Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

Caractérisation des graphes à diamètre $d \geq 1$ avec leurs nombres chromatiques de packing

Par :

SAYEH Rezki et OULD RAMOUL Oussama

Soutenu publiquement le 23/06/2022, devant le jury composé de :

Amel	BENDALI BRAHAM	MCB	U.Y.F-Médéa	Président
Rachid	LEMDANI	MCB	U.Y.F-Médéa	Promoteur
Mohamed	ZEMIR	MAA	U.Y.F-Médéa	Examinateur
Abdelkader	SAHRAOUI	MAA	U.Y.F-Médéa	Examinateur

Résumé

Notre travail est consacré à l'étude du nombre chromatique de packing. Le nombre chromatique de packing d'un graphe G consiste à trouver le plus petit nombre de couleurs à affecter aux sommets de G, de telle sorte que, si deux sommets u et v ont la même couleur i, alors $d_G(u, v) > i$. Le nombre chromatique de packing de G, est noté par $\chi_p(G)$. Nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing de certains graphes de diamètres inférieurs ou égaux à 4. Nous déterminons le nombre chromatique de packing d'un graphe puissance pour les graphes suivants : Joint de deux graphes, couronne d'un graphe complet avec une chaîne et couronne d'une étoile avec une chaîne, ainsi pour un graphe puissance d'une couronne voisinage d'une étoile avec une chaîne. D'autre part, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing du graphe Myceilski de plusieurs types de graphes, à savoir, le graphe de Myceilski d'une chaîne, cycle, une étoile et une roue. Finalement, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing de Myceilski des graphes : étoile double, une chaîne et d'un cycle.

Mots clés: Nombre chromatique de packing, diamètre d'un graphe, graphe de puissance, graphe de Myceilski.

Abstract

Our work is devoted to the study of the packing chromatic number. The packing chromatic number of a graph G, consists in finding the smallest number of colors to assign to the vertices of G, so that, if two vertices u and v have the same color i, then $d_G(u, v) > i$. The packing chromatic number of G, is denoted by $\chi_p(G)$. We determine the exact value of the packing chromatic number of certain graphs with diameters less than or equal to 4. We determine the packing chromatic number of a power graph for the following graphs: Joint of two graphs, corona of a complete graph with a path and corona of a star with a path, thus for a power graph of a neighborhood corona of a star with a path. On the other hand, we determine the exact value of the packing chromatic number of the Myceilski graph of several types of graphs, namely, the Myceilski graph of a path, of a cycle, of a star and of a wheel. Finally, we determine the exact value of the packing chromatic number of Myceilski of the graphs : double star, a path and a cycle.

Key words: Packing chromatic number, diameter of a graph, power graph, Myceilski graph.

ملخص

عملنا مخصص لدراسة العدد اللوني للتعبئة. العدد اللوني للتعبئة لرسم بياني G ، يتعلق بإيجاد أصغر عدد من الألوان لتعيين رؤوس الرسم البياني G ، بحيث ، إذا كان هناك رأسان u و v لهما نفس اللون i ، فان $d(u,v) > i$. عدد لون التعبئة لـ G ، يُشار إليه بـ $\chi_p(G)$. نعين القيمة الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة لبعض الرسوم البيانية ذات القطر أقل أو يساوي 4. نحدد القيمة الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة للرسم البياني الأسي للرسوم البيانية الآتية : ربط رسم بياني، تاج رسم بياني كامل بسلسلة و تاج نجمة بسلسلة، وهكذا لرسم بياني أسي لتاج الجوار لنجمة مع سلسلة. من جهة أخرى، نعين القيمة الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة للرسم البياني **ميسيلسكي** (Myceilski) لعدد كبير من الرسوم البيانية، على غرار، الرسم البياني **ميسيلسكي** لسلسلة، دورة، نجمة و عجلة. في النهاية، نعين القيمة الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة للرسم البياني **ميسيلسكي** للمنحنيات البيانية: نجمة مضاعفة، سلسلة ودورة.

الكلمات المفتاحية : عدد اللوني للتعبئة، قطر رسم بياني، الرسم البياني الأسي، الرسم البياني ميسيلسكي.

Remerciements

Avant tout, nous remercions **ALLAH,** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nos remerciements vont à Monsieur **Rachid LEMDANI**, notre promoteur pour ses conseils, ses sincères contributions pour la réalisation de notre travail et pour la qualité de son encadrement exceptionnelle,

pour sa patience, sa rigueur

et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Je tiens à remercier Madame A. BENDALI BRAHAM,

qui a bien voulu nous faire l'honneur en acceptant de présider le jury.

Nous exprimons nos sincères remerciements au membres de jury, Mr. M. ZEMIR, Mr. A. SAHRAOUI, pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Nous tenons également à remercier tous les membres de nos familles pour leurs aide tout au long de la réalisation de ce travail.

Enfin, que mes enseignants et amis trouvent ici l'expression de ma parfaite considération et mon profond respect.

Dédicace

À **mes très chers parents**

Les sacrifices que vous avez consenti pour ma réussite m'ont permis de vivre ce jour. Les mots me manquent pour exprimer toute la reconnaissance, la fierté et le profond amour que je vous porte.

Que vous trouvez ici le témoignage de mon attachement, gratitude et respect,

Que **ALLAH** vous préserve bonne santé et longue vie.

À mes frères : **Sohaib**, **Mohamed**.

J'espère avoir atteindre le seuil de vos espérances. Que ce modeste travail soit l'expression de ma profonde affection.

Je vous remercie pour le soutient moral et l'encouragement que vous m'avez accordés.

Je vous souhaite tout le bonheur que vous méritez.

À toutes mes familles :

OULD RAMOUL et BENGHERBIA

sans exception.

À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail et à tous mes amis.

À tous, je dédie ce travail.

OULD RAMOUL Oussama

Dédicace

Je dédie ce modeste travail, aux deux êtres les plus chers sur cette terre, symbole du courage et d'affection à qui je souhaite une longue vie pleine de joie et de bonheur :

A mon père **Mr SAYEH Mohamed** qui a cru en moi et m'a fait confiance et il m'a assuré

tout les moyens d'aller aussi loin que possible, merci beaucoup papa,

A ma mére **Mme RAZIA Hassiba** , Maman c'est sûr que tu ne comprendras pas grand-chose au sujet que j'ai traité dans ce document, mais saches que chaque mot, chaque phrase, que j'y ai inscrit ont une seule et même signification : tu es la meilleure des mères, je t'aime à l'éternité

A mes fréres : **Sofiane**, **Younes**, **Youcef**, **Hadjer** et leurs fils **Manar , Djihane , Yahia** que j'aime beaucoup

qui m'ont soutenu durant toute cette période, je tiens a les remercie énormément pour tous ce qu'ils m'ont fait

A ma grand mère

A tous mes cousins et cousines, oncles et tantes, et toute ma famille et les personnes qui m'ont soutenu durant mon cursus universitaire

A tous ceux qui m'ont aimé et qui ne méritent pas d'être oubliés

A tous mes amis.

