Orbite	

Nomenclature

C_0	Cycle limite	
N	Nombre entier	
X_i, Y_i	Déplacements horizontaux et verticaux	m
$\dot{X}_i, \dot{Y}_i$	Respectivement, dérivation d'une variable X et Y par rapport au temps	m/s
$\ddot{X}_i, \ddot{Y}_i$	Respectivement, dérivée seconde d'une variable X et Y par rapport au temps	m/s^2
τ	Temps adimensionnelle	
t	Temps	s
T	Période ou ensemble temporel	s
f_r	Fréquence de rotation	Hz
σ	Nombre de Sommerfeld	
μ	Viscosité dynamique	Pa.s
f_x , f_y	Forces non linéaires adimensionnelles du film d'huile	
g	Accélération de la gravité	m/s^2
ω	Vitesse angulaire du rotor	rad/s
F_{X_i} , F_{Y_i}	Composants des forces non linéaires du film d'huile	N
r	Excentricité du rotor	m
c	Amortissement du système	N.s/m
X_i , Y_i	Horizontal and vertical displacements	m
m_1, m_3	Respectivement les masses concentrées des paliers N°1 et N°2	Kg
m_2, m_4	Respectivement les masses concentrées du compresseur et de la turbine	Kg
I	Matrice identité	
f, g, F	Fonction	
α	Vecteur de paramètre de contrôle ou Angle	
α_c	Valeur de bifurcation critique	
φ, θ	Phase	rad
D	Déterminant	
ω_c	Vitesse de rotation critique	rad/s
IGV	Aubes directrices d'entrée	rad
EGV	Aubes directrices de sortie	rad
SRV	Vanne d'arrêt /rapport vitesse	rad
GCV	Vanne de réglage de gaz combustible	rad

Introduction générale

Le comportement dynamique des machines tournantes est soumis à diverses formes de phénomènes d'instabilité non linéaire, notamment des vibrations, qui peuvent gêner leur bon fonctionnement et conduire à une diminution du rendement de production. Compte tenu des conditions d'exploitation difficiles auxquelles ces machines sont confrontées, tout dysfonctionnement d'un composant peut avoir des conséquences Humaines et financières importantes. L'utilisation pratique des systèmes de surveillance et de diagnostic des pannes de turbines à gaz a été étudiée et développée selon de nombreuses approches. Jinyong Ju et al. dans [82] ont proposé une stratégie de contrôle par rétroaction non linéaire de la vibration du système de transmission principal du convoyeur à racleurs utilisant des bifurcations, estimant l'influence de ces bifurcations sur l'instabilité en torsion de cet arbre de transmission. Par conséquent, Zigang Li et coll. dans [66] ont réalisé une étude dynamique non linéaire d'un système rotor-palier avec les effets de défauts d'alignement, pour l'analyse des comportements dynamiques non linéaires supportés par des paliers lisses. Aussi, d'autres travaux ont été réalisés sur les différentes approches d'analyses de bifurcation des vibrations et de contrôle tolérant aux pannes pour le suivi des turbines à gaz lors de leur conception et de leur mise en œuvre, comme Ahmed Hafaifa et al. dans [69], Choayb Djeddi et al. dans [77], Arash Mohamadi et al. dans [70], Avramov et Malyshev. dans [73], Avramov et Raimberdiyev. dans [75], Jafar Aghayari et al. dans [80], Li Ma et al. dans [83], Nicolas Noiray et Bruno Schuermans. dans [86], Xiao-Ye Mao et al. dans [90]. Dans ce cadre, cette thèse de doctorat répond au besoin critique d'identifier le comportement de bifurcation des vibrations dans les turbines à gaz et de développer par la suite des outils pour évaluer le processus de dégradation dans de telles machines. L'objectif principal de cette recherche est d'établir un modèle complet de surveillance des vibrations d'une turbine à gaz. Ce modèle utilise des diagrammes de bifurcation pour observer et analyser l'état opérationnel de la turbine, améliorant ainsi sa stabilité.

Cette thèse comprend quatre chapitres structurés de la manière suivante :

Le **premier chapitre** de cette thèse se divise en deux parties distinctes. La première partie propose une étude concise des concepts fondamentaux et des propriétés essentielles des systèmes dynamiques, établissant ainsi un cadre préliminaire pour une compréhension approfondie du sujet. La seconde partie se concentre sur un examen détaillé des aspects de stabilité propres à ces systèmes, visant à clarifier leur comportement dans différentes conditions et à fournir des informations précieuses pour les chapitres suivants.

Dans le **deuxième chapitre**, une exploration des concepts fondamentaux liés aux bifurcations et au chaos au sein des systèmes dynamiques est entreprise. Ces notions constituent une base essentielle pour approfondir l'analyse dans le chapitre 4. En acquérant une compréhension solide des bifurcations et du chaos, nous sommes équipés des outils nécessaires pour examiner et comprendre les comportements complexes des systèmes dynamiques étudiés.

Le **troisième chapitre** offre un aperçu complet des turbines à gaz, englobant leur construction, leurs mécanismes opérationnels et leurs composants essentiels. Il constitue une ressource précieuse pour comprendre le fonctionnement complexe de ces systèmes de production d'électricité. De plus, le chapitre met en lumière les modes de défaillance courants que les turbines à gaz peuvent rencontrer au cours de leur durée de vie opérationnelle. Ces connaissances sont essentielles à la formulation de stratégies proactives de maintenance et de surveillance, car le chapitre souligne le rôle essentiel de ces stratégies pour garantir la fiabilité et les performances à long terme des turbines à gaz. Un aspect clé sur lequel le troisième chapitre met particulièrement l'accent est le rôle des méthodes de surveillance des vibrations dans le contexte de la maintenance des turbines à gaz. La surveillance des vibrations constitue un outil crucial pour évaluer l'état de santé et les performances des turbines à gaz, permettant une détection précoce des problèmes potentiels et la mise en œuvre de mesures correctives en temps opportun. En explorant cette facette en détail, le chapitre souligne l'importance de techniques de surveillance efficaces pour préserver l'efficacité et l'intégrité des turbines à gaz.

Le quatrième chapitre présente une nouvelle approche impliquant l'utilisation d'indices de bifurcation pour évaluer l'état opérationnel et la stabilité d'une turbine à gaz MS5002B installée dans une station de compression de gaz. Grâce à une comparaison rigoureuse des données expérimentales avec les résultats numériques dérivés du modèle développé, l'étude valide ses résultats avec des données opérationnelles réelles, fournissant ainsi des informations précieuses sur les comportements dynamiques non linéaires complexes du système palier-rotor de la turbine examinée. En exploitant les données opérationnelles, le chapitre effectue des tests de robustesse pour examiner les impacts des effets indésirables susceptibles de perturber le système de turbine. Cette évaluation, facilitée par le diagramme de bifurcation, permet un suivi approfondi des bifurcations dynamiques dans les phénomènes vibratoires présentés par la turbine examinée. De plus, il facilite l'établissement d'éléments de diagnostic fiables, cruciaux pour garantir la stabilité et la fonctionnalité de ses composants, atténuant ainsi les arrêts de production imprévus. Pour conclure, nous terminons cette étude par une conclusion générale et donnons un aperçu de ses perspectives d'avenir.

CHAPITRE I

Systèmes dynamiques : théorie et analyse de stabilité

La théorie des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui évalue les systèmes, qu'ils soient abstraits ou physiques, en constante évolution dans le temps. Elle englobe une composante quantitative, impliquant des équations mathématiques, ainsi qu'une composante qualitative, liée à la représentation graphique de ces équations dans un espace d'états. Ce chapitre s'articule autour de deux grands axes. Le premier offre un aperçu succinct, abordant les concepts préliminaires et les propriétés essentielles des systèmes dynamiques. Le second se concentre sur l'analyse de la stabilité de ces systèmes.

I.1 Introduction

La notion de système dynamique est une formalisation mathématique du concept scientifique général d'un processus déterministe [1,2]. On entend par système dynamique (SD) un objet ou un processus dont l'état est uniquement défini par un ensemble de grandeurs ou de fonctions à un instant donné et qui évolue dans le temps selon une certaine loi [1,3]. Cette dernière permet de prédire l'état futur du système dynamique à partir de son état initial et est appelée loi d'évolution. Les systèmes dynamiques peuvent être représentés par des objets mécaniques, physiques, chimiques ou biologiques. Le modèle mathématique d'un système dynamique est donné en introduisant des variables dynamiques (coordonnées) qui définissent de manière unique l'état du système et précisent la loi d'évolution [1,4,5]. Plusieurs approches ont été élaborées et mises en œuvre pour l'analyse des systèmes dynamiques, comme en attestent diverses publications et travaux littéraires, dont celles référencées [1-11]. L'analyse et la conception de tels systèmes dynamiques, la stabilité est un problème fondamental. Il est extrêmement important d'un point de vue pratique de pouvoir analyser la stabilité des modes de fonctionnement des systèmes dynamiques. La stabilité de systèmes tels qu'une turbine à gaz, un avion ou une voiture aux perturbations est certainement un facteur vital dans le vrai sens du terme, car de telles perturbations seront toujours présentes sous une forme ou une autre. Ces arguments sont qualitatifs et ne peuvent être précisés que si nous parvenons à les traduire dans le langage formel des mathématiques. Les fondements de la théorie mathématique rigoureuse de la stabilité ont été établis dans les travaux du célèbre mathématicien russe A.M. Liapounov, alors que le développement de la théorie qualitative et de la théorie de la bifurcation des systèmes dynamiques est associé aux scientifiques russes A.A. Andronov [12], V.I. Arnold [7] et leurs élèves. A.M. Liapounov [13] a développé la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques déterminés par des équations différentielles ordinaires non linéaires variant dans le temps. Ce faisant, il a formulé ses concepts de stabilité et d'instabilité et a développé deux méthodes générales pour l'analyse de la stabilité d'un équilibre : la méthode directe de Liapounov, également appelée la deuxième méthode de Liapounov, et l'indirecte de Liapounov, également appelée la première méthode. La seconde implique l'existence de fonctions auxiliaires à valeurs scalaires de l'espace d'états (appelées fonctions de Liapounov) pour déterminer les propriétés de stabilité de l'équilibre, tandis que la première cherche à déduire les propriétés de stabilité de l'équilibre d'un système décrit par une équation différentielle non linéaire à partir de la propriété de stabilité de sa linéarisation. En découvrant la première méthode, Liapounov a établi des résultats de stabilité importants pour

les systèmes linéaires (impliquant l'équation matricielle de Liapounov). Ces résultats sont équivalents aux résultats découverts indépendamment par Routh (cinq ans plus tôt) et Hurwitz (trois ans plus tard).

I.2 Bref Historique sur les Systèmes Dynamiques

Les systèmes dynamiques, étudiant l'évolution temporelle des phénomènes, ont une histoire riche qui s'étend sur des millénaires. L'exploration des concepts de la théorie des systèmes dynamiques et de l'analyse de stabilité a joué un rôle crucial dans l'évolution de nombreuses disciplines scientifiques. Voici un aperçu succinct de cette évolution.

- **Antiquité et Moyen Âge**

Les premières observations sur les mouvements célestes et les phénomènes périodiques remontent à l'Antiquité avec des penseurs tels que Ptolémée et Aristote. Cependant, l'application mathématique rigoureuse dans le contexte de la dynamique est venue avec les travaux de Galilée au XVIIe siècle.

- **Émergence de la Mécanique Classique**

Le XVIIe siècle est marqué par l'émergence de la mécanique classique avec les contributions monumentales de Newton et Leibniz. Les lois du mouvement et les outils du calcul différentiel ont permis une analyse plus rigoureuse des trajectoires et des systèmes dynamiques. Au XVIIIe siècle, Pierre-Simon Laplace a contribué de manière significative en développant la théorie des équations différentielles ordinaires. Parallèlement, les mathématiciens comme Leonhard Euler et Joseph-Louis Lagrange développent les fondements de la mécanique analytique, établissant les équations du mouvement pour des systèmes variés. C'est aussi à cette période que l'on commence à étudier la stabilité des équilibres, notamment avec les travaux de Joseph-Louis Lagrange sur la stabilité des mouvements circulaires.

- **Développement de la Théorie des Systèmes Dynamiques**

Le XIXe siècle a marqué une période charnière dans le développement de la théorie des systèmes dynamiques, notamment grâce aux contributions majeures du mathématicien Henri Poincaré. Ses travaux ont jeté les bases solides de cette discipline en mettant en lumière des concepts fondamentaux. Poincaré s'est principalement concentré sur l'étude des systèmes dynamiques déterministes, ceux dont l'évolution est entièrement prédictible à partir de

conditions initiales données. Il a introduit des idées novatrices telles que les points fixes, des états stables où le système demeure inchangé, ainsi que les trajectoires périodiques, qui décrivent des mouvements répétitifs dans l'espace des états. Ces concepts, aujourd'hui incontournables dans l'étude des dynamiques complexes, ont ouvert la voie à des avancées majeures dans la compréhension des comportements dynamiques et de leurs implications dans une multitude de domaines scientifiques et technologiques. Poincaré a ainsi posé les fondations sur lesquelles les générations futures de mathématiciens et de scientifiques ont pu bâtir, laissant un héritage durable dans l'exploration des systèmes dynamiques.

- **Théorie de la Stabilité et Bifurcation au XXe Siècle**

Le XXe siècle a marqué une ère de progrès significatifs dans la compréhension des systèmes dynamiques. Les contributions majeures de cette période ont principalement porté sur la théorie de la stabilité et l'analyse des bifurcations. Les travaux éminents de Lyapunov ont apporté une formalisation rigoureuse des critères de stabilité, offrant ainsi des outils mathématiques pour évaluer la réaction d'un système à des perturbations. Les travaux de mathématiciens tels que Stephen Smale, Andrey Kolmogorov et Jürgen Moser ont été cruciaux dans l'établissement de concepts fondamentaux tels que les attracteurs et les systèmes hyperboliques. Parallèlement, des mathématiciens de renom tels qu'Andronov et Pontryagin ont développé des méthodes et des techniques pour scruter les bifurcations, mettant en lumière les moments clés de transition qualitative dans les comportements des systèmes dynamiques. Ces avancées ont profondément influencé une multitude de domaines, de la physique à la biologie, en passant par l'ingénierie et l'économie, démontrant ainsi l'ampleur de leur impact sur notre compréhension et notre capacité à manipuler des systèmes dynamiques complexes.

- **Émergence de l'Informatique et des Méthodes Numériques**

L'avènement de l'informatique a marqué une révolution sans précédent dans l'analyse des systèmes dynamiques. Les méthodes numériques, les simulations informatiques et les algorithmes de contrôle ont ouvert de nouvelles perspectives dans l'exploration et la compréhension des systèmes, même les plus complexes. Grâce à la puissance de calcul des ordinateurs modernes, il est désormais possible d'effectuer des simulations détaillées et de résoudre des équations différentielles complexes en un temps record. Cela a permis aux chercheurs d'approfondir leur compréhension des phénomènes dynamiques, d'étudier des systèmes de grande envergure, et d'explorer des territoires auparavant inaccessibles. De plus,

l'informatique a ouvert la voie à des méthodes de contrôle sophistiquées, permettant ainsi de stabiliser, d'optimiser et même de manipuler délibérément le comportement des systèmes dynamiques pour répondre à des objectifs spécifiques. En somme, l'émergence de l'informatique et des méthodes numériques a propulsé l'étude des systèmes dynamiques vers de nouveaux horizons, offrant ainsi des opportunités inédites pour l'innovation et la compréhension approfondie des phénomènes dynamiques complexes.

- **Interdisciplinarité et Applications Modernes**

Au XXIe siècle, les systèmes dynamiques ont pris une place centrale dans une multitude de disciplines scientifiques et technologiques. Des domaines aussi variés que la biologie, l'économie, l'écologie et l'ingénierie tirent profit des avancées dans la théorie des systèmes dynamiques pour comprendre et manipuler des phénomènes complexes.
En somme, l'histoire des systèmes dynamiques, de la théorie à l'analyse de la stabilité et aux bifurcations, reflète une progression constante vers une compréhension plus profonde des phénomènes dynamiques dans notre univers. De ses débuts conceptuels à ses applications contemporaines, cette évolution continue de jouer un rôle crucial dans notre exploration du monde dynamique qui nous entoure.

I.3 Système dynamique

Un système dynamique se compose de trois ingrédients, à savoir, temps, espace d'état et loi d'évolution.

- **Espace d'état**

Tous les états possibles d'un système sont caractérisés par les points d'un certain ensemble X. Cet ensemble est appelé l'espace d'état du système. En effet, la spécification d'un point $x \in X$ doit être suffisante non seulement pour décrire la position actuelle du système mais aussi pour déterminer son évolution. Souvent, l'espace d'état est appelé espace des phases.

- **Temps**

L'évolution d'un système dynamique signifie un changement d'état du système avec le temps $t \in T$, où T est un ensemble de nombres. Nous considérerons deux types de systèmes dynamiques : ceux à temps continu (réel) $T = R^1$, et ceux à temps discret (entier) $T = Z$.

Les systèmes du premier type sont appelés systèmes dynamiques à temps continu, tandis que ceux du second sont appelés systèmes dynamiques à temps discret.

- **Opérateur d'évolution**

Un opérateur d'évolution $\varphi_{t_0}^{\tau}$ représente une application $\varphi_{t_0}^{\tau} : X \to X$ telle que chaque état $x_0 \in X$ à l'instant initial $t_0 \in T$ est associé sans ambiguïté à l'état $x_t \in X$ à un autre instant $t = t_0 + \tau \in T$.
En conséquence, nous pouvons écrire :

$$x_t = \varphi_{t_0}^{\tau} x_0 \ , \ t = t_0 + \tau \qquad \text{(I.1)}$$

Définition I.1 [1-3] *Un système dynamique est un triple* $\{T, X, \varphi_{t_0}^{\tau}\}$, *où T est un ensemble temporel, X est un espace d'états et* $\varphi_{t_0}^{\tau} : X \to X$ *est une famille d'opérateurs d'évolution.*

I.4 Orbites, point d'équilibre et cycle limite

Les objets géométriques de base associés à un système dynamique $\{T, X, \varphi^t\}$ sont ses orbites dans l'espace d'état et le portrait de phase composé de ces orbites.

Définition I.2 [3,9] *Une orbite commençant à* x_0 *est un sous-ensemble ordonné de l'espace d'état X :*

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t x_0, \text{ pour tout } t \in T \text{ tel que } \varphi^t x_0 \text{ soit défini } \}$$

Définition I.3 [2,3] *Un point* $x_0 \in X$ *est appelé un équilibre (point fixe) si* $x_0 = \varphi x_0$ *pour tout* $t \in T$.

Définition I.4 [1,14] *Un cycle est une orbite périodique, à savoir une orbite de non-équilibre* C_0 *, telle que chaque point* $x_0 \in C_0$ *satisfait* $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ *avec un certain* $T_0 > 0$ *, pour tout* $t \in T$.

Le T_0 minimal avec cette propriété est appelé la période du cycle C_0.

Définition I.5 [3,14] *Un cycle d'un système dynamique en temps continu, dans un voisinage duquel il n'y a pas d'autres cycles, est appelé cycle limite.*

Définition I.6 [3,4] *Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.*

I.5 Ensembles invariants

Définition I.7 [2-5] *Un ensemble invariant d'un système dynamique* $\{T, X, \varphi^t\}$ *est un sous-ensemble* $S \subset X$ *tel que* $x_0 \in S$ *implique* $\varphi^t x_0 \in S$ *pour tout* $t \in T$.

La définition signifie que $\varphi^t S \subseteq S$ pour tout $t \in T$.Clairement, un ensemble invariant S est constitué d'orbites du système dynamique. Toute orbite individuelle $Or(x_0)$ est évidemment un ensemble invariant.

I.6 Points et ensembles limites

Définition I.8 [3] (Points ω et α-limites des trajectoires) *Un point $x_0 \in R^N$ est appelé point ω-limite de $x \in R$, noté ω(x(t)), s'il existe une suite $\{t_i\}, t_i \to +\infty$, telle que $\varphi(t_i, x) \to x_0$.*
Les points α-limites sont définis de manière similaire en prenant une séquence $\{t_i\}, t_i \to -\infty$.

Définition I.9 [3] (Ensembles ω et α-limites d'un flot) *L'ensemble de tous les points ω-limites d'un flot ou d'une carte est appelé l'ensemble ω-limite. L'ensemble α-limite est défini de la même manière.*

I.7 Ensemble attractif

Définition I.10 [2,10,11,14] (Ensemble attractif) *Un ensemble invariant fermé $B \subset R^n$ est appelé un ensemble attractif s'il existe un voisinage U de B tel que :*

$$\begin{aligned} &flot : \forall t \geq 0\,, \quad \varphi(t,U) \subset U \ \ et \bigcap_{(t>0)} \varphi(t,U) = B \\ &carte : \forall n \geq 0\,, \quad f^n(U) \subset U \ \ et \ \bigcap_{(n>0)} f^n(U) = B \end{aligned} \tag{I.2}$$

Les attracteurs sous la forme de points d'équilibre, de cycles limites ou de tores à k-dimensions sont appelés simples ou réguliers ,figure I.1 a, b.

Un attracteur étrange, figure I.1 c, est associé à un régime oscillatoire irrégulier, au sens de manque de périodicité, qui est similaire à bien des égards aux concepts de processus aléatoires stationnaires. Cependant, le terme « aléatoire » a un sens précis. Un mouvement aléatoire est imprévisible ou est prévisible avec une certaine probabilité.

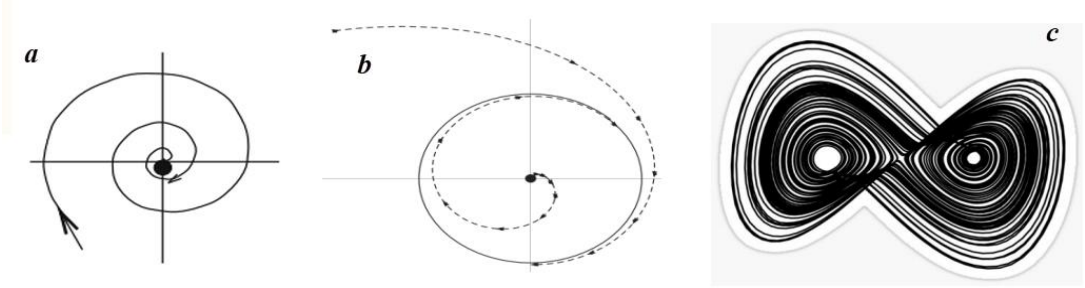


Figure I.1 Illustration du concept d'attracteur : (a) point fixe, (b) cycle limite et (c) étrange [9]

I.8 Cartes de retour : Section de Poincaré

Une carte de retour peut être écrite sous la forme [1,3] :

$$x_{n+1} = P(x_n) \tag{I.3}$$

Où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, n est une variable temporelle discrète et P(x) est une fonction vectorielle appelée fonction de retour. La fonction de retour définit explicitement l'opérateur d'évolution en un pas de temps (une itération) : $H_n^1 \mathrm{x} = P(x)$. Si le vecteur d'état x est donné à un instant n, l'état du système peut être trouvé à n'importe quel autre instant $m = n + T$, $T > 0$

$$x_{n+1} = H_n^T x = P^{(T)}(x_n) = P(P(\dots P(x_n) \dots)) \quad \text{(I.4)}$$

Une trajectoire de phase appartenant à un ensemble limite de système (I.3) peut ne comporter qu'un seul point x_0 appelé point fixe. Il satisfait :

$$P(x_0) = x_0 \quad \text{(I.5)}$$

Si la trajectoire est fermée et constituée de T points $x_i, i = 1,2, \dots, T$,tel que pour tout i :

$$P^T(x_i) = x_i \quad \text{(I.6)}$$

L'ensemble des points x_i est un cycle de période T ou simplement un T-cycle. Les trajectoires quasi-périodiques et chaotiques de la carte de retour sont représentées par des séquences de points non fermées qui ne reviennent jamais strictement à leurs positions précédentes. Pour passer d'un système flot à un système à temps discret, il faut introduire un plan d'intersection S (une hypersurface dans le cas multidimensionnel) tel que toutes les trajectoires le coupent strictement transversalement. Si l'on considère les points apparaissant lorsque les trajectoires coupent la surface S dans une direction, le flot génère une carte retour en S, également appelée carte de Poincaré, figure I.2. Le numéro d'ordre de l'intersection d'une trajectoire donnée avec la surface d'intersection est le temps discret n. Si l'évolution est périodique de période n, alors la section de Poincaré est constituée de n points se répétant indéfiniment dans le même ordre, figure I.3. Le nombre n est déterminé par le nombre de fois que la trajectoire traverse la surface S dans une direction donnée. Si l'évolution est quasi-périodique, alors la séquence de points définit un cycle limite fermé, figure I.4. Si l'évolution est chaotique, alors la section de Poincaré est une collection de points qui montrent des motifs intéressants sans répétition apparente, figure I.5.

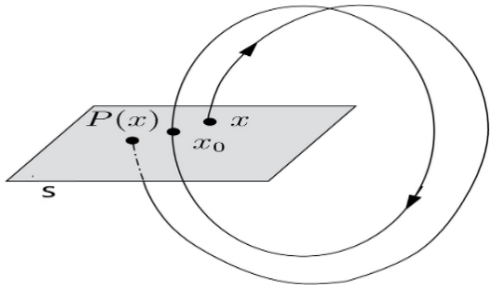


Figure I.2 Construction de la surface d'intersection de Poincaré S [1]

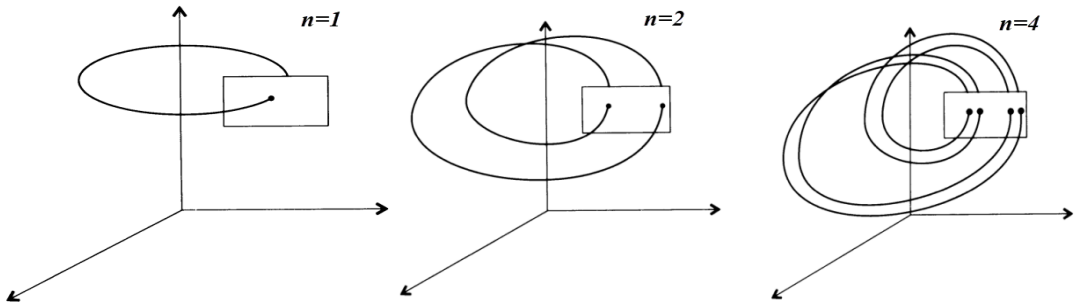


Figure I.3 Si l'évolution est de période 1, alors la section de Poincaré est à un point n= 1, si l'évolution est de période alors la section de Poincaré est à deux points n= 2, et ainsi de suite [14]

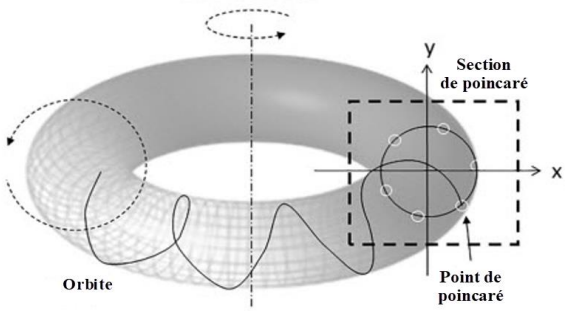


Figure I.4 Si l'évolution du système dynamique est quasi-périodique, alors la section de Poincaré est une suite de points définissant un cycle limite fermé [39]

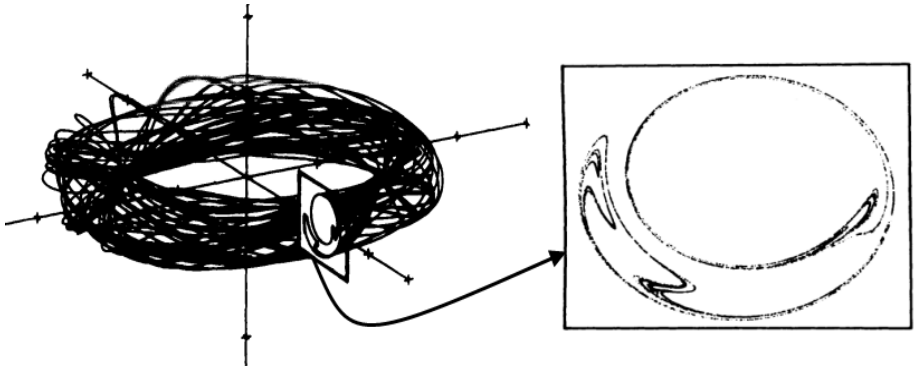


Figure I.5 Si l'évolution du système dynamique est chaotique, la section de Poincaré est un ensemble de points qui montrent des motifs intéressants sans répétition apparente [8]

Exemple I.1

On considère le segment de ligne :

$$S = \{(x, y) \in R^2 :\ 0 \leq x \leq 1\ , y = 0\} \tag{I.7}$$

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} = x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases} \tag{I.8}$$

Qui peut se mettre sous la forme polaire, le système (I.8) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad \text{(I.9)}$$

Les solutions sont données par :

$$\begin{cases} r(t) = \frac{1}{1+t} \\ \theta(t) = t \end{cases} \quad \text{(I.10)}$$

Les trajectoires circulent autour de l'origine avec une période de 2π, en substituant t, le flot est défini par :

$$r(t) = \frac{1}{1+\theta(t)} \quad \text{(I.11)}$$

Le flot est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et les retours successifs se produisent lorsque $\theta = 2\pi, 4\pi, \ldots$. Une carte définissant ces points est donnée par :

$$r_n = \frac{1}{1+2\pi n} \quad \text{(I.12)}$$

Sur S, où $n = 1,2, \ldots comme\ n \to \infty$, la suite de points se déplace vers le point d'équilibre à l'origine comme prévu, alors :

$$r_{n+1} = \frac{1}{1+2\pi(n+1)} \quad \text{(I.13)}$$

Par conséquent, une application de retour de Poincaré P peut être exprimée comme :

$$r_{n+1} = P(r_n) = \frac{r_n}{1+2\pi r_n} \quad \text{(I.14)}$$

Les cinq premiers retours sur le segment de ligne S se produisent aux points :

$r_0 = 1$; $r_1 = 0.13730$; $r_2 = 0.07371$; $r_3 = 0.05038$; $r_4 = 0.03827$; $r_5 = 0.03085$.

I.9 Stabilité des systèmes dynamiques

La stabilité a été considérée par beaucoup comme un problème fascinant et difficile de la culture humaine. Les problèmes de stabilité sont présents dans toutes nos vies. L'acte de se tenir debout est un exemple de maintien de la stabilité que nous apprenons à contrôler dès le plus jeune âge. La stabilité est présente partout et est un sujet fondamental qui imprègne l'ingénierie et les sciences. La stabilité est un sujet très vaste et le concept de stabilité peut être formulé de diverses manières en fonction de l'utilisation prévue de l'analyse et de la conception de la stabilité. De nombreux systèmes physiques et d'ingénierie non linéaires sont conçus pour fonctionner à un état d'équilibre (c'est-à-dire un point d'équilibre). Une exigence primordiale pour le bon fonctionnement de ces systèmes est de maintenir la stabilité de cet état d'équilibre. La stabilité nécessite la robustesse du point d'équilibre aux petites perturbations, c'est-à-dire que l'état du système revient à l'état d'équilibre après de petites perturbations [4,15,16].

Étant donné que la plupart des systèmes physiques et d'ingénierie ne sont pas globalement stables, les états d'équilibre ne peuvent être restaurés que sous une quantité (ou taille) limitée de perturbation [1,17,18].

I.9.1 Stabilité des trajectoires

Soit un système dynamique autonome décrit par le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\dot{x} = f(x); x \in R^n \quad \text{(I.15)}$$

Soit $\bar{x}$ une solution quelconque de (I.15). Alors, grosso modo, $\bar{x}$ est stable si les solutions commençant proche de $\bar{x}$ à un instant donné restent proches de $\bar{x}$ pour tous les instants ultérieurs. Il est asymptotiquement stable si les solutions proches non seulement restent proches, mais convergent également vers $\bar{x}$ lorsque $t \to \infty$.

Définition I.11 (Stabilité au sens de Liapounov) [13] *$\bar{x}$ est dit stable (ou stable de Liapounov) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute autre solution, y(t), de (I.15) satisfaisant $\|\bar{x}(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ (où $\|.\|$ est une norme sur R^n ,la notation δ (ε) indique que δ dépend du choix de ε),alors $\|\bar{x}(t) - y(t)\| < \varepsilon$ pour $t > t_0$, $t_0 \in R$.*

Le concept de stabilité (Liapounov) est illustré à la figure I.6 a. Un point d'équilibre est stable si les trajectoires proches restent proches. Dans de nombreuses applications, l'exigence de "trajectoires proches restant proches" n'est pas suffisante, au lieu de cela, l'exigence devient les trajectoires proches restent à proximité et convergent toutes vers le point d'équilibre. Dans cette situation, le concept de stabilité (Liapounov) peut être affiné dans le concept de stabilité asymptotique tel que défini ci-après.

Définition I.12 (Stabilité asymptotique) [1,4,15,18] *$\bar{x}$ est dit asymptotiquement stable s'il est stable de Liapounov et pour toute autre solution, y(t), de (I.15), il existe une constante b > 0 telle que, si,$\|\bar{x}(t_0) - y(t_0)\| < b$ alors $\lim_{t\to\infty} \|\bar{x}(t) - y(t)\| = 0$.*

Le concept de stabilité asymptotique est illustré à la figure I.6 b. Un point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est le puits de trajectoires voisines. Un point d'équilibre asymptotiquement stable a également été appelé un puits dans la littérature classique des systèmes dynamiques non linéaires.

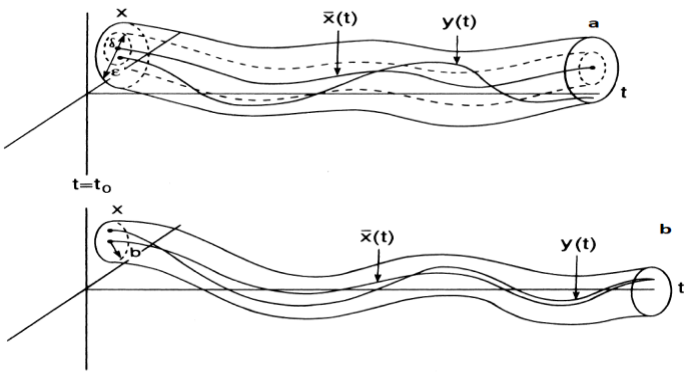


Figure I.6 a : Stabilité de Liapounov, b : Stabilité asymptotique [1]

I.9.2 Point d'équilibre hyperbolique

Définition I.14 [4,5] *Soit $x = \bar{x}$ un point fixe de $\dot{x} = f(x), x \in R^n$. Alors $\bar{x}$ est appelé un point fixe hyperbolique si aucune des valeurs propres de $Df(\bar{x})$ n'a de partie réelle nulle.*

I.9.3 Analyse linéaire de la stabilité

Considérons un système dynamique donné par une équation différentielle vectorielle de la forme :

$$\dot{x} = f(x) \tag{I.16}$$

Où $x \in R^n$. Les solutions de (I.16) peuvent inclure des points d'équilibre et des orbites périodiques, quasi-périodiques et chaotiques. Nous introduisons un vecteur de perturbation $y = x(t) - \bar{x}(t)$, en supposant que sa longueur $\|y\|$ est petite. Pour *y* nous pouvons écrire :

$$\dot{y} = f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) \tag{I.17}$$

Notre tâche est d'étudier l'évolution temporelle de la petite perturbation y(t). Nous développons la fonction *f* dans une série de Taylor au voisinage de $\bar{x}$:

$$f(\bar{x} + y) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=\bar{x}} y(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=\bar{x}} y^2(t) + \cdots \tag{I.18}$$

Nous réécrivons maintenant (I.16) pour la perturbation y(t) en utilisant (I.18), d'où :

$$y(t) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=\bar{x}} y(t) + \Phi(y) \tag{I.19}$$

Avec

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=\bar{x}} y^2(t) + \cdots \tag{I.20}$$

Les termes en $\Phi(y)$ incluent tous les termes allant comme y^n $(n \geq 2)$, c'est-à-dire qu'ils représentent tous les composants non linéaires. Par définition, la variable y(t) est un petit écart

par rapport à une solution particulière. Par conséquent, les termes non linéaires de (I.19) peuvent être négligés en première approximation. L'évolution de la petite perturbation peut donc être décrite par l'équation linéaire :

$$\dot{y} = A(t)y \tag{I.21}$$

Où A(t) est la matrice jacobienne de *f* avec des éléments :

$$a_{jk}(t) = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\Big|_{x=\bar{x}} ; \quad j,k = 1,2,\dots N \tag{I.22}$$

Appelés matrice de linéarisation du système au voisinage de la solution $\bar{x}$, et f_j sont les composantes de la fonction vectorielle *f*. Comme les éléments de la matrice A dépendent d'un point de la trajectoire étudiée, ils varient généralement dans le temps. La matrice est caractérisée par des valeurs propres $s_i(t)$ qui dépendent également du temps. Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique [1] :

$$\det\left[A(t) - sI\right] = s^2 - tr(A)s + \det(A) = 0 \tag{I.23}$$

Où I est la matrice unitaire. Les N valeurs propres sont associés à N vecteurs propres linéairement indépendants $e_i(t)$ qui changent de direction au fur et à mesure que l'on se déplace le long de la trajectoire $\bar{x}$. Ces vecteurs propres satisfont :

$$A(t)e_i(t) = s_i(t)e_i(t), \ \ i = 1,2,\dots,N \tag{I.24}$$

L'augmentation ou la diminution de la perturbation y(t) est déterminée par le signe de la partie réelle de s_i. Au fur et à mesure que l'on se déplace le long de la trajectoire $\bar{x}$, il se peut que la perturbation augmente en certains points de la trajectoire donnée et diminues en d'autres.

Le problème est de spécifier les caractéristiques du comportement de perturbation qui le définiraient dans son ensemble le long de la trajectoire donnée, et l'outil pertinent pour cela est l'exposant caractéristique de Liapounov.

Selon le théorème de Liapounov, si la matrice A est bornée, alors pour chaque solution non triviale y(t) du système (I.21), il existe un exposant caractéristique de Liapounov fini, c'est-à-dire le nombre réel défini par [1,13,20,21] :

$$\lambda\left[y(t)\right] = \sup_{t\to\infty} \lim \frac{1}{t}\|y(t)\| \tag{I.25}$$

Les solutions linéairement indépendantes sont caractérisées, en général, par différents exposants de Liapounov. Pour N solutions linéairement indépendantes $y^i(t)$, i=1, 2, …, N

constituant une matrice fondamentale de solutions Y du système (I.21), il existe N exposants caractéristiques de Liapounov :

$$\lambda_i = \sup \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left\| y^i(t) \right\|, \quad i = 1, 2, ..., N \tag{I.26}$$

Disposés par ordre décroissant, les nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ forment le spectre des exposants caractéristiques de Liapounov (spectre LCE). λ_1 est appelé l'exposant maximal de Liapounov. Chaque exposant du spectre LCE détermine le taux de contraction exponentielle ou d'étirement d'une composante de perturbation dans la direction d'un vecteur propre pertinent de la matrice fondamentale Y, en moyenne, le long de la trajectoire.

Si la trajectoire $\bar{x}(t)$est stable selon Liapounov, alors une perturbation initiale arbitraire $y(t_0)$ ne croît pas, en moyenne, le long de la trajectoire. Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que le spectre LCE ne contienne pas d'exposants positifs.

I.9.4 Stabilité d'un point fixe

Si la solution particulière $\bar{x}$ d'un système (I.16) est un point d'équilibre, c'est-à-dire $f(\bar{x}) = 0$, la matrice de linéarisation A est considérée en un seul point de l'espace des phases, donc c'est une matrice avec des éléments constants a_{ij}. Les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice A sont constants dans le temps et les exposants de Liapounov coïncident avec les parties réelles des valeurs propres, c'est-à-dire $\lambda_i = \mathrm{Re}\, s_i$.

La signature du spectre LCE indique si l'équilibre est stable ou non. Pour analyser le comportement des trajectoires de phase dans un voisinage local d'un équilibre, il faut également connaître les parties imaginaires des valeurs propres de la matrice de linéarisation.

Dans un plan de phase, N=2, l'équilibre est caractérisé par les deux valeurs propres de la matrice A, à savoir s_1 et s_2. Les cas suivants peuvent être réalisés dans le plan de phase :

1. s_1 et s_2 sont des nombres réels négatifs, auquel cas l'équilibre est un nœud stable.
2. s_1 et s_2 sont des nombres positifs réels, auquel cas l'équilibre est un nœud instable.
3. s_1 et s_2 sont des nombres réels mais avec des signes différents, auquel cas l'équilibre est une selle.
4. s_1 et s_2 sont des conjugués complexes avec $\mathrm{Re}\, s_{1,2} \langle 0$ et l'équilibre est un foyer stable.
5. s_1 et s_2 sont des conjugués complexes avec $\mathrm{Re}\, s_{1,2} \rangle 0$ et l'équilibre est un foyer instable.
6. s_1 et s_2 sont purement imaginaires, on peut donc écrire $s_{1,2} = \pm i\omega$, auquel cas l'équilibre est un centre.

La figure I.7 montre les équilibres réalisés dans le plan pour différentes valeurs du déterminant et trace de la matrice A, c'est-à-dire $\det A = s_1 s_2$ et $TrA = s_1 + s_2$.

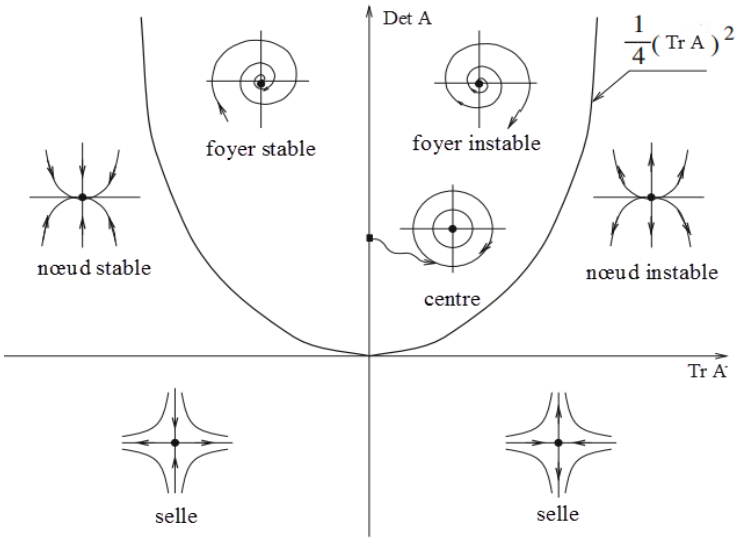


Figure I.7 : Allure des différentes solutions d'équilibre pour les systèmes bidimensionnels [7]

Pour identifier à quel type d'ensemble limite correspond l'équilibre, il suffit de connaître les exposants de Liapounov. L'équilibre est considéré comme attracteur s'il est asymptotiquement stable dans toutes les directions et que son spectre LCE se compose uniquement d'exposants négatifs (nœud stable et foyer stable). Si l'équilibre est instable dans toutes les directions, c'est un répulsif (nœud instable et foyer instable). Si le spectre LCE comprend à la fois des exposants positifs et négatifs, l'équilibre est de type selle [1,20,21].

I.9.5 Stabilité des solutions périodiques

Toute solution périodique (orbite périodique) $\bar{x}(t)$ du système (I.16) satisfait à la condition

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t+T) \tag{I.27}$$

Où T est la période de la solution.

La matrice de linéarisation A(t) calculée aux points de la trajectoire correspondant à la solution périodique $\bar{x}(t)$ est également périodique :

$$A(t) = A(t+T) \tag{I.28}$$

Dans ce cas, (I.28) pour les perturbations est linéaire avec des coefficients périodiques. La stabilité d'une solution périodique peut être estimée une fois que l'on sait comment une petite perturbation $y(t_0)$ évolue sur la période T.

Son évolution peut être représentée par :

$$y(t_0 + T) = M_T y(t_0) \tag{I.29}$$

Où M_T est la matrice de monodromie. C'est indépendant du temps.

Les valeurs propres de la matrice de monodromie, c'est-à-dire les racines de l'équation caractéristique

$$\det(M_T - \mu I) = 0 \tag{I.30}$$

Sont appelés multiplicateurs de la solution périodique $\bar{x}(t)$ et définissent sa stabilité. Une exigence nécessaire et suffisante pour que la solution périodique $\bar{x}(t)$ soit stable selon Liapounov est que ses multiplicateurs doivent satisfaire $|\mu_i| \leq 1$, $i = 1, 2, ...N$.

Les multiplicateurs obéissent aux relations :

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = Tr\ M_T \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{N} \mu_i = \det M_T \tag{I.31}$$

Ils sont liés aux exposants de Liapounov de la solution périodique par :

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln |\mu_i| \tag{I.32}$$

L'un des exposants du spectre LCE d'un cycle limite est toujours nul et correspond à un multiplicateur d'unité. Le cycle limite est un attracteur si tous les autres exposants sont négatifs. Si le spectre LCE comprend des exposants de signe différent, le cycle limite est une selle. Si les autres exposants satisfont $\lambda_i \geq 0$, alors le cycle limite est absolument instable (un répulsif).