SAYEH Rezki

Table des matières

Résumé II

Abstract III

ملخص IV

Table des figures XI

Introduction XIII

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes **1**

1.1 Concepts fondamentaux 1

1.1.1 Graphe et sa présentation 1

1.1.2 Graphe non orienté 2

1.1.3 Graphe simple 2

1.1.4 Multigraphe 2

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet 3

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre 4

1.1.7 Chaîne et Cycle 4

1.1.8 Quelques graphes particuliers 5

1.1.9 La couronne 13

1.1.10 La couronne voissinage de deux graphe 13

1.1.11 Joint de deux graphes 14

1.1.12 Invariants de graphes 15

1.2 La coloration dans les graphes 17
1.2.1 Coloration des sommets 17
1.2.2 Le nombre chromatique 17
1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique 18

2 Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing 19
2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing 19
2.1.1 i-packing 20
2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers 20
2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing 21
2.1.4 Coloration de packing pour les arbres 22
2.1.5 Coloration de packing de la couronne d'un graphe 24
2.1.6 La couronne d'une chaîne 24
2.1.7 La couronne d'un cycle 25

3 Détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes 26
3.1 Quelques résultats obtenus sur les graphes puissances 26
3.1.1 Coloration de packing du graphe puissance d'un graphe biparti complet 27
3.1.2 Coloration de packing du graphe puissance d'une étoile 28
3.1.3 Coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 3 . 28
3.1.4 Coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 4 . 29
3.1.5 Coloration de packing du graphe puissance d'un cycle 30
3.2 Coloration de packing d'un graphe de diamètre 1 30
3.2.1 Coloration de packing du joint des deux graphes 30
3.3 Coloration de packing du graphe de diamètre 2 31
3.3.1 Coloration de packing du graphe puissance de la couronne d'un graphe complet avec une chaîne 31
3.3.2 Coloration de packing du graphe puissance de la couronne d'une étoile avec une chaîne 32
3.3.3 Coloration de packing du graphe puissance de la couronne voisinage

d'une étoile avec une chaîne 34
3.3.4 Coloration de packing du graphe puissance d'un graphe myceilski de quelques types de graphes particuliers 36
3.3.5 Coloration de packing du graphe puissance de myceilski d'une chaîne 36
3.3.6 Coloration de packing du graphe puissance de Mycielski d'un cycle . 38
3.3.7 Coloration de packing du graphe myceilski d'une étoîle 40
3.3.8 Coloration de packing du graphe myceilski d'une roue 41
3.4 Coloration de packing du graphe de diamètre 3 43
3.4.1 Coloration de packing de myceilski d'une double étoile 43
3.5 Coloration de packing de quelques graphes à diamètre 4 45
3.5.1 Coloration de packing du graphe myceilski d'une chaîne 45
3.5.2 Coloration de packing du graphe myceilski d'un cycle 48

Conclusion et perspectives **52**

Table des figures

1.1.1 Graphe simple G 2

1.1.2 Un multigraphe G 3

1.1.3 Un cycle C_6 et une roue W_7 à droite. 5

1.1.4 Un graphe G, un sous graphe et un sous graphe partiel à droite. 6

1.1.5 Un graphe complet K_6. 6

1.1.6 Un cycle C_4 et son complémentaire 7

1.1.7 Un graphe G, $4-$régulié 7

1.1.8 Un graphe biparti 8

1.1.9 Un graphe biparti complet $K_{3,3}$. 9

1.1.10 Un graphe connexe 9

1.1.11 Un sommet d'articulation 10

1.1.12 Un arbre T 11

1.1.13 Une forêt T 11

1.1.14 Une étoile $K_{1,4}$. 12

1.1.15 Une étoile double $S_{3,2}$. 12

1.1.16 La subdivision d'un graphe G. 13

1.1.17 La couronne de C_4. 13

1.1.18 La couronne voisinnage $C_4 \bigstar P_2$ 14

1.1.19 Le graphe joint de G_1 et G_2. 14

1.1.20 Une clique engendrée par $\{B, C, D, E\}$ 15

1.1.21 Une recouverement de G. 16
2.1.1 Un graphe G et un $T-$ajout du sommet v. 22
2.1.2 Les plus petits arbres avec $\chi_p(T) = 4$. 23
2.1.3 La couronne de P_n. 24
2.1.4 Une coloration de packing de $Cr(P_{10}), Cr(P_2)$ et $Cr(P_4)$. 25
2.1.5 La couronne de C_n. 25
3.1.1 Un graphe puissance P_{11}^2. 27
3.1.2 Une coloration de packing de $K_{4,3}^2$. 27
3.1.3 Une coloration de packing $K_{1,5}^2$. 28
3.1.4 Une coloration de packing de $S_{2,2}^2$. 29
3.1.5 Une coloration de packing de T^2. 29
3.1.6 Une coloration de packing de C_7^2. 30
3.2.1 Une coloration de packing de $(K_3 \odot P_1)^2$ 32
3.2.2 Une coloration de packing de $(K_{1,3} \odot P_3)^2$ 34
3.2.3 Une coloration de packing de $\chi_p(K_{1,3}\bigstar P_3)^2$ 35
3.2.4 Graphe de myceilski de K_4 36
3.2.5 Une coloration de packing de $(\mu(P_8))^2$ 38
3.2.6 Une coloration de packing de $\chi_p(\mu(C_{10}))^2$ 40
3.2.7 Une coloration de packing de $\mu(K_{1,8})$ 41
3.2.8 Une coloration de packing de $\mu(W_8)$ 43
3.3.1 Une coloration de packing de $\mu(S_{3,3})$ 45
3.4.1 Une coloration de packing de $\mu(P_8)$ 48
3.4.2 Une coloration de packing de $\mu(C_{10})$ 51

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle repré- sente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Elle est ainsi souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient. Le problème appelé **"problème des ponts de Koenigsberg"** posé par Euler en 1736 est à l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville1 en traversant chaque pont une et une seule fois?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de **Berge** qui a grande- ment participé à sa diffusion.