I.9.6 Théorie de la fonction de Liapounov

L'un des développements les plus importants de la théorie de la stabilité est la théorie de la fonction de Liapounov [13]. Les théorèmes de stabilité de Liapounov donnent des conditions suffisantes pour la stabilité de Liapounov et la stabilité asymptotique. La caractéristique intéressante de la théorie de la fonction de Liapounov est qu'elle dérive les propriétés de stabilité du point d'équilibre sans résoudre les équations différentielles ordinaires. C'est l'esprit de Liapounov. Dans cette section, nous présentons un théorème fondamental de la fonction de Liapounov. Nous notons la notation suivante comme la dérivée temporelle d'une fonction $V(x)$, prise le long de la trajectoire du système :

$$\dot{V}\big(x(t)\big) = \frac{\partial V(x(t))^T}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) = \frac{\partial V(x(t))^T}{\partial x} . f(x(t)) \tag{I.33}$$

Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$, où $f: R^n \to R^n$. Soit $V: U \to R$ une fonction continue définie sur un voisinage U de x, différentiable sur U, telle que :

a) $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$, et $x \in U$

b) $\dot{V}(x) \leq 0$ *dans* $U - \bar{x}$ *, Alors* $\bar{x}$ *est stable. De plus, si aussi*

c) $\dot{V}(x) < 0$ *dans* $U - \bar{x}$ *, alors* $\bar{x}$ *est asymptotiquement stable.*

Remarques :

1) La théorie de la fonction de Liapounov affirme non seulement la propriété de stabilité du point d'équilibre (un résultat local) mais aussi qu'il n'existe pas de cycle limite (comportement d'oscillation) ou de comportement compliqué borné tel qu'une trajectoire presque périodique, un mouvement chaotique, etc. dans le sous-ensemble de l'espace d'état où existe une fonction de Liapounov.
2) De nombreuses fonctions de Liapounov peuvent exister pour le même système non linéaire. Par exemple, si V est une fonction de Liapounov pour un système, il en va de même pour $V_1 = pV^{\alpha}$, où $p > 0$, $\alpha > 1$. De plus, des choix spécifiques de fonctions de Liapounov peuvent donner des résultats plus précis que d'autres.

Il n'existe aucun moyen systématique de construire des fonctions de Liapounov pour les systèmes non linéaires généraux. C'est un inconvénient fondamental de la méthode directe de Liapounov. Par conséquent, face à des systèmes dynamiques non linéaires spécifiques, il faut souvent utiliser l'expérience, l'intuition, les essais et erreurs et les connaissances physiques pour rechercher une fonction de Liapounov appropriée.

Exemple I.2 (fonction de Liapounov)

Considérons l'oscillateur non linéaire :

$$\ddot{x} + c\dot{x} + ax + bx^3 = 0 \qquad \text{(I.34)}$$

Où a, b et c sont des constantes positives.

En posant $y = \dot{x}$, donc $\dot{y} = \ddot{x}$ donnant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -cy - ax - bx^2 \end{cases} \qquad \text{(I.35)}$$

Puisque a et b sont des constantes positives, le seul point stationnaire de ce système est $(x, y) = (0,0)$ donc nous voulons maintenant trouver une fonction de Liapounov pour l'origine.

Soit la fonction de la forme [1] :

$$V(x,y) = \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma y^2 \quad \text{(I.36)}$$

Pour les constantes positives $\alpha, \beta \; et \; \gamma$. Il est évident que $V(x,y) > 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $V(0,0) = 0$. Essayons maintenant de choisir les constantes $\alpha, \beta \; et \; \gamma$ telles que $\dot{V}(x,y)$ soit non positif sur un voisinage (à déterminer) de (0,0). La différenciation de V par rapport au temps donne :

$$\dot{V}(x,y) = (2\alpha x + 4\beta x^3)\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} \quad \text{(I.37)}$$

et en remplaçant $\dot{x}$ et $\dot{y}$ par (I.35) on trouve :

$$\dot{V}(x,y) = (2\alpha x + 4\beta x^3)y + 2\gamma y(-cy - ax - bx^3) \quad \text{(I.38)}$$

Ou $$\dot{V}(x,y) = (2\alpha - 2\gamma a)xy + (4\beta - 2\gamma b)x^3 y - 2\gamma c y^2 \quad \text{(I.39)}$$

Puisque γ et c sont tous deux positifs, le dernier terme est certainement non positif, mais les deux premiers termes sont plus difficiles. Cependant, nous sommes libres de choisir $\alpha, \beta \; et \; \gamma$ à condition qu'ils soient positifs, donc en fixant :

$$\gamma = \frac{\alpha}{a} \; et \; \beta = \frac{\gamma b}{2} = \frac{\alpha b}{2a} \quad \text{(I.40)}$$

Les termes du problème disparaissent en laissant :

$$\dot{V}(x,y) = -2\gamma c y^2 \leq 0 \quad \text{(I.41)}$$

Ainsi $V(x,y)$ est une fonction de Liapounov sur tout sous-ensemble ouvert borné de R^2 qui contient (0,0), et (0,0) est stable de Liapounov.

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une définition générale d'un système dynamique spécifiés par des équations différentielles ordinaires. Nous avons établi que le comportement de tels systèmes dynamiques se divise en quatre types de régime stationnaire : un état d'équilibre, un mouvement périodique, un mouvement quasi-périodique et un mouvement chaotique. Ces types de solution correspondent à des attracteurs sous la forme d'un point d'équilibre stable, d'un cycle limite, d'un attracteur quasi-périodique (un tore k-dimensionnel) et d'un attracteur chaotique ou étrange. Nous avons également donné une description brève et simplifiée des idées et méthodes de base de la théorie de la stabilité. L'accent a été mis principalement sur l'analyse linéaire de la stabilité des trajectoires. La théorie de la stabilité est essentielle pour la dynamique non linéaire. En étudiant la stabilité des trajectoires, on peut déterminer le caractère des ensembles limites du système et obtenir un portrait de phase qualitatif.

CHAPITRE II

État de l'art sur les bifurcations et le chaos dans les systèmes dynamiques

Le présent chapitre constitue une porte d'entrée essentielle vers la compréhension des bifurcations et du chaos au sein des systèmes dynamiques. Ces concepts fondamentaux joueront un rôle central dans notre exploration approfondie au cours du chapitre 4. Nous débuterons par une introduction soigneusement élaborée pour asseoir les bases de ces notions, lesquelles se révéleront cruciales dans l'analyse et la compréhension des comportements complexes des systèmes dynamiques étudiés.

II.1 Introduction

En 1885, Poincaré a introduit le terme bifurcation pour désigner un changement qualitatif dans la structure topologique du portrait de phase d'un système dynamique, provoqué par la variation douce de la valeur d'un paramètre [22-25]. Un changement qualitatif dans le portrait de phase peut impliquer un changement qualitatif dans le comportement asymptotique du système. La valeur du paramètre à ce changement est appelée valeur de bifurcation ou valeur critique du paramètre de bifurcation. De manière simpliste, la codimension d'une bifurcation peut être considérée comme le nombre de paramètres dont il faut faire varier les valeurs pour provoquer une telle bifurcation [3,9,26]. Par changement qualitatif de portrait de phase, on entend des changements structurels profonds, consistant en l'apparition et la disparition d'ensembles limites ainsi que des changements dans la stabilité des trajectoires appartenant à ces ensembles limites [1,3,27-29]. Par exemple, s'il existe un point d'équilibre stable dans l'espace des phases du système et qu'il devient instable lorsqu'un ou plusieurs paramètres de contrôle sont modifiés, alors le comportement de toutes les trajectoires de phase de la région d'attraction de l'équilibre change fondamentalement. Ils seront maintenant attirés par un autre attracteur, c'est-à-dire qu'une bifurcation se produit dans le système. La bifurcation et le chaos sont des caractéristiques communes des processus naturels et technologiques [31]. La théorie du chaos est les principes et les opérations mathématiques qui sous-tendent le chaos [2,9,32]. Le chaos en un terme simple fait référence à tout état de confusion ou de désordre qui montre l'absence d'une sorte d'ordre particulier. Le terme chaos tel qu'il est utilisé ici fait référence au comportement apparemment imprévisible présenté par les modèles déterministes [33-35]. Au fil des ans, les preuves physiques de l'imprévisibilité et des occurrences de phénomènes chaotiques se sont lentement et timidement accumulées. Ils sont restés sans explication jusqu'en 1963, lorsque Lorenz, un météorologue, a présenté un exemple concret d'un système de faible dimension qui présentait un comportement complexe et imprévisible [36]. La publication de cet exemple a déclenché une avalanche d'articles rapportant d'autres preuves de phénomènes imprévisibles et chaotiques dans divers systèmes physiques. Mère Nature, avec sa complexité et ses liens à plusieurs niveaux, a fourni une abondance d'exemples. De manière surprenante, il a également été montré que des systèmes déterministes simples, avec seulement quelques éléments, pouvaient également générer un comportement chaotique. Un paradoxe apparent selon lequel le chaos est déterministe, généré par des règles fixes qui n'impliquent aucun élément de hasard, a créé un nouveau paradigme dans la modélisation scientifique. La compréhension du chaos a évolué à partir de deux sources [29,31,33,35]. La

première source est une présentation géométrique du mouvement sous la forme d'une cartographie des points de l'espace d'état sur une surface décrite par les intégrales du mouvement. Une augmentation des irrégularités dans la topologie de surface conduit à une plus grande sensibilité du mouvement aux conditions initiales, et éventuellement, au chaos. Une nouvelle branche de la géométrie, à savoir la géométrie fractale, fournit la deuxième source de la science du chaos. La géométrie fractale tente de trouver des répétitions régulières dans des changements apparemment chaotiques de formes géométriques irrégulières. La combinaison de ces deux sources et de ces deux voies de développement a contribué à la science du chaos. La mécanique du chaos, une partie de la théorie du chaos, qui étudie le mouvement chaotique dans les systèmes mécaniques. Au cours des deux dernières décennies, plusieurs chercheurs se sont penchés sur l'exploration du mouvement chaotique au sein de systèmes mécaniques déterministes, dont certains sont référencés dans [37-44]. La condition préalable au mouvement chaotique déterministe est associée à la non-linéarité du système et à sa grande sensibilité à l'excitation externe déterministe. Les réponses du système peuvent subir des changements presque instantanés, tandis que certains paramètres du système varient lentement en valeur. Dans les équations différentielles modélisant le système physique, une condition initiale (déplacement ou vitesse) représente l'un de ces paramètres à variation lente conduisant à des changements brusques dans les réponses du système. Il est devenu connu sous le nom d'effet papillon, tel que décrit par Lorenz en 1963. Un autre paramètre variant lentement, conduisant à des bandes alternées de réponses chaotiques et ordonnées, peut-être la fréquence d'excitation externe. La caractérisation des attracteurs chaotiques par des exposants de Liapounov positifs et des dimensions fractales s'accorde avec le fait que les plus grands exposants de Liapounov fournissent la meilleure mesure du Chaos dans n'importe quel système dynamique [1,31,45,46].

II.2 Théorème des fonctions implicites

Soit Ω un ensemble ouvert non vide dans $R^n \times R$ et $F: \Omega \to R$ être différentiable, avec $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $y \in R$ et $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, et (a, b) un point de Ω tel que $F(a, b) = 0$. Alors, il existe un ouvert $X \times Y$, compris dans Ω et contenant le point (a, b), qui vérifie ce qui suit :

- Il existe une unique fonction $g : X \to Y$ qui vérifie $F(x, g(x)) = 0$, pour tout x dans X.
- On a $g(a) = b$. La fonction $g : X \to Y$ est différentiable et satisfait

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\big(x, g(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, g(x)\big)}\text{ , pour tout } x \text{ dans } X, \text{où } j = 1, \dots, n$$

De plus, si $\nabla F(x, y)$ est continue en (a, b) alors $\nabla g(x)$ est continue en $x = a$.

II.3 Point d'équilibre non hyperbolique

Si au moins une valeur propre de la matrice jacobienne est nulle ou a une partie réelle nulle, alors l'équilibre est dit non hyperbolique [3,5]. Les équilibres non hyperboliques ne sont pas robustes (c'est-à-dire que le système n'est pas structurellement stable). De petites perturbations peuvent entraîner une bifurcation locale d'un équilibre non hyperbolique, c'est-à-dire qu'il peut modifier la stabilité, disparaître ou se scinder en plusieurs équilibres.

II.4 Bifurcation des points fixes des champs vectoriels

Pour poursuivre notre discussion et illustrer différents phénomènes de bifurcation, nous paramétrons maintenant le système dynamique non linéaire (I.15), en y incluant un paramètre réel μ, de telle manière $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Soit le champ vectoriel paramétré par :

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in R^n, \mu \in R^p \qquad \text{(II.1)}$$

Où f est une fonction C^rsur un ensemble ouvert dans $R^n \times R^p$. Supposons que (II.1) ait un point fixe en $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$, c'est-à-dire :

$$f(x_0, \mu_0) = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

la première étape à franchir est d'examiner le champ vectoriel linéaire obtenu en linéarisant (II.1) autour du point fixe $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$. Ce champ vectoriel linéaire est donné par :

$$\dot{y} = D_x f(x_0, \mu_0) y, y \in R^n \qquad \text{(II.3)}$$

Lorsque le point fixe (x_0, μ_0) de (II.1) n'est pas hyperbolique, c'est-à-dire lorsque $D_x f(x_0, \mu_0)$ a des valeurs propres sur l'axe imaginaire. Dans ce cas, pour μ très proche de μ_0 (et pour x proche de x_0), un comportement dynamique radicalement nouveau peut apparaître. Par exemple, des points fixes peuvent être créés ou détruits et un comportement dépendant du temps tel qu'une dynamique périodique, quasi-périodique ou même chaotique peut être créé [1,3,5,25]. Nous commencerons notre étude en considérant la façon la plus simple dont $D_x f(x_0, \mu_0)$ peut-être non hyperbolique. C'est le cas où $D_x f(x_0, \mu_0)$ a une seule valeur propre nulle avec les valeurs propres restantes ayant des parties réelles non nulles .

Alors la structure de l'orbite près de (x_0, μ_0) est déterminé comme suit :

$$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R^n, \alpha \in R^p \qquad \text{(II.4)}$$

où $\alpha = \mu - \mu_0$. De plus, nous savons que (II.4) doit satisfaire

$$f(0,0) = 0 \quad \text{(II.5)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{(II.6)}$$

L'équation (II.5) est simplement la condition de point fixe et (II.6) est la condition de valeur propre nulle.

Définition II.1 (Bifurcation d'un point fixe) [3,5,25,30,47] *Un point fixe* $(x, \alpha) = (0, 0)$ *d'une famille à un paramètre de champs de vecteurs unidimensionnels est dit subir une bifurcation à* $\alpha = 0$ *si le flot pour α proche de zéro et x proche de zéro n'est pas qualitativement le même que le flot proche de* $x = 0$ *à* $\alpha = 0$.

Commençons par étudier quelques exemples précis. Dans ces exemples, nous supposerons que $\alpha \in R^1$

II.4.1 Bifurcation selle-nœud

Soit le champ vectoriel paramétré [5,25,48,49] :

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = \alpha - x^2, x \in R^1, \alpha \in R^1 \quad \text{(II.7)}$$

On a

$$f(0,0) = 0 \quad \text{(II.8)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{(II.9)}$$

L'ensemble de tous les points fixes de (II.7) est donné par :

$$x^2 = \alpha \quad \text{(II.10)}$$

Cela représente une parabole dans le plan α-x comme le montre la figure II.1.

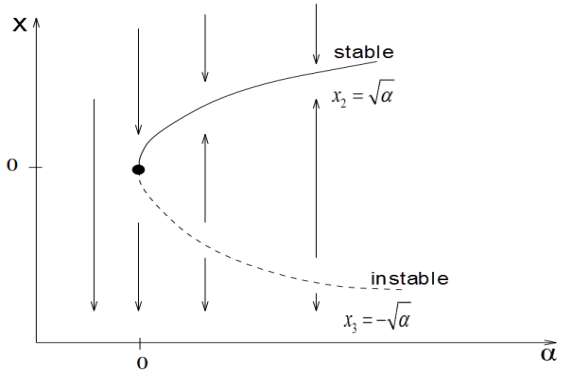


Figure II.1 : Bifurcation selle-nœud [3]

Dans la figure, les flèches le long des lignes verticales représentent le flot généré par (II.7) le long de la direction x. Ainsi, pour $\alpha < 0$, (II.7) n'a pas de points fixes. D'autre part, il a un équilibre $x_1 = 0$ en $\alpha_0 = 0$, et une courbe d'équilibre $x^2 = \alpha$ en $\alpha \geq 0$, où $x_2 = \sqrt{\alpha}$ est stable et $x_3 = -\sqrt{\alpha}$ est instable pour $\alpha > \alpha_0 = 0$.

Nous appelons $(x, \alpha) = (0,0)$ un point de bifurcation et la valeur du paramètre α_0=0 une valeur de bifurcation. La figure II.1 est appelée diagramme de bifurcation, les courbes pleines de la parabole sont utilisées pour indiquer les équilibres stables et les courbes en pointillés, pour les instables. Nous voulons maintenant dériver les conditions sous lesquelles une famille générale à un paramètre de champs de vecteurs unidimensionnels subira une bifurcation de selle-nœud. Ces conditions feront intervenir des dérivées du champ vectoriel évalué au point de bifurcation et sont obtenues par une considération de la géométrie de la courbe des points fixes dans le plan μ-x au voisinage du point de bifurcation. Dans ce type de bifurcation, une courbe unique de points fixes, paramétrée par x, est passée par (x, α) = (0, 0). On note la courbe des points fixes par μ(x). La courbe des points fixes satisfait deux propriétés :

1. Elle était tangente à la droite α = 0 en x = 0, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(0) = 0 \qquad \text{(II.11)}$$

2. Il se trouve entièrement d'un côté de α = 0. Localement, cela sera satisfait si nous avons :

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(0) \neq 0 \qquad \text{(II.12)}$$

Considérons maintenant une famille générale à un paramètre de champs vectoriels unidimensionnels :

$$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R^1, \alpha \in R^1 \qquad \text{(II.13)}$$

Supposons que (II.13) a un point fixe à (x, α) = (0,0), c'est-à-dire :

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{(II.14)}$$

De plus, supposons que le point fixe ne soit pas hyperbolique, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \text{(II.15)}$$

Maintenant, si nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) \neq 0 \qquad \text{(II.16)}$$

Alors, par le théorème de la fonction implicite, il existe une fonction unique :

$$\alpha = \alpha(x)\,, \alpha(0) = 0 \qquad \text{(II.17)}$$

Défini pour x suffisamment petit pour que $f\big(x, \alpha(x)\big) = 0$. Maintenant, nous voulons dériver des conditions en termes de dérivées de *f* évalué à (x, α) = (0,0) de sorte que nous avons :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(0) = 0 \qquad \text{(II.18)}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(0) \neq 0 \qquad \text{(II.19)}$$

Les équations (II.18) et (II.19), ainsi que (II.15), (II.16) et (II.17), impliquent que (x, α) = (0,0) est un point de bifurcation où se produit une bifurcation selle-nœud.

Nous pouvons dériver des expressions pour (II.18) et (II.19) en termes de dérivées de *f* au point de bifurcation en différenciant implicitement *f* le long de la courbe des points fixes.

En utilisant (II.16), nous avons :

$$f\big(x,\alpha(x)\big) = 0 \tag{II.20}$$

En différenciant (II.20) par rapport à x donne :

$$\frac{df}{dx}\big(x,\alpha(x)\big) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\alpha(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\big(x,\alpha(x)\big)\frac{d\alpha}{dx}(x) \tag{II.21}$$

En évaluant (II.21) à (x, α) = (0, 0), on obtient :

$$\frac{d\alpha}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)} \tag{II.22}$$

On voit donc que (II.15) et (II.16) impliquent que :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(0) = 0 \tag{II.23}$$

C'est-à-dire que la courbe des points fixes est tangente à la ligne α = 0 en x = 0.

Ensuite, dérivons (II.21) une fois de plus par rapport à x pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx^2}\big(x,\alpha(x)\big) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(x,\alpha(x)\big) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}\big(x,\alpha(x)\big)\frac{d\alpha}{dx}(x) \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\big(x,\alpha(x)\big)\left(\frac{d\alpha}{dx}(x)\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\big(x,\alpha(x)\big)\frac{d^2\alpha}{dx^2}(x)\end{aligned} \tag{II.24}$$

Évaluons (II.24) à (x, α) = (0, 0) et utilisons (II.23) donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) = 0 \\ \frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)}\end{aligned} \tag{II.25}$$

Par conséquent, (II.25) est différent de zéro à condition que nous ayons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \tag{II.26}$$

En conclusion, pour que (II.13) subisse une bifurcation de selle-nœud, nous devons avoir :

Point fixe non hyperbolique $\left.\begin{matrix} f(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \end{matrix}\right\}$ (II.27)

Et $$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) \neq 0 \tag{II.28}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \tag{II.29}$$

L'équation (II.28) implique qu'une courbe unique de points fixes passe par (x, α) = (0, 0), et (II.29) implique que la courbe se trouve localement d'un côté de α = 0. Elle doit être clair que le signe de (II.25) détermine de quel côté de α = 0 se trouve la courbe. Dans la figure II.2, nous montrons les deux cas. La forme normale des bifurcations selle-nœud d'une famille générale à un paramètre de champs vectoriels unidimensionnels ayant un point fixe non hyperbolique à (x, α) = (0, 0) peut être donnée par :

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = \alpha \pm x^2 \qquad \text{(II.30)}$$

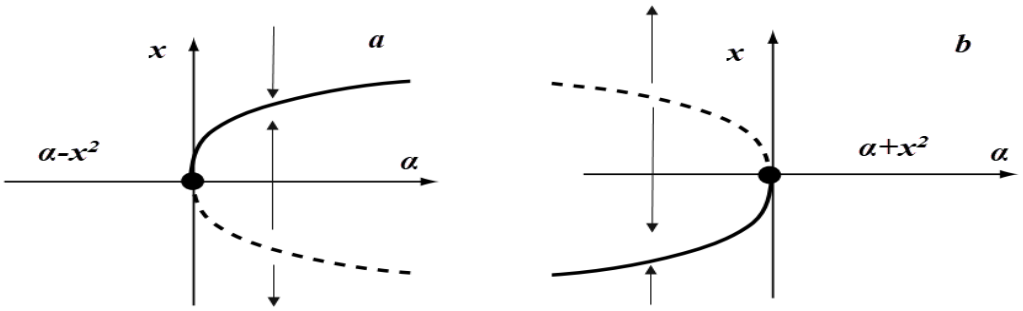


Figure II.2 : Bifurcation selle-nœud supercritique (a : $\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) > 0$) et sous-critique (b : $\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) < 0$) [5]

II.4.2 Bifurcation transcritique

Soit le champ vectoriel paramétré [1,3,5,9,25,50] :

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = \alpha x - x^2, x \in R^1, \alpha \in R^1 \qquad \text{(II.31)}$$

Tel que $f(0,0) = 0$ (II.32)

Et $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \text{(II.33)}$$

De plus, les équilibres sont : $x_1 = 0$ et $x_2 = \alpha$. Si α varie, alors il y a deux courbes d'équilibre comme le montre la figure II.3. Nous voyons que pour $\alpha < \alpha_0 = 0$, l'équilibre $x_1 = 0$ est stable, mais que pour $\alpha > \alpha_0 = 0$, il devient instable. Ainsi, $(x_1, \alpha_0) = (0,0)$ est un point de bifurcation. De même, on peut vérifier que (x_2, α_0) est un autre point de bifurcation.

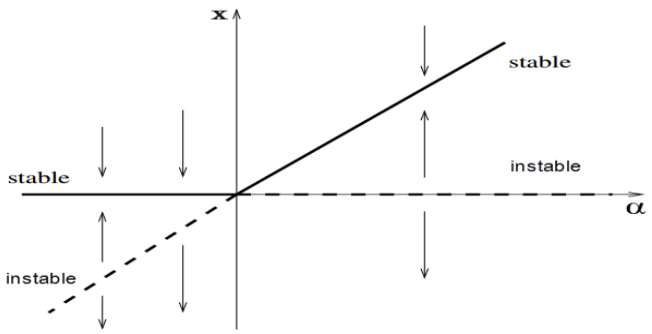


Figure II.3 : Bifurcation transcritique

Nous voulons suivre la même stratégie que dans notre discussion et dérivation des conditions générales pour la bifurcation selle-nœud donnée dans la section précédente, à savoir, utiliser le théorème de la fonction implicite pour caractériser la géométrie des courbes de points fixes passant par le point de bifurcation en termes de dérivées du champ vectoriel évalué au point de bifurcation. Pour la bifurcation transcritique, la structure orbitale près du point de bifurcation est caractérisée comme suit :

1. Deux courbes de points fixes passant par (x, α) = (0, 0), l'une donnée par x = α, l'autre par x = 0.
2. Les deux courbes de points fixes existaient de part et d'autre de α = 0.
3. La stabilité le long de chaque courbe de points fixes a changé en passant par α = 0.

En utilisant ces trois points comme guide, considérons une famille générale à un paramètre de champs de vecteurs unidimensionnels :

$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R^1, \alpha \in R^1$ (II.34)

Nous supposons qu'à (x, α) = (0, 0), (II.34) a un point fixe non hyperbolique.

Dans (II.31) nous avions deux courbes de points fixes passant par (μ, x) = (0, 0). Mais dans ce cas on a : $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = 0$ (II.35)

Et donc les conditions de généricité pour la bifurcation selle-nœud ne s'appliquent pas.

On peut sortir de cette difficulté comme suit :

$\dot{x} = f(x, \alpha) = xF(x, \alpha), x \in R^1, \alpha \in R^1$ (II.36)

Où, par définition, on a :

$$F(x, \alpha) \equiv \begin{cases} \frac{f(x,\alpha)}{x}, x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \alpha), x = 0 \end{cases} \quad \text{(II.37)}$$

Puisque x = 0 est une courbe de points fixes pour (II.36), pour obtenir une courbe supplémentaire de points fixes passant par (x, α) = (0, 0) nous devons rechercher les conditions sur F où F a une courbe de zéros passant par (μ, x) = (0, 0) (qui n'est pas donnée par x = 0). Ces conditions seront en termes de dérivées de F qui, en utilisant (II.37), peuvent être exprimées en tant que dérivées de f.

En utilisant (II.37), on obtient :

$F(0,0) = 0$ (II.38)

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ (II.39)

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)$ (II.40)

Et $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0)$ (II.41)

Supposons maintenant que (II.41) n'est pas nul, alors par le théorème de la fonction implicite il existe une fonction, μ(x), définie pour x suffisamment petit, tel que :

$F\big(x, \alpha(x)\big) = 0$ (II.42)

Pour que μ(x) ne coïncide pas avec x = 0 et existe des deux côtés de μ = 0, il faut exiger que :

$0 < \left|\frac{d\alpha}{dx}(0)\right| < \infty$ (II.43)

En différenciant implicitement (II.42) exactement comme dans le cas de la bifurcation nœud-selle on obtient :

$$\frac{d\alpha}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0)} \quad \text{(II.44)}$$

En utilisant (II.38), (II.39), (II.40) et (II.41), (II.44) devient :

$$\frac{d\alpha}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0)} \quad \text{(II.45)}$$

En conclusion, pour que (II.34) subisse une bifurcation transcritique, nous devons avoir :

Point fixe non hyperbolique $\left.\begin{matrix} f(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \end{matrix}\right\}$ (II.46)

Et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = 0$ (II.47)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0) \neq 0$ (II.48)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ (II.49)

On remarque que la pente de la courbe des points fixes non égaux à x = 0 est donnée par (II.45). Ces deux cas sont représentés sur la figure II.4. Ainsi, la forme normale des bifurcations transcritique d'une famille générale à un paramètre de champs vectoriels unidimensionnels ayant un point fixe non hyperbolique à (x, α) = (0, 0) peut être donnée par :

$\dot{x} = f(x, \alpha) = \alpha x \pm x^2$ (II.50)

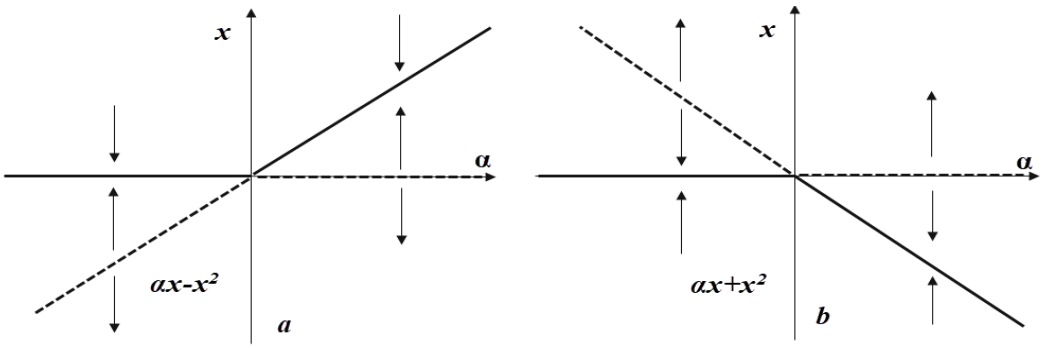


Figure II.4 Bifurcation transcritique supercritique (a : $\frac{d\alpha}{dx}(0) >$) et sous-critique (b : $\frac{d\alpha}{dx}(0) < 0$)

II.4.3 Bifurcation Fourche

Les anglo-saxons appellent cette bifurcation "Pitchfork », qui se traduit littéralement par "fourche à foin". Le système modèle pour cette bifurcation peut être écrit sous la forme [1,5,16,25,50] :

$$\dot{x} = f(x,\alpha) = \alpha x - x^3, x \in R^1, \alpha \in R^1 \quad \text{(II.51)}$$

Tel que $f(0,0) = 0$ (II.52)

Et $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{(II.53)}$$

De plus, les points fixes de (II.51) sont $x = 0$ et $x^2 = \alpha$. Ainsi, pour $\alpha < 0$, il existe un point fixe, $x = 0$, qui est stable. Pour $\alpha > 0$, x = 0 est toujours un point fixe, mais deux nouveaux points fixes ont été créés en $\alpha = 0$ et sont donnés par $x^2 = \alpha$. Dans le processus, $x = 0$ est devenu instable pour $\alpha > 0$, avec les deux autres points fixes stables, comme le montre la figure II.5.

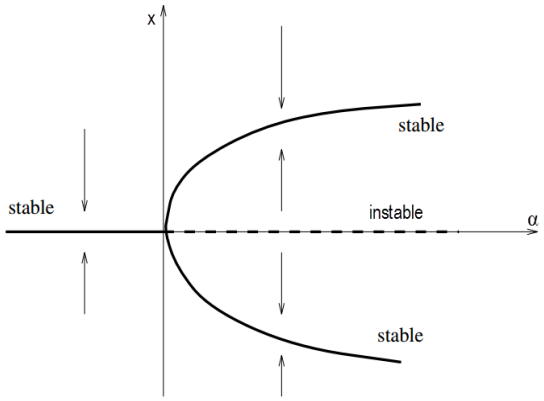


Figure II.5 : Bifurcations fourche [3]

La discussion et la dérivation des conditions dans lesquelles une famille générale à un paramètre de champs de vecteurs unidimensionnels subira une bifurcation de fourche suivent de très près notre discussion de la bifurcation transcritique.

La géométrie des courbes de points fixes associées à l'équation (II.51) avait les caractéristiques suivantes :

1. Deux courbes de points fixes passant par $(x, \alpha) = (0,0)$, l'une donnée par $x = 0$, l'autre par $x^2 = \alpha$.
2. La courbe $x = 0$ existait de part et d'autre de $\alpha = 0$, la courbe $x^2 = \alpha$ existait d'un côté de $\alpha = 0$.
3. Les points fixes sur la courbe $x = 0$ avaient différents types de stabilité sur les côtés opposés de $\alpha = 0$. Les points fixes sur $x^2 = \alpha$ avaient tous le même type de stabilité.

Maintenant, nous voulons considérer les conditions sur une famille générale à un paramètre de champs vectoriels unidimensionnels ayant deux courbes de points fixes passant par le point de bifurcation dans le plan $\alpha - x$ qui ont les propriétés données ci-dessus.

On note le champ vectoriel par :

$$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R^1, \alpha \in R^1 \quad \text{(II.54)}$$

et on suppose $f(0,0) = 0$ (II.55)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{(II.56)}$$

Comme dans le cas de la bifurcation transcritique, pour avoir plus d'une courbe de points fixes passant par $(\alpha, x) = (0, 0)$ il faut avoir :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = 0 \quad \text{(II.57)}$$

En continuant sur ces lignes, nous exigeons que x = 0 soit une courbe de points fixes pour (II.54) en supposant que le champ vectoriel (II.54) a la forme :

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = xF(x, \alpha), x \in R^1, \alpha \in R^1 \quad \text{(II.58)}$$

Où, par définition, on a :

$$F(x, \alpha) \equiv \begin{cases} \frac{f(x,\alpha)}{x}, x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \alpha), x = 0 \end{cases} \quad \text{(II.59)}$$

Pour avoir une seconde courbe de points fixes passant par $(\alpha, x) = (0, 0)$ il faut avoir :

$$F(0,0) = 0 \quad \text{(II.60)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0) \neq 0 \quad \text{(II.61)}$$

L'équation (II.61) garantit qu'une seule courbe supplémentaire de points fixes passe par $(\alpha, x) = (0,0)$. Aussi, en utilisant (II.61), le théorème de la fonction implicite implique que pour *x* suffisamment petit il existe une unique fonction α(x) telle que :

$$F\big(x, \alpha(x)\big) = 0 \tag{II.62}$$

Pour que la courbe des points fixes, α(x), satisfasse aux caractéristiques précitées, il suffit d'avoir :

$$\frac{d\alpha}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0)} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0)} = 0 \tag{II.63}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0)} = \frac{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0)} \neq 0 \tag{II.64}$$

En conclusion, pour que (II.54) subisse une bifurcation fourche, nous devons avoir :

Point fixe non hyperbolique $\left.\begin{matrix} f(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \end{matrix}\right\}$ (II.65)

Et $$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = 0 \tag{II.66}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0) \neq 0 \tag{II.67}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \tag{II.68}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0 \tag{II.69}$$

Il existe deux possibilités pour la disposition des deux branches de points fixes selon le signe de (II.64). Ces deux possibilités sont représentées sur la figure II.6. On voit que pour la bifurcation fourche sous-critique**,** il y a une perte de stabilité au point de bifurcation $(\alpha, x) = (0,0)$. Contrairement à la bifurcation fourche supercritique, il n'y a pas d'échange de stabilité. Au lieu de cela, la stabilité est perdue localement au point de bifurcation.

Ainsi, la forme normale des bifurcations fourche d'une famille générale à un paramètre de champs vectoriels unidimensionnels ayant un point fixe non hyperbolique à $(x, \alpha) = (0,0)$ peut être donnée par:

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = \alpha x \pm x^3 \tag{II.70}$$

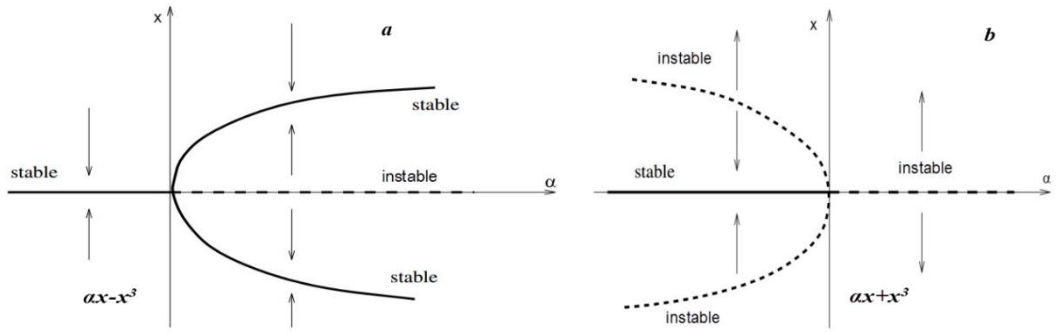


Figure II.6 : Bifurcations fourche supercritique (a : $\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) > 0$) et sous-critique (b : $\frac{d^2\alpha}{dx^2}(0) < 0$) [3]

II.4.4 Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf

Le type de bifurcation qui relie les équilibres au mouvement périodique est la bifurcation de Hopf [3]. La bifurcation de Hopf est la porte qui s'ouvre de la petite salle des équilibres à la grande salle des solutions périodiques, qui à son tour n'est qu'une petite partie du domaine des fonctions, figure II.7. Dans un système dynamique de dimension N = 2, il y a une situation où une paire de valeurs propres conjuguées complexes d'équilibre de type foyer stable coupent l'axe imaginaire, figure II.12. Cela implique que la condition de bifurcation Re $s_{1,2}$ = 0 est satisfaite. De plus, Im $s_{1,2} \neq 0$. Ce cas correspond à la bifurcation de Hopf (certains auteurs appellent cette bifurcation la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf, souvent abrégé en bifurcation de Hopf) [38,43,51,52]. Cette bifurcation a été explorée pour la première fois par AA. Andronov pour le cas N = 2 [12] en utilisant des techniques de Poincaré et Bendixson puis généralisé par E. Hopf en 1942 aux systèmes de dimension arbitraire N.

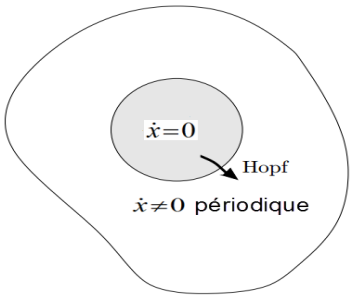


Figure II.7 : passage des solutions stationnaires aux solutions périodiques [7]

Nous passons maintenant à la manière suivante selon laquelle un point fixe peut être non hyperbolique, à savoir que la matrice associée au champ vectoriel linéarisé autour du point fixe a une paire de valeurs propres purement imaginaires, les valeurs propres restantes ayant des parties réelles non nulles.

Forme normale de la bifurcation de Hopf

Considérons le système suivant de deux équations différentielles dépendant d'un paramètre [3,5,52,53] :

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{cases} \quad \text{(II.71)}$$

Ce système a l'équilibre $x_1 = x_2 = 0$ pour tout α avec la matrice jacobienne :

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & -1 \\ 1 & \alpha\end{pmatrix}$$

Ayant des valeurs propres $s_{1,2} = \alpha \pm i$. Introduire la variable complexe $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$, $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$. Cette variable satisfait l'équation différentielle :

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2)$$

Et on peut donc réécrire le système (II.71) sous la forme complexe suivante :

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 \quad \text{(II.72)}$$

Enfin, en utilisant la représentation $z = \rho e^{i\varphi}$, on obtient :

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}(\alpha + i - \rho^2) \quad \text{(II.73)}$$

Ce qui donne la forme polaire du système (II.71) :

$$\begin{cases}\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1\end{cases} \quad \text{(II.74)}$$

Les bifurcations du portrait de phase du système lorsque α passe par zéro peuvent facilement être analysées en utilisant la forme polaire, puisque les équations pour ρ et φ dans (II.74) sont découplées. La première équation (qui ne doit évidemment être considérée que pour $\rho \geq 0$) a pour point d'équilibre ρ = 0 pour toutes les valeurs de α. L'équilibre est linéairement stable si $\alpha < 0$, il reste stable à α = 0 mais de manière non linéaire (donc le taux de convergence de la solution vers zéro n'est plus exponentiel) , pour $\alpha > 0$ l'équilibre devient linéairement instable. De plus, il existe un point d'équilibre stable supplémentaire $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ pour $\alpha > 0$. La deuxième équation décrit une rotation à vitesse constante. Ainsi, par superposition des mouvements définis par les deux équations de (II.74), on obtient le diagramme de bifurcation pour ce système bidimensionnel, figure II.8. Le système a toujours un équilibre à l'origine. Cet équilibre est un foyer stable pour α < 0 et un foyer instable pour α > 0. À la valeur du paramètre critique α = 0, l'équilibre est non linéairement stable et topologiquement équivalent au foyer. Parfois, cela s'appelle un foyer faiblement attirant. Cet équilibre est entouré pour $\alpha > 0$ par une orbite fermée isolée (cycle limite) unique et stable. Le cycle est un cercle de rayon $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$. Toutes les orbites commençant à l'extérieur ou à l'intérieur du cycle sauf à l'origine tendent vers le cycle lorsque $t \to +\infty$. Il s'agit d'une bifurcation Andronov-Hopf.

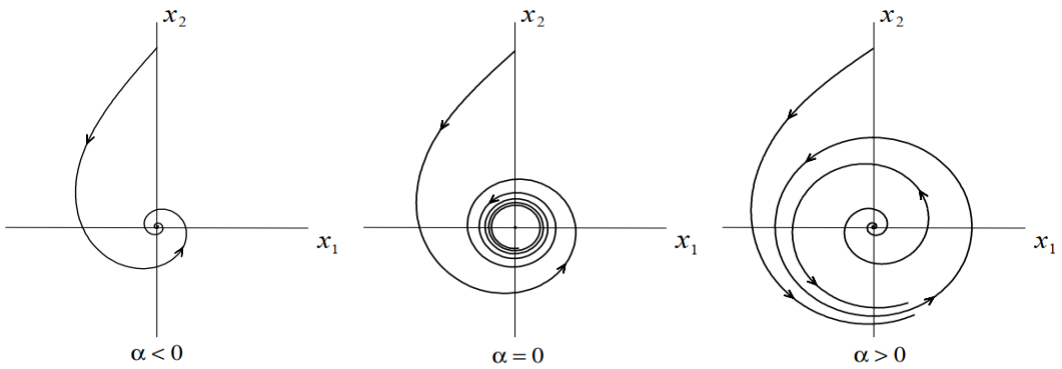


Figure II.8 : Bifurcations de Hopf supercritique [9]

Cette bifurcation peut également être présentée dans l'espace (x, y, α), figure II.9. La α-famille de cycles limites qui apparaît forme une surface paraboloïde.

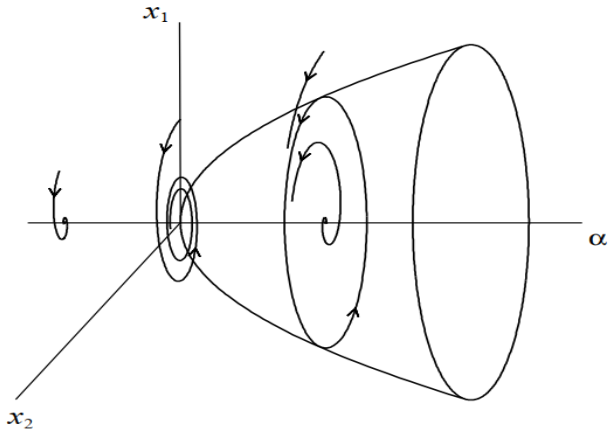


Figure II.9 : Bifurcation de Hopf supercritique dans l'espace des paramètres de phase [9]

Un système ayant des termes non linéaires de signe opposé [3,5,52,53] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \quad \text{(II.75)}$$

Qui a la forme complexe suivante :

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + z|z|^2 \quad \text{(II.76)}$$

Peuvent être analysées de la même manière (figures II.10 et II.11). Le système subit la bifurcation d'Andronov-Hopf en $\alpha = 0$. Contrairement au système (II.71), il existe un cycle limite instable dans (II.75), qui disparaît lorsque α passe par zéro de valeurs négatives à positives. L'équilibre à l'origine a la même stabilité pour $\alpha = 0$ que dans le système (II.71) , il est stable pour α < 0 et instable pour α > 0. Sa stabilité à la valeur du paramètre critique est opposée à celle de (II.71) , Il est non linéairement instable en $\alpha = 0$.

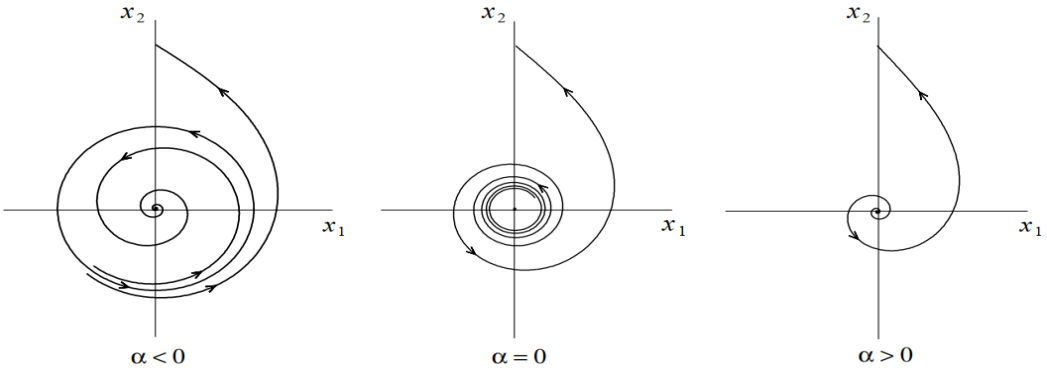


Figure II.10 : Bifurcations de Hopf sous-critique [9]

Egalement, cette bifurcation peut également être présentée dans l'espace (x, y, α), figure II.11.

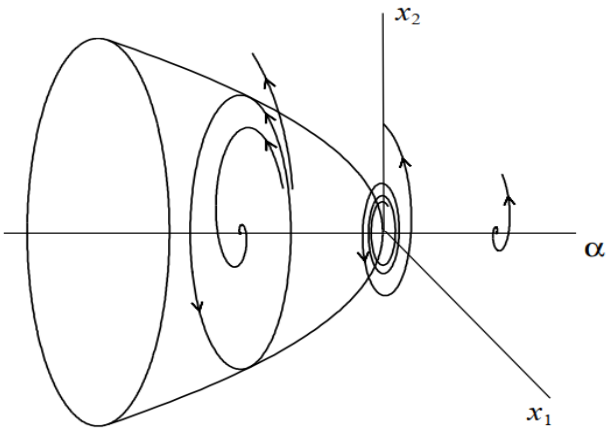


Figure II.11 : Bifurcation de Hopf sous-critique dans l'espace des paramètres de phase [9]

Remarque :

- Nous avons vu qu'il existe deux types de bifurcation d'Andronov-Hopf. La bifurcation dans le système (II.71) est souvent dite supercritique car le cycle existe pour des valeurs positives du paramètre α (« après » la bifurcation).