La théorie des graphes peut modéliser beaucoup de problèmes pratiques et dans plusieurs domaines, notamment en technologie, par exemple, les problématiques de réseaux informatiques, de réseaux routiers, de transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide et aussi les réseaux de télécommu- nication .

Le problème des quatre couleurs est parmi les premières sources d'inspiration de la théorie des graphes, Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "suffit-il de quatre couleurs pour colorer n'importe quelle carte géographique de fa-çon telle que deux pays ayant une frontière commune aient des couleurs distinctes?". Mathématiquement et en théorie des graphes, ce problème consiste à répondre à la question suivante : " peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de cou-leurs différentes?". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par **F. Guthrie** en 1852. Depuis, il est considéré comme l'un des problèmes les plus célèbres en théo- rie des graphes. Plus d'un siècle plus tard, en 1977, il y a eu une réponse positive à ce problème proposée par Appel, **Haken** et **Koch** , mais à l'aide de l'ordinateur (leur preuve a nécessité plus de 1200 heures de calcul sur trois ordinateurs).

20 ans plus tard, **Robertson**, **Sanders**, **Seymour** et **Thomas** ont obtenu une preuve plus simple et plus courte, mais toujours à l'aide de l'ordinateur. Bien que ce problème ait été résolu, il attire toujours de nombreux chercheurs, qui tentent de le résoudre sans l'aide d'ordinateurs.

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations : elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces...), avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires. Il existe de nombreux résultats sur plusieurs types de colorations que nous ne détaillerons pas ici,mais nous pouvons citer l'ouvrage de **Jensen** et **Tofl** , "Graph Coloring Problems", qui rassemble la plupart des résultats sur plusieurs types de colorations de graphes ainsi de nom- breuses questions ouvertes.

En2003, **Goddard**, **Hedetniemi**, **Harris** et **Rall** ont introduit la coloration de packing des graphes, il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs, appelé nombre chromatique de packing et noté $\chi_p(G)$, à affecter aux sommets d'un graphe G de telle sorte que si deux sommets u et v ont la même couleur $\pi(u) = \pi(v)$, alors $d_G(u, v) > \pi(u)$ où π est une fonction de V dans l'ensemble $\{1, 2, ...\}$.

Dans ce présent travail, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques types de graphes.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trois chapitres:

Le premier chapitre portera des généralités sur la théorié des graphes, nous introduisons les définitions fondamentales, et les notations de base dans le domaine. A la fin de ce chapitre, nous précisons la définition de la coloration propre dans les graphes et nous présentons quelques bornes sur cet invariant.

Dans le deuxieme chapitre, on étudie la coloration de packing sur les graphes, les définitions, les notations ainsi que les résultats obtenus par les chercheurs dans [1,3,13,14,16,18,19] sont énoncés.

Dans le dernier chapitre, nous présentons nos résultats sur la détermination du nombre chromatique de packing sur les graphes puissances pour les graphes suivants: les étoiles, graphes bipartis complets, arbres à diamétre 3, arbres à diamétre 4 et les cycles. Ainsi sur les graphes subdivisés super finis pour les graphes suivants: splitting d'une chaîne, splitting d'une étoile, splitting d'un arbre, la couronne voisinage de deux chaînes, la couronne

voisinage d'un cycle avec une chaîne et la couronne d'un graphe complet avec une chaîne. Nous déterminons aussi la coloration de packing du graphe joint d'un graphe complet avec une chaîne, ainsi la coloration de packing de la couronne et de la couronne voisinage d'un graphe complet avec une chaîne.

Nous donnons des démonstrations à tous les résultats obtenus dans ce mémoire. Des figures illustratives pour chaque résultat en utilisant le logiciel Geogebra sont mêmes insérées.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale avec des perspectives sur l'ensemble du travail réalisé.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous donnons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire, ensuite nous rappelons quelques paramètres de coloration que nous avons étudie.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Graphe et sa présentation

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G; noté par $n\ (G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G; noté par $m\ (G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u, v) noté par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.*

1.1.2 Graphe non orienté

Définition 1.1.2 *Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une « arête ».*

1.1.3 Graphe simple

Définition 1.1.3 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (deux arêtes distinctes joignantes la même paire de sommets). La Figure* 1.1.1 *illusre un graphe simple.*

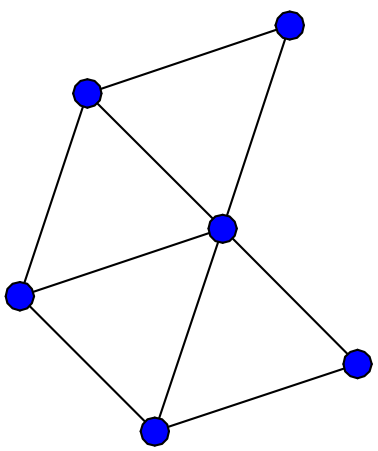


Figure 1.1.1 *: Graphe simple G*

1.1.4 Multigraphe

Définition 1.1.4 *Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets. La Figure* 1.1.2 *illustre un multigraphe.*

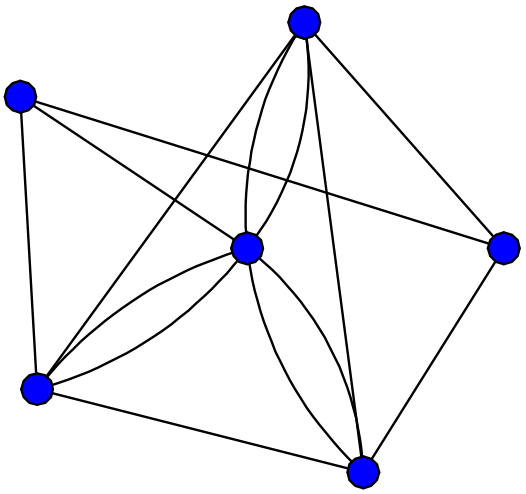


Figure 1.1.2 : Un multigraphe G

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet

Définition 1.1.5 *Soit $G\ (V, E)$ un graphe pour un sommet v de G, le voisinage ouvert de v est*

$$N_G(v) = \{u \in V_G(v) : uv \in E(G)\}.$$

Le voisinage fermé de v est défini par

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v).$$

le voisinage fermé de S est

$$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[S].$$

Le degré d'un sommet est la taille de son voisinage. Soit $v \in V\ (G)$, le degré de v est noté par

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Le degré minimum d'un graphe est le degré minimum de tous ses sommets, noté par

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Par exemple pour le graphe G de la Figure 1.1.2, le voisinage ouvert du sommet 4 est $\{1, 2, 5, 6\}$ et son voisinage fermé est $[4, 1, 2, 5, 6]$. Le graphe G n'a pas de sommets isolés. Le degré minimum du G est donc $\delta(G) = 1$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 4$.

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre

Soit u et v deux sommets d'un graphe G.

Définition 1.1.6 *On appelle distance entre u et v, notée $d\ (u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignante u et v.*

L'excentricité d'un sommet v dans G est: $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelée un centre.

Le diamètre de G, noté $diam\ (G)$, est égal $\max\{exc(v) : v \in V\}$.

Par exemple pour le graphe $G(V,\ E)$ de la Figure 1.1.2, $d(a, c) = 2$, $exc(a) = 2$ et $diam(G) = 2$.

1.1.7 Chaîne et Cycle

Définition 1.1.7 *Une chaîne joignante deux sommets x et y dans G est une suite de sommets et d'arêtes telle que la première arête de la suite est incidente à x, la dernière arête de la suite est incidente à y et chaque intermédiaire de la suite est adjacente à la précédente par une de ses extrémités.*

Définition 1.1.8 *Une chaîne est simple si la séquence qui constitue ne parcourt pas plusieurs fois la même arête.*

Une chaîne est élémentaire si la séquence qui la constitue ne parcourt pas plusieurs fois le même sommet.

On appelle cycle C_n dans un graphe G, une chaîne qui se referme.

Un cycle simple est une chaîne simple qui se referme.

Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire qui se referme.

Une roue, notée W_n, est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets du cycle.

La Figure 1.1.3 illusre un cycle C_6 et une roue W_7.

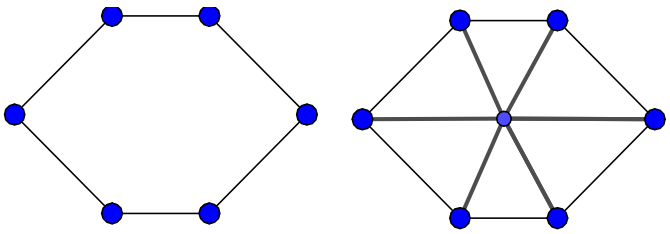


Figure 1.1.3 : Un cycle C_6 et une roue W_7 à droite

1.1.8 Quelques graphes particuliers

Sous-graphes et graphes partiels

Définition 1.1.9 *Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V sommets et E arêtes.*

• *Le sous-graphe de G* engendré par $A \subseteq V$ est le graphe dans les sommets sont ceux de A et dont les arêtes sont celles de G ayant leurs deux extrémités dans A. le sous graphe induit par A est le graphe $G[A] = (A, \{xy : xy \in E \text{ et } \{x, y\} \subset A\})$.

• *Le graphe partiel de G* défini par $W \subseteq E$ est le graphe dont ses sommets sont ceux de G et dont ses arêtes sont celles de W. La Figure 1.1.4 illusre un sous-graphe et un sous-graphe partiel.

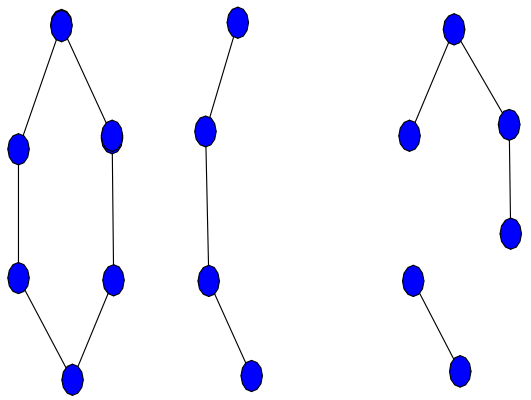


Figure 1.1.4 : Un graphe G, un sous-graphe et un sous graphe partiel à droite.

Graphe complet

Définition 1.1.10 *Un graphe complet, est un graphe dont toutes les paires de sommets sont adjacentes. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n et chaque sommet est de degré $n-1$. La Figure* 1.1.5 *illusre un graphe complet K_6.*

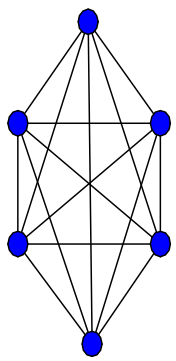


Figure 1.1.5 : Un graphe complet K_6

Graphe complémentaire

Définition 1.1.11 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté* $\overline{G} = (V, \overline{E})$*, défini par* $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ *et* $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u \in V\,(G)\ ,\ v \in V\ \ (G)\ \ et\ u\ v\ \notin E(G)\}$*. La Figure* 1.1.6 *représente un graphe* C_4 *et son complémentaire.*

Remarque 1.1.1 *La superposition de* G *et* $\overline{G}$ *donne un graphe complet .*

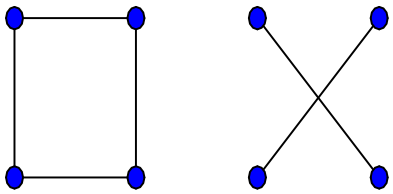


Figure 1.1.6 : Un cycle C_4 et son complémentaire

Un graphe k-régulier

Définition 1.1.12 *Un graphe* G *est dit* $k-$*régulier si tous les sommets de* G *sont de degré* k*. La Figure* 1.1.7 *illustre un graphe* G *est* 4*-régulier .*

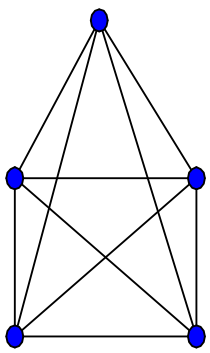


Figure 1.1.7 : Un graphe G, 4-régulier

Un graphe discret (nul)

Définition 1.1.13 *Et un graphe dont tous les sommets sont non adjacents. Un graphe discret G est un graphe $(0)-$ régulier.*

Graphe biparti

Définition 1.1.14 *Un graphe $G = (V, U)$ est dit biparti si V peut se partager en deux sous ensembles V_1 et V_2, de sorte que tous les sommets d'un même ensemble sont non adjacents. La Figure* 1.1.8 *illustre un graphe biparti.*

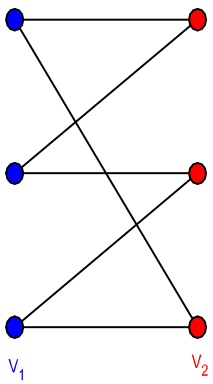


Figure 1.1.8 : Un graphe biparti

Un graphe biparti complet

Définition 1.1.15 *Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$, $p, q \geq 1$. Plus généralement, un graphe $G = (V; E)$ est dit $k-$parti $(k \geq 2)$, si V peut être partitionné en k stables $\{V_1, V_2, ...V_k\}$. Il est dit multiparti-complet si pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j. La Figure* 1.1.9 *illustre un graphe biparti complet .*