La bifurcation dans le système (II.75) est dite sous-critique puisque le cycle est présent « avant » la bifurcation. Il est clair que cette terminologie est quelque peu trompeuse puisque «après » et « avant » dépendent du sens choisi de variation des paramètres.

- Dans les deux cas on a une perte de stabilité de l'équilibre à $\alpha = 0$ sous l'augmentation du paramètre. Dans le premier cas (avec "-" devant les termes cubiques), l'équilibre stable est remplacé par un cycle limite stable de faible amplitude. Par conséquent, le système "reste" dans un voisinage de l'équilibre et nous avons une perte de stabilité douce ou non catastrophique.

Dans le second cas (avec "+" devant les termes cubiques), la région d'attraction du point d'équilibre est délimitée par le cycle instable, qui "rétrécit" à mesure que le paramètre approche de sa valeur critique et disparaît. Ainsi, le système est "poussé" d'un voisinage de l'équilibre, ce qui nous donne une perte de stabilité brutale ou catastrophique. Si le système perd doucement sa stabilité, il est bien "contrôlable" : Si on rend à nouveau le paramètre négatif, le système revient à l'équilibre stable. Au contraire, si le système perd brutalement sa stabilité, la réinitialisation à une valeur négative du paramètre peut ne pas ramener le système à l'équilibre stable puisqu'il peut avoir quitté sa région d'attraction. Notons que le type de bifurcation d'Andronov-Hopf est déterminé par la stabilité de l'équilibre à la valeur du paramètre critique.

Théorème II.1 [5,38,53] **:**

L'étude de la bifurcation de Hopf repose sur les hypothèses suivantes :

1- Supposons que le système d'équations différentielles ordinaires $\dot{x} = f(x, \alpha)$ a un point fixe isolé, disons en $x = x_0(\alpha)$.

2- $D_x f(x_0, \alpha)$ a une paire de valeurs propres conjuguées complexes $\mu(\alpha) \pm i\beta(\alpha)$ telles que lorsque $\alpha = \alpha_0$, $\mu(\alpha_0) = 0, \beta(\alpha_0) = \omega_0 > 0$ tel que α_0 est la valeur critique de α. Et les autres (n-2) valeurs propres possèdent des parties réelles non nulles.

3- $\frac{\partial \mu(\alpha)}{\partial \alpha} \neq 0$ Lorsque $\alpha = \alpha_0$.

4- f est analytique en x et α au voisinage de $(x, \alpha) = (x_0, \alpha_0)$.

Si l'hypothèse (2) est vérifiée, alors l'hypothèse (3) implique que la stabilité linéaire du point fixe $x_0(\alpha)$ sera perdue lorsque α croise α_0.

Dans ces conditions, au début de la bifurcation, le système possède une famille de solutions périodiques. Le théorème de bifurcation de Hopf fournit des critères appropriés pour la prédiction de l'existence, de la forme et de la période de la solution périodique.

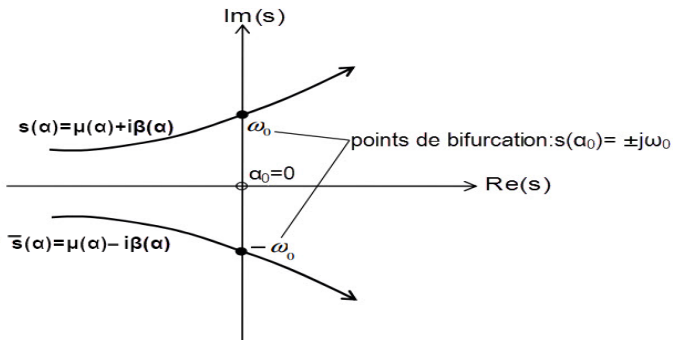


Figure II.12 : Bifurcation de Hopf dans le plan complexe de valeurs propres [1]

II.5 Théorie du chaos

La théorie du chaos est un nouveau paradigme scientifique dans le domaine de l'analyse non linéaire qui est utilisé pour décrire les domaines des systèmes dynamiques non répétitifs et très complexes [4,31,33,35]. Le terme chaos fait référence au comportement apparemment imprévisible présenté par les modèles déterministes. Un système chaotique est compris comme un comportement à long terme apériodique (il ne se répète jamais exactement) d'aspect aléatoire d'un système dynamique déterministe, qui présente une dépendance sensible aux conditions initiales [1,3,31,46]. Cela signifie que deux trajectoires commençant dans le voisinage infinitésimal peuvent atteindre des positions complètement différentes après un certain temps. Pour des raisons de clarté, les processus chaotiques ne doivent pas être confondus avec les processus aléatoires car le chaos n'implique en aucun cas le caractère aléatoire. Les processus chaotiques n'ont aucun type de distribution comme les processus aléatoires. De plus, les processus chaotiques sont parfaitement déterministes tandis que les processus aléatoires sont attachés à certaines probabilités a priori. Certaines propriétés des systèmes chaotiques décrites ci-dessous aideront à comprendre le comportement des systèmes chaotiques.

II.5.1 Propriétés des systèmes chaotiques

Les systèmes chaotiques ont un certain nombre de caractéristiques distinctives qui sont utilisées pour décrire l'évolution dynamique de ces systèmes. Ces caractéristiques comprennent les suivantes.

II.5.1.1 Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques dépendent fortement des conditions initiales, une propriété parfois considérée comme "l'effet papillon". Deux trajectoires émergeant de deux conditions initiales proches différentes divergent exponentiellement l'une de l'autre au fur et à mesure que le système évolue dans l'espace des phases [20,31]. Afin de faire une prédiction précise du comportement à long terme des systèmes chaotiques, les conditions initiales doivent être connues dans leur intégralité et avec une grande précision.

II.5.1.2 Déterminisme

Les systèmes chaotiques sont strictement déterministes. Un système déterministe est un système où pour un intervalle de temps donné il n'y a qu'un seul état futur qui découle de l'état

actuel [21,31,32]. Ces systèmes peuvent être décrits par des équations différentielles ordinaires.

II.5.1.3 Non-linéarité

Un système non linéaire est un système dont les sorties et les entrées ne sont pas proportionnelles les unes aux autres.

II.5.1.4 Instabilité

Les systèmes chaotiques ont une manière irrégulière durable causée par une dépendance sensible aux conditions initiales et donc les prédictions pour un système donné ne peuvent être faites qu'à des échelles à court terme [31,46].

II.5.1.5 Attracteurs étranges

Ce sont des ensembles d'états à N-dimensions, $X \in R^N$ (points dans l'espace des phases) invariants sous la dynamique du système où tous les états très proches se rapprochent asymptotiquement . De nombreux systèmes dynamiques dans la nature ont des attracteurs et des chercheurs ont découvert que tous les systèmes chaotiques émergent dans un certain type d'attracteurs appelés attracteurs étranges qui dépendent de manière sensible de leurs conditions initiales [1,3,31,49].

II.5.1.6 Dimensionnalité fractale

C'est un fait déjà établi que la dimension géométrique d'une ligne, d'un plan et d'une boîte est respectivement de 1, 2 et 3. Cependant, de nombreux exemples sont observés dans notre vie quotidienne ainsi que de nombreux objets ne sont pas géométriquement lisses. Les dimensions complexes et non entières sont appelées dimensions fractales [4,29,31,34]. Ceci est généralement utilisé pour mesurer la nature complexe d'un système chaotique donné. Lorsque l'évolution d'un système chaotique est représentée dans l'espace des phases, la dimension topologique, d, de l'état spatial des trajectoires du système est un nombre non entier. Un exemple mathématique simple de fractale est ce qu'on appelle la « courbe de Koch » ou flocon de neige de Koch [35]. Il est construit comme suit :

- Dans un triangle équilatéral, retirons le tiers médian de chaque côté.
- Dessinons un autre triangle équilatéral, dont les côtés sont égaux au tiers des côtés du triangle initial, l'un de ses côtés remplaçant le segment de droite supprimé et les deux autres côtés situés à l'extérieur du triangle initial comme illustré sur la figure II.13.

Si cet algorithme est exécuté à l'infini, nous pouvons observer certaines propriétés très intéressantes de ce "flocon de neige". Par exemple, elle affiche une auto-similarité exacte, c'est-à-dire qu'elle est exactement la même que la courbe initiale, quel que soit le zoom avant.

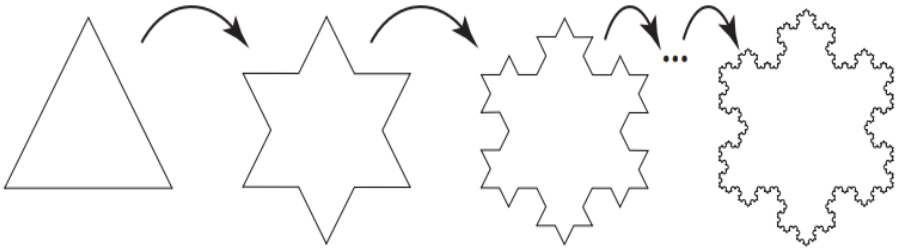


Figure II.13 : La courbe de Koch [9]

II.5.2 Routes vers le chaos

Les routes vers le chaos sont importantes pour une meilleure compréhension du chaos et à des fins pratiques. Par exemple, l'identification de schémas ou de comportements pré-chaotiques pourrait nous aider à anticiper l'apparition du chaos. Il n'est pas encore possible d'identifier, à l'avance, le chemin particulier qu'un processus dynamique suivra pour entrer dans le chaos. Pire encore, un système peut suivre une route à une occasion et une autre à la suivante. Lorsqu'une transition découle d'un comportement ordonné, ce comportement est généralement périodique. Dans de tels cas, les voies du chaos diffèrent les unes des autres par la manière dont le régime périodique perd sa stabilité [31].

II.5.2.1 dédoublement de période

Un processus par lequel les augmentations d'un paramètre de contrôle dans certaines équations itérées produisent des trajectoires composées d'un nombre successivement doublé de valeurs d'attracteur (par exemple 2, 4, 8, 16, etc. valeurs d'attracteur), conduisant finalement au chaos. C'est une progression systématique en cascade vers le chaos.

II.5.2.2 Intermittence

Un mouvement périodique ordonné (oscillations régulières, sans doublement de période) interrompu par des éclats occasionnels de chaos ou de bruit à intervalles irréguliers, figure II.14. L'augmentation progressive du paramètre de contrôle entraîne des rafales chaotiques peu fréquentes dans la série temporelle. Ces sursauts s'installent brusquement plutôt que graduellement. Avec une augmentation supplémentaire du paramètre de contrôle, les rafales

chaotiques sont plus fréquentes et durent plus longtemps, jusqu'à ce que le motif devienne finalement complètement chaotique [31].

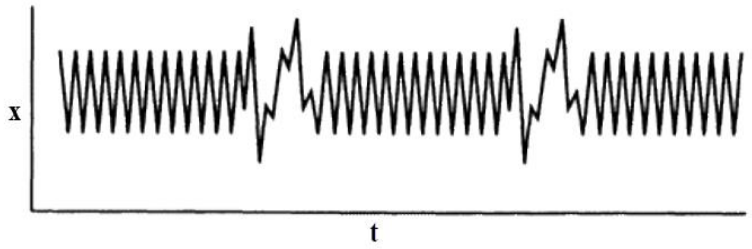


Figure II.14 : Esquisse d'intermittence [4]

II.5.2.3 Quasi-périodicité

La voie quasi-périodique vers le chaos peut passer par au moins trois seuils critiques, avec une augmentation des paramètres de contrôle. A une faible valeur du paramètre, le système est en régime permanent. Dans l'espace des phases, un tel état stationnaire est un point fixe et a une fréquence nulle. À une valeur plus élevée du paramètre de contrôle, le système dépasse le premier seuil et se comporte périodiquement (cycle limite). En tant que tel, il a une fréquence. Avec une nouvelle augmentation du paramètre de contrôle, le système passe le deuxième seuil. La trajectoire ne se répète plus, et elle a deux fréquences incommensurables. Cette étape est donc quasi-périodique. Une nouvelle augmentation du paramètre amène le système à un troisième seuil. Au-delà de ce seuil, il y a au moins deux scénarios possibles. Le scénario le plus simple implique une décomposition du 2-tore de sorte que le système passe de son régime quasi-périodique à deux fréquences directement au chaos. Dans le scénario alternatif, la quasi-périodicité passe à trois fréquences avant que le chaos n'arrive. Il y a dans ce cas une certaine incertitude, à cause du bruit, quant à la durée de la quasi-périodicité à trois fréquences avant l'apparition du chaos. Là où un tel régime quasi-périodique à trois fréquences semble stable, le système pourrait passer par un quatrième seuil pour arriver au chaos. Dans d'autres cas, le chaos peut s'installer rapidement après l'apparition de la quasi-périodicité à trois fréquences. Li et Yorke ont établi un critère très simple " La présence de trois périodes impliquent le chaos" [54]. Dans tous les cas, la transition entière va idéalement d'un mouvement stable à périodique à quasi-périodique à chaotique. Chacun des différents seuils avant le mouvement chaotique est connu sous le nom de bifurcation de Hopf.

II.5.3 Méthode d'identification du chaos

Plusieurs méthodes sont utilisées pour tester le chaos dans un ensemble de données de séries chronologiques d'un système dynamique. Parmi ces méthodes [5,31,49] :

a. Exposant de Liapunov : le calcul des exposants de Liapunov fournit la meilleure mesure du Chaos dans n'importe quel système dynamique. En calculant l'exposant de Liapunov, si l'exposant de Liapunov maximum du système est positif, le système est considéré comme chaotique.

b. Dimension de Lyapunov : Cette dimension est définie par Li et Yorke. En calculant la dimension de Lyapunov du système. Si ces dimensions sont fractales, le système est chaotique. Donnée par :

$$d_l = m + \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{|\lambda_{n+1}|} \quad \text{(II.77)}$$

où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ et n le plus grand entier tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0 \;\; et \;\; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \leq 0 \quad \text{(II.78)}$$

c. Méthode du spectre de puissance : En dessinant l'image du spectre de puissance, le spectre de puissance n'a que des raies spectrales discrètes à la fréquence mobile et sa division et sa multiplication. Si le spectre de puissance qui apparaît est continu, le système est chaotique.

Le tableau II.1 résume les propriétés des exposants et dimension de Lyapunov pour différents attracteurs dans le cas d'un système dynamique à N dimensions.

Tableau II.1 : Classification des attracteur selon l'exposant et dimension de Liapunov

attracteur	**Flot**	**Dimension de liapunov**	**Exposant de liapunov**
Point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_2 \leq 0$
Périodique d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_3 \leq 0$
Périodique d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0, \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0$
Hyper-chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0$

II.5.4 Exemple de système chaotique : La carte logistique

La carte logistique a été popularisée par le biologiste Robert May en 1976. Il s'agit d'un système unidimensionnel conçu pour modéliser l'évolution à long terme de la taille d'une population biologique définie par [23,29] :

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad \text{(II.79)}$$

où $0 < r < 4$ afin d'assurer que $0 < x_n < 1$. La dynamique de cette fonction présente des comportements très différents selon la valeur du paramètre r :

- À r ≤ 1, l'attracteur est un point fixe qui vaut 0.

- À 1< r < 3, l'attracteur est un point fixe qui a une valeur supérieure à 0 mais inférieure à environ 0,667.
- À k ≥ 3 mais inférieur à environ 3,57, un dédoublement de période se produit. L'attracteur est une orbite périodique, d'une période de 2^n où n est un entier qui tend vers l'infini quand r tend vers 3,57….
- À r supérieur à environ 3,57 mais ≤ 4, nous sommes dans la région généralement connue sous le nom de chaos. Un attracteur ici peut être erratique (chaotique, avec une infinité de points) ou stable. Au-dessus de la valeur de r = 4, la fonction sort de l'intervalle [0,1].

La figure II.16a illustre le diagramme de bifurcation de la carte logistique il montre la distribution de la valeur de sortie, c'est-à-dire x_n par rapport au paramètre de contrôle r. On peut remarquer que lorsque r s'approche de 4, la distribution devient plus uniformément répartie. Le figure II.16b montre la valeur de l'exposant de Liapounov par rapport au paramètre de contrôle r. D'après le graphique, il est évident que l'exposant de Liapounov est supérieur à 0 tandis que le paramètre de contrôle r est supérieur à 3,57 ou égal à 4, ce qui indique un comportement plus chaotique de la carte logistique.

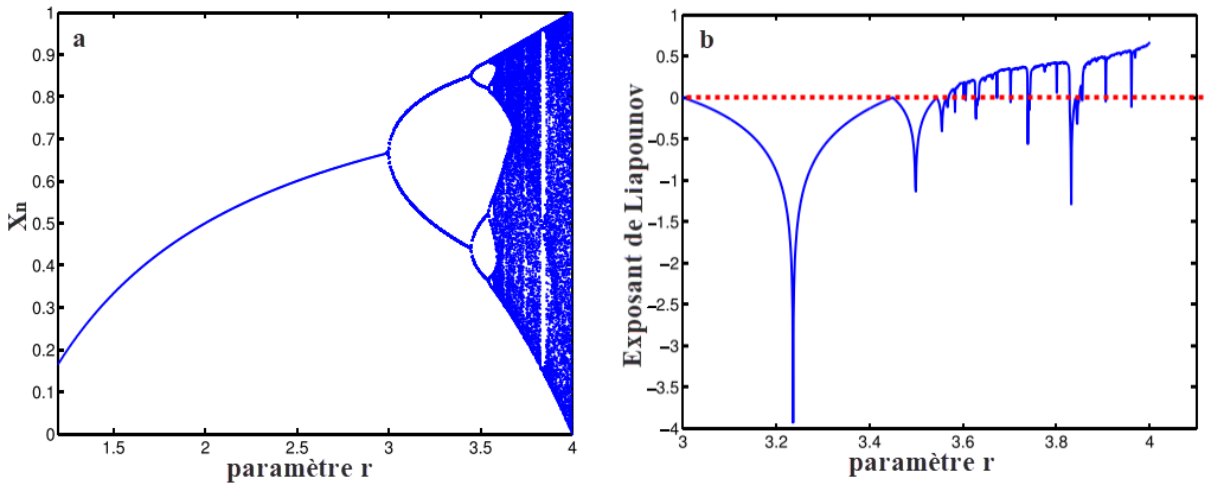


Figure II.15 : (a) diagramme de bifurcation, (b) L'évolution des exposants de Liapounov

II.6 Applications de la théorie de bifurcation en ingénierie

La théorie de la bifurcation a de nombreuses applications dans diverses disciplines de l'ingénierie. Il fournit des informations précieuses sur le comportement des systèmes non linéaires et aide les ingénieurs à concevoir et à optimiser les systèmes pour la stabilité,

l'efficacité et la performance. Voici quelques applications spécifiques de la théorie de la bifurcation en ingénierie :

II.6.1 Ingénierie des structures

La théorie de la bifurcation est utilisée pour prédire la charge critique à laquelle un composant structurel, tel qu'un poteau ou une poutre, subit un flambement. Il aide les ingénieurs à concevoir des structures capables de résister aux charges sans rupture due à l'instabilité de flambage. La théorie de bifurcation a été mise en œuvre et progressivement enrichie dans le domaine de l'ingénierie des structures selon diverses méthodologies. J. Aboudi et al. dans [102] ont Analysé du flambement par bifurcation et de l'effet des imperfections sur le micro-flambement des composites viscoélastiques par la micromécanique . P. Bala, A.V Raviprakash et al. dans [103] ont réalisé une étude paramétrique du comportement au flambage d'une coque cylindrique bosselée courte en acier au carbone soumise à une compression axiale uniforme. B. Prabu et al. dans [104] ont étudié l'effet d'une bosselure de différentes tailles et angles d'inclinaison sur la résistance au flambement d'une coque cylindrique courte en acier inoxydable soumise à une compression axiale uniforme.

II.6.2 Génie mécanique

- **Analyse des vibrations et stabilité des rotors**

Dans le domaine des machines tournantes, telles que les turbines, les moteurs et les compresseurs, l'analyse de bifurcation joue un rôle crucial dans l'étude du comportement dynamique des rotors à proximité des vitesses critiques et d'autres points de bifurcation. Cette méthode analytique permet de prédire avec précision l'apparition de divers types d'instabilités, évitant ainsi les conditions de résonance qui pourraient potentiellement entraîner des défaillances catastrophiques. L'analyse de bifurcation offre la capacité de comprendre comment le comportement d'un système non linéaire évolue en fonction des variations des paramètres. En identifiant les régions de stabilité, de mouvement périodique et de comportement chaotique, elle apporte une vision approfondie de la dynamique complexe des rotors. Cette approche s'avère indispensable pour concevoir des systèmes robustes et fiables, en minimisant les risques liés à l'instabilité vibratoire. Ainsi, l'application judicieuse de l'analyse de bifurcation dans le domaine des machines tournantes représente un pilier essentiel pour assurer leur fonctionnement optimal et sécurisé, contribuant ainsi à la pérennité des équipements industriels. Plusieurs approches ont été élaborées et mises en œuvre dans l'analyse des vibrations et de la stabilité des rotors en se fondant sur la théorie de la

bifurcation, comme le témoignent de nombreuses publications et travaux littéraires. J.K. Wang et al. dans [95] ont appliqué de la théorie de bifurcation de Hopf aux systèmes palier-rotor avec prise en compte des effets turbulents. Chang-Jian. dans [98] ont analysé la bifurcation et le chaos du système engrenage-rotor-palier lubrifié avec un fluide de contrainte de couple. Ji Feng et al. dans [99] ont fait l'objet d'une analyse de la bifurcation de Hopf et de la stabilité d'un système flexible palier-rotor.

II.6.3 Génie civil

- **Comportement dynamique des ponts**

La théorie de la bifurcation est utilisée pour étudier la réponse dynamique des ponts aux charges environnementales telles que le vent, la circulation et les tremblements de terre [108]. Il permet de concevoir des structures capables de supporter ces charges sans subir de vibrations excessives.

- **Stabilité sismique des bâtiments**

  Dans les régions sujettes aux tremblements de terre, l'analyse de bifurcation est appliquée pour évaluer le comportement des bâtiments et autres structures lors d'événements sismiques. Cela permet de garantir que les structures restent stables et sûres sous différents mouvements du sol.

II.6.4 Ingénierie automobile

- **Systèmes de suspension des véhicules**

La théorie de la bifurcation s'avère être une méthode essentielle pour évaluer et comprendre le comportement dynamique des véhicules, notamment en ce qui concerne les systèmes de suspension et de direction. Elle vise à assurer que les composants de la suspension fonctionnent de manière optimale, en garantissant la stabilité, le confort et les performances de maniabilité, quelles que soient les conditions de la route. Concrètement, cela signifie que l'application de la théorie de la bifurcation dans la conception et l'analyse des systèmes de suspension permet de s'assurer que le véhicule réagit de manière appropriée aux diverses irrégularités de la route, comme les bosses, les virages et les freinages. Elle garantit également que le véhicule reste stable et contrôlable, même dans des situations où les conditions de la route sont difficiles. En exploitant cette approche analytique, les ingénieurs peuvent ajuster et optimiser les composants de la suspension, tels que les ressorts, les amortisseurs et les barres stabilisatrices, pour atteindre un équilibre optimal entre stabilité, confort et maniabilité. Cela

se traduit par une meilleure tenue de route, une réduction des mouvements non désirés du véhicule et une expérience de conduite plus agréable pour les occupants. Plusieurs articles ont examiné et appliqué diverses méthodes en s'appuyant sur la théorie de la bifurcation dans le contexte de l'ingénierie automobile. E. Ono al. dans [105] ont étudié la bifurcation dans la dynamique du véhicule et contrôle robuste de la direction de la roue avant. X. Wang al. dans [106] ont Analysé de la bifurcation couplée au véhicule de l'angle de braquage et du couple moteur. G. Mastinu Straight al. dans [107] ont examiné la stabilité de conduite en ligne droite des automobiles : expérimentations avec un simulateur de conduite.

II.6.5 Ingénierie des turbines à gaz

L'application de la théorie de bifurcation à l'analyse du comportement vibratoire des turbines à gaz est d'une importance capitale pour garantir le fonctionnement stable et sûr de ces machines complexes. Les turbines à gaz sont largement utilisées dans l'industrie pour la production d'électricité, la propulsion des avions, la génération d'énergie mécanique, et d'autres applications nécessitant une conversion efficace de l'énergie thermique en énergie mécanique. Il est essentiel de comprendre et de contrôler les vibrations dans ces systèmes pour éviter des défaillances potentiellement graves. Plusieurs publications ont exploré et mis en œuvre un éventail de méthodes en utilisant la théorie de la bifurcation dans le domaine de l'ingénierie des turbines. A. Merouane et al. dans [109] ont fait l'objet d'une analyse de la bifurcation des vibrations basées sur la modélisation dynamique d'une turbine à gaz solaire Titan 130. M.R. Iravani et A. Semlyen dans [110] ont réalisé une analyse de Bifurcations de Hopf en dynamique de torsion (turbines-générateurs). D. Yuwen et al. dans [111] ont fait l'objet d'une analyse de la stabilité globale stochastique et bifurcation d'un générateur hydroélectrique. Voici comment la théorie de bifurcation est appliquée à l'analyse du comportement vibratoire des turbines à gaz :

- **Identification des paramètres critiques**

La première étape consiste à identifier les paramètres clés qui influencent les vibrations dans la turbine à gaz. Cela peut inclure la vitesse de rotation, la température, la pression, la géométrie des pales et des paliers, etc. Ces paramètres sont susceptibles de subir des variations en fonction des conditions de fonctionnement, ce qui peut affecter le comportement vibratoire.

- **Modélisation du système**

Un modèle mathématique du système de turbine à gaz est établi, prenant en compte les caractéristiques dynamiques du rotor, des pales, de l'arbre, et du fluide de travail. Ce modèle tient compte de la non-linéarité inhérente à ces systèmes et des interactions complexes entre les composants.

- **Analyse des bifurcations**

La théorie de bifurcation est utilisée pour étudier comment le comportement vibratoire du système évolue en fonction des variations des paramètres critiques. Les bifurcations correspondent à des points où le comportement du système change de manière significative. Par exemple, on peut identifier les vitesses critiques à proximité desquelles des modes de vibration indésirables peuvent apparaître.

- **Stabilité et contrôle**

En comprenant les bifurcations et en identifiant les régions de stabilité et d'instabilité, les ingénieurs peuvent concevoir des dispositifs de contrôle pour prévenir ou atténuer les vibrations indésirables. Cela peut impliquer l'utilisation de systèmes d'amortissement actifs ou passifs, des ajustements des paramètres de fonctionnement, ou des modifications de la conception de la turbine.

- **Validation expérimentale**

Les résultats de l'analyse de bifurcation peuvent être confirmés par des essais expérimentaux sur des prototypes de turbines à gaz. Cela permet de s'assurer que les prédictions théoriques correspondent à la réalité et de peaufiner les stratégies de contrôle.

En résumé, l'application de la théorie de bifurcation à l'analyse du comportement vibratoire des turbines à gaz permet d'optimiser la conception, le fonctionnement et la maintenance de ces systèmes complexes, assurant ainsi leur fiabilité et leur sécurité. Cela est particulièrement important dans des domaines tels que la production d'énergie et l'aviation, où des défaillances peuvent avoir des conséquences graves.

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les concepts de bifurcation et de chaos au sein des systèmes dynamiques. En premier lieu, nous avons fourni des définitions précises de la bifurcation. Nous avons introduit les principes fondamentaux de la théorie de bifurcation, qui se produit lorsqu'un petit changement en douceur apporté aux valeurs des paramètres (appelés paramètres de bifurcation) d'un système provoque un changement qualitatif ou topologique soudain dans son comportement. Généralement, à une bifurcation, les propriétés de stabilité locale des équilibres, des orbites périodiques ou d'autres ensembles invariants changent. Par la suite, nous avons présenté la théorie du chaos en citant les différents caractéristiques et scénarios de transition vers le chaos. Le chaos ne se produit que dans les systèmes déterministes, non linéaires et dynamiques. Elle peut résulter de systèmes relativement simples. Dans les systèmes régis par le temps discret, le chaos peut avoir lieu dans un système qui n'a qu'une seule variable. Dans les systèmes à temps continu, ce phénomène peut se produire avec seulement trois variables. Les détails du comportement chaotique sont hypersensibles aux changements des conditions initiales. Les prévisions de comportement à long terme n'ont aucun sens, les raisons en sont la sensibilité aux conditions initiales et l'impossibilité de mesurer une variable avec une précision infinie.

CHAPITRE III

Les turbines à gaz : constitution, défaillance et méthodes de surveillance vibratoire

Ce chapitre donne un aperçu des turbines à gaz, englobant leur conception structurelle, leurs principes de fonctionnement et leurs composants essentiels. Il présente un examen détaillé du fonctionnement complexe des turbines à gaz, mettant en lumière leur rôle crucial dans diverses applications industrielles. En outre, ce chapitre souligne l'importance de comprendre les modes de défaillance courants, en soulignant le besoin critique de stratégies de maintenance et de surveillance robustes. Un accent particulier est mis sur le rôle central des méthodes de surveillance des vibrations pour garantir les performances et la longévité optimales des turbines à gaz. Ce chapitre fournit une base solide pour comprendre les complexités des systèmes de turbine à gaz, jetant les bases d'une exploration plus approfondie dans le chapitre suivant.

III.1 Introduction

Les turbines à gaz font aujourd'hui partie intégrante des systèmes de production d'électricité, de transport, de pétrochimie et de divers systèmes de traitement industriel. Bien que la conception et l'application des turbines à gaz dans chacun des domaines et leurs exigences opérationnelles soient différentes, elles partagent la même physique sous-jacente. La performance des turbines à gaz est le produit final qui influence fortement la rentabilité de l'entreprise qui les emploie. Les turbines à gaz industrielles doivent souvent fonctionner pendant de longues périodes dans des conditions qui ne correspondent pas à leurs conditions de conception. Par conséquent, comprendre les performances des turbines à gaz dans de telles conditions de fonctionnement est particulièrement important, en particulier dans un marché dérégulé. D'autres facteurs en plus des performances des turbines à gaz affectent leur opérabilité. Ces facteurs comprennent les émissions, la détérioration, la durée de vie, les contrôles, et la vibration. Par exemple, La détérioration des performances des turbines à gaz est inévitable. Cela peut être dû à un encrassement du compresseur, qui peut être facilement corrigé par un lavage du compresseur, ou à des dommages plus graves aux compresseurs ou aux turbines. Par conséquent, une compréhension de la détérioration des performances est désormais primordiale. Différentes limites de fonctionnement de la turbine sont imposées par les constructeurs et correspondent à la limite, à la vitesse, à la puissance, et à la température d'échappement. Ceux-ci sont nécessaires pour atteindre une durée de vie appropriée de la turbine à gaz. Il est de la responsabilité du système de commande de la turbine de s'assurer que ces limites de fonctionnement ne sont pas dépassées. De plus, c'est également le travail du système de contrôle de s'assurer que tout changement de charge de la turbine se produit en toute sécurité. La vibration dans les turbines à gaz est considérée comme un événement préjudiciable, qui entraîne des incidents tels qu'un arrêt d'urgence ou des dommages aux aubes de turbine et impose des coûts élevés au système. Ainsi, la mesure et l'analyse du taux de vibration dans les turbines à gaz sont très importantes et connaître ses conditions de fonctionnement et la prédiction de ce phénomène peut aider beaucoup à réduire les vibrations, éviter d'endommager les aubes et éventuellement des économies financières. Fondamentalement, il existe quatre niveaux d'observation et de surveillance des vibrations de la turbine [57,68]. Au premier niveau, la mesure est effectuée manuellement en cas de besoin (anciennes turbines). Au deuxième niveau, les vibrations sont observées en continu à l'aide des capteurs installés aux endroits concernés. À ce niveau, lorsque les opérateurs de la salle de contrôle constatent un état d'urgence, ils doivent déclencher l'unité si nécessaire. Le troisième niveau est similaire au deuxième niveau, tandis qu'un module

déclenche automatiquement l'unité. Enfin, au quatrième niveau, en collectant diverses données, en prédisant et en analysant le spectre de vibration de la turbine, l'unité se déclenchera chaque fois que cela sera nécessaire. Les turbines à gaz ont une longue histoire qui remonte à plus d'un siècle [57]. Les premiers concepts de turbines à gaz ont été proposés à la fin du XIXe siècle par des inventeurs tels que Aegidius Elling. Cependant, c'est au cours des années 1930 que les progrès significatifs ont été réalisés dans le développement des turbines à gaz, principalement grâce aux travaux de pionniers tels que Frank Whittle au Royaume-Uni et Hans von Ohain en Allemagne. Frank Whittle a conçu et développé le premier moteur à réaction pratique, qui était essentiellement une turbine à gaz adaptée à la propulsion aérienne. Son moteur a réalisé son premier vol en 1941. Parallèlement, Hans von Ohain a également développé indépendamment un moteur à réaction en Allemagne, qui a été utilisé dans des avions de la Luftwaffe. Après la Seconde Guerre mondiale, les turbines à gaz ont trouvé des applications de plus en plus larges dans divers domaines. Elles ont été utilisées pour la production d'électricité dans les centrales électriques, pour la propulsion des navires et des locomotives, ainsi que pour d'autres applications industrielles. Au fil des décennies, les turbines à gaz ont connu des améliorations constantes, notamment en termes d'efficacité énergétique, de fiabilité et de performances. Les technologies avancées, telles que les turbines à cycle combiné et les turbines à gaz dérivées de l'aéronautique, ont été développées pour augmenter l'efficacité et la polyvalence des turbines à gaz.

III.2 Définition et Principe de fonctionnement

Considérons une turbine à gaz de production d'électricité illustrée à la figure III.1. L'air de l'environnement pénètre dans la buse d'admission, où sa pression totale est partiellement convertie en énergie cinétique. Après avoir traversé l'entrée, l'air entre dans un compresseur à plusieurs étages, où sa pression totale augmente continuellement pour atteindre le rapport de pression de conception à la sortie du compresseur. L'augmentation de la pression totale est réalisée en fournissant de l'énergie mécanique à travers la turbine. Dans ce cas, on a affaire à une conversion partielle d'énergie mécanique en énergie potentielle. Sur la base du rapport de pression de compression, l'air du milieu de travail quitte la sortie du compresseur à une température totale et une pression totale relativement élevées. Il entre dans la chambre de combustion, où le carburant est ajouté. Dans la chambre de combustion, un processus de combustion intensif a lieu, où l'énergie chimique du combustible est convertie en énergie thermique. Le gaz de combustion résultant entre dans une turbine à plusieurs étages, où son énergie totale est, dans une large mesure, convertie en énergie mécanique.

Le processus de conversion d'énergie se poursuit dans le diffuseur de sortie, où l'énergie cinétique du gaz sortant est partiellement convertie en énergie potentielle. Le processus de conversion d'énergie qui a lieu dans les composants individuels est toujours associé à certaines pertes de pression totales qui entraîne une diminution de l'efficacité. Le processus de conversion d'énergie décrit ci-dessus est inhérent à toutes les turbines à gaz de production d'électricité, quels que soient leur taille, leurs types et leurs configurations de puissance.

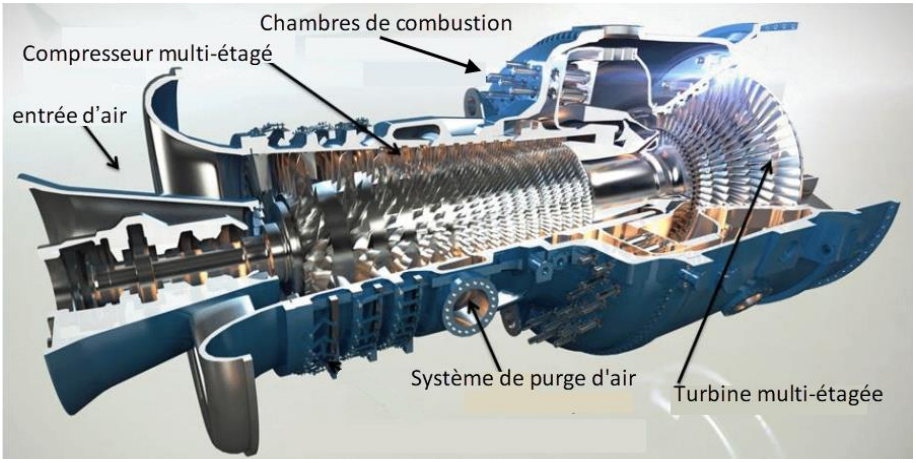


Figure III.1 Turbine à gaz de production d'électricité à usage lourd Alstom GT13E2

III.3 Classification et utilisations des Turbines à Gaz

La turbine à gaz à cycle simple est classée dans les cinq grands groupes suivants :

III.3.1 Turbines à gaz à usage lourd

Dite " Heavy Duty " Sont des turbines à gaz industrielles de grande taille qui sont généralement utilisées pour la production d'électricité dans les grandes centrales électriques, avec une puissance allant de 3 à 480 MW et un rendement de 30 à 48 %.

III.3.2 Turbines à gaz aérodérivative

Comme son nom l'indique, sont des unités de production d'électricité qui ont une origine dans l'industrie aérospatiale comme le moteur principal des avions. Ces unités ont été adaptées à l'industrie de la génération électrique en supprimant les ventilateurs de dérivation et en ajoutant une turbine de puissance à leur échappement. La puissance de ces unités varie d'environ 2,5 à 50 MW. L'efficacité de ces unités peut varier de 35% à 45%.

III.3.3 Turbines à gaz industriel

Ces turbines varient dans la gamme d'environ 2,5 à 15 MW. Ceux-ci sont largement utilisés dans de nombreuses usines pétrochimiques pour les trains d'entraînement des compresseurs. L'efficacité de ces unités se situe dans les 30 basses.

III.3.4 petites turbines à gaz

Ces turbines à gaz sont dans la plage d'environ 0,5 à 2,5 MW. Ils ont souvent des compresseurs centrifuges et des turbines à flux radial. L'efficacité de ces unités peut varier de 15% à 25%.

III.3.5 Microturbines

Ces turbines sont dans la plage de 20 à 350 kW. Généralement utilisées pour la cogénération résidentielle, les systèmes de secours ou les applications industrielles légères.

III.4 Type d'entraînement

Les turbines à gaz industrielles sont conçues comme un arbre ou deux arbres en fonction de la vitesse de l'équipement entraîné, comme le montre la figure ci-dessous. Si la vitesse de l'entraînement est fixe, comme un alternateur ou un générateur, une turbine à un arbre est utilisée, tandis que la vitesse est variable, comme un compresseur ou une pompe, une turbine à double arbre est utilisée.

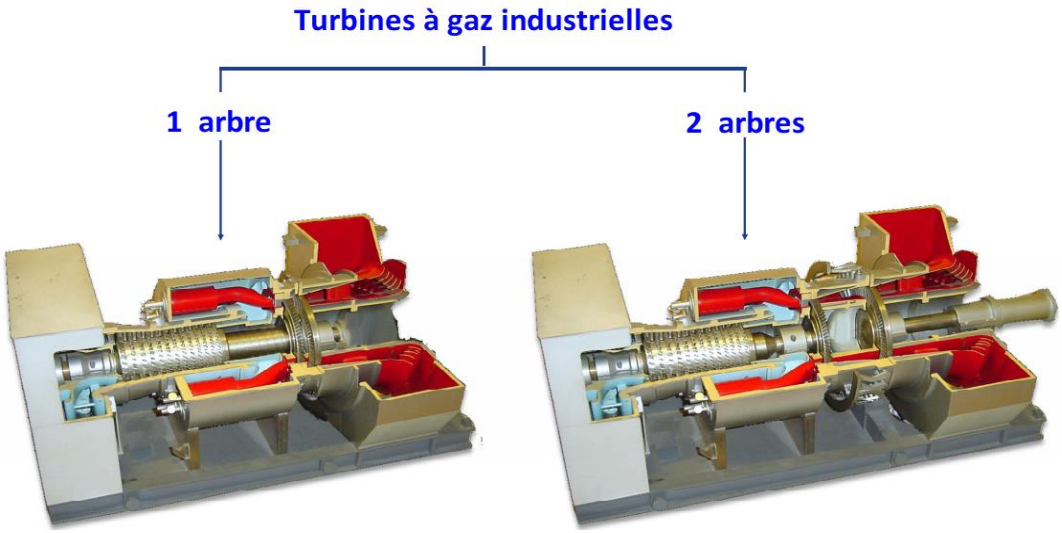


Figure III.2 : Conception de turbines à gaz industrielles

III.5 Composants majeurs de turbine à gaz

Une turbine à gaz contemporaine est construite autour de trois composants essentiels : un compresseur, une chambre de combustion et une turbine. Nous porterons une attention particulière à la turbine MS5002B développée par Nuovo Pignone, une référence incontournable dans l'industrie énergétique. Cette turbine est largement adoptée par SONATRACH, leader dans le domaine de l'exploration, de la production et du transport des hydrocarbures. En effet, la turbine MS5002B de Nuovo Pignone a trouvé sa place prépondérante au sein des stations de compression et de pompage de SONATRACH,

contribuant ainsi de manière significative à l'efficacité opérationnelle et à la fiabilité des installations. Au cours des prochaines sections, nous explorerons en détail les composants majeurs de la turbine à gaz MS5002B, mettant en lumière ses caractéristiques innovantes ainsi que ses avantages indéniables pour les opérations industrielles. De l'analyse du compresseur à l'étude approfondie de la chambre de combustion et de la turbine, nous mettrons en évidence les performances exceptionnelles de cette technologie et son impact positif sur le secteur énergétique dans son ensemble.

III.5.1 Section d'entrée

La section d'entrée dirige le flux d'air provenant du système d'aspiration vers la section du compresseur, figure III.3.

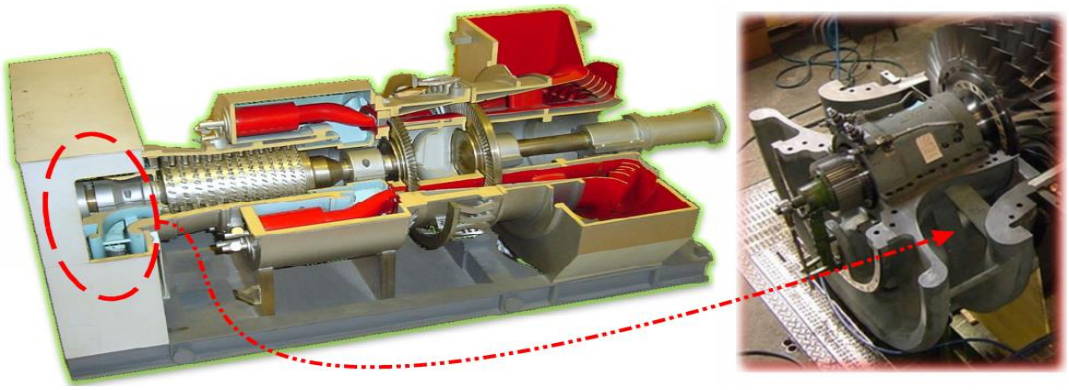


Figure III.3 : La section d'entrée de turbine MS5002B

III.5.2 Compresseur

Le rôle du compresseur dans une turbine à gaz est de produire un flux d'air fortement comprimé introduit dans une chambre de combustion où il est mélangé avec du carburant puis enflammé. Le compresseur est normalement monté sur le même arbre que la turbine et utilise une partie de la puissance développée par la turbine pour remplir sa fonction. Le compresseur de la turbine MS5002B, figure III.4, a 16 ensembles d'aubes, appelés étages, avec un taux de compression global de 8,8. Chaque étage comprimera l'air de l'étage précédent. Chaque étage est constitué d'un ensemble d'aubes fixées à l'arbre du compresseur et tournant avec lui, suivi d'un ensemble d'aubes statiques. Les aubes du premier étage aspirent l'air et augmentent sa pression et sa vitesse. Cet air traverse alors les aubes statiques qui par leur forme transforment l'augmentation de vitesse en augmentation de pression. L'air passe ensuite à l'étape suivante où une compression supplémentaire a lieu, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'air sorte de l'étape finale à la pression requise, figure III.5. La compression augmente également la température de l'air

de sorte que l'air sortant du compresseur est plus chaud que l'air qui y est entré. La section compresseur de la turbine à gaz comprend également des aubes directrices d'entrée IGV, figure III.6, pour garantir que l'air est aspiré dans le premier étage au meilleur angle. Enfin, il existe également des aubes directrices de sortie EGV, figure III.6, qui dirigent l'air dans la chambre de combustion. Le compresseur sert également à fournir une source d'air nécessaire qui est utilisée comme suit :

- 30 % de l'air comprimé est utilisé comme air primaire (air de combustion).
- 5 % de l'air est utilisé pour les systèmes auxiliaires de la turbine à gaz (air de prélèvement et d'étanchéité, antigivrage de la turbine à gaz).
- L'air restant est utilisé comme air secondaire pour :
    - Refroidir les gaz de combustion.
    - Protéger et refroidir les tuyères, les carters et les paliers des turbines.

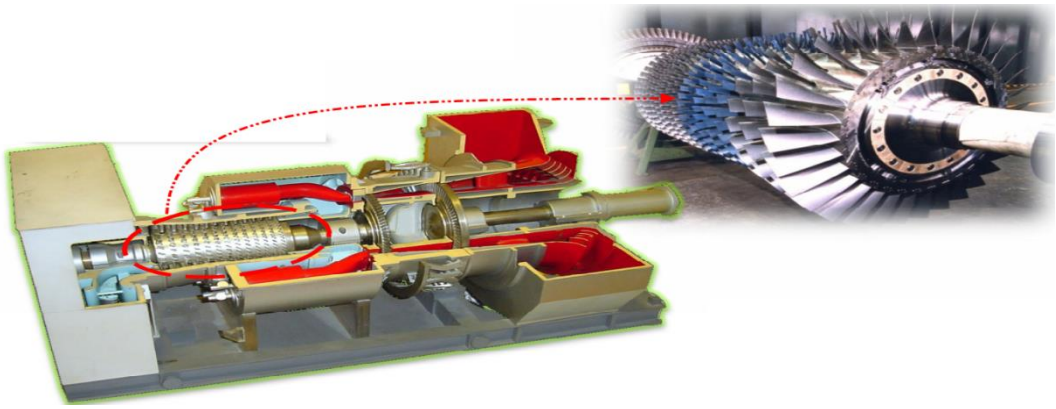


Figure III.4 : Section compresseur de turbine MS5002B

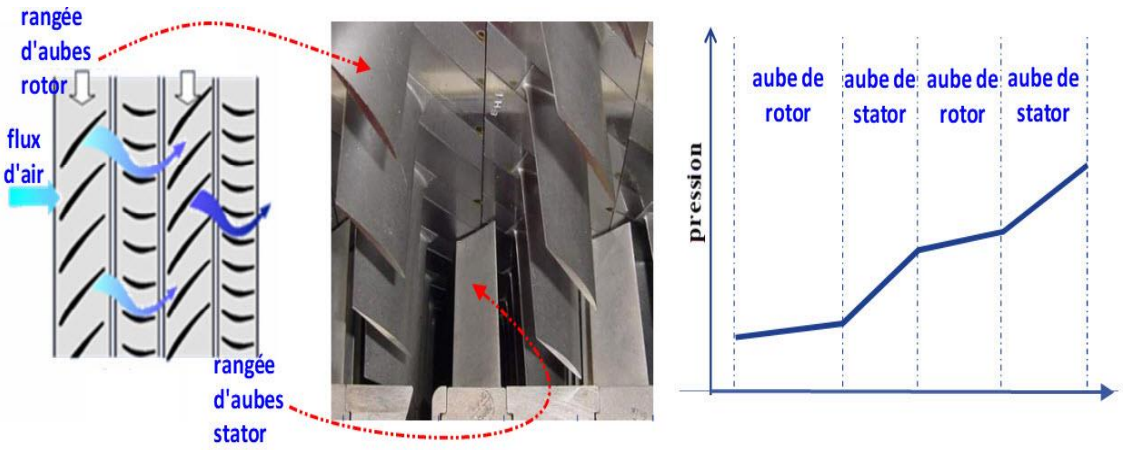


Figure III.5 : Compression d’air par étages de compresseur

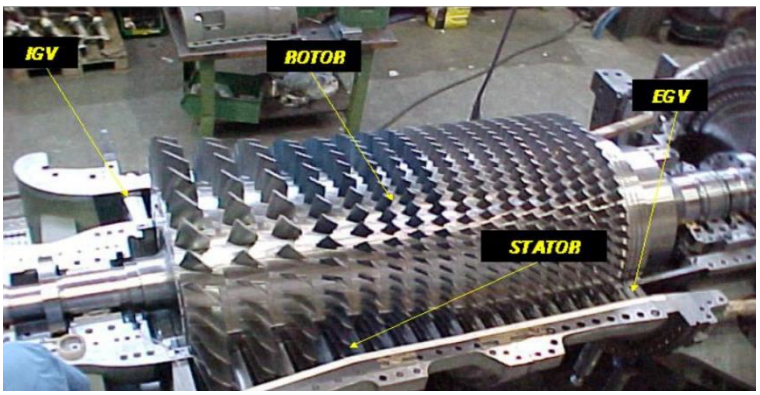


Figure III.6 : Position des aubes directrices d'entrée IGV et de sortie EGV

III.5.3 Chambres de combustion

La chambre de combustion est un composant essentiel d'une turbine à gaz, responsable du processus de combustion qui génère du gaz à haute température et haute pression. La chambre de combustion de la turbine MS5002B est conçue pour mélanger efficacement le carburant et l'air, allumer le mélange et maintenir une combustion stable. Elle utilise généralement une configuration de chambre de combustion à flux inversé, ce qui signifie que les gaz de combustion sont dirigés dans le sens opposé à l'air de combustion. Cela permet une meilleure stabilité de combustion et une réduction des émissions d'oxydes d'azote (NO_x). Nous aborderons dans la suite les caractéristiques clés de la chambre de combustion de la turbine à gaz MS5002B

III.5.3.1 Chambre de combustion annulaire

La MS5002B utilise une chambre de combustion annulaire, où 12 buses de carburant sont disposées en cercle autour de l'axe central de la turbine, figure III.7. Cette configuration permet une taille compacte et une combustion efficace.

III.5.3.2 Système d'injection de carburant

La chambre de combustion est dotée d'un système d'injection de carburant qui introduit le carburant dans la chambre de combustion. Le combustible est atomisé et mélangé avec de l'air comprimé avant l'allumage, figure III.8.

III.5.3.3 Tube à flamme

Le tube à flamme fournit la chambre où le carburant et l'air se mélangent et brûlent. Il est conçu pour résister aux températures et pressions élevées générées pendant le processus de combustion. La chambre de combustion de la turbine MS5002B utilise des matériaux avancés et des techniques de refroidissement pour assurer la durabilité et la fiabilité, figure III.8.

III.5.3.4 Système d'allumage

La chambre de combustion de la turbine MS5002B comprend un système d'allumage pour amorcer le processus de combustion. Ce système utilise généralement des bougies d'allumage ou d'autres dispositifs d'allumage pour allumer le mélange de carburant et d'air, figure III.8.

III.5.3.5 Contrôle des émissions

Les chambres de combustion de turbine à gaz, y compris le MS5002B, sont conçues pour répondre à des réglementations strictes en matière d'émissions. Ils utilisent diverses technologies, comme la combustion avec pré-mélange pauvre et les revêtements avancés, pour réduire les émissions d'oxydes d'azote (NO_x) et d'autres polluants.

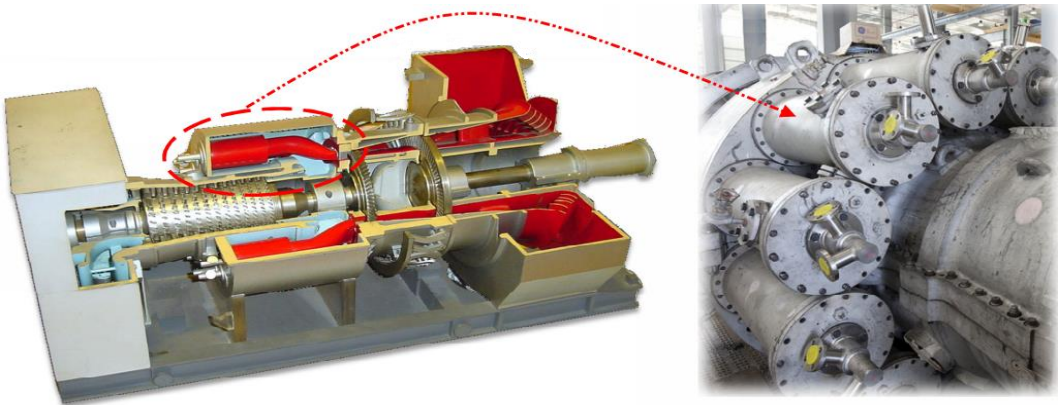


Figure III.7: Section de combustion de turbine MS5002B

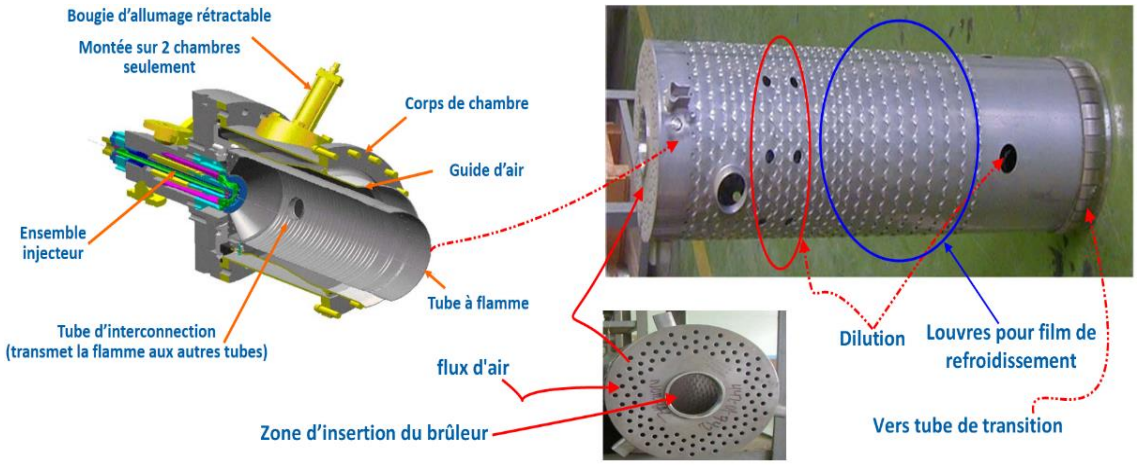


Figure III.8 : Composants du système de combustion

Une fois le processus de combustion terminé, les gaz chauds passent dans la dernière étape de la chambre de combustion appelée section de transition, figure III.9.

Il s'agit d'un conduit convergent qui va convertir la pression statique en pression dynamique, augmentant la vitesse des gaz chauds avant de les envoyer dans la section turbine.



Figure III.9: Tube de transition

III.5.4 Turbine

La turbine est le composant clé qui extrait l'énergie des gaz de combustion en expansion. Il se compose de plusieurs étages, chacun avec un ensemble de buses fixes et des aubes rotatives. Les gaz à haute énergie circulent sur les aubes de turbine, les faisant tourner. La turbine MS5002B, figure III.10, est composée de deux rotors indépendants du point de vue mécanique (Vitesse nominale du 1er arbre 5100 tr/min, vitesse nominale du 2ème arbre 4903 tr/min). Les deux roues de turbine ne sont pas liées afin de leur permettre de travailler à des vitesses différentes pour s'adapter aux variations de charge requises par le compresseur centrifuge. Le premier rotor comprend le compresseur axial et la turbine HP (haute pression), figure III.11. Sur le second rotor BP (basse pression) il y a l'arbre de commande qui entraîne le compresseur centrifuge à travers un accouplement mécanique, figure III.11.

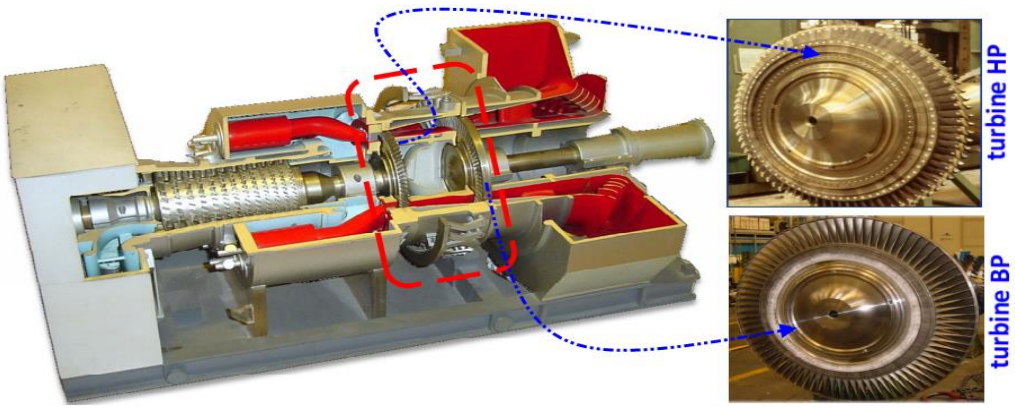


Figure III.10: Roues HP et BP



Figure III.11: Rotor HP et BP de la turbine MS5002B

III.5.5 Système d'échappement

Après avoir traversé la turbine, les gaz de combustion sortent par le système d'échappement, figure III.12. Ce système comprend des conduits, des diffuseurs et des silencieux pour gérer l'écoulement des gaz d'échappement et réduire les niveaux de bruit.

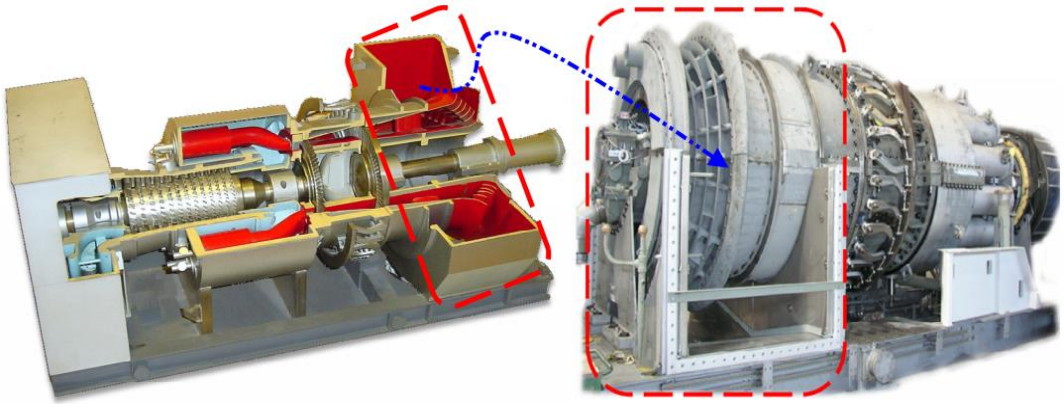


Figure III.12: Section d'échappement de la turbine MS5002B

III.5.6 Palier

Les paliers constituent aujourd'hui l'un des composants les plus critiques des turbomachines et des machines tournantes. Leur influence sur les performances dynamiques du rotor, la durée de vie et la fiabilité de la machine ne peut être ignorée. Bon nombre des problèmes auxquels nous sommes confrontés aujourd'hui avec les machines peuvent être attribués à la conception et à l'application des paliers. Une compréhension du fonctionnement des paliers et une certaine connaissance des principes de base qui sous-tendent leur fonctionnement sont donc essentielles pour faire le bon choix pour la conception particulière qui correspond le mieux aux exigences de service de la machine en question. Les paliers sont classés en paliers à film fluide et en paliers à éléments roulants [55-59].

III.5.6.1 Palier à film fluide

Les premières études d'un arbre et d'un palier fonctionnant dans des conditions hydrodynamiques complètes ont été réalisées par F.A. von Pauli en 1849 et par G.A. Hirn en 1854. En 1883, le Russe Nikolay Petrov a conclu que le frottement dans les palies à film fluide était un phénomène hydrodynamique [56,60,63,64]. Beauchamp Tower [61] a pu montrer que la charge dans le palier était portée par le mince film d'huile grâce à ses mesures du profil de pression dans le palier, mais n'a pas expliqué comment et pourquoi cela se produit. Trois ans plus tard (1886), Osborne Reynolds de l'Université de Manchester en Angleterre publie un article [62] dans lequel il est capable de prédire et d'expliquer les mesures expérimentales menées par Tower. Reynolds a développé ce que l'on appelle l'équation de lubrification hydrodynamique de Reynolds classique en combinant l'équation simplifiée de Navier Stokes et l'équation de continuité. Différents types de paliers à film fluide sont classés en paliers à film d'huile et paliers à gaz, selon le type de fluide, paliers de butée et paliers radiaux (paliers lisses), en fonction de la direction de la charge, et les paliers hydrodynamiques et les paliers hydrostatiques, selon la façon dont la pression du lubrifiant est créée [55,56,65,67]. Les paliers à film fluide développent une pression dans le coin convergent, qui supporte la charge radiale sur un mince film d'huile. La plupart des paliers à film fluide sont de type hydrodynamique, où la pression du film est produite par la rotation de l'arbre entraînant l'huile dans le coin convergent formé par l'arbre et la surface du palier. Dans les paliers hydrodynamiques, la pression d'huile est juste suffisante pour maintenir le palier alimenté en huile et pour éliminer la chaleur de friction générée par le cisaillement visqueux dans le film mince. Un type moins courant de palier à film fluide est le type hydrostatique, où la pression du film est fournie par une pressurisation externe. Les paliers à film fluide existent dans une variété de configurations en fonction de l'application, de l'espace disponible et des exigences de la dynamique du rotor. Les vibrations auto-excitées dues aux paliers lisses sont analysées dans le chapitre suivant. Tout d'abord, les expressions d'une force élastique et d'une force d'amortissement produites par le film d'huile sont dérivées, suivies de la dérivation des équations de mouvement de l'ensemble du système de palier-rotor.

III.5.6.2 Paliers lisse

Un palier lisse se compose d'un corps approximativement cylindrique autour d'un arbre rotatif utilisé soit pour supporter une charge radiale, soit simplement comme guide pour une transmission en douceur du couple. Il s'agit d'un manchon (ou bague) fixe avec un arc complet de 360° ou de divers arrangements d'un ou d'arcs partiels dans une structure de boîtier, comme

illustré à la figure III.13. La partie du rotor dans le palier s'appelle un tourillon et le cylindre qui le supporte s'appelle un palier. La surface intérieure est généralement recouverte d'un matériau d'appui souple tel que du plomb ou de l'étain, du bronze d'appui ou du plastique. Les dispositions d'alimentation en lubrifiant vont d'un simple trou d'entrée à des rainures axiales, circonférentielles et hélicoïdales pour une distribution efficace du lubrifiant [55-57,60]. La figure III.14 (a) montre la coupe transversale d'un palier lisse au repos avec la surface du tourillon en contact avec la surface intérieure de la bague. Lorsque le mouvement est initié, figure III.14(b), l'arbre enroule d'abord la paroi du manchon dans le sens opposé à la rotation en raison du frottement métal-métal entre l'arbre en acier et l'alésage du palier. Avec une alimentation adéquate en lubrifiant, un film de lubrifiant en forme de coin est formé presque immédiatement pour soulever le tourillon dans sa position stable, figure III.14 (c). Une fois que l'arbre est en régime permanent, il prend une position dans le cercle de jeu du palier dont les coordonnées sont l'excentricité e et l'angle d'attitude θ.

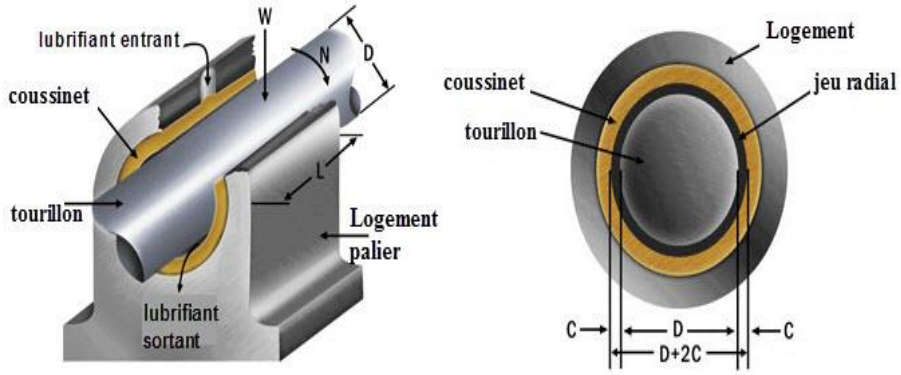


Figure III.13 : Géométrie et nomenclature du palier lisse

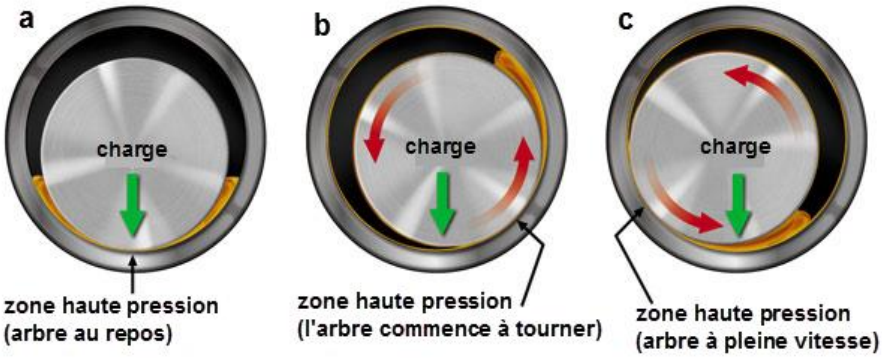


Figure III.14 : Séquence du mouvement du tourillon depuis le démarrage jusqu'à l'état d'équilibre

III.5.6.3 Palier à patins oscillants

Les paliers à patins oscillants (inclinables), figure III.15, sont un type de palier à film fluide utilisé pour supporter des machines tournantes telles que des turbines, des compresseurs et des pompes. Ils sont conçus pour réduire la friction et fournir un support stable et fiable pour l'arbre en rotation. L'action d'inclinaison des patins est obtenue grâce à l'utilisation de pivots ou de supports sphériques. Cela permet aux patins de s'auto-aligner avec l'arbre rotatif, compensant tout désalignement ou déviation pendant le fonctionnement. Le mécanisme d'inclinaison aide également à répartir la charge uniformément sur les patins, minimisant l'usure localisée et améliorant les performances globales et la longévité du palier. Cependant, ces paliers à patins oscillants à géométrie variable sont plus complexes, contiennent plus de pièces et ont généralement un amortissement plus faible que les paliers à géométrie fixe.

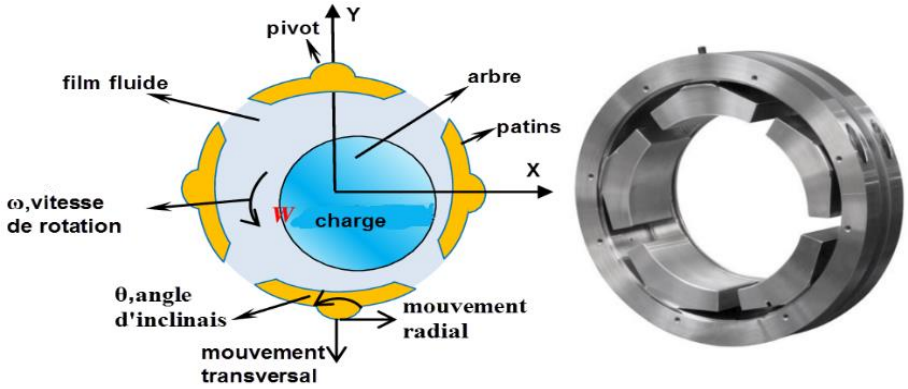


Figure III.15 : Géométrie et nomenclature du palier à patins oscillants

III.5.6.4 Paliers de turbine à gaz

La turbine MS5002B installe, figure III.16:

- Deux paliers lisse pour soutenir chacun des rotors HP et LP.
- Un palier de butée pour chaque rotor afin de maintenir la position axiale du rotor au stator et de supporter les charges de poussée transmises par le rotor.

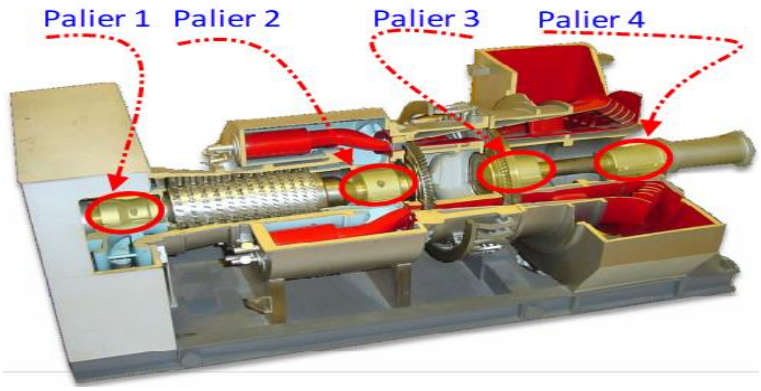


Figure III.16 : Différent paliers de la turbine MS5002B

Les différents types de paliers de la turbine MS5002B sont résumés sur le tableau ci-dessous.

Tableau III.1 : Différent paliers de la turbine MS5002B

Palier	
N°	**Type**
1	Elliptique
	Patins oscillants (auto-égalisation)
	Tapered land
2	Elliptique
3	Patins oscillants
4	Patins oscillants
	Patins oscillants (auto-égalisation)
	Patins oscillants (sans égalisation)

La Figure III.17, montre les différents placements des paliers de la turbine MS5002B.

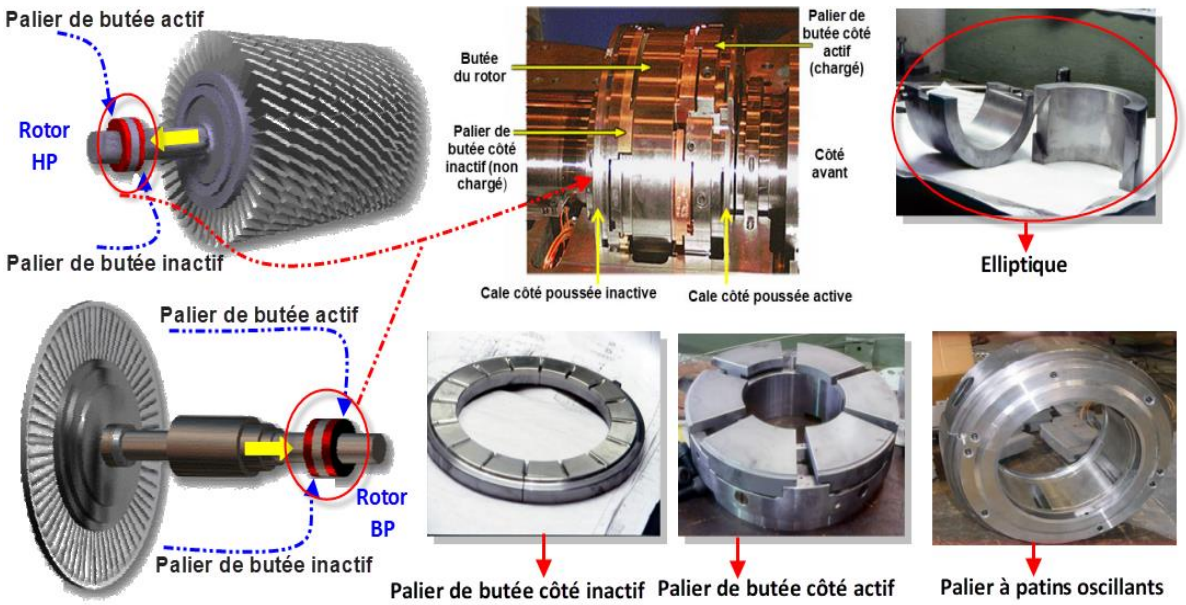


Figure III.17 : Principe de fonctionnement des paliers sur les Rotors HP et BP

III.6 Défaillances courantes dans les turbines à gaz

Les turbines à gaz, comme tous les systèmes mécaniques complexes, peuvent subir diverses défaillances qui peuvent avoir une incidence sur leurs performances et leur fiabilité. Certaines des défaillances courantes des turbines à gaz seront discutées ci-dessous.

III.6.1 Endommagement des aubes

Les aubes de compresseur, de directrices et de turbines et sont soumises à des températures, des pressions et des forces centrifuges élevées. Au fil du temps, ils peuvent développer des fissures, des fragments volants des aubes, de l'érosion ou de la corrosion, entraînant une efficacité réduite ou même une défaillance catastrophique, figure III.18.



Figure III.18 : Endommagement des aubes

III.6.2 Érosion et corrosion

Les écoulements d'air à grande vitesse, notamment dans la section du compresseur, peuvent provoquer l'érosion des surfaces des aubes, figure III.18. L'érosion peut entraîner la perte de matériau des aubes, altérer le profil aérodynamique et réduire l'efficacité. La corrosion, souvent causée par des impuretés dans le combustible ou des produits de combustion, peut également dégrader les composants de la turbine. L'érosion et la corrosion peuvent avoir un impact sur les performances, réduire l'efficacité du compresseur et augmenter les besoins en maintenance.

III.6.3 Problèmes du système de combustion

Les problèmes liés au système de combustion peuvent entraîner une combustion inefficace ou incomplète, ce qui entraîne une réduction de la puissance de sortie, une augmentation des émissions ou des extinctions. Des problèmes peuvent survenir en raison de la qualité du combustible, du mauvais alignement du brûleur, des buses de combustible bouchées, figure III.19, ou de l'instabilité de la flamme.

La qualité du combustible utilisé dans les turbines à gaz peut avoir un impact sur leurs performances. Un combustible contaminé ou de mauvaise qualité peut introduire des impuretés, des particules ou des éléments corrosifs pouvant endommager les composants de la turbine, réduire l'efficacité de la combustion et augmenter les émissions. Un combustible de haute qualité et propre, répondant aux spécifications du fabricant de la turbine, est essentiel pour des performances et une durée de vie optimales.



Figure III.19 : Dépôt de calamine sur la face d'injecteur

III.6.4 Défaillances des paliers et des arbres

Les paliers et les arbres des turbines à gaz sont soumis à des charges et des vitesses de rotation élevées. Une défaillance peut survenir en raison de problèmes de lubrification, d'usure, d'un mauvais alignement ou d'un refroidissement inadéquat. Les défaillances de paliers ou d'arbres peuvent entraîner des arrêts de turbine et des coûts de réparation importants, figure III.20.



Figure III.20 : (a) Usure dans le demi-palier inférieur ;(b) Usure du déflecteur d'huile

III.6.5 Encrassement et dépôts

Avec le temps, les turbines à gaz peuvent accumuler des dépôts sur les aubes du compresseur, les aubes de la turbine et les surfaces internes, figure III.21.

L'encrassement peut réduire le débit d'air, perturber l'aérodynamique et diminuer l'efficacité du transfert de chaleur. Les dépôts peuvent être constitués de saleté, de poussière, d'huile, de produits de corrosion ou d'autres contaminants présents dans l'air ou le combustible. L'encrassement et les dépôts peuvent entraîner une augmentation de la consommation de combustible, une diminution de la puissance produite et une augmentation des températures de fonctionnement. De même, le carburant contaminé peut provoquer un colmatage des injecteurs ou des problèmes de combustion, figure III.19. Un entretien régulier et une filtration adéquate sont essentiels pour prévenir ces problèmes.

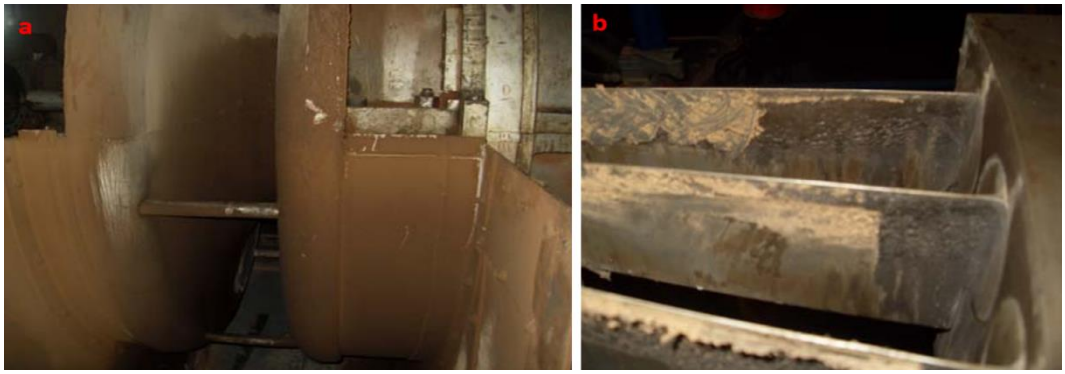


Figure III.21 : (a) Dépôt important d'huile avec du sable sur la partie inférieure du caisson d'admission ; (b) Dépôt de saleté sur les IGV

III.6.6 Défaillances du système de refroidissement

Les turbines à gaz s'appuient sur des systèmes de refroidissement pour gérer les températures élevées générées pendant le fonctionnement. Si le système de refroidissement tombe en panne, des points chauds peuvent se développer dans les composants critiques, entraînant des contraintes thermiques, une dégradation des matériaux ou même une défaillance mécanique.

III.6.7 Problèmes du système de lubrification

Une lubrification adéquate est essentielle au bon fonctionnement des turbines à gaz. Les défaillances du système de lubrification, comme les fuites d'huile, figure III.21(a), les filtres obstrués ou une pression d'huile inadéquate, peuvent entraîner une augmentation du frottement, figure III.20(a), une usure excessive et des dommages potentiels aux composants de la turbine. L'entretien proactif, la surveillance et les inspections régulières sont essentiels pour détecter et corriger ces défaillances courantes des turbines à gaz. Une détection précoce et une réparation rapide peuvent aider à minimiser les temps d'arrêt, optimiser les performances et prolonger la durée de vie de la turbine.

III.6.8 Contrainte thermique

Les turbines à gaz connaissent d'importants gradients thermiques pendant leur fonctionnement. Les variations rapides de température, les cycles thermiques et l'expansion thermique peuvent induire des contraintes thermiques dans les composants de la turbine, tels que les aubes du rotor, les buses ou les enveloppes. Au fil du temps, les contraintes thermiques peuvent provoquer des déformations ou des fissures, ayant un impact négatif sur les performances et la fiabilité.

III.6.9 Problème de vieillissement

Les turbines à gaz ont une durée de vie opérationnelle limitée et leurs performances peuvent se détériorer avec le temps. Des facteurs tels que le nombre total d'heures de fonctionnement, le nombre de démarrages et d'arrêts, ainsi que l'historique de maintenance, peuvent influencer la détérioration des performances. À mesure que les turbines à gaz vieillissent, les composants peuvent subir une usure accrue, une dégradation ou une réduction de l'efficacité, ce qui nécessite des inspections et une maintenance plus fréquentes.

III.6.10 Dysfonctionnements du système de contrôle

Les systèmes de contrôle des turbines à gaz sont responsables de la surveillance et de la régulation de divers paramètres tels que le débit de carburant, la température et la vitesse. Les dysfonctionnements ou les défaillances des capteurs dans le système de commande peuvent entraîner une instabilité, une survitesse ou une sous-vitesse de la turbine. Ces problèmes peuvent causer des arrêts, réduire l'efficacité ou même endommager la turbine.

III.6.11 Problème de vibrations

Les vibrations dans les turbines à gaz sont un problème courant qui peut survenir en raison de divers facteurs. Bien qu'une certaine quantité de vibrations soit attendue dans les machines tournantes, des vibrations excessives ou anormales peuvent entraîner des vibrations excessives ou anormales peuvent endommager l'équipement, réduire l'efficacité et même présenter des risques pour la sécurité. Certains des points clés à considérer concernant les vibrations dans les turbines à gaz seront discutés ci-dessous.

III.6.12.1 Causes des vibrations

Les vibrations dans les turbines à gaz peuvent provenir de plusieurs sources, notamment [64-68] :

- **Balourd :** Le balourd fait référence à une condition où le poids ou la masse de rotation n'est pas uniformément réparti autour de l'axe de rotation du rotor. Lorsqu'un rotor présente un balourd, cela signifie qu'il y a une distribution inégale de masse, ce qui peut entraîner des conséquences indésirables. L'effet principal du balourd du rotor est la génération de forces centrifuges pendant la rotation. Ces forces centrifuges peuvent provoquer des vibrations excessives, ce qui peut être préjudiciable à la performance du rotor et à la durée de vie de l'équipement.
- **Désalignement :** Dans le contexte de machines rotatives, comme des turbines, fait référence à une situation où le rotor n'est pas correctement aligné avec d'autres composants fixes de la machine, tels que les paliers ou les boîtiers. En d'autres termes, les axes du rotor et des composants fixes ne sont pas parfaitement alignés comme ils le devraient. Cela peut être causé par divers facteurs, tels que des erreurs d'installation, des défauts de fabrication, des déformations structurelles, ou même l'usure au fil du temps. Lorsqu'il y a un désalignement, cela peut entraîner plusieurs problèmes, dont les vibrations sont l'un des plus courants.
- **Résonance :** Lorsque la fréquence naturelle d'un composant correspond à la fréquence d'excitation, une résonance peut se produire, entraînant une augmentation des amplitudes de vibration.
- **Forces aérodynamiques :** Des forces aérodynamiques déséquilibrées agissant sur les aubes du rotor ou les étages du compresseur peuvent induire des vibrations.
- **Frottements et jeux :** Le contact entre les pièces rotatives et fixes dû à des jeux ou des frottements excessifs peut générer des vibrations.
- **Problèmes de palier :** des problèmes de palier, tels qu'un désalignement, une mauvaise lubrification ou des composants usés, peuvent contribuer aux vibrations.

III.6.12.2 Effets des vibrations

Les vibrations excessives dans les turbines à gaz peuvent avoir plusieurs conséquences négatives, notamment [59,60,63,64,66] :

- **Défaillance par fatigue :** des contraintes cycliques élevées causées par des vibrations peuvent entraîner une défaillance prématurée par fatigue de composants, comme les aubes et les disques.
- **Efficacité réduite :** les vibrations peuvent réduire l'efficacité globale de la turbine à gaz en affectant les performances des composants rotatifs et en perturbant le flux d'air.

- **Augmentation de l'entretien :** Des vibrations excessives peuvent nécessiter des inspections et de l'entretien plus fréquents, ce qui entraîne une augmentation des temps d'arrêt et des coûts d'exploitation.
- **Risques pour la sécurité :** Les vibrations graves peuvent présenter des risques pour la sécurité du personnel et de l'équipement environnant et causer des accidents ou des dommages.

III.7 Surveillance des vibrations de turbine à gaz

La surveillance des vibrations des turbines à gaz est un aspect essentiel du fonctionnement efficace et fiable des systèmes de turbines à gaz. Les vibrations peuvent indiquer des problèmes potentiels avec les composants mécaniques de la turbine, tels que les rotors, les paliers, les aubes et d'autres pièces tournantes. En surveillant et en analysant les niveaux de vibrations, les opérateurs peuvent détecter des anomalies, diagnostiquer des problèmes et prendre des mesures préventives ou correctives pour éviter des défaillances catastrophiques ou des temps d'arrêt imprévus. Certains des points clés à prendre en compte concernant la surveillance des vibrations des turbines à gaz seront discutés ci-dessous.

III.7.1 Analyse des vibrations

L'analyse vibratoire est une technique utilisée pour étudier et analyser le comportement vibratoire des machines tournantes. Le principe de base de l'analyse vibratoire repose sur le fait que les machines en mouvement produisent des vibrations caractéristiques qui sont directement liées à leur état de fonctionnement. En mesurant et en analysant ces vibrations, on peut détecter les signes de dysfonctionnement, de déséquilibre, de jeu excessif, d'usure des paliers, de problèmes d'alignement, de résonance, de défauts de structure, etc. Nous aborderons dans la suite les principales étapes de la chaîne d'analyse vibratoire.

III.7.1.1 Acquisition des données

Pour effectuer une analyse vibratoire, des capteurs appropriés tels que des accéléromètres, des vélocimetres ou des proximètres sont utilisés pour mesurer les vibrations sur la turbine à gaz. Ces capteurs sont placés stratégiquement à des endroits critiques, tels que les paliers et les arbres. Ces capteurs convertissent les mouvements vibratoires en signaux électriques qui peuvent être enregistrés et analysés.

III.7.1.2 Prétraitement des données

Les signaux vibratoires bruts peuvent être affectés par du bruit ou des interférences indésirables. Le prétraitement des données consiste à filtrer les signaux pour éliminer le bruit afin d'obtenir des données de vibration de haute qualité, comme visualisé dans la figure III.22.

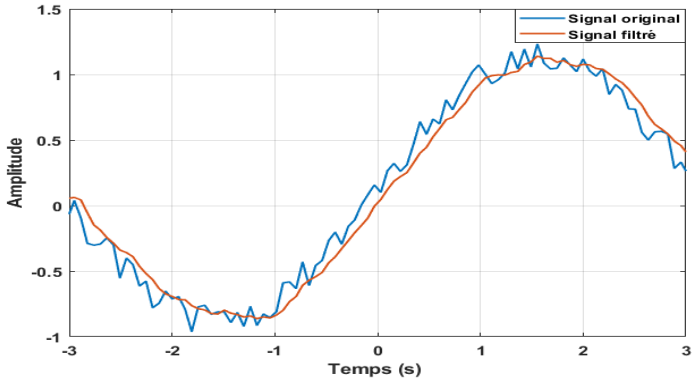


Figure III.22 : Signal brut dans le domaine temporel,
Ainsi que ce même signal après avoir été filtré

III.7.1.3 Analyse temporelle

Cette stratégie de surveillance implique de suivre de manière continue l'évolution des vibrations d'une machine au fil du temps en fonction de ses paramètres de fonctionnement spécifiques. Par exemple, on peut étudier les vibrations d'une turbine pendant son processus d'accélération ou de décélération. Ce suivi permet de comprendre comment les vibrations varient en réponse aux changements dans les conditions de fonctionnement de la machine. Lorsque le signal de vibration est simple et facile à interpréter, cette méthode de suivi est relativement aisée à exploiter. Cependant, elle devient plus complexe à utiliser lorsque le signal de vibration est le résultat de multiples sollicitations ou influences. Dans de telles situations, la variété des sources de vibration peut rendre difficile la séparation et l'interprétation des différentes composantes du signal, ce qui rend le suivi et l'analyse plus difficiles voire impossible.

III.7.1.4 Analyse spectrale

L'analyse spectrale est une technique essentielle dans le domaine de la surveillance des machines. Elle implique de recueillir les signaux vibratoires émis par la machine et de les analyser de manière méthodique pour détecter la présence d'éventuels défauts. Cette approche permet d'explorer les différentes fréquences présentes dans le signal et de rechercher les signatures vibratoires associées à divers types de défauts susceptibles d'affecter le bon fonctionnement de l'installation.

En utilisant des outils telles que l'analyse spectrale par transformée de Fourier rapide FFT (Fast Fourier Transform), figure III.23, l'analyse de spectre de puissance et l'analyse en ondelettes, l'analyse spectrale permet d'identifier les caractéristiques vibratoires distinctes associées à des problèmes spécifiques tels que des déséquilibres, des jeux mécaniques, des défauts de roulements, ou d'autres anomalies potentielles. Cette approche offre ainsi la possibilité d'établir un diagnostic précis en déterminant la nature exacte de l'anomalie détectée et, dans la mesure du possible, d'évaluer sa gravité. La formule (III.1) représente la transformée de Fourrier :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} \qquad \text{(III.1)}$$

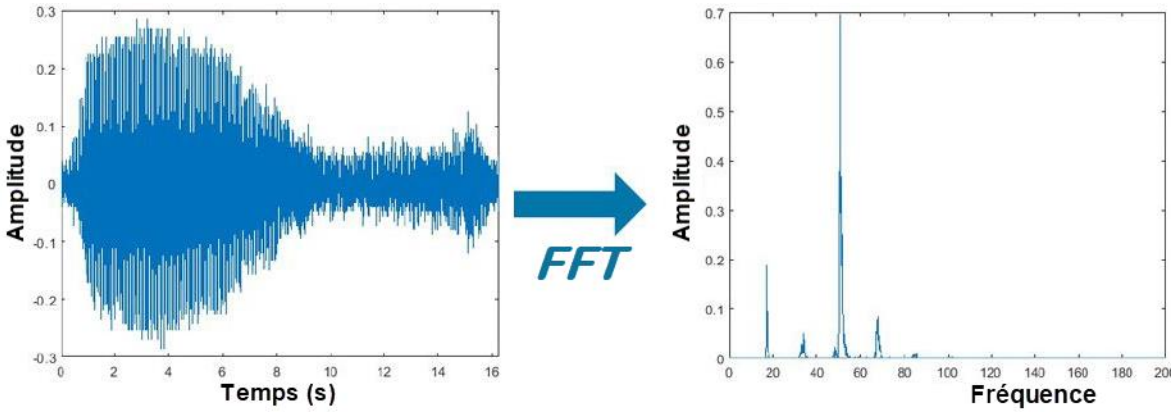
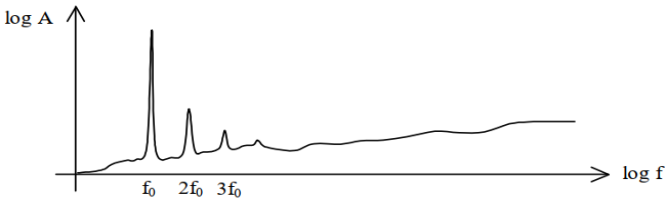
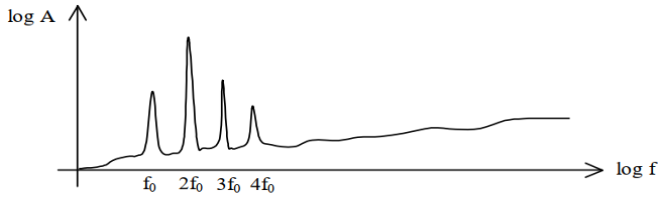
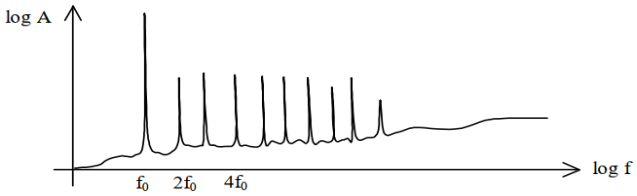
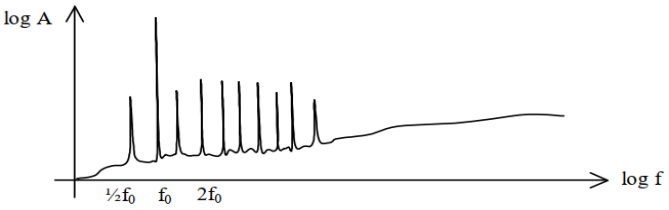


Figure III.23 : Signal temporel et spectre correspondant

III.7.1.5 Diagnostic et interprétation

Une fois les données analysées, il est possible de diagnostiquer les problèmes potentiels du système. Cela nécessite une bonne compréhension des caractéristiques vibratoires normales et anormales du système étudié. Des comparaisons avec des seuils prédéfinis, des normes ou des modèles de référence, par exemple le tableau 1, peuvent être effectuées pour détecter les anomalies, les déséquilibres, les défauts de roulements, les problèmes de lubrification ou d'autres problèmes potentiels.