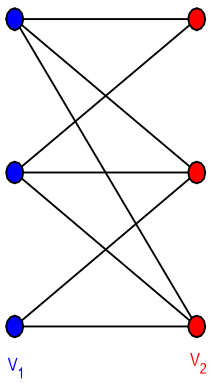


Figure 1.1.9 : Un graphe biparti complet $K_{3,3}$

Graphe connexe

Définition 1.1.16 *Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe connexe s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets du graphe. Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe.*

Une arête e est appelée un arête d'articulation (isthme du graphe G) si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G, (i.e, si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe). La Figure 1.1.10 *illustre un graphe connexe.*

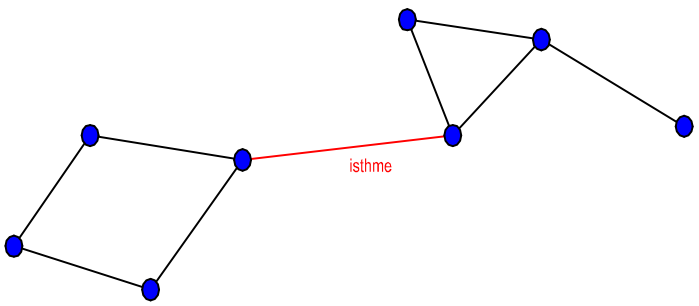


Figure 1.1.10 *: Un graphe connexe*

Sommet d'articulation

Définition 1.1.17 *Un sommet v du graphe G est appelé un sommet d'articulation du graphe G si le graphe $(G-v)$ a plus de composantes connexes que G, (i.e, si G est connexe alors $(G-v)$ n'est pas connexe). La Figure* 1.1.11 *illustre un sommet d'articulation*

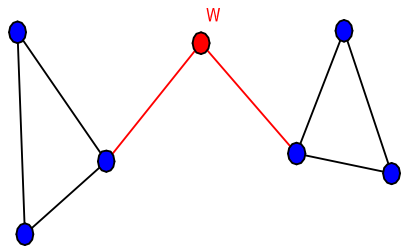


Figure 1.1.11 : Un sommet d'articulation

Graphe $h-$connexe

Définition 1.1.18 *Pour un graphe connexe G, la connectivité $k(G)$ est le nombre minimum de sommets de G dont la suppression déconnecte le graphe G ou le réduit à un sommet isolé. G est dit $h-$connexe si sa connectivité $k(G)$ est supérieure ou égale à h.*

Arbre

Définition 1.1.19 *On appelle arbre, et on note par T, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré* 1, *dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support. La hauteur $h\ (T)$ de l'arbre T est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille. La Figure* 1.1.12 *représente un arbre.*

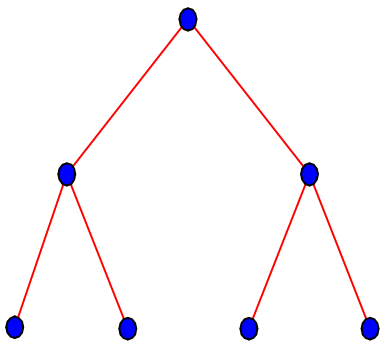


Figure 1.1.12 : Un arbre T

Forêt

Définition 1.1.20 *Une forêt est un graphe sans cycle, chacun de ses composants connexes étant un arbre. La Figure* 1.1.13 *représente une forêt.*

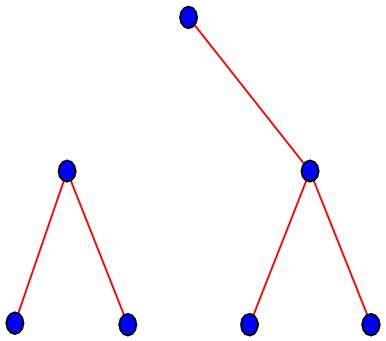


Figure 1.1.13 : Une forêt T

Étoile

Définition 1.1.21 *On appelle étoile et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles. La Figure* 1.1.14 *illustre une étoile $K_{1,4}$.*

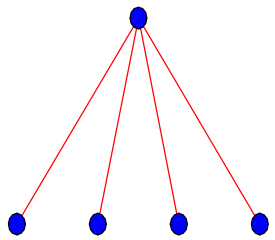


Figure 1.1.14 : Une étoile $K_{1,4}$

L'étoile double

Définition 1.1.22 *L'étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendant d'une étoile $K_{1,p}$ au sommet non pendant d' une étoile $K_{1,q}$. La Figure* 1.1.15 *illustre une étoile double $S_{3,2}$.*

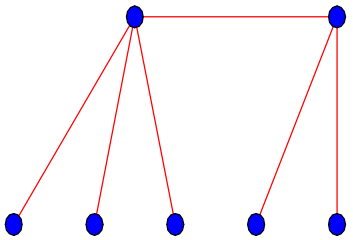


Figure 1.1.15 : Une étoile double $S_{3,2}$

La subdivision

Définition 1.1.23 *Le graphe subdivisé $S(G)$ d'un graphe G, est le graphe obtenu en subdivisant chaque arête uv de G une seule fois (voir la Figure* 1.1.16*).*

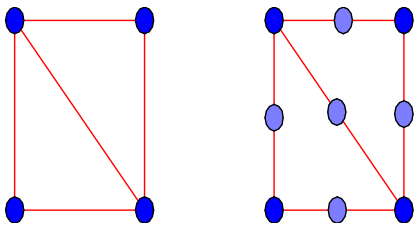


Figure 1.1.16 *: La subdivision d'un graphe G*

1.1.9 La couronne

Définition 1.1.24 *La couronne de $G = (V, E)$ notée $Cr\ (G)$, c'est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Donc il est évident que l'ordre de $Cr\ (G)$ est égal à $2|V|$. (Voir la Figure* 1.1.17*).*

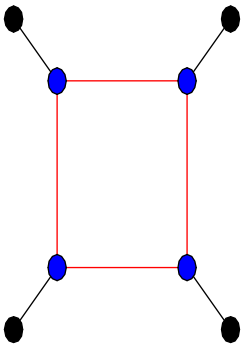


Figure 1.1.17 *: La couronne de C_4*

1.1.10 La couronne voissinage de deux graphe

Définition 1.1.25 *Soit G_1, G_2 deux graphes de n_1, n_2 sommets et m_1, m_2 arêts. Alors, la couronne voisinage $G_1 \bigstar G_2$ est le graphe obtenu par prendre n_1 copie de G_2 et pour tout*

$v_i \in V(G_1)$; $i \in \{1,..., n_1\}$, on relie les sommets de G_2 avec les voisins de v_i. La couronne voisinage $G_1 \bigstar G_2$ de G_1et G_2 a $n_1 + n_1 n_2$ sommets et $n_1(2n_2 + 1) + n_1 n_2$ arêtes, et quand $G_2 = K_1$, le graphe $G_1 \bigstar G_2$ est appelé: le graphe splitting de G_1, et noté par $S'(G_1)$. (Voir la Figure 1.1.18*).*

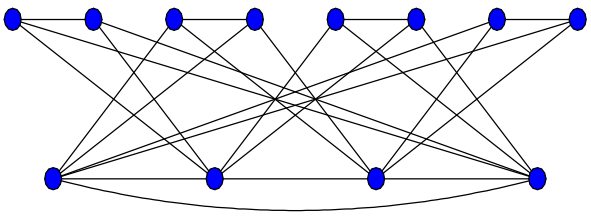


Figure 1.1.18 *: La couronne voissinage $C_4 \bigstar P_2$*

1.1.11 Joint de deux graphes

Définition 1.1.26 *Soient G_1 et G_2 deux graphes. Le graphe $G_1 + G_2$ défini par l'ensemble de sommets $V(G_1) \cup V(G_2)$ et l'ensemble d'arêtes $E(G_1) \cup E(G_2)$ et l'ensemble de toutes les arêtes possibles joignant les sommets de $V(G_1)$ à $V(G_2)$, est appelé le graphe adjoint de G_1et G_2. (Voir la Figure* 1.1.19*).*

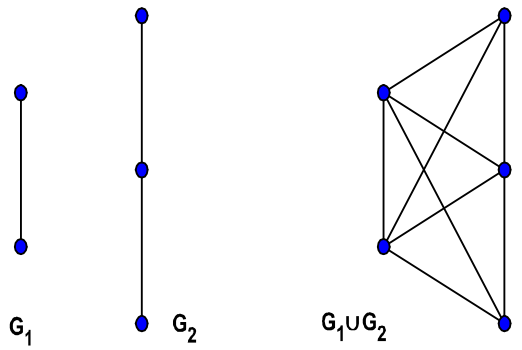


Figure 1.1.19 : Le graphe joint de G_1 et G_2

1.1.12 Invariants de graphes

Clique

Définition 1.1.27 *Une clique dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents, ou est un sous-graphe complet. Le nombre de clique $\omega(G)$ de G, est le cardinal maximal d'une clique dans G. Voir la Figure* 1.1.20.

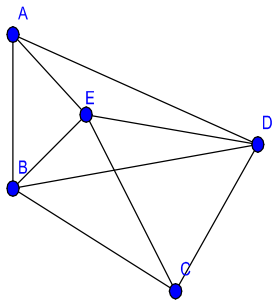


Figure 1.1.20 *: Une clique engendrée par* $\{B, C,\ D,\ E\}$

Stable

Définition 1.1.28 *Etant donné un graphe simple G, on appelle stable de G un ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents.*

Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale est appelée nombre de stabilité, et notée $\alpha(G)$.

Transversal

Définition 1.1.29 *Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble T de sommets de V qui couvre toutes les arêtes de G, i.e, chaque arête de G est incidente à au moins un sommet de T. Notons qu'un transversal existe pour tout graphe et si T est un transversal alors $V - T$ est un stable. Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal, et noté $\tau(G)$.*

Couplage

Définition 1.1.30 *Etant donné un graphe $G(V, E)$, on appelle un couplage M dans G un sous-ensemble d'arêtes de E deux a deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\alpha_0(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.*

Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tout les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G, sinon, x est dit insaturé par M .

Recouvrement

Définition 1.1.31 *Etant donné un graphe simple G (V, E) sans sommet isolé, on appelle recouvrement de G un ensemble R d'arêtes de E qui couvre tous les sommets de G.*

Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G. Les arêtes en couleur rouge de la la Figure 1.1.21 *forme un recouvrement de cardinalité minimum de G.*

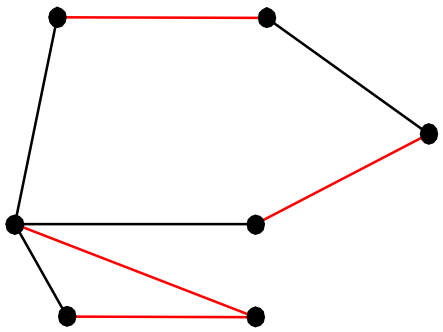


Figure 1.1.21 : Un recouvrement de G

1.2 La coloration dans les graphes

1.2.1 Coloration des sommets

Définition 1.2.1 *On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur a chaque sommet (est une fonction* $c : V \to \{1, 2, .., k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes $(c(v) \neq c(w), \forall v, w \in V$ *adjacents).*

G *est* $k-$*colorable si on peut colorer ses sommets avec* k *couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur.*

Etant donné un graphe $G = (V, E)$. *Une coloration triviale de* G *consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à* n *sommets admet une* $n-$*coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer* G. *D'où la définition du nombre chromatique de* G.

1.2.2 Le nombre chromatique

Définition 1.2.2 *Le nombre chromatique d'un graphe* G, *noté* $\chi(G)$ *est le plus petit nombre de couleurs nécessaires a une coloration propre des sommets de* G.

On le définit comme étant le plus petit entier k *tel que* G *admet une* $k-$*coloration, il est dit aussi que* G *est* $\chi(G)-$*chromatique*

- Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i.

Exemple 1.2.1 $G = P_3$ *est* $2-$ *colorable,* $\chi(G) = 2$.

Remarque 1.2.1 *Soit* G *un graphe d'ordre* n. *Il est clair que* $1 \leq \chi(G) \leq n$.

- $\chi(G) = 1$ *si et seulement si* G *est un graphe discret.*
- $\chi(G) = n$ *si et seulement si* G *est un graphe complet.*
- *Pour un cycle* C_n,

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2; & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3; & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique

Proposition 1.2.1 *[21] Si H est un sous-graphe de G, alors*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Proposition 1.2.2 *[21] Pour tout graphe G,*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G.

Proposition 1.2.3 *[17] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha}(G) \right\rceil \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

oú $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G, et $\Delta(G)$ est le degré maximum de G.