Tableau III.2 : Principales anomalies

Type d'anomalie	Caractéristiques et Représentation spectrale du défaut
Balourd	Pic élevé à la fréquence de rotation f_0 
Défaut d'alignement	Pic élevé au $2 \times f_0$ 
Défaut de desserrage	Peigne de raies d'harmoniques de f_0 
Frottement	Peigne de raies d'harmoniques à de $1/2 \times f_0$ en basse fréquence et en début de moyenne fréquence. 

III.7.2 Systèmes d'alarme et de surveillance

Les systèmes de surveillance des vibrations des turbines à gaz sont généralement équipés de dispositifs d'alarme. Lorsque les vibrations dépassent les seuils prédéfinis, des alarmes sont déclenchées pour alerter les opérateurs des problèmes potentiels. La surveillance continue permet une évaluation et une intervention en temps réel, au besoin.

III.7.2.1 Surveillance d'une turbine à gaz avec le système de commande GE SPEEDTRONIC™ Mark VIe

Le système de commande GE SPEEDTRONIC™ Mark VIe est une plateforme de contrôle avancée utilisée dans diverses applications, y compris la surveillance et le contrôle de turbines à gaz. Nous en discuterons ci-dessous quelques aspects clés de la surveillance d'une turbine à gaz avec le système SPEEDTRONIC™ Mark VIe :

- **Contrôle de la Turbine à Gaz**

Le Mark VIe assure le contrôle en temps réel de la turbine à gaz en ajustant divers paramètres, tels que la quantité de carburant injectée (comme visualisé dans la figure III.24), la vitesse (comme explicité dans la figure III.25), la température (comme représenté dans la figure III.26), la pression (comme dépeint dans la figure III.27), la vanne de régulation (comme montré dans la figure III.28), etc. Cela permet de maintenir la turbine à une vitesse et une charge spécifiques en fonction des besoins du réseau électrique.

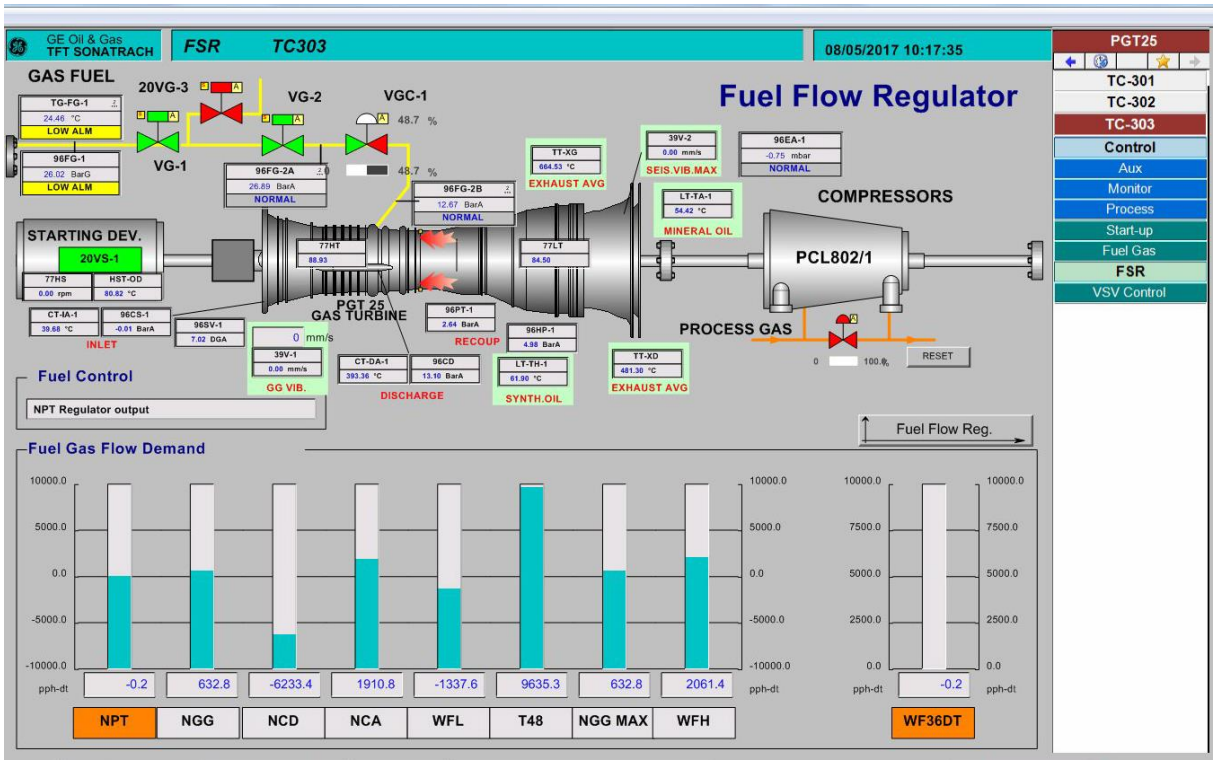


Figure III.24 : Interface Utilisateur Graphique pour la turbine PGT25 :
Régulateur de débit de carburant FSR

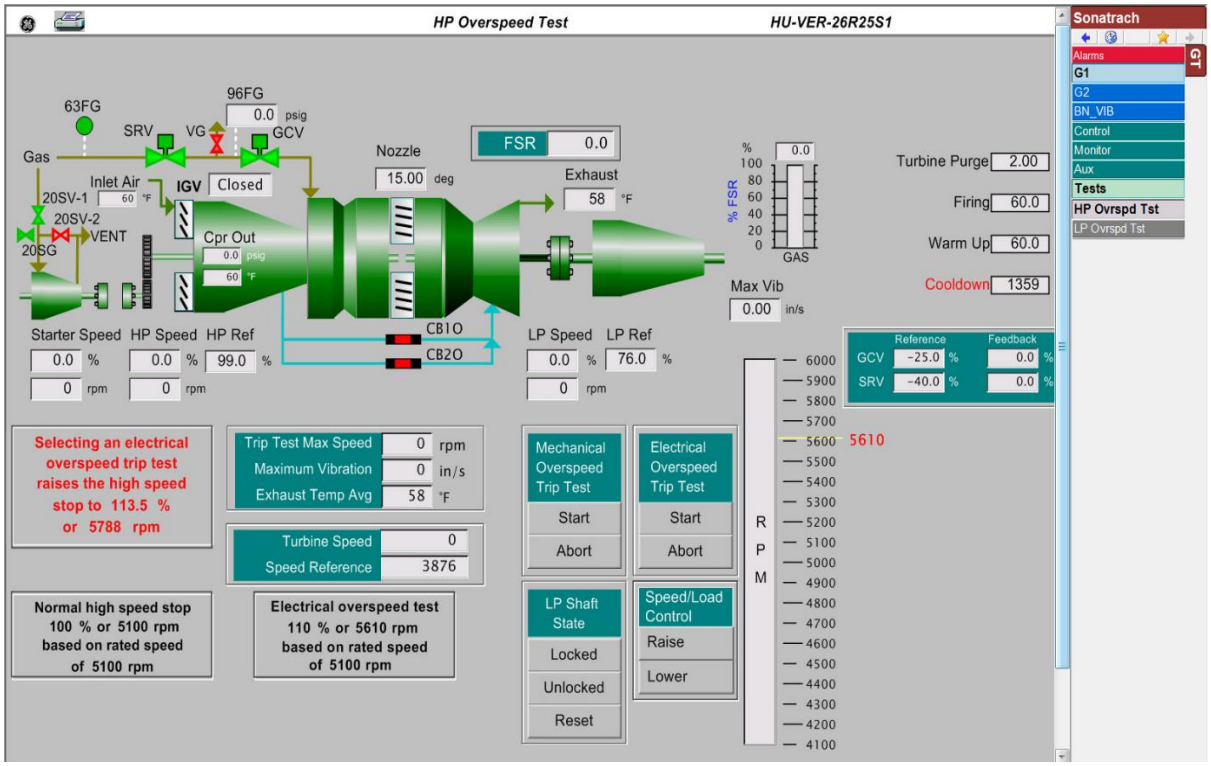


Figure III.25 : Interface Utilisateur Graphique pour la turbine MS5000B :

Vitesse du rotor HP

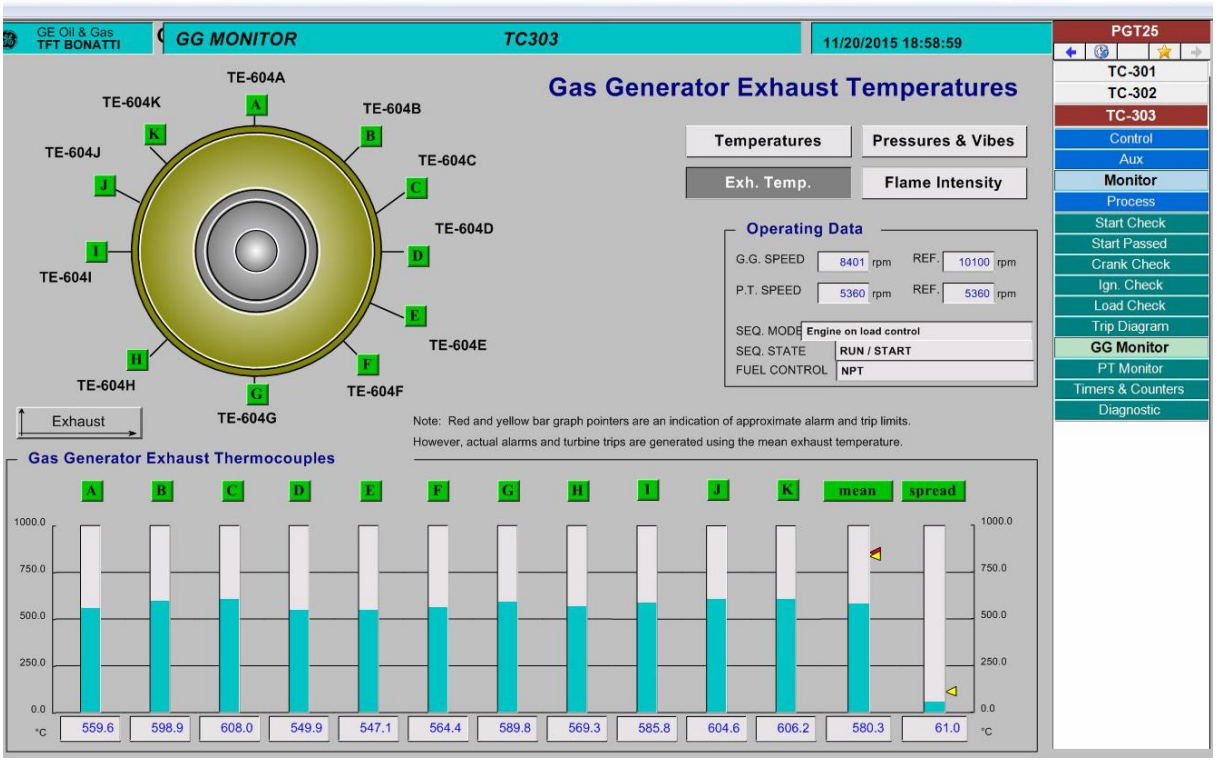


Figure III.26 : Interface Utilisateur Graphique pour PGT25 :
Température d'échappement

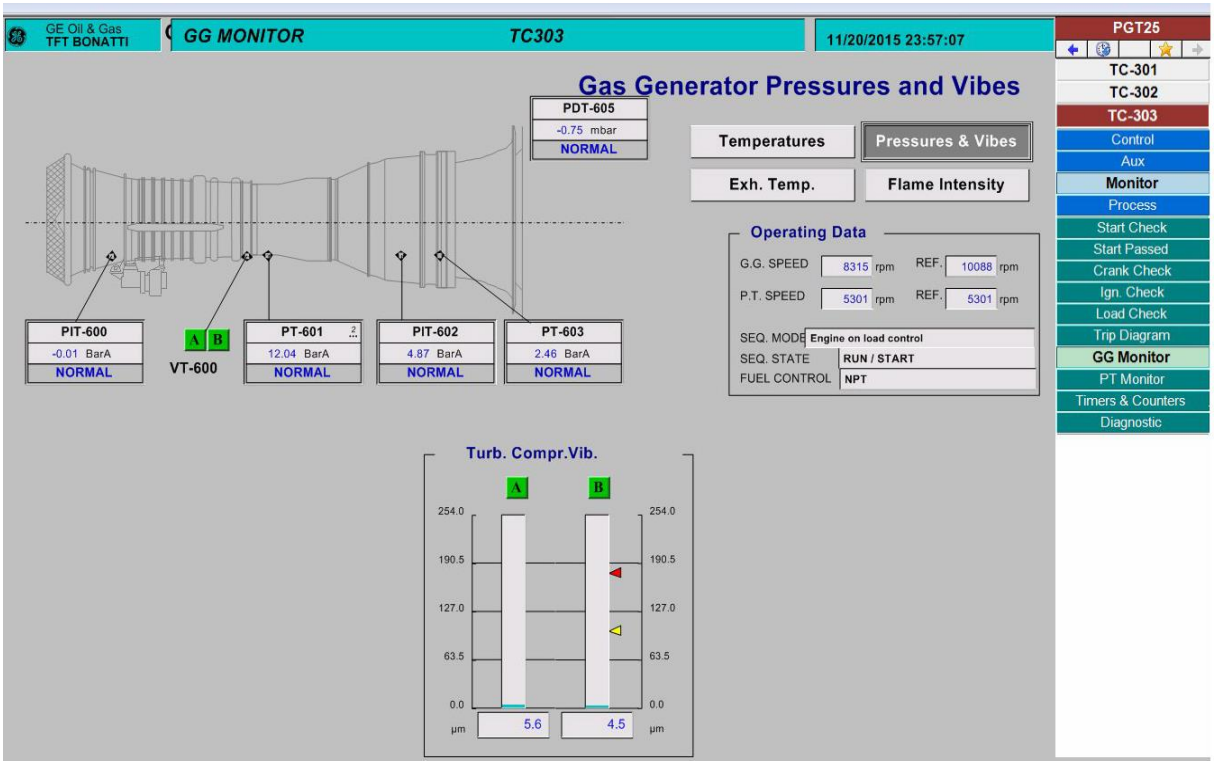


Figure III.27 : Interface Utilisateur Graphique pour PGT25 :
Pression et vibrations du générateur de gaz

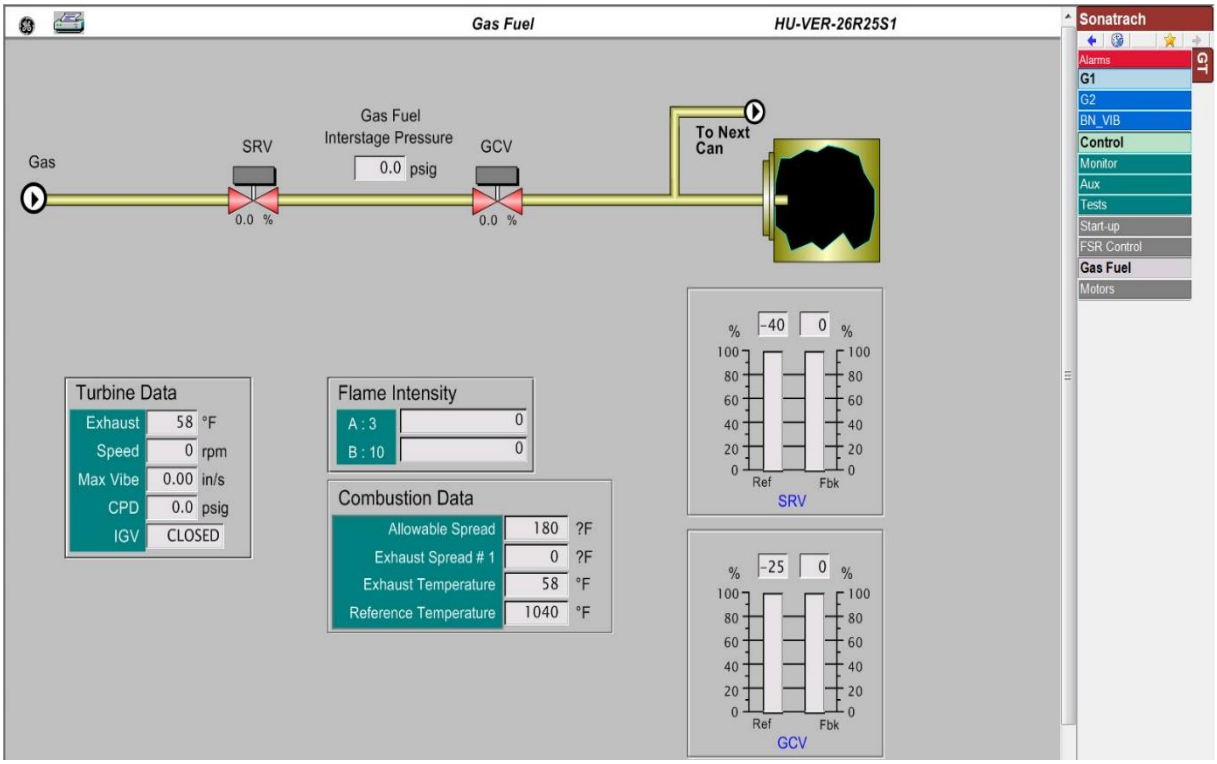


Figure III.28 : Interface Utilisateur Graphique pour la turbine MS5002B :
Régulateur de vannes SRV et GCV

- **Surveillance des paramètres**

Le système surveille en permanence un ensemble de paramètres de fonctionnement de la turbine à gaz. Cela inclut la surveillance des vibrations (comme illustré dans la figure III.27), des températures, des pressions, des niveaux de carburant, la phase de démarrage (comme visualisé dans la figure III.28), etc. Toute déviation par rapport aux valeurs prédéfinies peut déclencher des alarmes ou des actions préventives.

- **Protection et Sécurité**

Le Mark VIe est équipé de fonctions de protection avancées pour détecter et réagir rapidement aux conditions anormales ou aux situations dangereuses. Cela contribue à assurer la sécurité des opérations. Le système intègre des fonctionnalités de protection avancées pour prévenir les situations dangereuses. Cela peut inclure la limitation de la vitesse, la fermeture rapide des vannes de carburant en cas d'urgence, la protection contre les surcharges, etc.

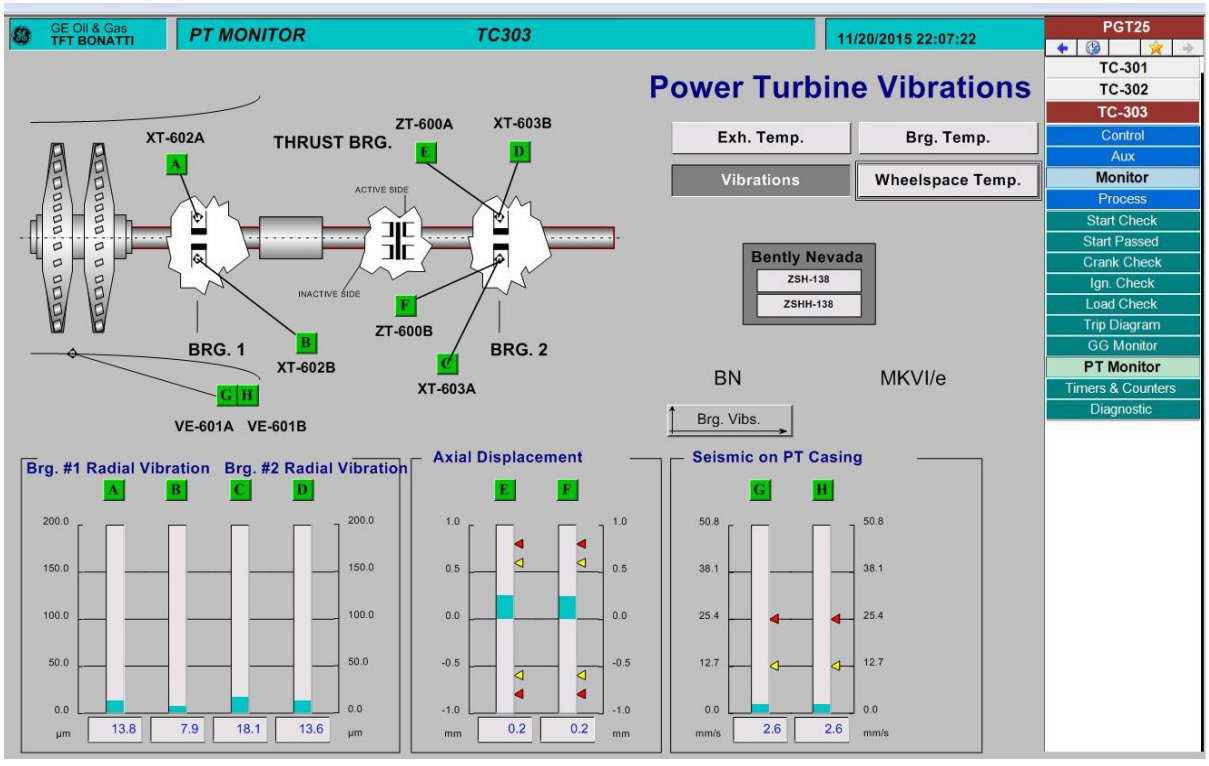


Figure III.29 : Interface Utilisateur Graphique pour PGT25 :

Vibrations de la turbine de puissance

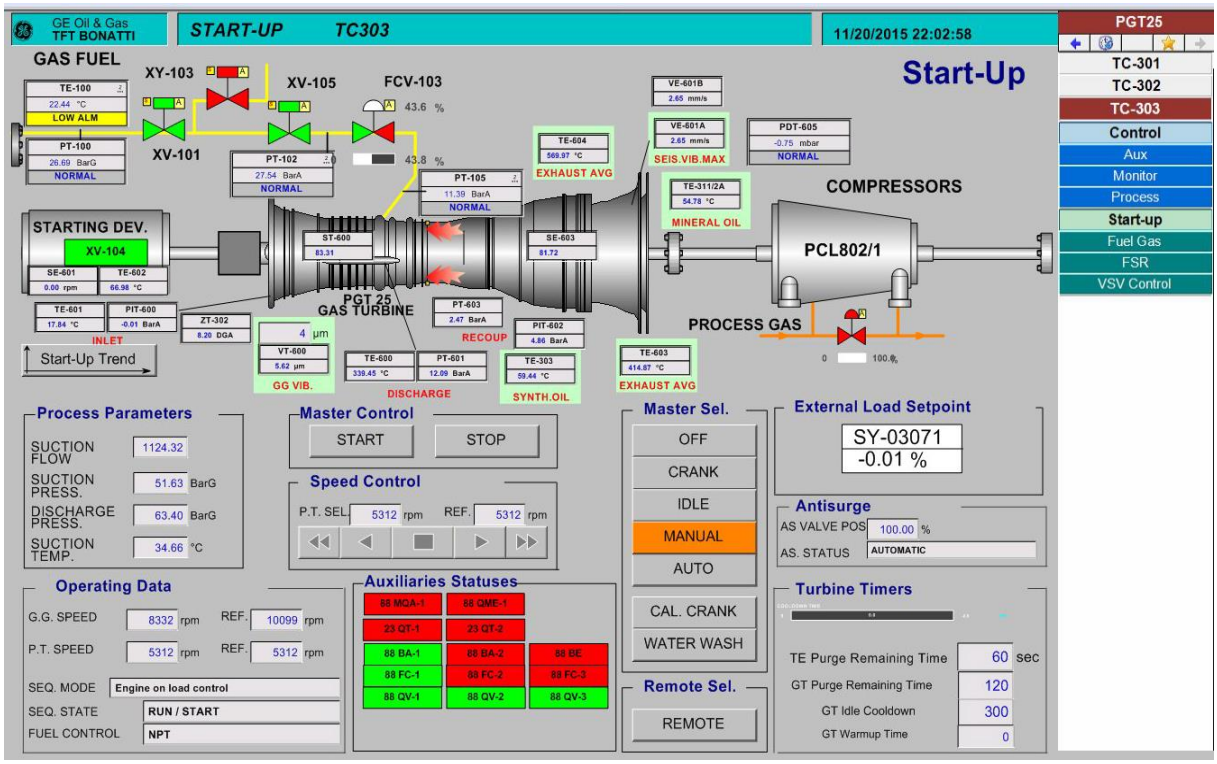


Figure III.30 : Interface Utilisateur Graphique pour PGT25 : Phase de démarrage

- **Automatisation**

Le Mark VIe permet une certaine automatisation des processus, ce qui réduit la charge de travail des opérateurs et améliore l'efficacité opérationnelle. Il peut également prendre des décisions autonomes pour maintenir les performances optimales.

- **Interface Utilisateur Graphique**

Le système est doté d'une interface utilisateur graphique conviviale qui permet aux opérateurs de surveiller et de contrôler en temps réel les performances de la turbine à gaz. Cette interface offre des graphiques comme le montrent dans les figure III.22-28, des tableaux de bord et des outils de diagnostic pour faciliter la prise de décision.

- **Diagnostic**

Le Mark VIe utilise des fonctionnalités de diagnostic avancé pour identifier les problèmes potentiels avant qu'ils ne deviennent critiques, facilitant ainsi la planification de la maintenance préventive. Cela peut contribuer à réduire les temps d'arrêt non planifiés.

- **Enregistrement des Données**

Le système enregistre des données historiques sur les performances de la turbine. Ces données peuvent être utilisées pour l'analyse post-opération, la génération de rapports et la planification de la maintenance.

III.7.3 Entretien et atténuation

La surveillance des vibrations est une approche proactive de la maintenance. En détectant les premiers signes de détérioration ou de défaillance, le personnel de maintenance peut planifier l'entretien préventif, réparer ou remplacer les composants défectueux et optimiser les performances de la turbine.

III.7.4 Normes et lignes directrices

Les normes internationales, telles que les normes ISO 10816 et API 670, fournissent des lignes directrices pour la surveillance des vibrations des turbines à gaz. Ces normes précisent les niveaux de vibrations acceptables, les méthodes de mesure et les pratiques recommandées pour l'analyse et l'interprétation des données sur les vibrations.

III.8 Conclusion

Les turbines à gaz, en raison de leur complexité, comprennent des composants critiques susceptibles de subir divers modes de défaillance. Pour prévenir ces défaillances et assurer un fonctionnement fiable, des méthodes avancées de surveillance des vibrations sont essentielles. Cela inclut l'utilisation de techniques telles que l'analyse des signatures vibratoires et la surveillance en ligne. L'analyse des signatures vibratoires permet d'identifier des modèles caractéristiques de vibrations qui peuvent indiquer des problèmes potentiels. La surveillance en ligne, quant à elle, offre une surveillance continue des paramètres vibratoires, permettant une détection précoce des anomalies. L'importance de ces méthodes de surveillance réside dans leur capacité à détecter rapidement les problèmes émergents. En anticipant ces problèmes, les opérateurs peuvent prendre des mesures correctives avant que des dommages significatifs ne se produisent. Ceci a un impact direct sur la réduction des temps d'arrêt, minimisant ainsi les coûts de réparation et améliorant la disponibilité opérationnelle.

En résumé, la surveillance des vibrations joue un rôle fondamental dans la garantie de la fiabilité, des performances et de la sécurité des turbines à gaz. En optimisant le fonctionnement et en prolongeant la durée de vie de ces machines complexes, elle contribue à une exploitation plus économique et efficiente dans le contexte industriel.

CHAPITRE IV

Étude de bifurcation des vibrations dans une turbine à gaz

L'émergence de technologies modernes dans les secteurs pétroliers et gaziers présente une opportunité d'améliorer la productivité, de réduire les impacts environnementaux, y compris les émissions, et d'optimiser l'efficacité énergétique de ces installations, conduisant finalement à des gains économiques accrus. Dans une démarche de développement durable de l'exploitation des turbines à gaz, Ce chapitre préconise l'utilisation d'indices de bifurcation pour évaluer l'état opérationnel d'une turbine MS5002B installée dans une station de compression de gaz et assurer sa stabilité. Grâce à une comparaison des résultats expérimentaux et des résultats numériques du modèle développé, validés par des données opérationnelles réelles, l'étude anticipe et prédit les comportements dynamiques non linéaires complexes du système palier-rotor de la turbine examinée. En utilisant des données opérationnelles pour surveiller les phénomènes de dégradation affectant cette turbine, des tests de robustesse ont été menés pour examiner les impacts de ces perturbations indésirables sur le système turbine à l'aide de diagrammes de bifurcation. Cette méthodologie permet de suivre les variations dynamiques des phénomènes vibratoires de la turbine examinée et d'établir des indicateurs de diagnostic fiables pour la stabilité de ses composants, atténuant ainsi les causes d'arrêts de production imprévus. Cette approche conduit à des améliorations de l'efficacité énergétique, entraînant des avantages environnementaux et économiques.

IV.1 Introduction

Récemment, les avancées dans les technologies modernes et l'informatique ont ouvert la voie à des outils fiables pour gérer de manière rentable et durable les installations industrielles, ce qui a entraîné des améliorations tant sur le plan environnemental qu'économique. Cependant, surveiller les turbines à gaz utilisées dans le secteur pétrolier et gazier présente un défi significatif. L'objectif principal consiste à atténuer les impacts négatifs induits par les séquences de démarrage des turbines, à optimiser leur rendement, à améliorer leur efficacité de production et à prévenir les pannes imprévues. Dans ce contexte, ce chapitre propose d'intégrer une approche originale basée sur l'étude de bifurcation des phénomènes vibratoires d'un système palier-rotor de la turbine MS5002B, installée dans une station de compression de gaz. L'objectif est d'assurer une surveillance efficace de cette turbine en mettant en œuvre des modèles pratiques qui décrivent les comportements dynamiques de bifurcation des vibrations qui affectent la turbine en question. Cette démarche vise également à intégrer des indicateurs d'évaluation de la dégradation. Les fondements de cette approche reposent sur des tests expérimentaux qui exploitent les données d'entrée/sortie de la turbine pour anticiper l'apparition de cycles de vibration. La surveillance des turbines à gaz et la gestion de la santé de leurs composants revêtent une importance cruciale pour les exploitants, dans le but de prolonger leur durée de vie et d'améliorer leurs performances, tout en minimisant les pertes occasionnées par les arrêts non planifiés. À mesure que la technologie progresse, la détection robuste des défauts exige le recours aux méthodes les plus avancées et pragmatiques, ce qui contribue à accroître la production et le transport de gaz naturel. Afin de résoudre les défis liés aux comportements dynamiques complexes des systèmes de turbines à gaz, soumis à des niveaux élevés de transmission et de rotation, une approche de surveillance basée sur diverses bifurcations de vibrations est mise en œuvre sur un système palier-rotor de turbine MS5002B, en prenant en compte le compromis entre stabilité et efficacité. L'utilisation pratique des systèmes de surveillance et de diagnostic des pannes de turbines à gaz a été étudiée et développée selon de nombreuses approches. Biying Wu dans [76] a proposé une approche pour analyser les performances dynamiques d'un système palier-rotor de turbine à gaz basée sur l'utilisation de réseaux de neurones artificiels améliorant son efficacité énergétique en utilisant l'optimisation en profondeur pour l'analyse des performances de la turbine étudiée. Par conséquent, Jinyong Ju et al. dans [82] ont proposé une stratégie de contrôle par rétroaction non linéaire de la vibration du système de transmission principal du convoyeur à racleurs utilisant des bifurcations, estimant l'influence de ces bifurcations sur l'instabilité en

torsion de cet arbre de transmission. Zigang Li et coll. dans [66] ont réalisé une étude dynamique non linéaire d'un système rotor-palier avec les effets de défauts d'alignement, pour l'analyse des comportements dynamiques non linéaires supportés par des paliers lisses. Aussi, d'autres travaux ont été réalisés sur les différentes approches d'analyses de bifurcation des vibrations et de contrôle tolérant aux pannes pour le suivi des turbines à gaz lors de leur conception et de leur mise en œuvre, comme Ahmed Hafaifa et al. dans [69], Choayb Djeddi et al. dans [77], Arash Mohamadi et al. dans [70], Avramov et Malyshev. dans [73], Avramov et Raimberdiyev. dans [75], Jafar Aghayari et al. dans [80], Li Ma et al. dans [83], Nicolas Noiray et Bruno Schuermans. dans [86], Xiao-Ye Mao et al. dans [90]. Cependant, comprendre la dynamique comportementale des turbines permet de prendre en compte les effets indésirables sur leur bon fonctionnement, afin d'améliorer leur efficacité et leur rendement en maîtrisant les non-linéarités complexes du comportement vibratoire fonctionnant dans des conditions sévères (vitesse de rotation élevée et haute température et pression). Cela impose aux exploitants de turbines à gaz de concevoir des systèmes de surveillance robustes et fiables pour détecter les anomalies et leurs évolutions dangereuses sur les composants des turbines. Dans ce contexte, ce chapitre propose le développement d'une démarche d'étude de bifurcation basée sur la modélisation du système palier-rotor de turbine MS5002B, pour augmenter sa durée de vie dans le but de réduire les coûts de maintenance, sur la base des différentes analyses réalisées à l'aide du spectres de fréquence, portraits de phase et cartes de Poincaré, pour décrire les changements de stabilité des courbes de solutions portées par les différents diagrammes de bifurcations de vibration de turbine examinés à partir des mesures réel.

IV.2 La turbine à gaz MS5002B

Dans le but d'améliorer l'efficacité énergétique des turbines à gaz utilisées dans le secteur du transport de gaz naturel, avec l'intégration d'actions de surveillance modernes, pour garantir leur disponibilité tout en évitant les pannes soudaines. Pour cela, la turbine à gaz étudiée dans ce chapitre est de type MS5002B représentée sur la figure IV.1 et leurs caractéristiques sont données dans le tableau IV.1. Cette turbine est installée dans la station de compression de gaz CS2/TFT de SONATRACH située à 1400 km au sud-est de l'Algérie et à 540 km de la Wilaya d'ILLIZI au sud de l'Algérie. Cette turbine est conçue pour fournir une puissance élevée dans des conditions de fonctionnement appropriées, avec des performances élevées pour entraîner un compresseur de gaz centrifuge, elle est composée de deux rotors mécaniquement indépendants, comme le montre la figure IV.2.

Le premier arbre tourne avec une vitesse allant jusqu'à 5100 tr/min et le la vitesse du deuxième arbre peut atteindre jusqu'à 4903 tr/min. Ainsi, le premier rotor est celui du compresseur axial, composé des seize étages de compression de la turbine HP haute pression. Son rôle est de comprimer l'air qui doit être transmis sous pression aux chambres de combustion. Le deuxième rotor c'est celui de la turbine BP basse pression, son rôle est entraîné par le compresseur centrifuge à travers un accouplement mécanique.

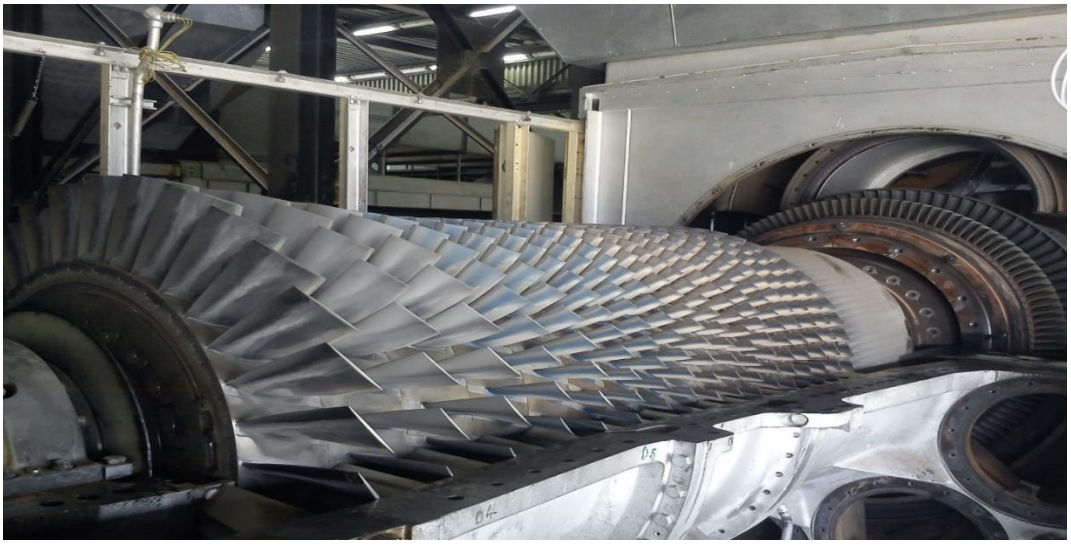


Figure IV.1 : Turbine à gaz MS5002B installée dans la station de compression De gaz CS2 / TFT dans le sud-est de l'Algérie

Tableau IV.1 : Spécifications de la turbine à gaz MS5002B

Paramètre	**Valeur**
Cycle	Simple
Taux de compression	6 – 8
Température d'échappement	517 °C
Flux d'échappement	124.33 Kg/sec
Nombre d'étages de turbine	02
Puissance nominale	38000 HP
Taux de chaleur	8816 btu/hp-h
Rendement de la turbine	28.8 %
Vitesse d'arbre	534 rad/ sec HP et 514 rad/ sec LP

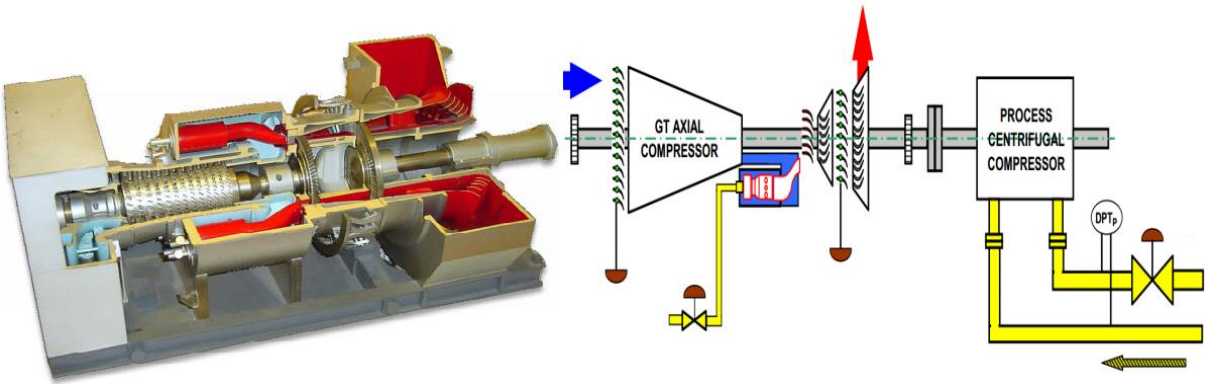


Figure IV.2 : Structure de fonctionnement de la turbine à gaz MS5002B

Pour atteindre les objectifs en termes d'analyse de la dynamique vibratoire, un traitement des informations et des données pour la détection des anomalies vibratoires est effectué dans la section suivante. En commençant par les étapes de modélisation du système palier-rotor de turbine MS5002B examiné. Puis en utilisant des indicateurs de bifurcation pour localiser les zones de stabilité avec des solutions fiables pour surveiller les phénomènes d'instabilité. Pour éviter toute dégradation de la turbine étudiée et assurer un fonctionnement stable et sûr, en adoptant leur comportement réel à l'opération souhaitée pour prolonger leur durée de vie. Cela permet de détecter les dysfonctionnements et de suivre leur évolution, dans le but de planifier une intervention de maintenance, qui consiste à exploiter toutes les approches de détection de défaillance et les méthodes de supervision modernes pour développer des outils de surveillance intelligents adaptés à la turbine étudiée. Cependant, plusieurs séries de données prises pour les mesures directes des parties tournantes des arbres de la machine ont été réalisées à l'aide des différents capteurs positionnés sur ces arbres, mesurer en redondance les mouvements des arbres et autoriser le déclenchement immédiat d'alarmes en cas de dysfonctionnement et de violation des seuils de détection des vibrations, indiqués au tableau IV.2.

Tableau IV.2 : Alarmes de vibrations dans la turbine à gaz MS5002B

Palier N°	**Alarm level**	**Danger level**
Palier N° 1	12.7 mm/s	25.4 mm/s
Palier N° 4	12.7 mm/s	25.4 mm/s

IV.3 Modélisation du système palier-rotor de turbine MS5002B

La surveillance vibratoire des turbines à gaz implique de suivre leur performance en fonction de divers paramètres opérationnels. Cela s'avère relativement simple lorsqu'il s'agit de signaux vibratoires simples. Toutefois, cela devient complexe voire impraticable lorsque les signaux

vibratoires proviennent de sources multiples et présentent des dynamiques variées, comme c'est souvent le cas avec les machines rotatives. Ces dernières génèrent des vibrations qui se manifestent simultanément en plusieurs endroits de la turbine, affectant divers éléments avec différents types de vibrations. Dans ce contexte, le système palier-rotor, illustré de manière schématique dans la figure IV.3, est utilisé pour modéliser le comportement dynamique des vibrations de la turbine MS5002B. Ce système est composé de deux paliers lisses à film d'huile, d'un compresseur et d'une turbine.

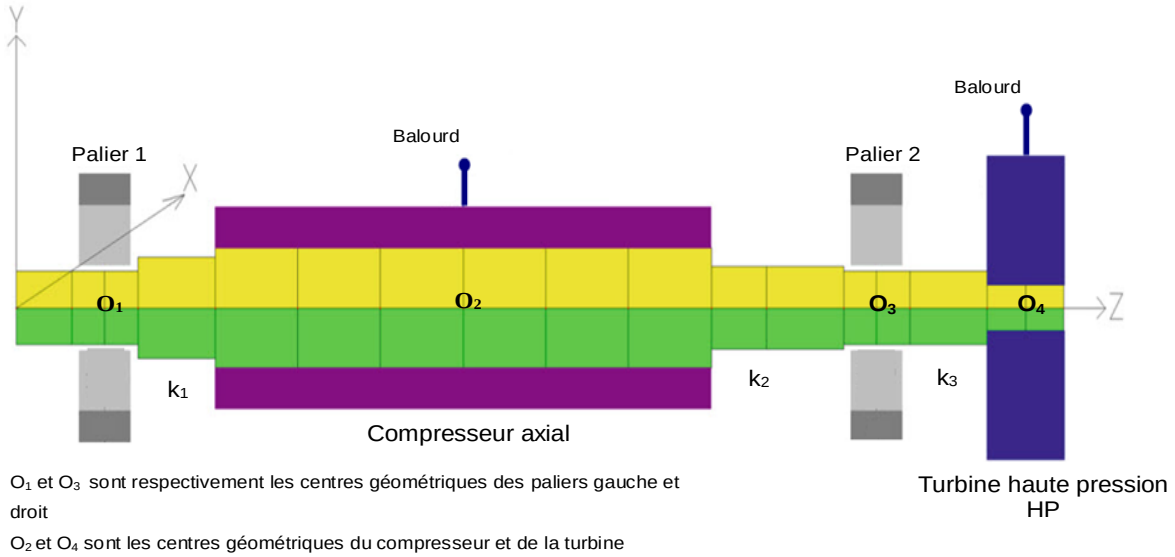


Figure IV.3 : Structure du système palier-rotor de turbine à gaz étudié

Dans le cadre de cette étude, notre attention s'est principalement portée sur l'analyse des vibrations radiales du rotor haute pression (HP). Cette orientation de notre recherche découle de la reconnaissance de l'incidence significative de ces vibrations sur le fonctionnement global de la turbine. Ainsi, notre étude s'est résolument focalisée sur l'examen approfondi des paliers lisses en raison de leur rôle crucial dans la gestion et l'atténuation des vibrations radiales du rotor HP. Les vibrations radiales, en particulier celles générées au sein du rotor HP, peuvent avoir des conséquences substantielles sur l'efficacité, la durabilité et la performance globale de la turbine. Elles sont non seulement responsables de l'usure prématurée des composants, mais elles peuvent également compromettre la stabilité du système et entraîner des coûts de maintenance importants. Par conséquent, leur compréhension approfondie et leur gestion efficace sont devenues des préoccupations majeures dans le domaine de l'ingénierie des turbines. Dans cette optique, notre travail de recherche s'est efforcé d'analyser en détail les caractéristiques des vibrations radiales spécifiquement associées au rotor HP. Au cœur de cette démarche, les paliers lisses ont été au

centre de nos préoccupations, car ils jouent un rôle critique dans la réduction des vibrations radiales et contribuent ainsi à améliorer la stabilité et l'efficacité globale de la turbine. Notre recherche s'est donc avérée essentielle pour mieux comprendre les vibrations radiales du rotor HP et pour proposer des solutions concrètes visant à les maîtriser. En pratique, la surveillance des vibrations est une tâche trop complexe et nécessite des données de fonctionnement robustes et fiables de la turbine, afin d'assurer une bonne protection de cette machine rotative en déclenchant automatiquement son arrêt ou en générant des alarmes avant que de graves dommages ne se produisent sur leurs composants. En effet, les vibrations enregistrées sur le système palier-rotor de turbine MS5002B examiné, peuvent être quantifiées par les différentes forces et les effets non linéaires du film d'huile, lorsque le film fluide est généré par le mouvement relatif des deux surfaces, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de contact entre l'arbre et le palier, ce qui donne des paliers hydrodynamiques. Ces paliers sont utilisés comme éléments de support pour les rotors de turbine, utilisés pour guider les arbres rotatifs, ils ont une capacité de charge remarquablement élevée, où la rotation de l'arbre génère un amortissement visqueux et une rigidité à l'intérieur du palier, comme indiqué sur la figure IV.4.

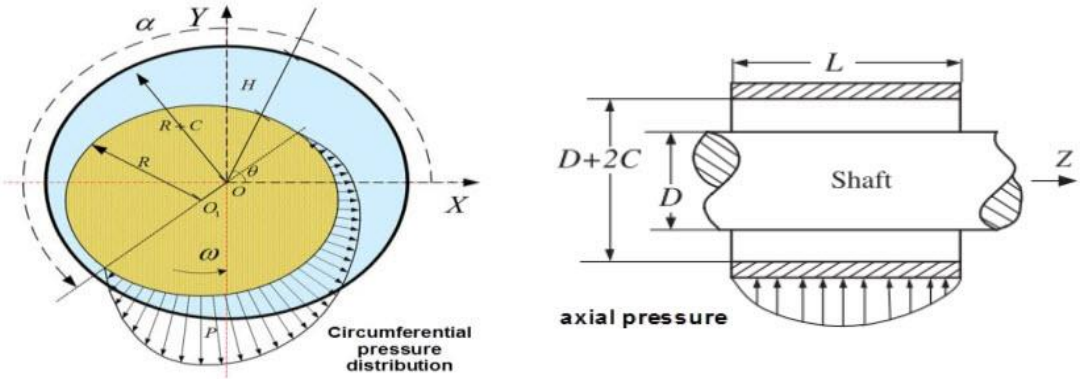


Figure IV.4 : Représentation de la répartition de pression du film d'huile

Capone a développé un modèle non linéaire de force hydrodynamique sous l'hypothèse du palier court [101], la théorie des paliers courts est utile pour les rapports longueur/diamètre jusqu'à L/D =1/2 et donne des approximations utiles des tendances des performances jusqu'à L/D =1. Dans le modèle de Capone, l'équation de Reynolds est exprimée dans le référentiel cartésien, figure IV.4, est donné comme suit [62-66, 69, 72, 91, 93] :

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z}\right) = -2(y'\sin\theta + x'\cos\theta) - y\cos\theta + x\sin\theta \quad \text{(IV.1)}$$

Où R et L sont, respectivement, le rayon et la longueur du palier, $z = Z/L$ $(-1/2 \le z \le 1/2)$ déplacement axial adimensionnelle, $p = P/6\mu\omega(R/C_b)$ pression adimensionnelle du film d'huile, C_b est le jeu radial du palier, x et y sont des déplacements horizontaux et verticaux adimensionnelle, $h = H/C_b$ $(h = 1 - x\cos\theta - y\sin\theta)$ épaisseur adimensionnelle du film d'huile. L'intégration de l'équation de Reynolds (IV.1) donne la distribution de pression adimensionnelle du film d'huile [67, 68, 71, 78,79, 81] :

$$p = \frac{1}{2}\left[\frac{L}{D}\right]^2 \frac{(x-2y')\sin\theta - (y+2x')\cos\theta}{(1-x\cos\theta - y\sin\theta)^3}\left(4z^2 - 1\right) \quad \text{(IV.2)}$$

Comme le montre la figure IV.4, la pression positive du film d'huile n'existe que dans le demi-cercle. Pour calculer la force non linéaire du film d'huile, il est très important de déterminer l'emplacement initial de la pression positive du film d'huile. Ici α, est défini comme l'angle initial de la pression positive du film d'huile. La pression positive du film d'huile existe dans la plage de [α, α+π] le long de la direction circonférentielle, comme le montre la figure IV.4. Les forces non linéaires totales du film d'huile sont calculées par la formulation donnée dans [80, 81,96] suivant [69, 84, 88, 92] :

$$\begin{aligned} F_X &= -\left[6\mu\omega\left(\frac{R}{C_b}\right)^2 RL\right]\int_\alpha^{\alpha+\pi}\int_{-1/2}^{1/2} p\cos\theta\, dz\, d\theta \\ F_Y &= -\left[6\mu\omega\left(\frac{R}{C_b}\right)^2 RL\right]\int_\alpha^{\alpha+\pi}\int_{-1/2}^{1/2} p\sin\theta\, dz\, d\theta \end{aligned} \quad \text{(IV.3)}$$

La substitution de (IV.2) dans (IV.3), donne les équations adimensionnelles des forces du film d'huile sont exprimées comme suit [69, 81, 84, 87] :

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{\sigma}F_X \\ \quad = 2\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+\pi} \frac{(x-2y')\sin\theta\cos\theta - (2x'+y)\cos^2\theta}{(1-x\cos\theta - y\sin\theta)^3}\, d\theta \\ f_y = \dfrac{1}{\sigma}F_Y \\ \quad = 2\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+\pi} \frac{(x-2y')\sin^2\theta - (y+2x')\cos\theta\sin\theta}{(1-x\cos\theta - y\sin\theta)^3}\, d\theta \end{cases} \quad \text{(IV.4)}$$

$$\text{Avec} \quad \sigma = \mu\omega RL\left(\frac{R}{C_b}\right)^2\left(\frac{L}{2R}\right)^2 \qquad \text{(IV.5)}$$

Ensuite, pour calculer l'intégration (IV.4), les équations (IV.4) réécrites comme suit [68, 79,97,103] :

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x-2y')I_3 - 2(y+2x')I_1 \\ f_y &= 2(x-2y')I_2 - 2(y+2x')I_2 \end{aligned} \qquad \text{(IV.6)}$$

Avec

$$\begin{aligned} I_1(x,y,\alpha) &= \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos^2\theta}{\left(1-x\cos\theta-y\sin\theta\right)^3}d\theta \\ I_2(x,y,\alpha) &= \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin^2\theta}{\left(1-x\cos\theta-y\sin\theta\right)^3}d\theta \\ I_3(x,y,\alpha) &= \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos\theta\sin\theta}{\left(1-x\cos\theta-y\sin\theta\right)^3}d\theta \end{aligned} \qquad \text{(IV.7)}$$

En introduisant $K(x,y,\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} g(x,y,z)d\theta$ avec $g(x,y,z) = \dfrac{1}{1-x\cos\theta-y\sin\theta}$

En utilisant la règle intégrale de Leibniz, les variables I_1, I_2 et I_3 sont calculés comme suit [94,95,98-100] :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial g(\alpha)}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial g(\alpha+\pi)}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2}g(\alpha)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{1}{2}g(\alpha+\pi)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} \\ I_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \frac{\partial g(\alpha)}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial g(\alpha+\pi)}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{1}{2}g(\alpha)\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{1}{2}g(\alpha+\pi)\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} \\ I_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial x\partial y} - \frac{\partial g(\alpha+\pi)}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial g(\alpha)}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial g(\alpha)}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{1}{2}g(\alpha)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} - \frac{1}{2}g(\alpha+\pi)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} \end{aligned} \qquad \text{(IV.8)}$$

Ensuite, la substitution de (IV.8) dans (IV.6), les forces f_x et f_y sont exprimées comme suit [60, 76,85, 89,82] :

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = -\frac{\left[\left(x-2y'\right)^2+\left(y+2x'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{1-x^2-y^2} \times \begin{bmatrix} 3xV(x,y,\alpha) - T(x,y,\alpha)\sin\alpha - 2S(x,y,\alpha)\cos\alpha \\ 3yV(x,y,\alpha) + T(x,y,\alpha)\cos\alpha - 2S(x,y,\alpha)\sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.9)}$$

Où

$$\begin{cases} V(x,y,\alpha)=\dfrac{2+\left(y\cos\alpha-x\sin\alpha\right)T(x,y,\alpha)}{1-y^2-x^2} \\ S(x,y,\alpha)=\dfrac{y\sin\alpha+x\cos\alpha}{1-\left(y\sin\alpha+x\cos\alpha\right)^2} \\ T(x,y,\alpha)=\dfrac{2}{\left(1-y^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\dfrac{\pi}{2}+arctg\dfrac{y\cos\alpha-x\sin\alpha}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \\ \alpha=arctg\dfrac{2x'+y}{x-2y'}-\dfrac{\pi}{2}sign\left(2x'+y\right)-\dfrac{\pi}{2}sign\left(\dfrac{y+2x'}{x-2y'}\right) \end{cases} \quad \text{(IV.10)}$$

Où σ est le nombre de Sommerfeld, μ est la viscosité dynamique tandis que f_x, f_y, sont les forces non linéaires adimensionnelles du film d'huile.

IV.4 Équations gouvernant le système palier-rotor de la turbine MS5002B

Par rapport aux déformations horizontales et verticales dues à la force du film d'huile et à l'excentricité de la masse, la déformation de cisaillement causée par la force de torsion et le couple gyroscopique est relativement faible. Ainsi, les équations dynamiques d'un système palier-rotor d'une turbine à gaz figure IV.3 sont établies en négligeant la déformation de cisaillement pour mettre en évidence l'effet de la force du film d'huile. Afin de simuler la force complexe du film d'huile, le modèle de force hydrodynamique de Capone est utilisé comme suit :

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{X}_1+c\dot{X}_1+k_1(X_1-X_2)=F_{X_1} \\ &m_1\ddot{Y}_1+c\dot{Y}_1+k_1(Y_1-Y_2)=F_{Y_1}-m_1g \\ &m_2\ddot{X}_2+c\dot{X}_2+k_1(X_2-X_1)+k_2(X_2-X_3)=m_2r\omega^2\cos(\omega t) \\ &m_2\ddot{Y}_2+c\dot{Y}_2+k_1(Y_2-Y_1)+k_2(Y_2-Y_3)=m_2r\omega^2\sin(\omega t)-m_2g \\ &m_3\ddot{X}_3+c\dot{X}_3+k_2(X_3-X_2)+k_3(X_3-X_4)=F_{X_3} \\ &m_3\ddot{Y}_3+c\dot{Y}_3+k_2(Y_3-Y_2)+k_3(Y_3-Y_4)=F_{Y_3}-m_3g \\ &m_4\ddot{X}_4+c\dot{X}_4+k_3(X_4-X_3)=m_4r\omega^2\cos(\omega t) \\ &m_4\ddot{Y}_4+c\dot{Y}_4+k_3(Y_4-Y_3)=m_4r\omega^2\sin(\omega t)-m_4g \end{aligned} \quad \text{(IV.11)}$$

Où '.' dénote d/dt, g est l'accélération de la gravité, ω représente la vitesse angulaire du rotor et F_{X1}, F_{Y1}, F_{X3} et F_{Y3} sont les composantes des forces non linéaires du film d'huile dans les paliers lisses suivant OX, OY. r est l'excentricité du rotor. k_1, k_2, k_3 sont la matrice de rigidité du rotor. c est l'amortissement du système.

X_i, Y_i sont les déplacements horizontaux et verticaux. m_1 et m_3 sont respectivement les masses concentrées des paliers gauche et droit. m_2 et m_4 sont les masses concentrées du compresseur et de la turbine, respectivement.

Pour faciliter le calcul, les transformations adimensionnelles sont données comme suit :

$$\omega t = \tau, e = \frac{r}{C_b}, x_i = \frac{X_i}{C_b}, y_i = \frac{Y_i}{C_b} \quad \text{(IV.12)}$$

$$\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}, \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \quad \text{(IV.13)}$$

$$x' = \frac{dx}{d\tau}, y' = \frac{dy}{d\tau}, x'' = \frac{d^2x}{d\tau^2}, y'' = \frac{d^2y}{d\tau^2} \quad \text{(IV.14)}$$

La substitution de la force du film d'huile (IV.4) dans (IV.11), Par conséquent, l'équation (IV.11) peut être convertie en ce qui suit forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned}
&x_1'' + \frac{c}{m_1\omega} x_1' + \frac{k_1}{m_1\omega^2}(x_1 - x_2) = \frac{\sigma}{m_1 C_b \omega^2} f_{x1} \\
&y_1'' + \frac{c}{m_1\omega} y_1' + \frac{k_1}{m_1\omega^2}(y_1 - y_2) = \frac{\sigma}{m_1 C_b \omega^2} f_{y1} - \frac{g}{C_b\omega^2} \\
&x_2'' + \frac{c}{m_2\omega} x_2' + \frac{k_1}{m_2\omega^2}(x_2 - x_1) + \frac{k_2}{m_2\omega^2}(x_2 - x_3) = e\cos(\tau) \\
&y_2'' + \frac{c}{m_2\omega} y_2' + \frac{k_1}{m_2\omega^2}(y_2 - y_1) + \frac{k_2}{m_2\omega^2}(y_2 - y_3) = e\sin(\tau) - \frac{g}{C_b\omega^2} \\
&x_3'' + \frac{c}{m_3\omega} x_3' + \frac{k_2}{m_3\omega^2}(x_3 - x_2) + \frac{k_3}{m_3\omega^2}(x_3 - x_4) = \frac{\sigma}{m_3 C_b \omega^2} f_{x3} \\
&y_3'' + \frac{c}{m_3\omega} y_3' + \frac{k_2}{m_3\omega^2}(y_3 - y_2) + \frac{k_3}{m_3\omega^2}(y_3 - y_4) = \frac{\sigma}{m_3 C_b \omega^2} f_{y3} - \frac{g}{C_b\omega^2} \\
&x_4'' + \frac{c}{m_4\omega} x_4' + \frac{k_3}{m_4\omega^2}(x_4 - x_3) = e\cos(\tau) \\
&y_4'' + \frac{c}{m_4\omega} y_4' + \frac{k_3}{m_4\omega^2}(y_4 - y_3) = e\sin(\tau) - \frac{g}{C_b\omega^2}
\end{aligned} \quad \text{(IV.15)}$$

Pour résoudre les équations non linéaires du système (IV.15), ces huit équations du 2ème ordre sont décomposées en seize équations du 1er ordre. Les variables d'état du modèle de système palier-rotor de la turbine MS5002B sont présentées comme suit :

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8, \bar{x}_9, \bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \bar{x}_{13}, \bar{x}_{14}, \bar{x}_{15}, \bar{x}_{16}\} \\
&= \{x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', x_4, x_4', y_1, y_1', y_2, y_2', y_3, y_3', y_4, y_4'\}
\end{aligned} \quad \text{(IV.16)}$$

Alors les équations du mouvement deviennent :

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1' &= \bar{x}_2 \\
\bar{x}_2' &= -\frac{c}{m_1\omega}\bar{x}_2 - \frac{k_1}{m_1\omega^2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_3) + \frac{\sigma}{m_1 C_b \omega^2} f_{\bar{x}_1} \\
\bar{x}_3' &= \bar{x}_4 \\
\bar{x}_4' &= -\frac{c}{m_2\omega}\bar{x}_4 - \frac{k_1}{m_2\omega^2}(\bar{x}_3 - \bar{x}_1) - \frac{k_2}{m_2\omega^2}(\bar{x}_3 - \bar{x}_5) + e\cos(\tau) \\
\bar{x}_5' &= \bar{x}_6 \\
\bar{x}_6' &= -\frac{c}{m_3\omega}\bar{x}_6 - \frac{k_2}{m_3\omega^2}(\bar{x}_5 - \bar{x}_3) - \frac{k_3}{m_3\omega^2}(\bar{x}_5 - \bar{x}_7) + \frac{\sigma}{m_3 C_b \omega^2} f_{\bar{x}_5} \\
\bar{x}_7' &= \bar{x}_8 \\
\bar{x}_8' &= -\frac{c}{m_4\omega}\bar{x}_8 - \frac{k_3}{m_4\omega^2}(\bar{x}_7 - \bar{x}_5) + e\cos(\tau) \\
\bar{x}_9' &= \bar{x}_{10} \\
\bar{x}_{10}' &= -\frac{c}{m_1\omega}\bar{x}_{10} - \frac{k_1}{m_1\omega^2}(\bar{x}_9 - \bar{x}_{11}) + \frac{\sigma}{m_1 C_b \omega^2} f_{\bar{x}_9} - \frac{g}{C_b\omega^2} \\
\bar{x}_{11}' &= \bar{x}_{12} \\
\bar{x}_{12}' &= -\frac{c}{m_2\omega}\bar{x}_{12} - \frac{k_1}{m_2\omega^2}(\bar{x}_{11} - \bar{x}_9) - \frac{k_2}{m_2\omega^2}(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{13}) + e\sin(\tau) - \frac{g}{C_b\omega^2} \\
\bar{x}_{13}' &= \bar{x}_{14} \\
\bar{x}_{14}' &= -\frac{c}{m_3\omega}\bar{x}_{14} - \frac{k_2}{m_3\omega^2}(\bar{x}_{13} - \bar{x}_{11}) - \frac{k_3}{m_3\omega^2}(\bar{x}_{13} - \bar{x}_{15}) + \frac{\sigma}{m_3 C_b \omega^2} f_{\bar{x}_{13}} - \frac{g}{C_b\omega^2} \\
\bar{x}_{15}' &= \bar{x}_{16} \\
\bar{x}_{16}' &= -\frac{c}{m_4\omega}\bar{x}_{16} - \frac{k_3}{m_4\omega^2}(\bar{x}_{15} - \bar{x}_{13}) + e\sin(\tau) - \frac{g}{C_b\omega^2}
\end{aligned}
\qquad \text{(IV.17)}
$$

Cette représentation du système (IV.17) est de la forme $\bar{x}' = f(\bar{x}, \omega)$, avec les points d'équilibre à l'état stationnaire $\bar{x}_s$ sont représentés dans l'espace de phase comme les solutions des états d'équilibre, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(\bar{x}_s, \omega) = 0$.

Pour l'analyse de la stabilité du système rotor-palier de turbine MS5002B, la stabilité des points fixes $\bar{x}_s$ représente les points d'équilibre du système turbine formellement représentés par (IV.17). Par conséquent, le problème qui se pose est de savoir si les points fixes sont stables ou non. Supposons que le système d'équations (IV.17) ait un point fixe à $\bar{x} = \bar{x}_s$, la linéarisation de ce système d'équations (IV.17) autour de cet état d'équilibre, donne :

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_s) + J_{\bar{x}_s}.(\bar{x} - \bar{x}_s) + O\left((\bar{x} - \bar{x}_s)^2\right) \quad \text{(IV.18)}$$

Où J est la matrice jacobienne de *f* évaluée en $\bar{x}_s$,écrit par:

$$J \equiv \left[J_{ij} \right] \text{ Avec } J_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{(IV.19)}$$

L'équation (IV.18) peut ce transformée en :

$$\frac{d(\bar{x} - \bar{x}_s)}{dt} = J_{\bar{x}_s}.(\bar{x} - \bar{x}_s) \quad \text{(IV.20)}$$

Le système d'équation (IV.20) étant linéaire à coefficients constants, ses solutions sont une somme d'exponentielles exprimées comme suit :

$$\bar{x} - \bar{x}_s = \sum_i A_i.\exp(\lambda_i t) \quad \text{(IV.21)}$$

Où λ_i sont les valeurs propres du problème. Sachant que λ_i sont des solutions du système suivant :

$$\det(J - \lambda.I) = 0 \quad \text{(IV.22)}$$

Où *I* est la matrice identité et *det* est le déterminant. Les solutions λ_i sont réelles ou imaginaires. Par conséquent la stabilité de l'état d'équilibre dépend des valeurs propres. On a deux cas suivants :

- si pour tout i ∈ [1 ; n], Re (λ_i) ≤ 0 le point fixe $\bar{x}_s$ est stable.

- s'il existe j ∈ [1 ; n] tel que Re(λ_j) > 0, le point fixe $\bar{x}_s$ est instable.

IV.5 Comportement de bifurcation des vibrations du système palier-rotor de turbine MS5002B

La modélisation du comportement de bifurcation des vibrations du système rotor-palier de turbine MS5002B est effectuée dans cette section, en tenant compte des effets des forces non linéaires du film d'huile, en fonction de l'état de fonctionnement observé de la turbine, sous différentes vitesses de rotation de rotor. Ainsi qu'en présence d'instabilités générées par le phénomène de déséquilibre sur les lignes d'arbre du système palier-rotor de turbine. Cette dynamique non linéaire sera modélisée en utilisant le diagramme de bifurcation, le portrait de phase, la carte de Poincaré et le spectre de fréquence, afin de déterminer les zones de fonctionnement stables de la turbine étudiée et de garantir un bon fonctionnement.

L'application de la théorie de bifurcation de Hopf au système palier-rotor de turbine MS5002B est basée sur l'étude du comportement dynamique donné dans le système

d'équations de (IV.17), cette formulation ayant la forme $\bar{x}' = f(\bar{x}, \omega)$ appropriée pour l'application de la théorie de bifurcation de Hopf. De plus, une position d'équilibre stationnaire $\bar{x}_s$ est déterminée pour la vitesse de rotation ω, qui est considérée comme le paramètre de contrôle α, lorsque tous les autres paramètres du système sont supposés être définis. Ainsi, selon la théorie de la bifurcation de Hopf, si le paramètre ω devient supérieur à une valeur critique ω_c, ce qui implique qu'il existe un point stationnaire $\bar{x}_s$ perdra sa stabilité linéaire. Pour effectuer l'analyse de bifurcation de Hopf, tout d'abord, nous développons la fonction *f*, côté droit de (IV.17), dans une série de Taylor autour du point d'équilibre $\bar{x}_s$ comme suit :

$$f(\bar{x}, \omega) = f(\bar{x}_s, \omega) + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_s, \omega)(\bar{x} - \bar{x}_s) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2}(\bar{x}_s, \omega)(\bar{x} - \bar{x}_s)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3}(\bar{x}_s, \omega)(\bar{x} - \bar{x}_s)^3 + ... \quad \text{(IV.23)}$$

Où le terme $f(\bar{x}_s, \omega) = 0$ est utilisé pour déterminer le point d'équilibre. Le terme $\partial f / \partial \bar{x}(\bar{x}_s, \omega)$ utilisé pour déterminer les performances dynamiques grâce à l'analyse des valeurs propres. Les termes $\partial^2 f / \partial \bar{x}^2(\bar{x}_s, \omega)$ et $\partial^3 f / \partial \bar{x}^3(\bar{x}_s, \omega)$ sont utilisés pour déterminer la stabilité des solutions périodiques. En ce sens, le comportement dynamique non linéaire du système palier-rotor de turbine à gaz MS5002B est décidé à l'aide de ce modèle analytique proposé, pour obtenir la réponse dynamique non linéaire du déplacement et de la vitesse de rotation du système palier-rotor de turbine étudié, avec calculs et intégrations numériques utilisant le diagramme de bifurcation, le portrait de phase, la carte de Poincaré et le spectre de fréquence. Cela transforme la résolution du problème non linéaire en celle d'une succession d'un système linéaire, ce qui est mis en évidence dans la section suivante des résultats des recherches et de l'application.

IV.6 Investigations et analyse des résultats obtenus

Dans cette section, les investigations et les différentes analyses des résultats obtenus sont présentées pour mettre en évidence l'étude de bifurcation appliquée expérimentalement à la turbine à gaz MS5002B examinée. Dans un premier temps, les paramètres de modélisation du système palier-rotor de turbine et leur initialisation sont effectués, pour caractériser la dynamique non linéaire de ce système avec une modélisation des zones de fonctionnement en régimes périodiques et quasi-périodiques qui a été développée afin de réduire les effets d'instabilité. Ensuite, les différents comportements dynamiques du système palier-rotor de

turbine sont présentés, en utilisant les formalismes du diagramme de bifurcation, le portrait de phase, la carte de Poincaré et le spectre de fréquence.

Par conséquent, les résultats les plus significatifs seront présentés, pour montrer la solution du problème de bifurcation adaptée à la turbine à gaz MS5002B examinée.

Dans ce travail, l'équipement d'acquisition de données est de type Bently Nevada BN3500, composé d'un capteur de vibrations au palier n°1, d'un capteur magnétique (Magnetic Speed Pickup) pour mesurer la vitesse de rotation et d'un capteur à thermocouple pour mesurer la variation de température du film d'huile dans le palier N°1. Les positions des différents capteurs sont représentées sur les figures IV.5, IV.6 et IV.7.



Figure IV.5 : Position du capteur de vibrations

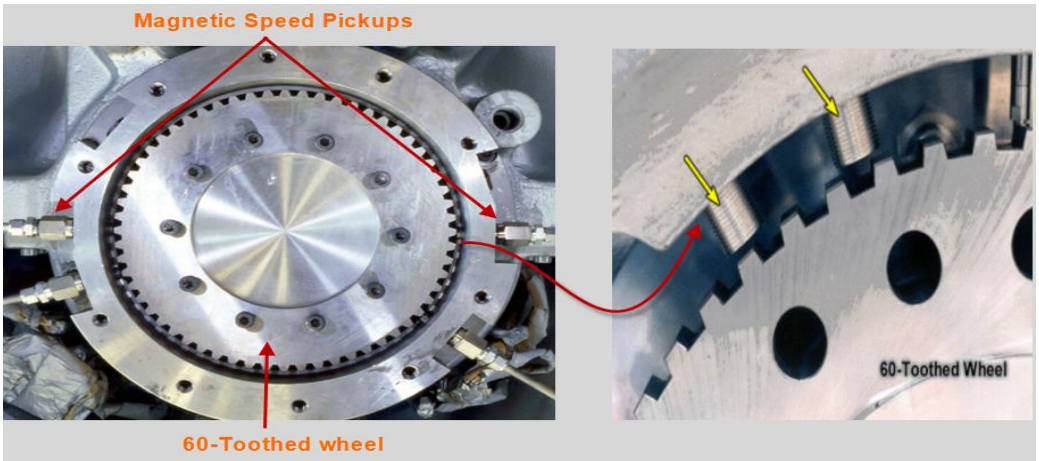


Figure IV.6 : Position du capteur magnétique (Magnetic Speed Pickup)

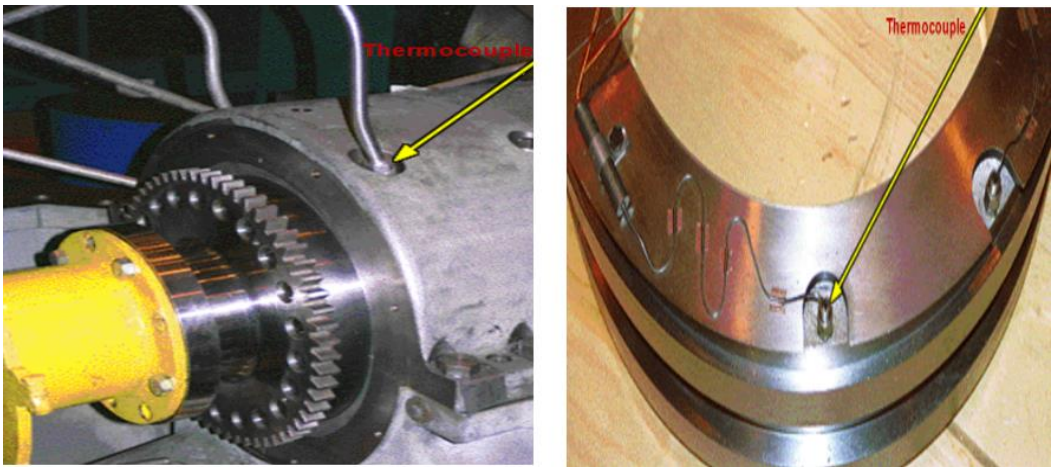


Figure IV.7 : Position du capteur thermocouple

IV.6.1 Modélisation des paramètres du système palier-rotor examiné

Pour explorer en profondeur les caractéristiques dynamiques non linéaires complexes, des diagrammes de bifurcation, des spectres de fréquence, des portraits de phase et des cartes de Poincaré sont choisis comme outils pour étudier le comportement dynamique non linéaire du système palier-rotor de la turbine à gaz MS5002B examinée. Afin de garantir la validité des résultats obtenus, il est essentiel d'éliminer tout impact de la réponse transitoire due aux conditions initiales. Pour ce faire, les 139 premiers cycles de réponse du palier-rotor sont exclus de l'analyse. Cette exclusion permet de s'assurer que les données utilisées se trouvent en régime permanent, offrant ainsi une base solide pour la simulation numérique. Les 261 cycles suivants sont ensuite utilisés pour mener à bien cette simulation numérique, fournissant ainsi des résultats fiables et significatifs pour l'étude du comportement dynamique non linéaire du système. En combinant ces outils d'analyse avancés et en éliminant les perturbations transitoires, notre approche vise à fournir une compréhension approfondie et précise des caractéristiques dynamiques du système palier-rotor de la turbine à gaz MS5002B, ce qui est essentiel pour son fonctionnement sûr et efficace. Pour cela, l'ensemble de valeurs initiales adoptés pour l'intégration numérique étaient :

$$\bar{x}_{0i} = \{\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}, \cdots, \bar{x}_{016}\}$$
$$= \begin{Bmatrix} 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-5}, 25.7\times10^{-3}, 10^{-5}, -35.8\times10^{-4}, 10^{-5}, 36.4\times10^{-5}, \\ 10^{-5}, 8\times10^{-5}, 10^{-5}, 47\times10^{-8}, 10^{-5}, 52\times10^{-5}, 10^{-5}, -32.14\times10^{-5} \end{Bmatrix}$$

Avec une pas de temps π/36 a été pris pour l'intégration numérique. Les paramètres du modèle simulé du système palier-rotor de la turbine à gaz MS5002B sont donnés dans le tableau IV.3.

Tableau IV.3 : paramètres du système palier-rotor de turbine étudié

Paramètre	**Valeur**	**Unité**
masse concentrée du palier N°1 m_1 masse concentrée du compresseur m_2 masse concentrée du palier N°2 m_3 masse concentrée de turbine m_4	50 6480 50 200	[kg]
Rigidité du rotor k	8×10^6	[N/m]
Amortissement du rotor c	500	[N.s/m]
Rayon du palier R Longueur du palier L Jeu radial du palier C_b	101.89 122.27 0.2	[mm]
Excentricité du rotor r	0.06	[mm]
Viscosité dynamique μ	0.03	[Pa.s]

Les variations des différents diagrammes de bifurcation sont représentées sur les figures IV.8, IV.9, IV.10 et IV.11 en fonction de la vitesse angulaire du rotor de la turbine, pour révéler les zones d'instabilité liées aux différents modèles de vitesse de fonctionnement de la turbine. Ainsi, Les figures IV.8, IV.9, IV.10 et IV.11 montrées respectivement les diagrammes de bifurcation du déplacement adimensionnelle dans le sens horizontal pour le centre du rotor dans le palier N°1, le centre du compresseur, le centre du rotor dans le palier N°2 et le centre de la turbine de sorte que la vitesse angulaire varie dans la plage de 1 rad/s à 555 rad/s. Cependant, l'évolution des diagrammes de bifurcation obtenus à partir du système palier-rotor de turbine, avec l'augmentation de la vitesse angulaire ω sont discutées dans trois zones. Dans la première zone pour $\omega \leq 50$ rad/s, le mouvement du centre du rotor dans le palier N °1 est périodique de période un (période-1) de sorte que le mouvement de période un perd sa stabilité à $\omega > 50$ rad/s. Aussi, lorsque $\omega \leq 22$ rad/s le mouvement du centre du compresseur est périodique de période quatre (période-4) et également le mouvement de période quatre perd sa stabilité à $\omega > 22$ rad/s. D'autre part le centre du rotor dans le palier N °2 et le centre de la turbine effectuent respectivement un mouvement périodique à trois périodes (période-3) et à double période (période-2) lorsque $\omega \leq 98$ rad/s et les mouvements de trois et de doubles périodes perd sa stabilité à $\omega > 98$ rad/s. Avec l'augmentation de la vitesse angulaire, pour la deuxième zone, la bifurcation de Hopf sous-critique se produit lorsque $\omega = 51$ rad/s pour le centre du rotor dans le palier N°1, pour le centre du compresseur la bifurcation de Hopf sous-critique se produit à $\omega = 23$ rad/s tandis que la bifurcation de Hopf sous-critique se produit à $\omega = 99$ rad/s pour le centre de la turbine et le centre du rotor dans le palier N °2 et conduit le mouvement périodique du système à un mouvement quasi-périodique.

Lorsque la vitesse angulaire est de $50 < \omega < 200$ rad/s, le mouvement dynamique du centre du rotor dans le palier N°1 subit un mouvement quasi-périodique. Même le mouvement du centre du compresseur devient quasi-périodique dans $22 < \omega < 200$ rad/s. Également le centre du rotor dans le palier N °2 et le centre de la turbine effectuent un mouvement quasi-périodique dans $98 < \omega < 200$ rad/s. Au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente, pour la troisième zone, le mouvement quasi-périodique du système évolue en un mouvement périodique. De sorte que le mouvement du centre du rotor dans le palier N°1, le centre du compresseur, le centre du rotor dans le palier N °2 et le centre de la turbine devient périodique dans $200 \leq \omega \leq 555$.

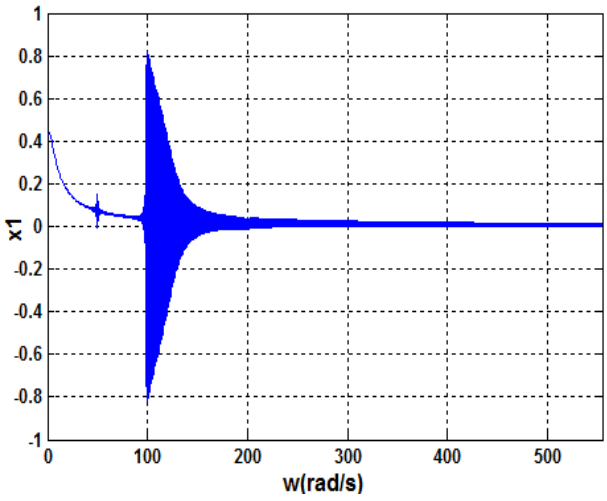


Figure IV.8: Diagramme de bifurcation du centre du rotor dans le palier N°1

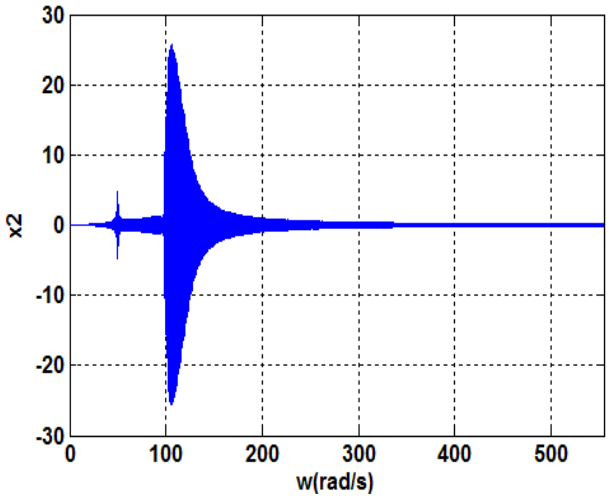


Figure IV.9: Diagramme de bifurcation du centre du compresseur

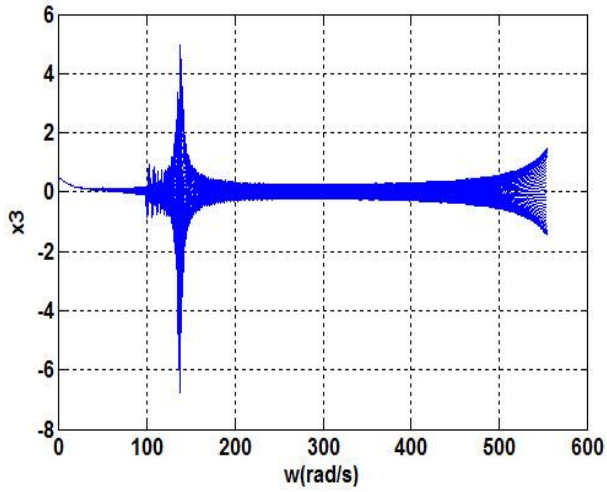


Figure IV.10: Diagramme de bifurcation du centre du rotor dans le palier N°2

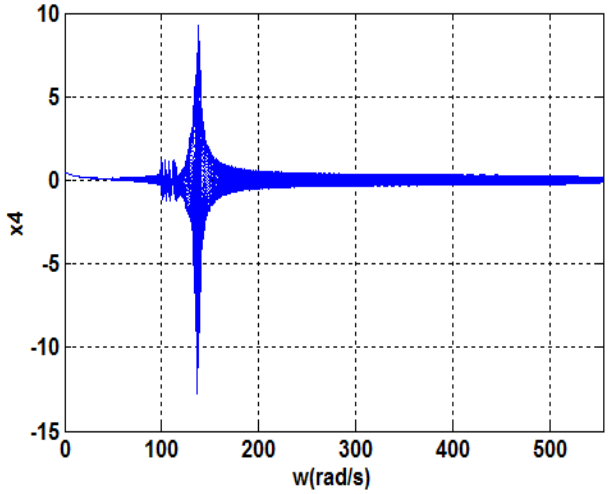


Figure IV.11: Diagramme de bifurcation du centre de la turbine

IV.6.2 Comportement dynamique du système palier-rotor de turbine examiné

Afin d'approfondir notre compréhension des comportements dynamiques du système palier-rotor dans diverses plages de variation de vitesse angulaire, nous utilisons une analyse approfondie basée sur plusieurs méthodes. Tout d'abord, nous examinons le comportement dynamique en utilisant les spectres de fréquence, qui sont générés pour chaque intervalle de variation de vitesse de la turbine. Ces spectres présentent des pics qui renferment des informations précieuses sur la fréquence des modes de vibration impactant le système. En parallèle, nous recourons à l'analyse des portraits de phase, qui met en lumière l'ensemble des trajectoires des mouvements vibratoires pour les différentes plages de variation de vitesse de la turbine. Cette approche nous permet de saisir les mécanismes sous-jacents à l'émergence de phénomènes vibratoires ainsi que les cycles limites du système palier-rotor de la turbine étudiée. Enfin, pour examiner plus en profondeur les variations périodiques ou quasi-périodiques des orbites vibratoires, nous utilisons la carte de Poincaré. Cet outil d'analyse nous permet d'explorer les dynamiques complexes qui se manifestent au cours du fonctionnement du système palier-rotor de la turbine, en nous donnant un aperçu plus complet de ces phénomènes. Cependant**,** Les figures IV.12 et IV.13 illustrent les diagrammes de forme d'onde temporelle dans la direction horizontale x, le spectre de fréquence, le portrait de phase et la carte de Poincaré du centre de la turbine et le centre du rotor dans le palier N°2 à la vitesse angulaire de $\omega = 98 \text{rad /s}$. Pour le centre de la turbine, figure IV.12, Il existe deux composantes de fréquence discrètes correspondant à la vitesse de rotation $1/2 \times f_r$ et f_r dans le spectre de fréquence, figure 12.B, et un cercle limité dans le portrait de phase, Figure 12.C. La trajectoire du centre de la turbine est régulière. Il existe deux points discrets dans la carte de Poincaré, figure 12.D, Cela prouve que le mouvement est stable avec double période $T=2\times T_0=4\pi$.

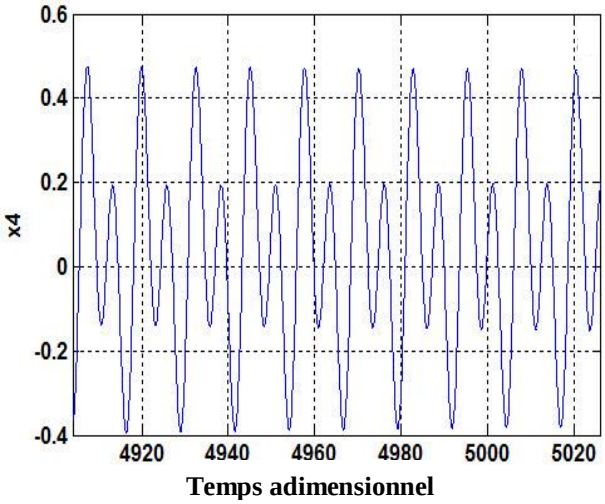


Figure 12.A : Forme d'onde temporelle de x_4

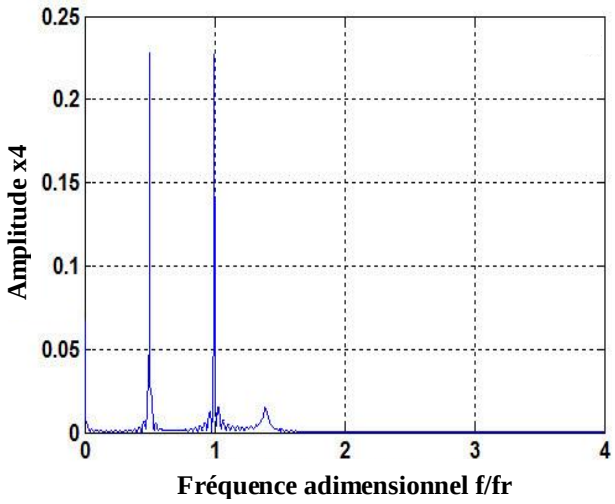


Figure 12.B: Spectre de fréquence de x_4

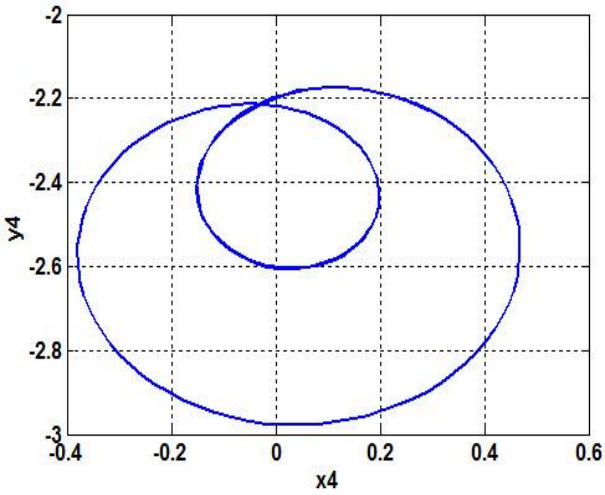


Figure 12.C: Portrait de phase de y_4 en fonction x_4

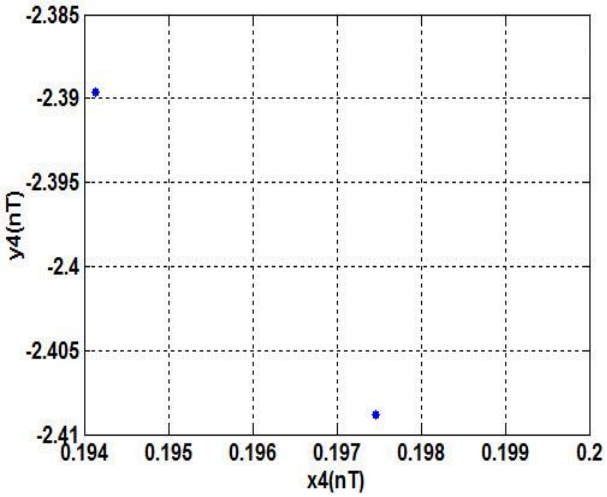


Figure 12.D: Carte de Poincaré de y_4 en fonction x_4

Figure IV.12 : Mouvement périodique du centre de la turbine à $\omega = 98\,\text{rad/s}$ avec une double période $2T_0$

En outre, pour le centre du rotor dans le palier N°2, figure IV.13, Il existe deux composantes de fréquence discrètes f_r et $2\times f_r$ causé par la force d'inertie du balourd du rotor HP, figure 13.B, là encore il y a un cercle limité dans le portrait de phase, figure 13.C, aussi il existe trois points discrets dans la carte de Poincaré, figure 13.D, Par conséquent le mouvement est stable avec trois périodes $T = 3\times T_0 = 6\pi$.