Proposition 1.2.4 *[2] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n,*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Proposition 1.2.5 *[16] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Chapitre 2

Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing

Dans ce chapitre, nous exposons la coloration de packing de certains graphes et nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique de la coloration de packing des graphes simples, à savoir: les chaînes, les cycles, les arbres, les graphes puissances.

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing

Le problème de la coloration de packing a été posé suite à l'établissement de nombreux régles et réglements par la Commission des communications des Etats-Unis concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion à des stations de radio. En particulier, deux stations de radio qui sont affectées de la même fréquence de diffusion doivent être localisées suffisamment loin l'une de l'autre pour que la diffusion de l'une n'altére pas la réception de l'autre. La distance géographique entre deux stations qui sont affectées de la même fréquence est donc directement liée à la puissance de leurs signaux de radio-diffusion.

2.1.1 i-packing

Définition 2.1.1 *Un sous ensemble de sommets V_i d'un graphe $G = (V, E)$ est dit $i-$packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de V_i est supérieure à i.*

Définition 2.1.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f : V \to \{1, ..., k\}$ est appelée coloration de packing d'ordre k si l'égalité $f\ (u) = f\ (v)$ implique $d\ (u, v) > f\ (u)$.*

L'ordre minimum d'une coloration de packing de G est appelé le nombre chromatique de packing, et il est noté par $\chi_p(G)$. La coloration de packing est donc une partition $P_k = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de V en k $i-$packing. Notons que toute coloration de packing est une coloration propre et donc $\chi(G) \leq \chi_p(G)$. De plus, pour tout sous graphe H d'un graphe G, on a $\chi_p(H) \leq \chi_p(G)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers

Tout graphe G d'ordre n admet une coloration de packing d'ordre n, il est possible d'affecter n entiers distincts, entre 1 et n, à chaque sommet de V. Ainsi, une borne supérieure naturelle serait l'ordre du graphe qui n'est pas forcément la meilleure. Les trois propositions suivantes donnent les valeurs exactes du nombre chromatiques de packing d'une chaîne, cycle et graphe complet.

Proposition 2.1.1 *[4] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_p(P_n) = 2$, et pour $n \geq 4$, $\chi_p(P_n) = 3$.*

l'affectation des couleurs $1, 2, 1, 3, ...$ aux sommets $u_1, u_2, ..., u_n$ de P_n représente une coloration de packing minimum.

Proposition 2.1.2 *[4] Pour les cycles C_n,*

$$\chi_p(C_n) = \begin{cases} 3; & \textit{si } n \equiv 0\,[4] \textit{ ou } n = 3, \\ 4; & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La coloration de packing optimale est donnée par l'affectation aux sommets $v_1, ..., v_n$ de C_n les séquences des couleurs:

$$\begin{aligned} 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3 \quad \textit{si } n &= 4r, \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 4 \quad \textit{si } n &= 4r + 1, \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 1, 4 \quad \textit{si } n &= 4r + 2, \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 1, 2, 4 \quad \textit{si } n &= 4r + 3. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *[4] Soit G un graphe complet. Alors $\chi_p\ (K_n) = n$.*

Les propositions suivantes donnent quelques bornes sur le nombre chromatique de packing d'un graphe quelconque.

Proposition 2.1.4 *[4] Pour tout graphe G, $\chi_p(G) \leq \tau(G) + 1$, avec égalité si G a le diamètre deux.*

Proposition 2.1.5 *[4] Si G est un graphe biparti de diamètre 3. Alors*

$$\tau(G) \leq \chi_p(G) \leq \tau(G) + 1.$$

Proposition 2.1.6 *[4] Pour tout graphe G,*

$$\omega\,(G) \leq \chi\,(G) \leq \chi_p(G).$$

Proposition 2.1.7 *[4] Soit G un graphe. si $\chi(G) = \chi_p(G)$, alors $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.*

Proposition 2.1.8 *[4] Pour tout graphe connexe G, $\chi_p\,(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Proposition 2.1.9 *[4] Pour tout sous graphe H d'un graphe G,*

$$\chi_p(H) \leq \chi_p(G).$$

2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing

En utilisant le fait qu'un graphe G tel que $\chi_p(G) = 2$ ne contient pas P_4 comme sous-graphe induit et vérifie $diam(G) \leq 2$, alors d'aprés la Proposition **2.1.4**, on a forcément $\tau(G) = 1$ c.à.d que G est une étoile. D'où la caractérisation des graphes de nombre de packing chromatique égal à 2.

Proposition 2.1.10 *[4] Pour un graphe connexe G, $\chi_p(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Proposition 2.1.11 *[4] Soit G un graphe $2-$connexe. Alors $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si $G = S(H)$ où H est un multi-graphe biparti ou G est le joint de K_2 et d'un stable. Pour un sommet v, on définit un $T-$ajout de v comme étant l'opération qui consiste à ajouter un sommet w_v, un stable X_v, l'arête vw_v et quelques arêtes entre $\{v, w_v\}$ et X_v. Voir la Figure* 2.1.1.

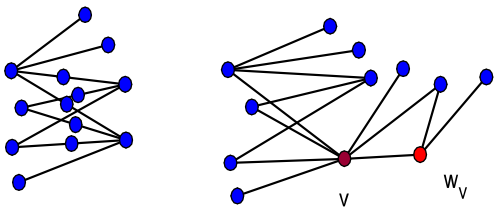


Figure 2.1.1 : Un graphe G et un $T-$ajout du sommet v

Proposition 2.1.12 *[4] Soit G un graphe. $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si G peut être formé en prenant un certain multigraphe biparti H avec bipartition (V_2, V_3), en subdivisant chaque arête exactement une fois, en ajoutant des feuilles à certains sommets dans $V_2 \cup V_3$, puis en effectuant un seul T-ajout à certains sommets de V_3.*

2.1.4 Coloration de packing pour les arbres

Nous nous intéressons aux arbres avec un nombre de coloration de paking très grand. Pour cela, il est nécessaire d'examiner les petits cas. Un arbre de diamètre 2 (étoile) a un nombre chromatique de packing égal à 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique de packing 3. Le cas d'un arbre de diamètre 4 est plus compliqué, mais **Goddard et al** [4] ont pu donner une formule explicite basée sur le sommet central et leurs voisins de degré 1, 2 et 3 et de degré supérieur ou égal à 4. Pour cela on définit un sommet petit s'il est de degré inférieur ou égal à 3 et un sommet grand s'il est de degré supérieur ou égal à 4.