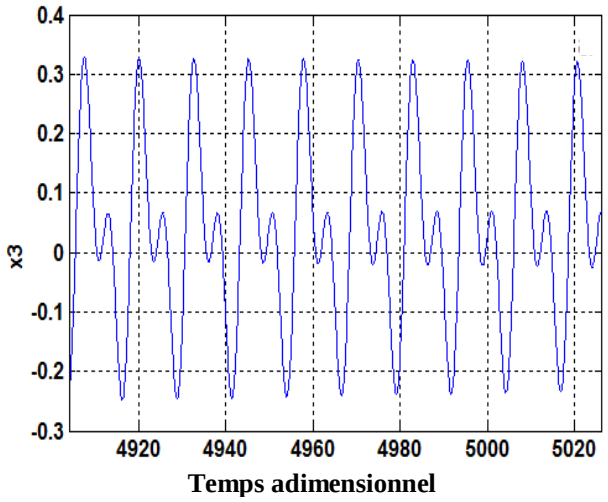


Figure 13.A: Forme d'onde temporelle de x_3

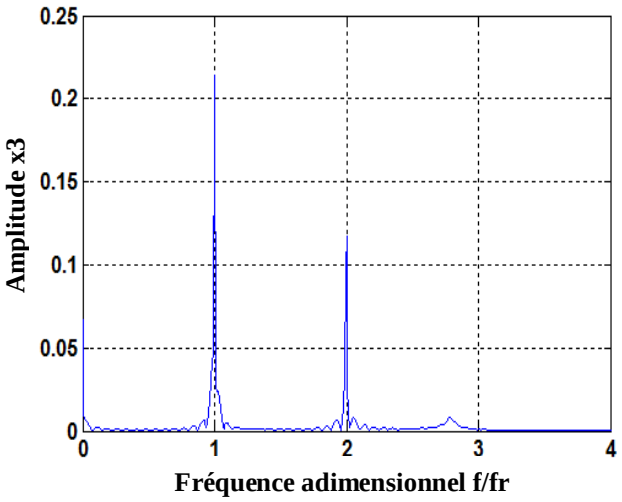


Figure 13.B: Spectre de fréquence de x_3

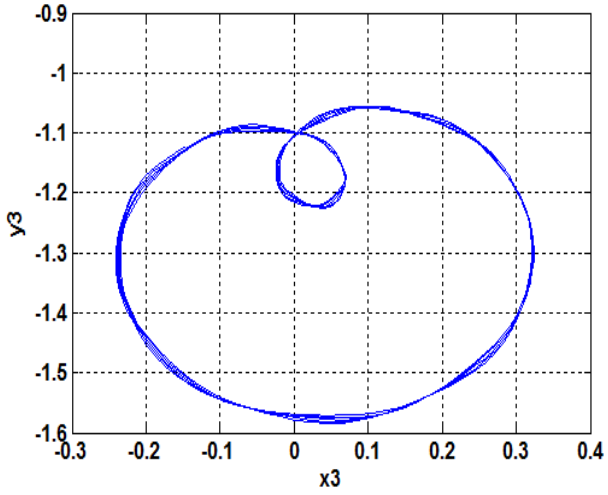


Figure 13.C: Portrait de phase de y_3 en fonction x_3

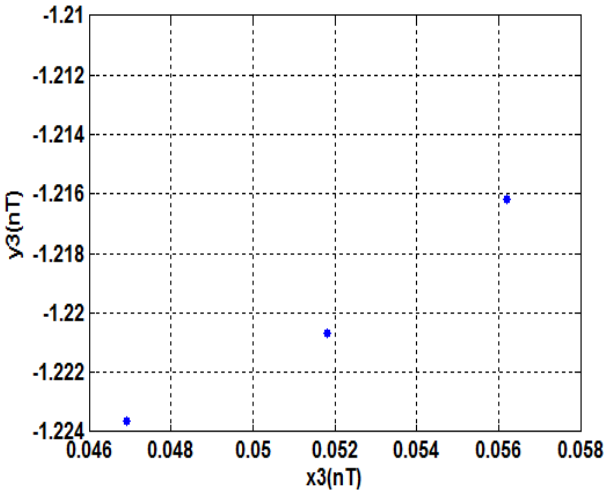


Figure 13.D: Carte de Poincaré de y_3 en fonction x_3

Figure IV.13 : Mouvement périodique du centre du rotor dans le palier N°2 à $\omega = 98$ rad/s avec triple période $3T_0$

Avec l'augmentation de la vitesse angulaire de la turbine dans l'intervalle $98 < \omega < 200$ rad/s, on observe l'apparition du mouvement quasi-périodique au centre de la turbine et au centre du rotor dans le palier N°2 comme le montrent les figures IV.14 et IV.15 à la vitesse angulaire de $\omega = 110$ rad/s et $\omega = 109$ rad/s respectivement . Par conséquent, la figure IV.14 montre le mouvement quasi-périodique du centre de la turbine à forme d'onde temporelle dans la direction x_4, comme le montre la figure 14.A à la vitesse critique de $\omega = 110$ rad/s, il existe deux composantes de fréquences discrètes avec des amplitudes de vibration dans l'ordre de 0,33 et 0,39 comme le montre la figure 14.B, correspondant aux vitesses de rotation f_r et $9/4 \times f_r$, avec un risque d'amplitude accrue des vibrations du rotor de la turbine.

De plus plusieurs modes de vibration peuvent apparaître lors du fonctionnement de la turbine car les trajectoires sont très désordonnées dans les cercles limites dans le portrait de phase de la figure 14.C. Par ailleurs, les projections de la section de Poincaré sont de type courbe fermée de la figure 14.D, indiquant le caractère quasi-périodique du mouvement du système palier-rotor de turbine. Ce qui peut être interprété comme signifiant que l'effet de force du film d'huile non linéaire est très fort. En conséquence, le système devient instable et vibre fortement.

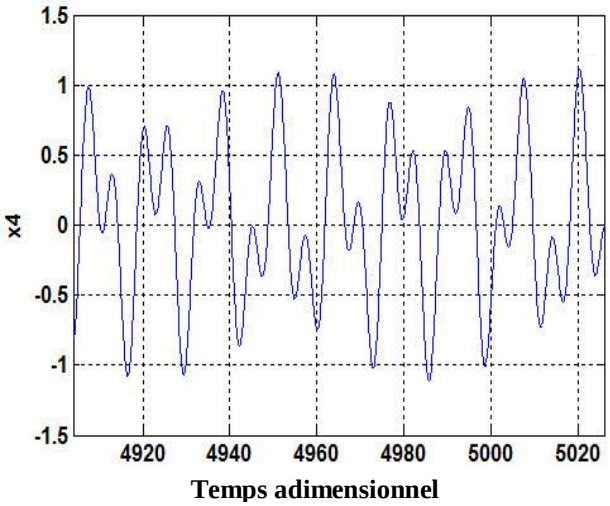


Figure 14.A: Forme d'onde temporelle de x_4

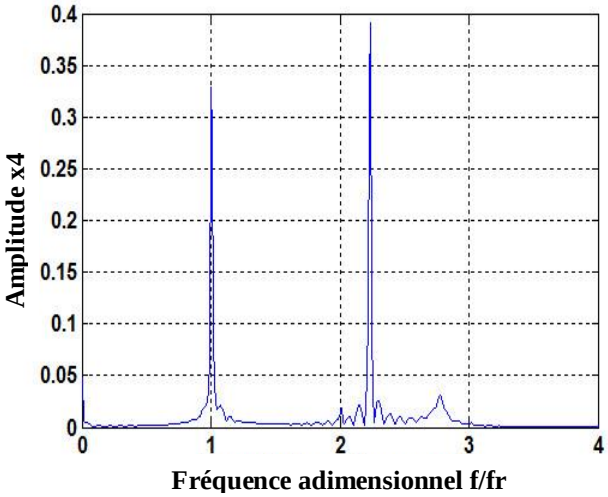


Figure 14.B: Spectre de fréquence de x_4

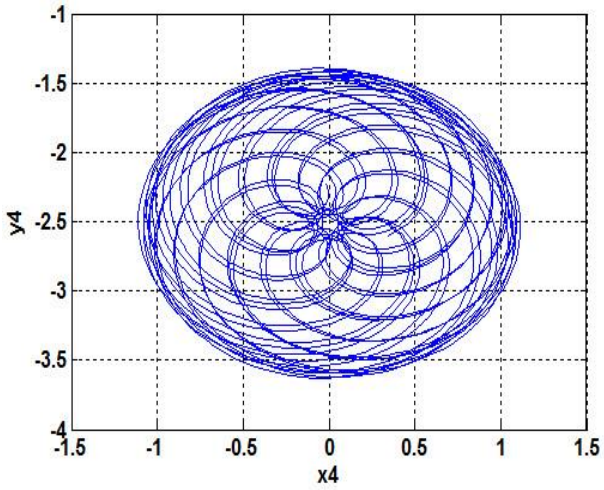


Figure 14.C: Portrait de phase de y_4 en fonction x_4

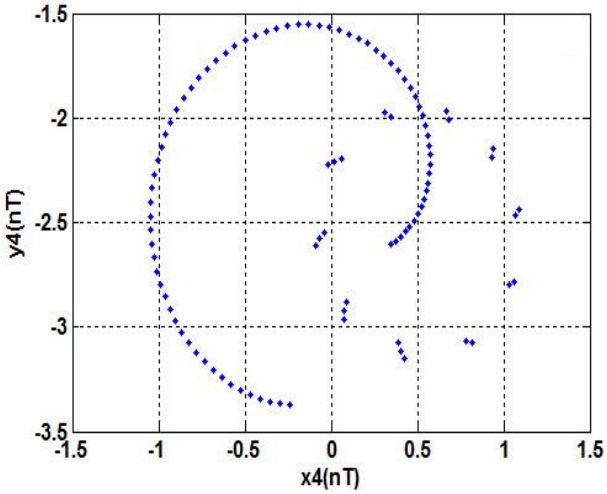


Figure 14.D: Carte de Poincaré de y_4 en fonction x_4

Figure IV.14 : Mouvement quasi-périodique du centre de la turbine à $\omega = 110$ rad/s

Egalement, les résultats obtenus pour le centre du rotor dans le palier N°2 à la vitesse angulaire de $\omega = 109$ rad/s, illustrée à la figure IV.15, concernant leur mouvement quasi-périodique dans la forme d'onde temporelle dans la direction indiquée à la figure 15.A,

Où l'évolution de la fréquence donnée par la figure 15.B qui fait apparaître deux composantes de fréquence distinctes avec des amplitudes vibratoires d'environ 0,39 et 0,18, associées à $0.46\times f_r$ et f_r , la composante $0.46\times f_r$ est induite par le tourbillon d'huile. Cela suggère la manifestation du phénomène de tourbillon d'huile, qui se traduit par une augmentation des amplitudes vibratoires. En conséquence, le système devient instable et présente des vibrations significatives. En raison des trajectoires désordonnées des cercles limites dans le portrait de phase de la figure 15.C avec leur projection sur la présentation de la carte de Poincaré de la figure 15.D. Cela peut également s'expliquer par la forte présence d'effets de force de film d'huile non linéaire sur le système de palier-rotor- palier de turbine.

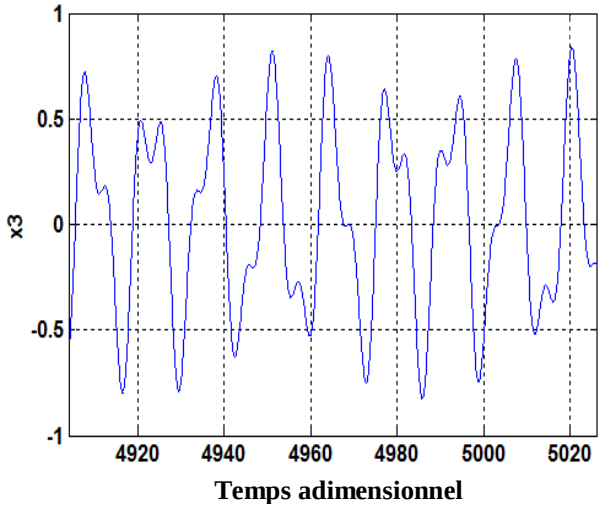


Figure 15A: Forme d'onde temporelle de x_3

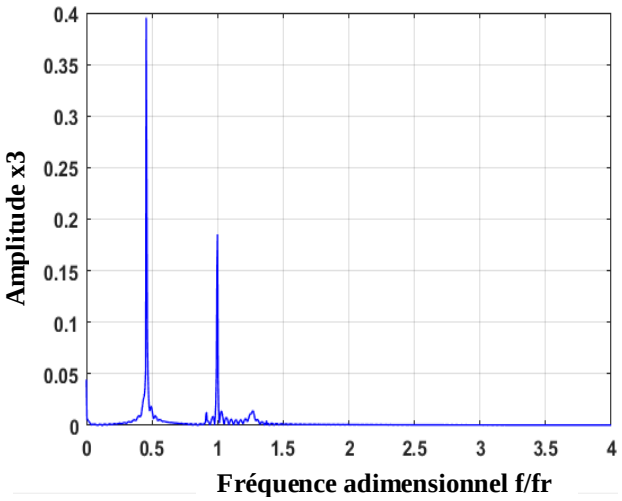


Figure 15.B: Spectre de fréquence de x_3

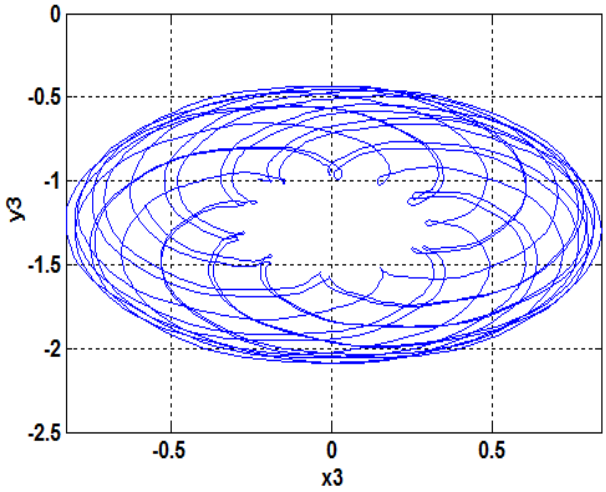


Figure 15.C: Portrait de phase de y_3 en fonction x_3

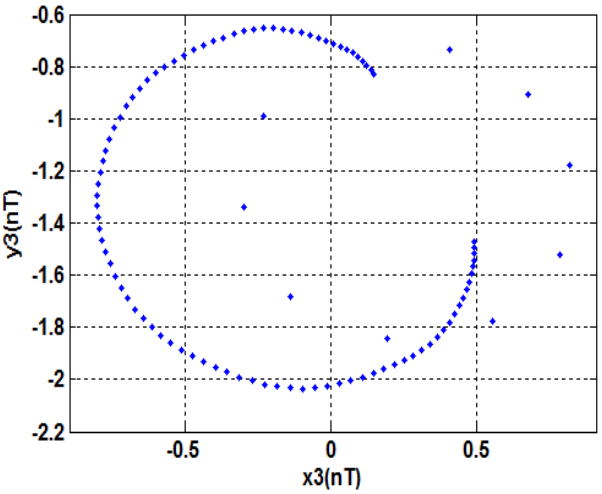


Figure 15.D: Carte de Poincaré de y_3 en fonction x_3

Figure IV.15 : Mouvement quasi-périodique du centre du rotor dans le palier N°2 à $\omega = 109$ rad/s

Et lorsque la vitesse angulaire de la turbine varie dans l'intervalle $200 \le \omega \le 555$ rad/s, le mouvement dynamique du système palier-rotor passe d'un mouvement quasi-périodique à un mouvement périodique. Dans cette plage de rotation, les résultats obtenus à partir du mouvement périodique du centre de la turbine à $\omega = 300$ rad/s avec des périodes de NT_0, comme indiqué à la figure IV.16 d'une forme d'onde temporelle x_4 représentée à la figure16.A, montre qu'il existe deux vibrateurs dynamiques à fréquence discrète correspondant à la vitesse de rotation $4/9 \times f_r$ et f_r avec des amplitudes 0.06 et 0.27 et une dynamique négligeable avec une amplitude de l'ordre de 0,01, comme le montre la figure 16.B. Cela provoque l'existence d'un cercle limité dans le portrait de phase présenté dans les figures 16.C, où la trajectoire est régulière, avec la présence N de points discrets dans les cartes de Poincaré de la figure 16.D, ce qui prouve que le mouvement est périodique avec une période de $T = N \times T_0 = N \times 2\pi$.

De plus, dans l'intervalle de rotation de la turbine de $200 \le \omega \le 555$ rad/s, les résultats obtenus proviennent d'un mouvement périodique du centre du rotor dans le palier N°2 à $\omega = 300$ rad/s avec des périodes NT_0 de la figure IV.17 d'une forme d'onde temporelle de x_3 illustrée à la figure 17.A, montre qu'il existe deux dynamiques vibratoires de fréquence discrète correspondant à la vitesse de rotation $4/9 \times f_r$ et f_r avec des amplitudes 0,035 et 0,18 et une dynamique négligeable avec une fréquence de l'ordre de 0,01, comme on le voit sur la figure 17.B. Cela provoque l'existence d'un cercle limité dans le portrait de phase présenté dans la figure 17.C, où la trajectoire est régulière, avec la présence de N points discrets dans les cartes de Poincaré de la figure 17.D, ce qui prouve que le mouvement est périodique avec une période de $T = N \times T_0 = N \times 2\pi$.

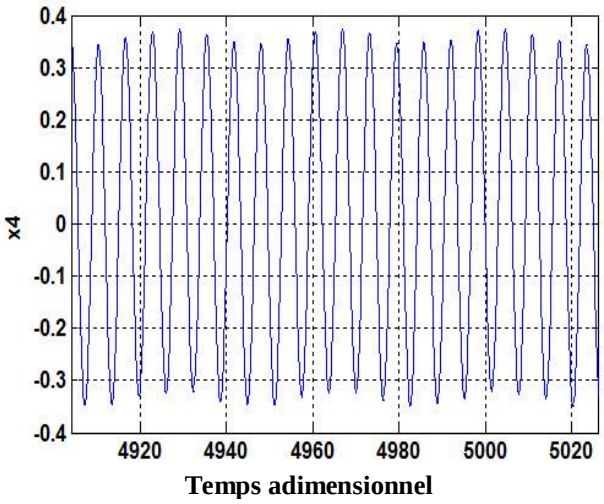


Figure 16.A: Forme d'onde temporelle de x_4

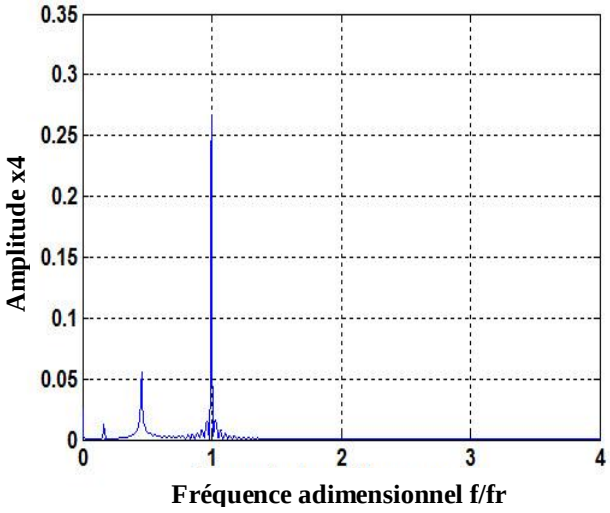


Figure 16.B: Spectre de fréquence de x_4

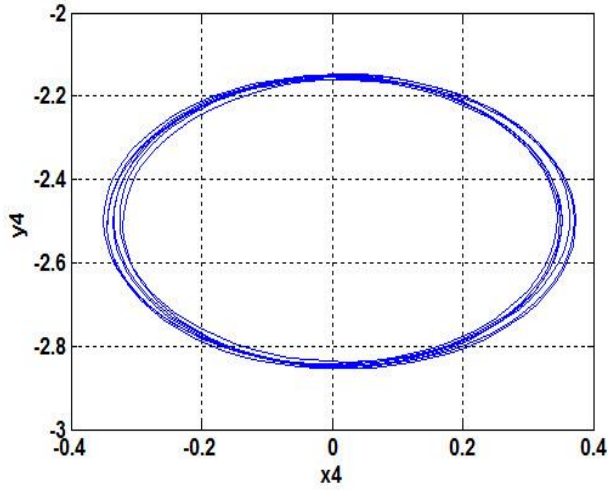


Figure 16.C: Portrait de phase de y_4 en fonction x_4

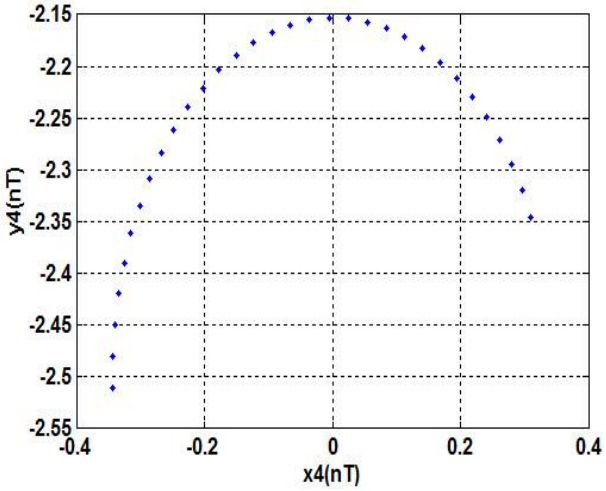


Figure 16.D: Carte de Poincaré de y_4 en fonction x_4

Figure IV.16 : Mouvement périodique du centre de la turbine à $\omega = 300$ rad/s avec NT_0 périodes

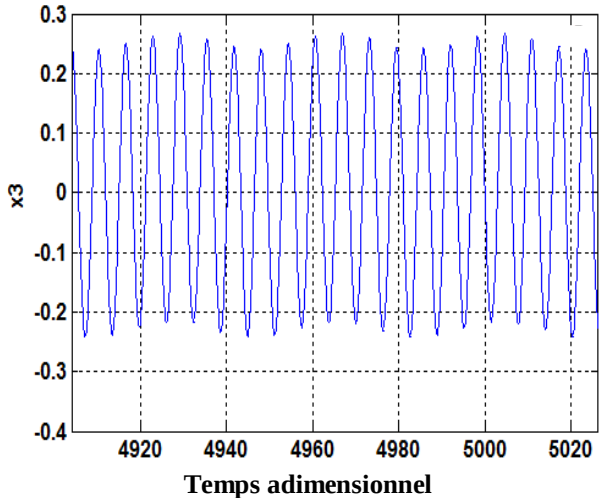


Figure 17.A: Forme d'onde temporelle de x_3

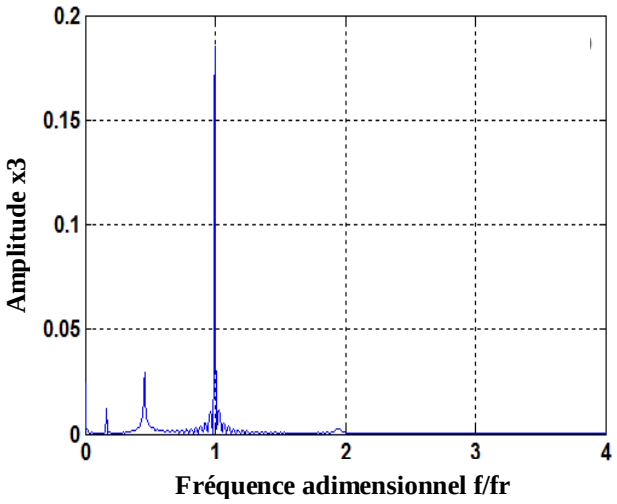


Figure 17.B: Spectre de fréquence de x_3

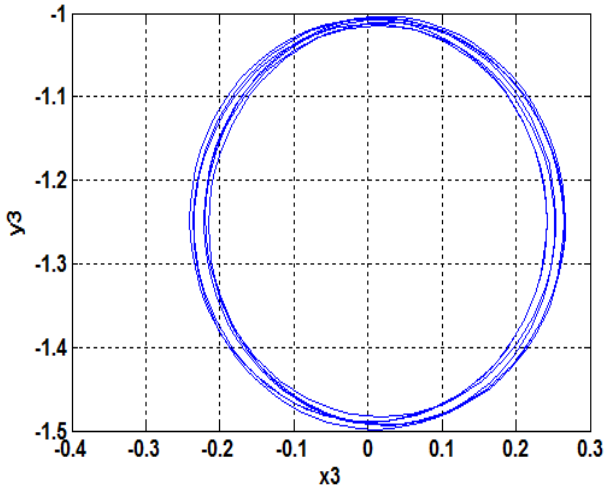


Figure 17.C: Portrait de phase de y_3 en fonction x_3

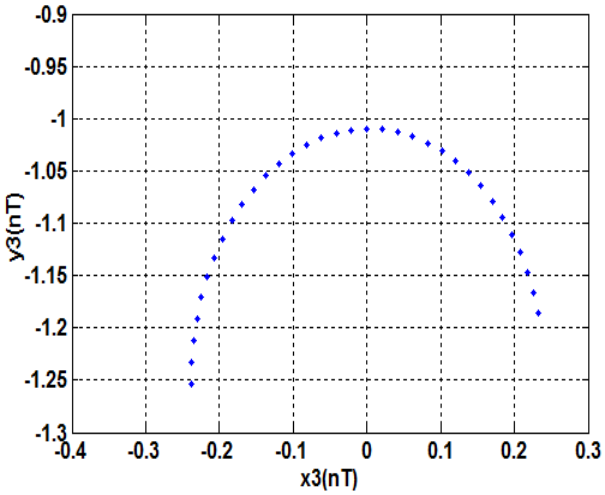


Figure 17.D: Carte de Poincaré de y_3 en fonction x_3

Figure IV.17 : Mouvement périodique du centre du rotor dans le palier N°2 à $\omega = 300$ rad/s avec NT_0 périodes

Des comportements quasiment analogues à ceux exposés précédemment ont été observés tant pour le centre du compresseur que pour le centre du rotor dans le palier N°1, avec des variations de vitesse angulaire comprises entre $1 \le \omega \le 555$ rad/s. Pour le centre du compresseur, pendant l'intervalle de $1 \le \omega \le 22$ rad/s, le mouvement présente une périodicité de quatre cycles $T = 4 \times T_0 = 8\pi$. Cela est illustré dans la figure IV.18 lorsque la vitesse angulaire atteint $\omega = 10$ rad/s. On note la présence d'un pic d'amplitude 0,37 causé par la force d'inertie du balourd du rotor HP, cette amplitude augmente fortement lorsque la rotation de l'arbre dépasse la vitesse critique, tel qu'illustré dans la figure 18.B. Dans le portrait de phase, figuré dans la figure 18.C, on observe un cercle limité, et la trajectoire s'avère régulière. De plus, la carte de Poincaré, exposée dans la figure 18.D, présente quatre points discrets.

Cependant, un diagramme de bifurcation a été obtenu sur l'intervalle $1 \leq \omega \leq 22$ rad/s, où le mouvement est périodique pendant quatre périodes $4T_0$, dans le cas de $\omega = 10$ rad/s un cycle limite apparaît comme la valeur critique de stabilité.

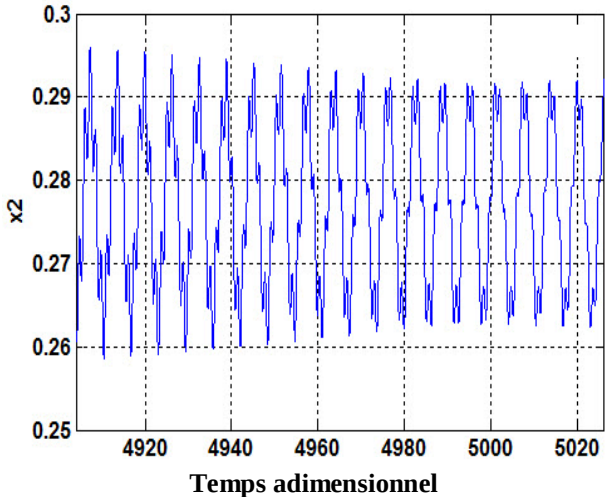


Figure 18.A: Forme d'onde temporelle de x_2

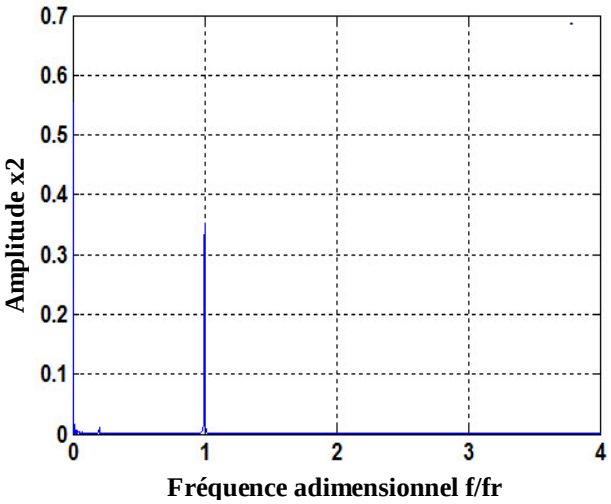


Figure 18.B: Spectre de fréquence de x_2

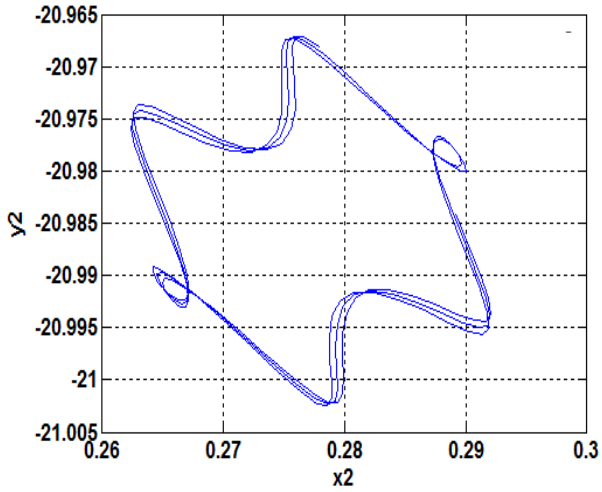


Figure 18.C: Portrait de phase de y_2 en fonction x_2

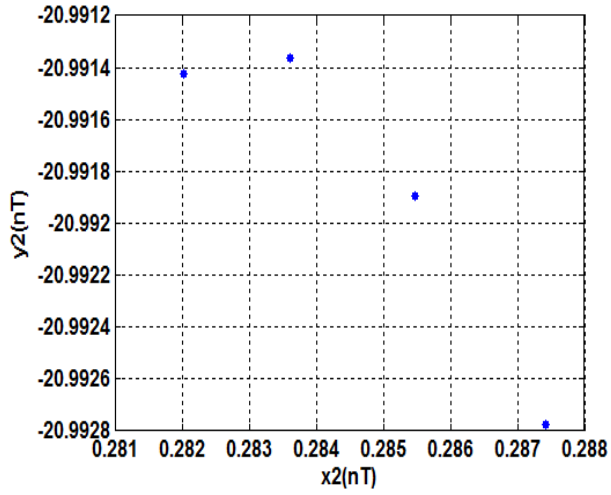


Figure 18.D: Carte de Poincaré de y_2 en fonction x_2

Figure IV.18 : Mouvement périodique du centre du compresseur à $\omega = 10$ rad/s avec quatre périodes $4T_0$

Quant au centre du rotor dans le palier N°1, comme présenté dans la figure IV.19, on observe une composante de fréquence discrète f_r dans la figure 19.B causé par la force d'inertie du balourd du rotor HP. De même, on observe un cercle limité dans le portrait de phase de la figure 19.C, ainsi qu'un point isolé dans la carte de Poincaré de la figure 19.D, lorsque la

vitesse angulaire atteint $\omega = 50$ rad/s. Par conséquent, le mouvement dans ce cas se révèle périodique, avec période un $T = T_0 = 2\pi$.

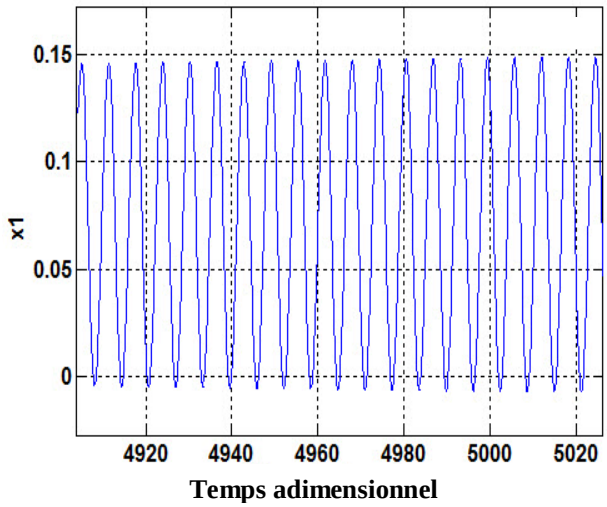


Figure 19.A: Forme d'onde temporelle de x_1

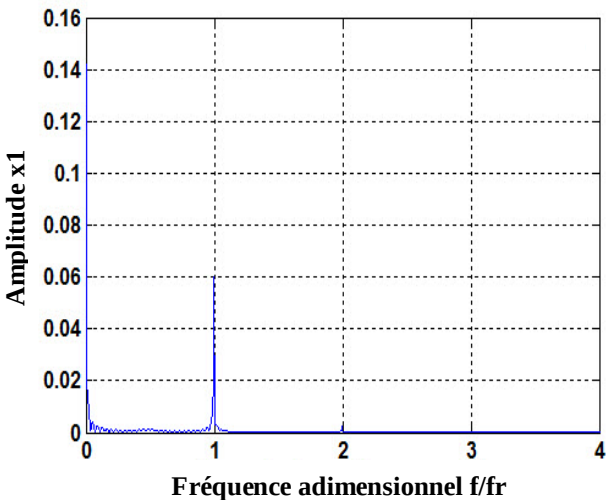


Figure 19.B: Spectre de fréquence de x_1

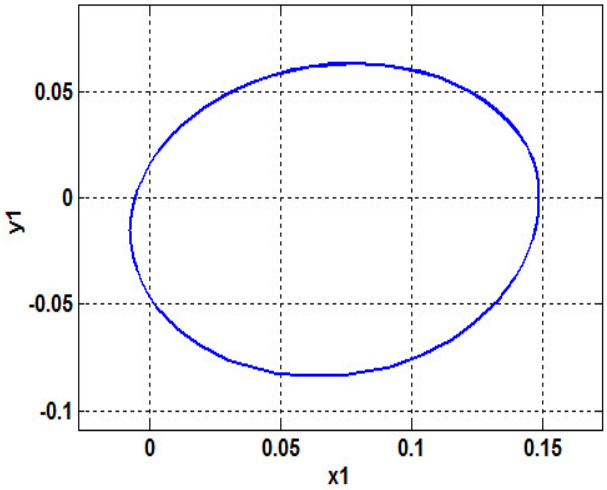


Figure 19.C: Portrait de phase de y_1 en fonction x_1

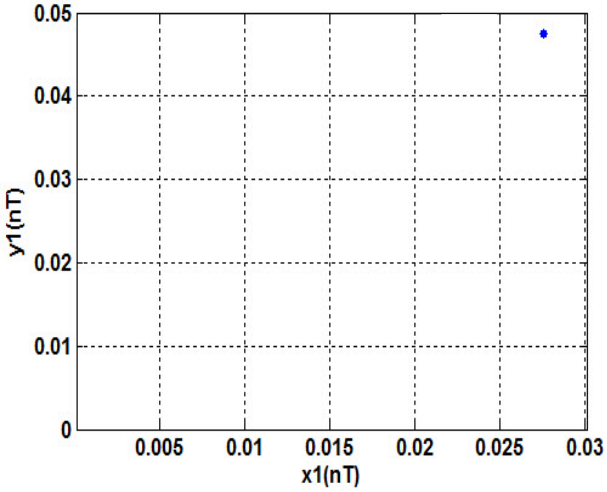


Figure 19.D: Carte de Poincaré de y_1 en fonction x_1

Figure IV.19 : Mouvement périodique du centre de rotor dans le palier N°1 à $\omega = 50$ rad/s avec période T_0

À mesure que la vitesse de rotation augmente, se situant entre $22 < \omega < 200$ rad/s pour le centre du compresseur, et entre $50 < \omega < 200$ rad/s pour le centre du rotor dans le palier N°1, on observe l'émergence d'un mouvement quasi-périodique. Cela est illustré dans les figures IV.20 et IV.21, où ce phénomène se manifeste à des vitesses angulaires de $\omega = 110$ rad/s et $\omega = 109$ rad/s, respectivement. Dans ces cas précis, on constate la présence de composantes de fréquence discrètes qui correspondent à la vitesse de rotation f_r dans la figure 20.B, et $0.5 \times f_r$

et $\approx f_r$ dans la figure 21.B, la composante $0.5\times f_r$ est induite par le tourbillon d'huile. Cela suggère la présence du phénomène de tourbillon d'huile, lequel se traduit par une augmentation de l'amplitude des vibrations. En conséquence, le système devient instable et génère des vibrations significatives. Cette augmentation est clairement démontrée dans les figures 20.B et 21.B. Les trajectoires de mouvement deviennent particulièrement désordonnées, comme en témoignent les figures 20.C et 21.C. En ce qui concerne les projections de la section de Poincaré, elles présentent un schéma de courbe fermée à la fois dans les figures 20.D et 21.D, ce qui indique la nature quasi-périodique du mouvement. Dans ces conditions, le système devient sujet à des vibrations intenses et à une instabilité croissante.

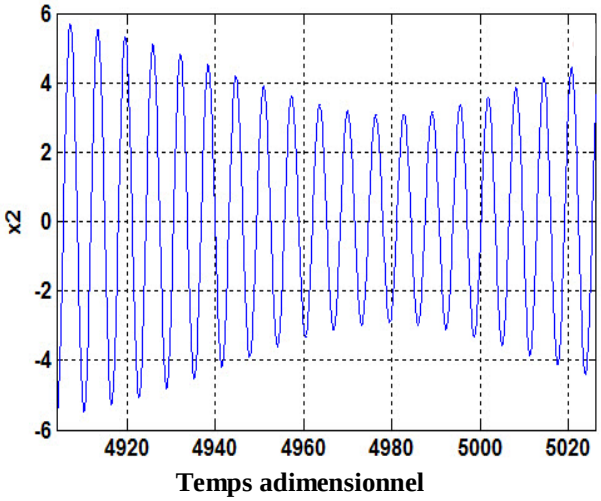


Figure 20.A: Forme d'onde temporelle de x_2

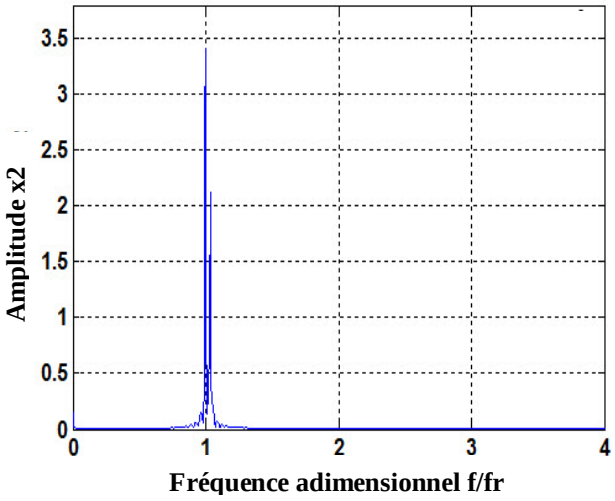


Figure 20.B: Spectre de fréquence de x_2

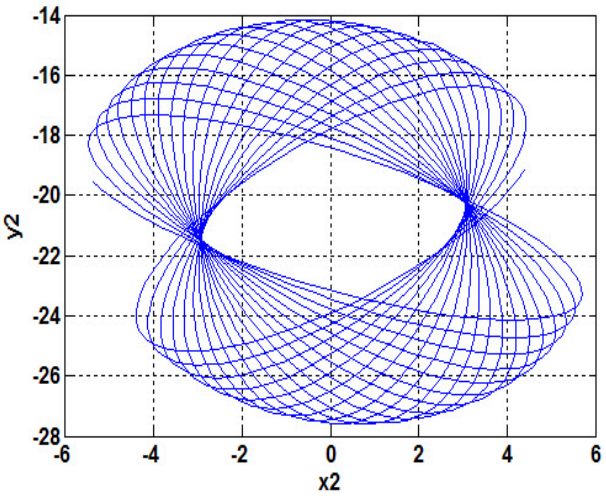


Figure 20.C: Portrait de phase de y_2 en fonction x_2

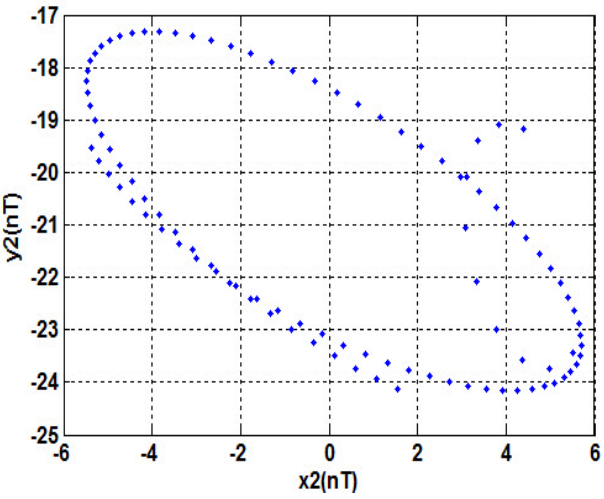


Figure 20.D: Carte de Poincaré de y_2 en fonction x_2

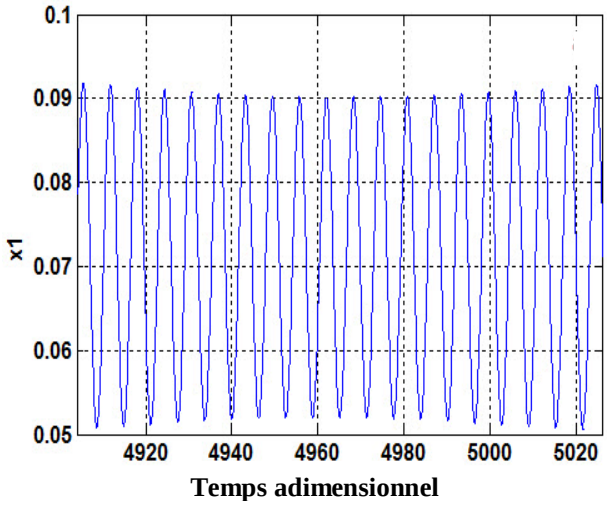


Figure 21.A: Forme d'onde temporelle de x_1

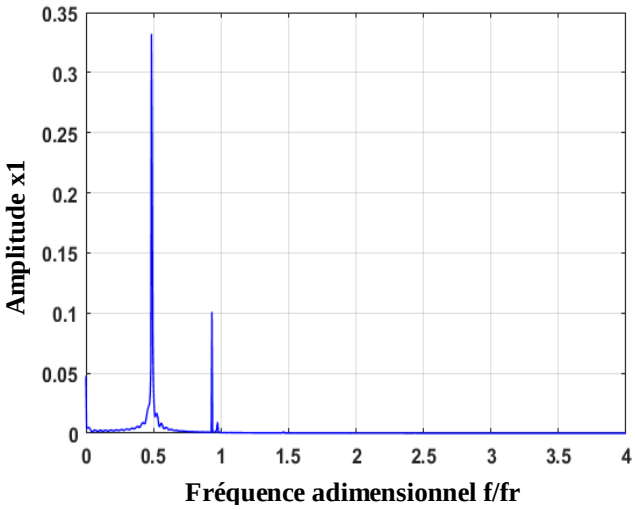


Figure 21.B: Spectre de fréquence de x_1

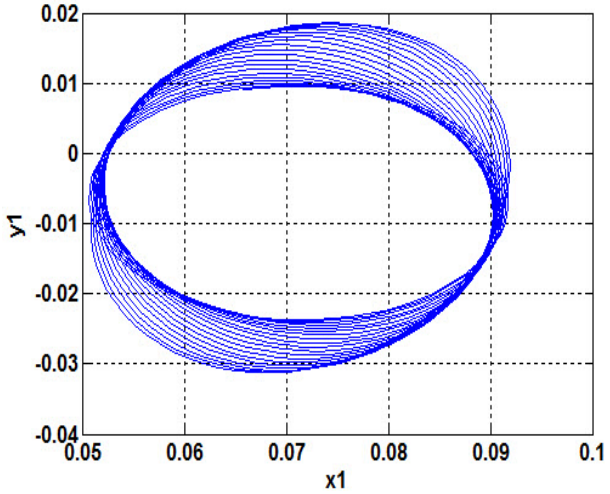


Figure 21.C: Portrait de phase de y_1 en fonction x_1

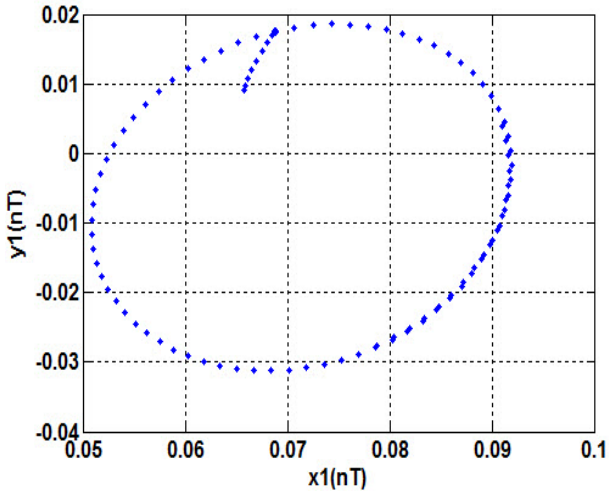


Figure 21.D: Carte de Poincaré de y_1 en fonction x_1

Figure IV.21: Mouvement quasi-périodique du centre du rotor dans le palier N°1 à $\omega = 109$ rad /s

De plus, lorsque la vitesse angulaire se situe entre $200 \leq \omega \leq 555$ rad/s, le caractère du mouvement dynamique évolue, passant d'un mouvement quasi-périodique à un mouvement périodique, à la fois pour le centre du compresseur et le centre du rotor dans le palier N°1 , comme le montrent les figures IV.22 et IV.23. Dans cette plage de vitesses, le spectre de fréquence dans la figure 22.B révèle deux composantes de fréquence discrètes, à savoir $1/4\ f_r$ et f_r, tandis que la figure 23.B présente une composante f_r. À une vitesse angulaire de $\omega = 300$ rad/s, le portrait de phase dessine un cercle limité dans les deux cas, que l'on observe à la fois dans les figures 22.C et 23.C. Les trajectoires suivent des schémas réguliers. De plus,

les cartes de Poincaré, comme illustrées dans les figures 22.D et 23.D, révèlent la présence de N points discrets, ce qui démontre que le mouvement est périodique avec une période $T = N \times T_0 = N \times 2\pi$.

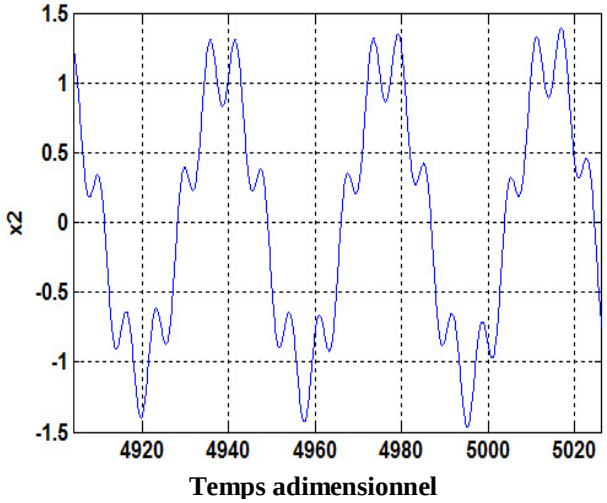


Figure 22.A: Forme d'onde temporelle de x_2

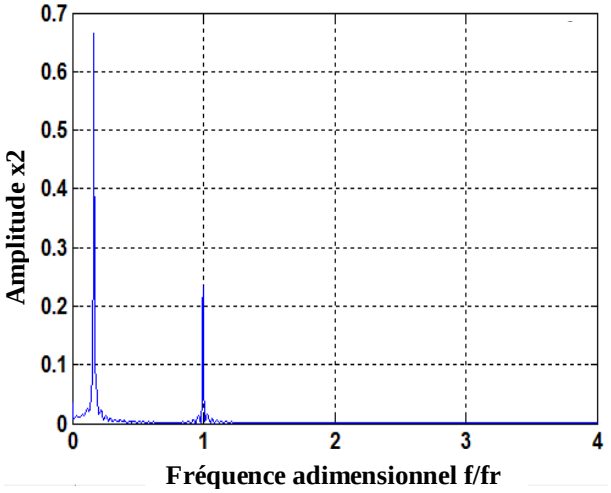


Figure 22.B: Spectre de fréquence de x_2

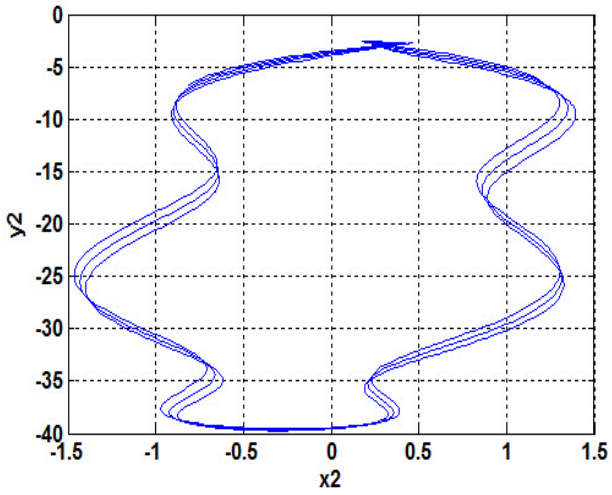


Figure 22.C: Portrait de phase y_2 en fonction x_2

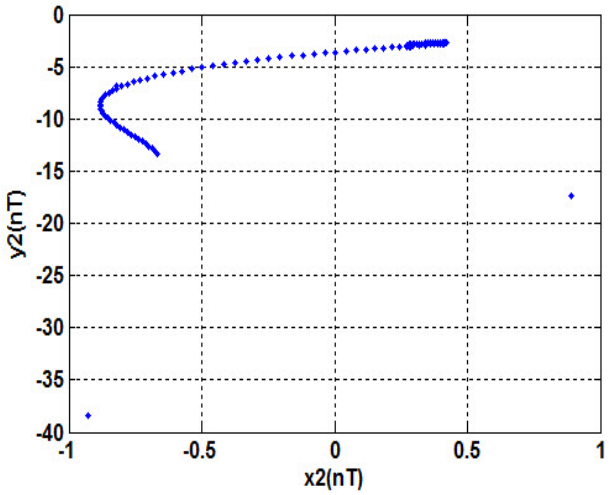


Figure 22.D: Carte de Poincaré de y_2 en fonction x_2

Figure IV.22 : Mouvement périodique du centre du compresseur à $\omega = 300$ rad/s avec de période NT_0

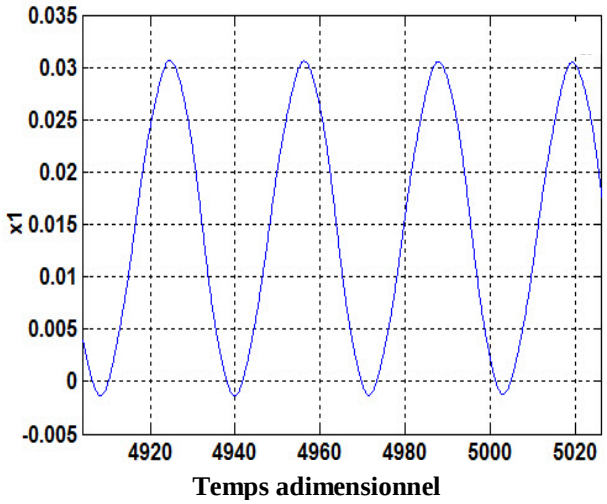


Figure 23.A: Forme d'onde temporelle de x_1

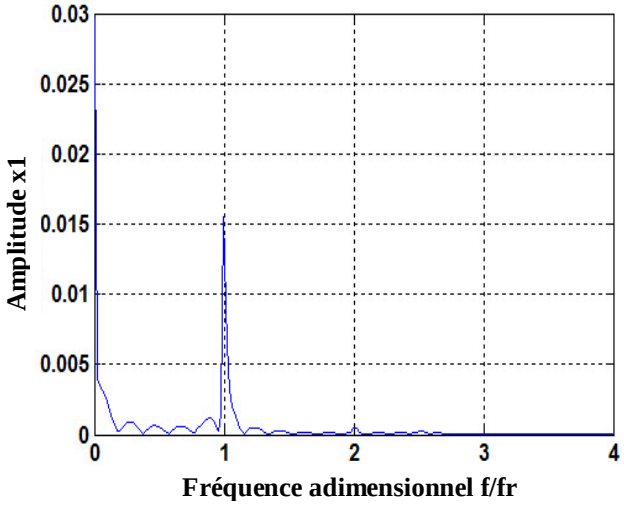


Figure 23.B: Spectre de fréquence de x_1

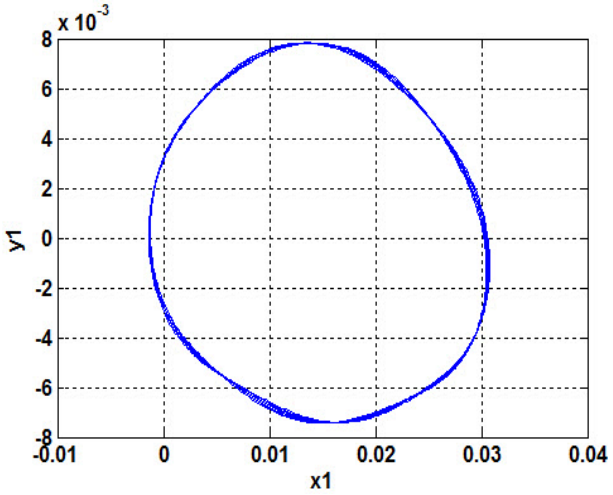


Figure 23.C: Portrait de phase de y_1 en fonction x_1

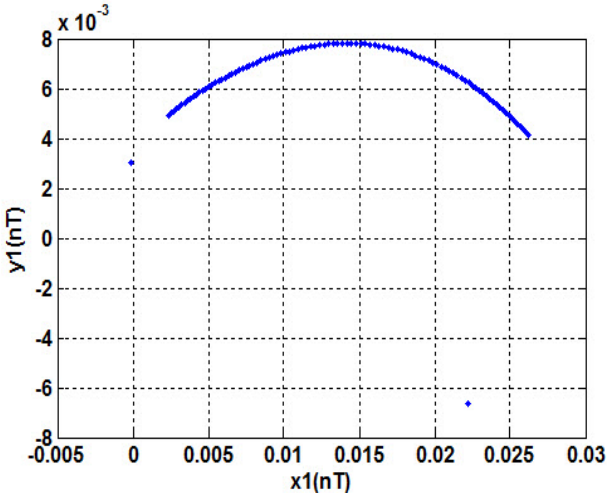


Figure 23.D: Carte de Poincaré de y_1 en fonction x_1

Figure IV.23 : Mouvement périodique du centre du rotor dans le palier N°1 à $\omega = 300$ rad/s avec période NT_0

Les résultats issus de cette étude sont succinctement résumés dans la figure IV.24. Cette représentation graphique met en évidence la caractéristique du mouvement dans une plage de variation de la vitesse angulaire ω allant de 1 à 555 rad/s, tout en indiquant la détection de comportements périodiques, quasi-périodiques ou multi- périodiques.

Sur la base des résultats obtenus grâce à cette étude, nous pouvons conclure :

- Une bifurcation se produit dans le système palier-rotor de la turbine à gaz lorsqu'un petit changement progressif apporté au paramètre de vitesse angulaire ω provoque un changement soudain du comportement qualitatif ainsi que des changements dans la stabilité des trajectoires.

- Pour garantir que le système palier-rotor de la turbine à gaz MS5002B fonctionne dans des conditions stables avec une meilleure performance dynamique possible, la vitesse angulaire ω doit se situer dans la plage (200, 555) rad/s.

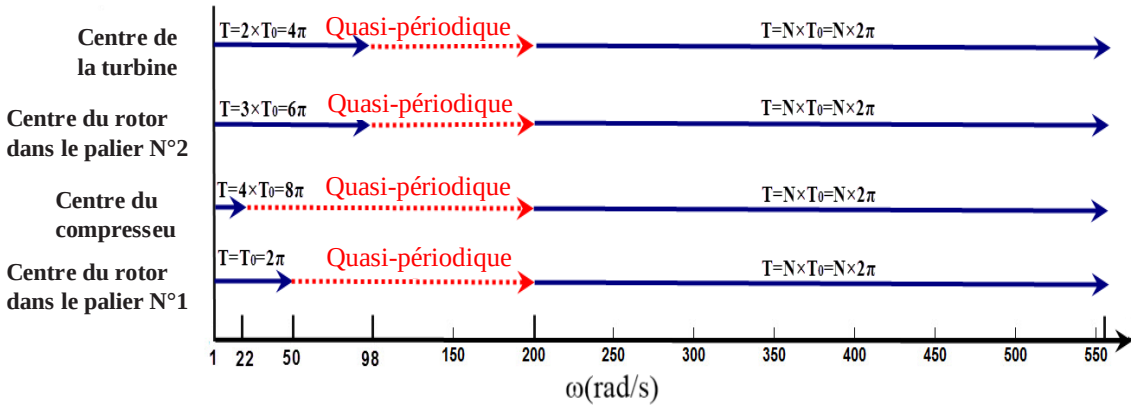


Figure IV.24: Comportement dynamique du système palier-rotor de la turbine à gaz

Les données d'exploitation réelles de la turbine à gaz MS5002B, qui font l'objet de cette étude, ont été générées pour évaluer les caractéristiques dynamiques du système palier-rotor dans diverses conditions, y compris un éventail complet de processus opérationnels différents. Ces résultats expérimentaux peuvent servir à confirmer les conclusions de notre simulation numérique. La figure IV.25 illustre l'évolution du mouvement du centre du rotor dans le palier N°1 en parallèle avec les variations de la vitesse angulaire du rotor HP et de la température du film d'huile. Il est clair que ces variations se décomposent en deux phases distinctes, à savoir la phase de démarrage et la phase de fonctionnement à pleine capacité. Il est intéressant de noter que les vibrations évoluent en corrélation avec les variations de la vitesse angulaire et de la température du film d'huile. Il est important de souligner que les variations de la température du film d'huile ont un impact significatif sur la viscosité de l'huile, tandis que la force du film d'huile dépend fortement de cette viscosité. En d'autres termes, une diminution de la pression ou une augmentation de la température du film d'huile entraîne une réduction de la viscosité et, par conséquent, de la force du film d'huile. Dans la figure IV.25, nous avons observé que lorsque la vitesse angulaire est relativement basse, c'est-à-dire $\omega \leq 55$ rad/s, et que le temps est inférieur à 60 secondes, seules des vibrations synchrones de faible amplitude sont présentes.

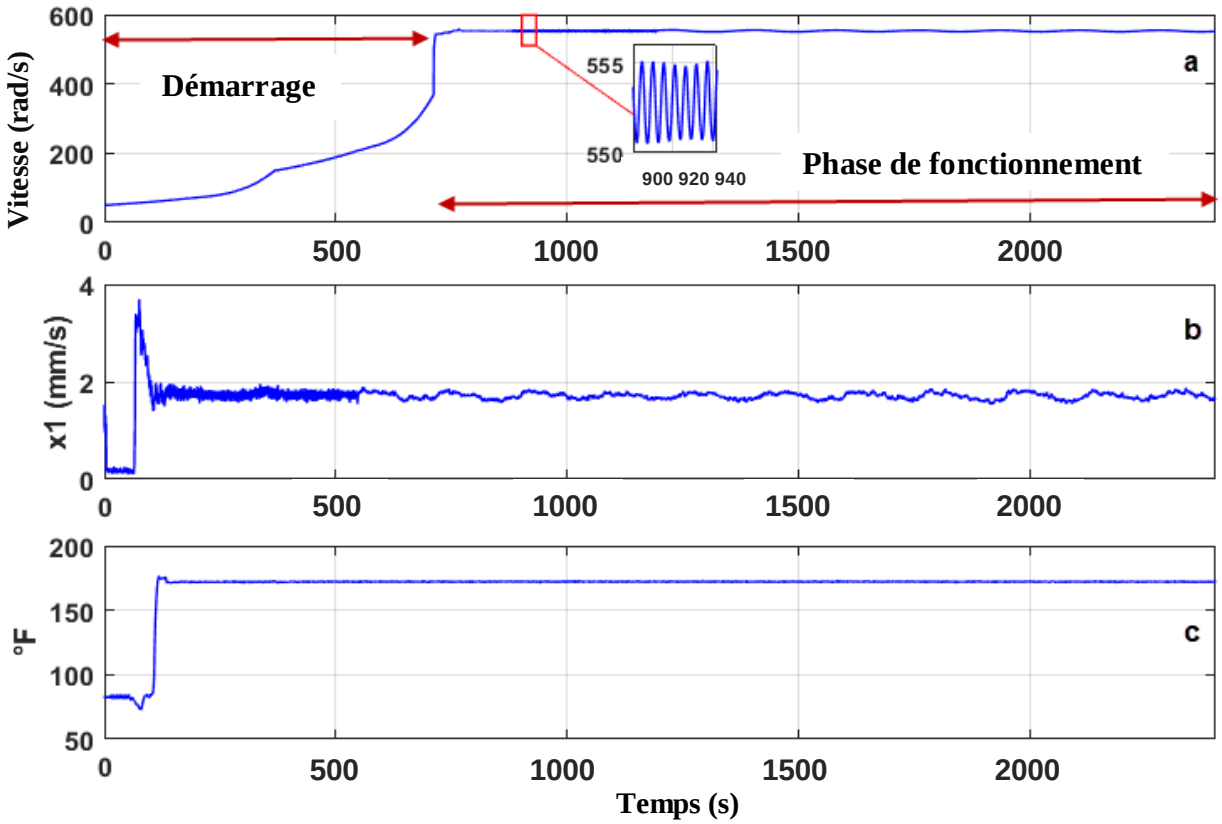


Figure IV.25 : comportement dynamiques du système palier-rotor : (a) vitesse du rotor HP, (b) Mouvement du centre du rotor dans le palier N °1, (c) température du film d'huile

Ces vibrations synchrones résultent de la force d'inertie du balourd du rotor HP. Cependant, à mesure que la vitesse angulaire augmente davantage, se situant entre $55 < \omega < 210$ rad/s, et que le temps s'étend de 60 s à 550 s, un phénomène de tourbillon d'huile (oil whirl) se manifeste. Ce tourbillon d'huile se traduit par une augmentation de l'amplitude des vibrations et une diminution de la température du film d'huile lorsque la vitesse est comprise entre $55 < \omega \leq 57$ rad/, pendant une durée de 60 s à 80 s. Par la suite, lorsque la vitesse angulaire est maintenue entre $57 < \omega < 210$ rad/s, et le temps varie entre $80 < t < 550$ s, nous constatons une diminution de l'amplitude des vibrations et une augmentation de la température du film d'huile. Dans cette plage de $55 < \omega < 210$ rad/s, le système connaît des vibrations importantes et devient instable. Il est important de noter que le phénomène de tourbillon d'huile survient généralement en réaction à des modifications des propriétés de l'huile, telles que la température et la viscosité. Ce phénomène représente un mécanisme de conversion de l'énergie rotative en énergie vibratoire grâce à l'action de la force du film d'huile. Cependant, à mesure que la vitesse angulaire continue d'augmenter, se situant entre $210 \leq \omega \leq 555$ rad/s, et que le temps s'étend de 550 s à 2400 s, notamment dans la phase de fonctionnement

maximale, le tourbillon d'huile disparaît. Dans cette plage, un phénomène de trempe (quenching phenomenon) se produit, car les vibrations synchrones croissantes suppriment le tourbillon d'huile, ce qui stabilise le système. On voit que l'amplitude de vibration provoquée par le tourbillon d'huile est supérieure à celle des vibrations synchrones. Le "phénomène de trempe" dans le contexte des vibrations se réfère généralement à une diminution ou une suppression soudaine des amplitudes ou des fréquences de vibration. Ceci peut se produire en raison de divers facteurs, tels que l'amortissement, le frottement, ou d'autres mécanismes dissipatifs, qui agissent pour réduire les oscillations dans un système. Le terme " trempe " est souvent utilisé pour décrire le phénomène où certains modes vibratoires sont effectivement amortis ou atténués, conduisant à une stabilisation ou une réduction de l'intensité des vibrations. En se fondant sur les résultats expérimentaux issus de cette étude, il est possible de tirer la conclusion que nous observons une concordance notable entre ces données expérimentales et les résultats numériques obtenus à partir du modèle développé. Cet accord se manifeste avec un écart relatif qui demeure limité, s'établissant aux alentours de ≈ 6 %.

IV.7 Conclusion

Dans cette étude, un modèle mathématique décrivant le comportement de bifurcation des vibrations du système palier-rotor d'une turbine à gaz a été élaboré, prenant en compte les effets de la force non linéaire du film d'huile et ainsi que du déséquilibre. Ce modèle a été résolu numériquement dans le but d'observer le fonctionnement de ce système et d'améliorer sa stabilité. Les résultats obtenus lors des divers tests sur le système palier-rotor de la turbine MS5002B ont démontré la robustesse du modèle de bifurcation développé. Nous avons trouvé un accord remarquable entre les données expérimentales et les résultats numériques obtenus à partir du modèle développé. Cet accord est démontré par une différence relative encore limitée, de l'ordre de ≈ 6%. De plus, cette recherche a mis en lumière le potentiel et les performances des algorithmes de suivi de bifurcation pour analyser les comportements dynamiques complexes dans les turbines à gaz. Cela permet de comprendre l'émergence de résonances harmoniques dans les spectres de fréquences. Cette approche peut être utilisée de manière efficace pour concevoir un système de surveillance et de diagnostic destiné à garantir la durabilité des équipements, en prévenant les défaillances inattendues dans les turbines à gaz. L'analyse vibratoire, en utilisant ces indicateurs de bifurcation, est employée pour repérer les points limites qui présentent des solutions périodiques, quasi-périodiques ou multi-périodiques. Cela permet de détecter les anomalies vibratoires et de décrire leur évolution dans le temps, contribuant ainsi à prévenir toute dégradation de la turbine étudiée.

Conclusion générale

Cette thèse a exploré de manière approfondie les phénomènes de bifurcation et de chaos dans les systèmes dynamiques. Nous avons introduit les concepts fondamentaux de la théorie de bifurcation, qui concerne les changements qualitatifs ou topologiques brusques dans le comportement d'un système résultant de modifications légères et douces des valeurs de ses paramètres, appelés paramètres de bifurcation. Généralement, les bifurcations entraînent des modifications des propriétés de stabilité locale des équilibres, des orbites périodiques ou d'autres ensembles invariants.

En outre, nous avons approfondi la théorie du chaos, élucidant ses caractéristiques distinctes et décrivant divers scénarios de transition vers un comportement chaotique. Le chaos se manifeste exclusivement dans des systèmes dynamiques déterministes, non linéaires et peut émerger de systèmes relativement simples. Les subtilités du comportement chaotique présentent une hypersensibilité aux conditions initiales, rendant les prédictions à long terme essentiellement dénuées de sens. Cette sensibilité résulte de l'impossibilité de mesurer les variables avec une précision absolue.

En plus de l'exploration théorique, cette thèse a formulé un modèle mathématique pour décrire les modèles de bifurcation de vibration dans le système palier-rotor d'une turbine à gaz**.** Ce modèle prend en compte l'influence à la fois de la force non linéaire du film d'huile et de la présence d'un balourd. Grâce à des solutions numériques, nous avons examiné la fonctionnalité de ce système et tenté d'améliorer sa stabilité. Les résultats obtenus à partir de divers tests sur le système palier-rotor de la turbine MS5002B ont souligné la robustesse du modèle de bifurcation développé.

En outre, cette recherche a souligné le potentiel et l'efficacité des algorithmes de suivi de bifurcation pour disséquer les comportements dynamiques complexes dans les turbines à gaz. Cette méthodologie est très prometteuse pour la conception d'un système de surveillance et de diagnostic visant à garantir la longévité des équipements, évitant ainsi les pannes imprévues des turbines à gaz. En utilisant l'analyse vibratoire parallèlement aux indicateurs de bifurcation, nous avons identifié des points limites critiques caractérisés par des solutions périodiques, quasi-périodiques ou multipériodiques. Cette capacité nous permet de détecter les anomalies dans les modèles de vibrations et de suivre méticuleusement leur progression dans le temps, servant finalement de mesure proactive pour prévenir toute dégradation dans la turbine étudiée.

Publication

[1.] **MAHROUG Youcef**, Mouloud GUEMANA, Ahmed HAFAIFA et al. ARMAX-Based Identification and Diagnosis of Vibration Behavior of Gas Turbine Bearings. Diagnostyka. 2023 ;24(3) :2023310. URL : https://doi.org/10.29354/diag/171277

Conférences Internationales

[1.] **MAHROUG Youcef**, Mouloud GUEMANA, Ahmed HAFAIFA et al. Nonlinear Dynamics and Stability Analysis of a Heavy-duty gas turbine. 1st International Conference on Gas Turbines and Industrial Turbomachinery - ICGT&IT 2022, Djelfa–Algérie. URL: http://www.univ-djelfa.dz/icgtit/

[2.] **MAHROUG Youcef**, Mouloud GUEMANA, Ahmed HAFAIFA et al. Identification of vibration behavior of a heavy-duty gas turbine using ARMAX model. 1st International Conference on Gas Turbines and Industrial Turbomachinery - ICGT&IT 2022, Djelfa–Algérie. URL: http://www.univ-djelfa.dz/icgtit/

[3.] **MAHROUG Youcef**, Mouloud GUEMANA, Ahmed HAFAIFA. Identification of gas turbine dynamic behaviour using ARMAX Model. The First International Conference on Materials, Environment, Mechanical and Industrial Systems, ICMEMIS'19, University of Djelfa on 29-30 June 2019, Algeria. URL: http://www.univ-djelfa.dz/icmemis19/

[4.] **MAHROUG Youcef**, Mouloud GUEMANA, Ahmed HAFAIFA. A comparative study of time-frequency signal processing techniques using STFT and CWT: Application to fault diagnosis for gas turbine MS5002B.The 2nd International Workshop on Signal Processing Applied to Rotating Machinery Diagnostics 29 & 30 Avril 2018, Djelfa–Algérie. URL: http://www.univ-djelfa.dz/labo/laadi/sigpromd2018/

Conférences Nationale

[1.] **MAHROUG Youcef**, Mouloud GUEMANA, Ahmed HAFAIFA. Identification du Comportement dynamique d'une turbine à gaz à l'aide du modèle ARMAX. 6eme symposium le gaz naturel au centre de la diversification energetique 23&24 Juin 2019, Oran–Algérie. URL: https://aig.dz/wp-content/uploads/2019/06/Prgramme-FR.pdf

[2.] **MAHROUG Youcef**, Mouloud GUEMANA, Ahmed HAFAIFA. Contribution à la Surveillance de vibrations d'une turbine à gaz à l'aide des réseaux de neurones dynamiques NARX.12ème Congrès National de la Physique et de ses Applications Alger, 13-15 Novembre 2018.
URL: https://atrst.dz/wp-content/uploads/2018/10/brochure-cnpa.pdf

Bibliographie

[1]. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova (2014). Deterministic Nonlinear Systems. Springer International Publishing Switzerland

[2]. F. Balibrea, T. Caraballo et al (2010). Recent Developments in Dynamical Systems: Three Perspectives. Int. J. Bifurcation and Chaos 20(9) pp.2591-2636.

[3]. Y.A. Kuznetsov (2004). Elements of Applied Bifurcation Theory. 3rd Edition Springer-Verlag New York.

[4]. L. BOI (2011). Geometry of Dynamical Systems and Topological Stability: From Bifurcation, Chaos and Fractals to Dynamics in Natural and Life Sciences. Int. J. Bifurcation and Chaos 21(3) pp.815-867.

[5]. S. Wiggins (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. 2nd Edition, Springer-Verlag New York, Inc.

[6]. G. REEB (1956). Sur la théorie générale des systèmes dynamiques. Annales de l'institut Fourier 6 pp. 89-115

[7]. V.I. Arnol'd, V.S. Afrajmovich, Yu.S. Il'yashenko, L.P. Shil'nikov (1994). Dynamical Systems V. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[8]. K. Aihara, J.Imura,T, Ueta (2015).Analysis and Control of Complex Dynamical Systems: Robust Bifurcation, Dynamic Attractors, and Network Complexity. Springer Japan

[9]. Rüdiger Seydel (2010). Practical Bifurcation and Stability Analysis. 3rd Edition, Springer-Verlag New York.

[10]. E. J. Doedel, W. Govaerts, and Yu. A. Kuznetsov (2003). Computation of Periodic Solution Bifurcations in ODES Using Bordered Systems. SIAM J. Numer. Anal 41(2) pp.401-435.

[11]. W.J. Beyn, T. Hüls and Y. Zou (2004). Numerical Analysis of Degenerate Connecting Orbits for Maps. Int. J. Bifurcation and Chaos 14 (10) pp.3385-3407.

[12]. A. A. Andronov, A. A. Vitt and S.E. Khaikin (1966). Theory of Oscillators. Addison - Wesley Publishing Company, Inc.

[13]. A. M. Liapounoff (1907). Problème générale de la stabilité de mouvement. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 9 pp. 203-474.

[14]. Z. Hu, M. Han (2009). Periodic Solutions and Bifurcations of First-Order Periodic Impulsive Differential Equations. Int. J. Bifurcation and Chaos 19(8) pp. 2515-2530.

[15]. X. LIAO, L. WANG, P. YU (2007). Stability of Dynamical Systems. Elsevier.

[16]. P. Glendinning (1994). Stability, Instability, and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations. Cambridge University Press.

[17]. A. Ehrenfeucht, M. Main (2012). Stability and Chaos in Reaction Systems. Int. J. Foundations of Computer Science 23(5) pp. 1173-1184.

[18]. D. G. Magiros (1965). On Stability Definitions of Dynamical Systems. PNAS of USA 53(6) pp.1288-1294.

[19]. Y. Lan, A. Peris (2018). Weak Stability of Non-Autonomous Discrete Dynamical Systems. Topology and its Applications 250 pp. 53-60.

[20]. C. Abraham, G. Biau & B. Cadre (2004). On Lyapunov exponents and sensitivity. J. Math. Anal. Appl 290 pp.395-404.

[21]. M. Cattani, I. L. Caldas et al (2017). Deterministic Chaos Theory: Basic Concepts. Revista Brasileira de Ensino de Física 39(1) e1309.

[22]. [22] H. Poincaré (1885). Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta Math. 7 (1) pp.259-380.

[23]. Y. Khmou (2017). A case study in bifurcation theory. Int. J. Modern Physics 28(8) pp.1750104.

[24]. K. A. Cliffe, A. Spence and S. J. Tavener (2000). The numerical analysis of bifurcation problems with application to fluid mechanics. Acta Numerica pp. 39-131.

[25]. J. D. Crawford (1991). Introduction to bifurcation theory. Reviews of Modern Physics 63(4).

[26]. L.H.A. Monteiro (2019). A discrete-time dynamical system with four types of codimension-one bifurcations. Applied Mathematics and Computation 354 pp.189-191.

[27]. D. G. Aronson. M. A. Chory et al (1982). Bifurcations from an Invariant Circle for Two-Parameter Families of Maps of the Plane: A Computer-Assisted Study. Commun. Math. Phys. 83 pp.303-354.

[28]. M. Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys et al (2008). Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems. SIAM Review 50(4) pp. 629-701.

[29]. X. WANG, C. LUO (2008). Bifurcation and fractal of the coupled logistic map. Int. J. Modern Physics B 22(24) pp.4275-4290.

[30]. I. Dobson (1993). Computing a Closest Bifurcation Instability in Multidimensional Parameter Space. J. Nonlinear Sci 3 pp.307-327.

[31]. G. P. Williams (1997). Chaos Theory Tamed. Joseph Henry Press.

[32]. Z. Liu (2010). Chaotic Time Series Analysis. Mathematical Problems in Engineering ID 720190.

[33]. B. Aulbach, B. Kieninger (2001). On Three Definitions of Chaos. Nonlinear Dynamics and Systems Theory 1(1) pp. 23-37.

[34]. H. R. Biswas, Md. M. Hasan and S. K. Bala (2018). Chaos Theory and its Applications in our Real Life. Barishal University Journal 5(1&2) pp.123-140.

[35]. C. Oestreicher (2007). A history of chaos theory. Dialogues Clin Neurosci 9(3) pp. 279-289.

[36]. E. N. Lorenz (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. J.Atmospheric Sciences 20(2) pp.130-141.

[37]. M. Cheng, G. Meng, J. Jing (2007). Numerical and experimental study of a rotor-bearing-seal system. Mechanism and Machine Theory 42 pp.1043-1057

[38]. J.K.Wang, M.M.Khonsari (2006). Application of Hopf bifurcation theory to rotor-bearing systems with consideration of turbulent effects. Tribology International 39 pp.701-714.

[39]. T. Shoyama (2019). Nonlinear vibration of saturated water journal bearing and bifurcation analysis. ASME J. Vib. Acoust 141(2): 021016.

[40]. Weipeng Sun, Zhimiao Yan, Ting Tan, et al (2018). Nonlinear characterization of the rotor-bearing system with the oil-film and unbalance forces considering the effect of the oil-film temperature. Nonlinear Dynamics 92 pp.1119-1145.

[41]. W.M. Zhang, G.Meng (2006). Stability, bifurcation and chaos of a high-speed rub-impact rotor system in MEMS. Sensors and Actuators A127 pp.163-178.

[42]. Cai-Wan Chang-Jian (2015). Bifurcation and chaos of gear-rotor–bearing system lubricated with couple-stress fluid. Nonlinear Dynamics 79 pp.749-763

[43]. Ji Feng, Yang Jinfu, Yuan Xiaoyang (2012). Hopf bifurcation and stability analysis of flexible rotor-bearing system. Journal of Vibroengineering 14(2) pp.723-732.

[44]. Zigang Li, Jing Li and Ming Li (2018). Nonlinear dynamics of unsymmetrical rotor-bearing system with fault of parallel misalignment. Advances in Mechanical Engineering 10(5) pp.1-17.

[45]. C. Wang, C. Fan and Q. Ding (2018). Constructing Discrete Chaotic Systems with Positive Lyapunov Exponents. Int. J. Bifurcation and Chaos 28(7) 1850084.

[46]. N. Li, L. Wang (2020). Sensitivity and Chaoticity on Nonautonomous Dynamical Systems. Int. J. Bifurcation and Chaos 30(10) 2050146.

[47]. K. A. Cliffe, A. Spence, and S. J. Tavener (2000). The numerical analysis of bifurcation problems with application to fluid mechanics. Acta Numerica pp. 39-131.

[48]. J-P. Lessard (2016). Rigorous verification of saddle–node bifurcations in ODEs. Indagationes Mathematicae 27 pp.1013-1026.

[49]. G. Fuhrmann (2016) Non-smooth saddle-node bifurcations III: Strange attractors in continuous time. J. Diff. Eqs 261 pp.2109-2140.

[50]. P. Liu, J. Shi, Y. Wang (2007). Imperfect transcritical and pitchfork bifurcations. Journal of Functional Analysis 251 pp.573-600.

[51]. Jianke Wang (2005). On the stability of rotor bearing systems based on Hopf bifurcation theory. Thèse, Louisiana State University.

[52]. J. R. R. Gouveia Jr, F.M. Amaral (2013). Stability Boundary Characterization of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems in The Presence of a Supercritical Hopf Equilibrium Point. Int. J. Bifurcation and Chaos 23(12) 1350196.

[53]. J. E. Marsden, M. McCracken (1976). The Hopf Bifurcation and Its Applications. Springer-Verlag New York.

[54]. T.Y. Li, J. A. Yorke (1975). Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly 82(10) pp.985-992.

[55]. Y. Ishida, T. Yamamoto (2012). Linear and Nonlinear Rotordynamics. 2nd edition,Wiley-VCH Verlag & Co, Germany.

[56]. John Vance, Fouad Zeidan, Brian Murphy (2010). Machinery vibration and rotordynamics. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, New Jersey.

[57]. Hung Nguyen-Schäfer (2012). Rotordynamics of Automotive Turbochargers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[58]. T. Kanyiki (2018). Simulation by the Finite Element Method of the Vibratory behaviour of a Rotor. Uncertainties and Reliability of Multiphysical Systems 2(2).

[59]. Y. LiHua, W. Weimin, Z. Shiquan, S. Yanhua, Y. Lie (2014). A New Nonlinear Dynamic Analysis Method of Rotor System Supported by Oil-Film Journal Bearings. Applied Mathematical Modelling 38(21-22) pp.5239-5255.

[60]. T. Miura, T. Inoue, H. Kano (2017). Nonlinear Analysis of Bifurcation Phenomenon for a Simple Flexible Rotor System Supported by a Full-circular Journal Bearing. J. Vib. Acoust 139(3): 031012.

[61]. Tower, B. First report on friction experiments (1884). Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 35(1) pp.29-35.

[62]. O. Reynolds (1886). On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of viscosity of olive oil. Philosophical Transactions 177 pp.157–234.

[63]. M. Cheng, G. Meng, J. Jing (2007). Numerical and experimental study of a rotor-bearing-seal system. Mechanism and Machine Theory 42 pp.1043-1057.

[64]. T. Shoyama (2019). Nonlinear vibration of saturated water journal bearing and bifurcation analysis. ASME J. Vib. Acoust 141(2): 021016.

[65]. W. Sun, Z. Yan, T. Tan, et al (2018). Nonlinear characterization of the rotor-bearing system with the oil-film and unbalance forces considering the effect of the oil-film temperature. Nonlinear Dynamics 92 pp.1119-1145.

[66]. Z. Li, J. Li and M. Li (2018). Nonlinear dynamics of unsymmetrical rotor-bearing system with fault of parallel misalignment. Advances in Mechanical Engineering 10(5) pp.1-17.

[67]. G. Z Liu, Y. Yu, B.C Wen (2013). Nonlinear Analysis of Rotor-stator-bearing System Unsteady Oil Film Force. Applied Mechanics and Materials 341-342 pp.395-399.

[68]. R. Zhu, Y. Zhang, J. Ren, H. Li, Q. Han (2016). Nonlinear dynamics study of a high-temperature rotor-bearing-seal system in gas turbine. Journal of Vibroengineering 19(1) pp. 629-640.

[69]. A. Hafaifa, M, Guemana and A. Daoudi (2015). Vibration supervision in gas turbine based on parity space approach to increasing efficiency. Journal of Vibration and Control 21 pp.1622-1632.

[70]. A. Mohamadi, M. Shahgholi, F. A Ghasemi (2022). Nonlinear dynamic and bifurcations analysis of an axially moving circular cylindrical nanocomposite shell. International Journal of Mechanics and Materials in Design 18 pp. 125-154.

[71]. H. Asghari, M. Dardel (2020). Parameter converting method for bifurcation analysis of nonlinear dynamical systems. Scientia Iranica Transactions on Mechanical Engineering 27(1) pp. 310-329.

[72]. A. Chasalevris (2020). Stability and Hopf bifurcations in rotor-bearing-foundation systems of turbines and generators. Tribology International 145 p. 106154.

[73]. K. Avramov, S. Malyshev (2019). Bifurcations and chaotic forced vibrations of cantilever beams with breathing cracks. Engineering Fracture Mechanics 214 pp. 289-303.

[74]. K. Avramov, T. Raimberdiyev (2017). Bifurcations behavior of bending vibrations of beams with two breathing cracks. Engineering Fracture Mechanics 178 pp. 22-38.

[75]. B. Wu (2021). Dynamic performance simulation analysis method of split shaft gas turbine based on RBF neural network. Energy Reports 7(7) pp. 947-958.

[76]. B. Lv, X. Jin, J. Cao, B. Xu, Y. Wang, D. Fang (2020). Advances in numerical modeling of environmental barrier coating systems for gas turbines. Journal of the European Ceramic Society 40(9) pp. 3363-3379.

[77]. C. Djeddi, A. Hafaifa, A. Iratni, N. Hadroug, X. Chen (2021). Robust diagnosis with high protection to gas turbine failures identification based on a fuzzy neuro inference monitoring approach. Journal of Manufacturing Systems 59 pp.190-213.

[78]. C. Baum, T. Leister, W. Seemann (2022). Stability and bifurcation analysis of a rotor in rigid and foil air bearings utilized for the identification of the air whirl effect. Journal of Sound and Vibration 536 p. 117067.

[79]. G. Zhuang, W. Zong, Y. Tang (2023). Statistical analysis and suppression of vibration frequency bifurcation in diamond turning of Al 6061 mirror. Mechanical Systems and Signal Processing 198 p. 110421.

[80]. J. Aghayari, S. Bab, P. Safarpour, A. Rahi (2021). A novel modal vibration reduction of a disk-blades of a turbine using nonlinear energy sinks on the disk. Mechanism and Machine Theory 155 p. 104048.

[81]. M. Jahangiri, E. Bagheri (2021). Effect of radially functionally graded materials on the primary resonances of large amplitude flexural vibration of in-extensional rotating shafts. Engineering Structures 226 p. 111362.

[82]. J. Ju, W. Li, Y. Wang, M. Fan, X. Yang (2018). Dynamics and nonlinear feedback control for torsional vibration bifurcation in main transmission system of scraper conveyor direct driven by high-power PMSM. Nonlinear Dynamics 93 pp. 307-321.

[83]. Li. Ma, M. Yao, W. Zhang, D. Cao (2020). Bifurcation and dynamic behavior analysis of a rotating cantilever plate in subsonic airflow. Applied Mathematics and Mechanics 41pp.1861-1880.

[84]. L.Y. Guang (2015). Aero gas turbine flight performance estimation using engine gas path measurements. Journal of Propulsion and Power 31(3) pp. 851-860.

[85]. L. Wang, A. Wang, M. Jin, Q. Huang, Y. Yin (2020). Nonlinear effects of induced unbalance in the rod fastening rotor-bearing system considering nonlinear contact. Archive of Applied Mechanics 90 pp. 917-943.

[86]. N. Noiray, B. Schuermans (2013). Deterministic quantities characterizing noise driven Hopf bifurcations in gas turbine combustors. International Journal of Non-Linear Mechanics 50 pp. 152-163.

[87]. Q. Jin, Y. Ren (2023). Coupled resonance of FGM nanotubes transporting super-critical high-speed pulsatile flow under forced vibration: size-dependence and

bifurcation topology. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 404 pp. 115834.

[88]. U. Torres-Herrera, K. Nakamura (2022). Flow differentiation within nanotube networks with symmetric bifurcations by local bending vibration: A theoretical study. Journal of Fluids and Structures 109 p. 103502.

[89]. X. Liu, L. Ma (2020). Chaotic vibration, bifurcation, stabilization and synchronization control for fractional discrete-time systems. Applied Mathematics and Computation 385 p. 125423.

[90]. X.Y Mao, S.Y Gao, H. Ding, L.Q Chen (2023). Static bifurcation and nonlinear vibration of pipes conveying fluid in thermal environment. Ocean Engineering 278 p. 114418.

[91]. X. Wang, X. Long, X. Yue, H. Dai, S.N Atluri (2022). Bifurcation analysis of stick–slip vibration in a 2-DOF nonlinear dynamical system with dry friction. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 111 p. 106475.

[92]. Y.Z Zhao, Y.J Chiu, C.H Yang, G.F Yu (2022). Research on heat-elastic coupled vibration in a rotating rigid disk rotor system. Journal of Mechanical Science and Technology 36 pp. 1667-1678.

[93]. Y. Zheng, G. Wang, Q. Zhu, G. Li, Y. Zhou, L. Hou, Y. Jiang (2023). Bifurcations and nonlinear dynamics of asymmetric tri-stable piezoelectric vibration energy harvesters. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 119 p. 107077.

[94]. Z. W, X.J Gu, Y.F Zhang (2023). New modeling on vibrations and bifurcations of FGGP reinforced pretwisted composite rotating blade under axial aerodynamic force: Theoretical and numerical researches. Thin-Walled Structures 184 p. 110523.

[95]. Z. Luo, J. Wang, R. Tang, D. Wang (2019). Research on vibration performance of the nonlinear combined support-flexible rotor system. Nonlinear Dynamics 98 pp. 113-128.

[96]. J.K. Wang, M.M. Khonsari (2006). Application of Hopf bifurcation theory to rotor-bearing systems with consideration of turbulent effects. Tribology International 39 pp.701-714.

[97]. W.M. Zhang, G. Meng (2006). Stability, bifurcation and chaos of a high-speed rub-impact rotor system in MEMS. Sensors and Actuators A127 pp.163-178.

[98]. Cai-Wan Chang-Jian (2015). Bifurcation and chaos of gear-rotor–bearing system lubricated with couple-stress fluid. Nonlinear Dynamics 79 pp.749-763.

[99]. Ji Feng, Yang Jinfu, Yuan Xiaoyang (2012). Hopf bifurcation and stability analysis of flexible rotor-bearing system. Journal of Vibroengineering 14(2) pp.723-732.

[100]. N. Ferjaoui, S. Naimi, M. Chouchane (2016). Bifurcation analysis of a flexible balanced cracked rotor–bearing system. Comptes Rendus Mecanique 344 (9) pp.661-671.

[101]. G. Capone, M. Russo and R. Russo (1987). Dynamic characteristics and stability of a journal bearing in a non-laminar lubrication regime. Tribology International 20(5) pp. 255-260

[102]. J. Aboudi, R Gilat (2022). Analysis of bifurcation buckling and imperfections effect on the microbuckling of viscoelastic composites by HFGMC micromechanics. International Journal of Engineering Science 175 pp.103660.

[103]. P. Bala, A.V Raviprakash et al (2010). Parametric study on buckling behaviour of dented short carbon steel cylindrical shell subjected to uniform axial compression. Thin-Walled Structures 48 pp.639–649.

[104]. B. Prabu, N. Bujjibabu, S. Saravanan, A. Venkatraman (2007). Effect of a dent of different sizes and angles of inclination on buckling strength of a short stainless steel cylindrical shell subjected to uniform axial compression. Advances in Structural Engineering 10(5) pp.581–91.

[105]. E. Ono, S. Hosoe et al (1998). Bifurcation in vehicle dynamics and robust front wheel steering control. IEEE transactions on control systems technology 6(3) pp.412 – 420.

[106]. X. Wang et S. Shi (2021). Vehicle coupled bifurcation analysis of steering angle and driving torque. J. sage 235(7)

[107]. G. Mastinu, D. Biggio, F. Della Rossa, et al (2020). Straight running stability of automobiles: experiments with a driving simulator. Nonlinear Dyn 99(4) pp.2801-2818.

[108]. B. Haegeman, K. Engelborghs, and D. Roose (2002). Stability and rupture of bifurcation bridges in semiconductor lasers subject to optical feedback. J. American Physical Society 66 (046216) pp.1-11.

[109]. A. Merouane, H. Ahmed, G. Mouloud (2022). Stability and Analysis of Vibrations Bifurcation Based on Dynamic Modeling of a Solar Titan 130 Gas Turbine. J. sciendo 72 (2) pp. 1–14.

[110]. M.R. Iravani, A. Semlyen (1992). Hopf Bifurcations in Torsional Dynamics. Transactions on Power Systems 7(1) pp.28.

[111]. D. Yuwen, X. Beibei et al (2019). Stochastic global stability and bifurcation of a hydro-turbine generator. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 72 pp. 64 –77.