Soit T un arbre de diamètre 4 avec un sommet central v. Pour $i = 1, 2, 3$, soit n_i le nombre de voisins de v de degré i et soit L le nombre de grands voisins de v, alors nous avons la proposition suivante:

Proposition 2.1.13 *[4] Soit T un arbre de diamètre 4. Si $L = 0$, alors*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} 4; & si \quad n_3 \geq 2 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3; & sinon. \end{cases}$$

et si $L > 0$, alors

$$\chi_p(T) = \begin{cases} L+3; & si \quad n_3 \geq 1 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L+1; & si \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L+2; & sinon. \end{cases}$$

Proposition 2.1.14 *[4] L'ordre minimum d'un arbre avec $\chi_p(T) = 2$ est 2. Pour $\chi_p(T) = 3$ c'est 4 et pour $\chi_p(T) = 4$ c'est 8. En outre, P_4 est l'arbre unique de 4 sommets qui ont besoin de 3 couleurs. Les deux arbres de 8 sommets qui ont besoin de 4 couleurs sont:*

(*i*) *L'arbre de diamètre 4 avec $n_3 = 2$, $n_1 = 1$ et $L = n_2 = 0$, appelé A_8.*

(*ii*) *L'arbre de diamètre 5 où les deux sommets centraux ont le degré 3 et pour chaque sommet central 3 sommets voisins de degrés 1, 2 et 3 respectivement, appelé B_8. Voir la Figure 2.1.2.*

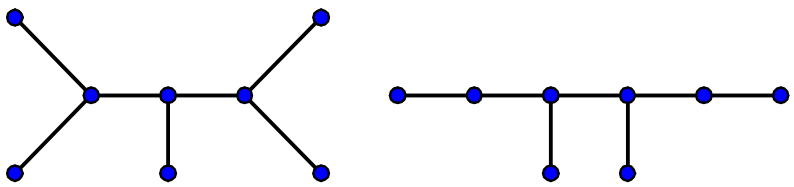


Figure 2.1.2 : Les plus petits arbres avec $\chi_p\ (T) = 4$

Proposition 2.1.15 *[4] Soit T un arbre différent de P_4. Supposons T contient une chaîne $\{t\ u\ v\ w\}$ où t est de degré 1. u et v ont le degré 2. Alors: $\chi_p(T) = \chi_p(T - t)$.*

Théorème 2.1.1 *[4] Pour tout arbre T d'ordre n,*

$$\chi_p(T) \leq \frac{n+7}{4}$$

excepter quand $n = 4$ ou 8, et cette borne est atteinte.

2.1.5 Coloration de packing de la couronne d'un graphe

Dans cette section, nous exposons des valeurs exactes du nombre chromatique de packing des couronnes des chaînes et des cycles, déterminées par [19]. Des valeurs exactes, et des bornes sur les différentes classes de chenilles sont énoncées. On définit la couronne d'un graphe G, notée $Cr(G)$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de G.

2.1.6 La couronne d'une chaîne

Soit $P_n = \{x_1, ..., x_n\}$ une chaîne de longueur n et $Cr(P_n)$ la couronne de P_n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets $x_1, ..., x_n$ respectivement.

Voir la Figure 2.1.3

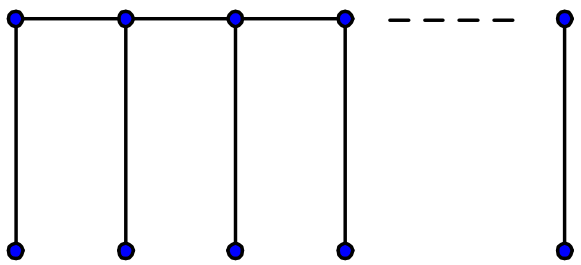


Figure 2.1.3 : La couronne de P_n

Proposition 2.1.16 *[14] Pour tout entier n, $n \geq 10$,*

(1) *Pour $n = 2$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 3$.*

(2) *Pour $n \in \{3, ..., 9\}$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 4$.*

(3) *Pour $n \geq 10$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 5$.*

Voir la Figure 2.1.4

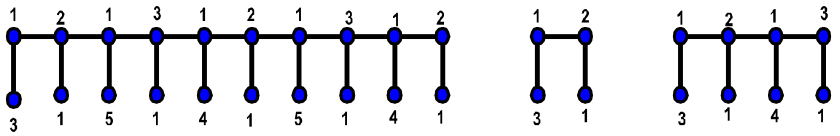


Figure 2.1.4 : Une coloration de packing de $Cr(P_{10})$, $Cr(P_2)$ et $Cr(P_4)$

2.1.7 La couronne d'un cycle

Soit $Cr(C_n)$ la couronne d'un cycle $C_n = \{x_1, ..., x_n\}$ de longueur n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets de C_n. Voir la Figure 2.1.5

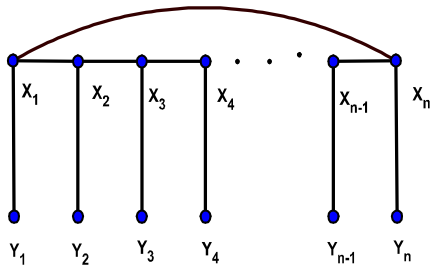


Figure 2.1.5 : La couronne de C_n

Pour la couronne du cycle, il y'a un résultat identique à celui de la couronne d'une chaîne. Pour les autres valeurs de n, le résultat est donné par la proposition suivante:

Proposition 2.1.17 *[14] Pour tout entier n,*

$$\chi_p\left(Cr\left(C_n\right)\right) = \begin{cases} 4; & si \quad n \in \{3,4\}, \\ 5; & sinon \end{cases}$$

Chapitre 3

Détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes

Dans ce chapitre, nous commençons par donner la définition d'un autre type de graphe, appelé *graphe puissance,* puis nous donnons quelques résultats obtenus dans [13] sur les graphes puissances des graphes: bipartis complets, étoiles, étoiles doubles, arbres à diamètres 4 et pour les cycles. Ensuite, nous donnons nos résultats obtenus sur la détermination du nombre chromatique de packing de quelques types de graphes en basant premièrement sur les graphes à diamètres 1.

3.1 Quelques résultats obtenus sur les graphes puissances

Nous définissons maintenant un nouveau graphe, noté le graphe **puissance**.

Définition 3.1.1 *Le graphe puissance noté G^p pour $p \geq 0$ d'un graphe G, est le graphe obtenu à partir de G en ajoutant une arête entre chaque paire de sommets à distance au*

plus p dans G. Voir la Figure 3.1.1.

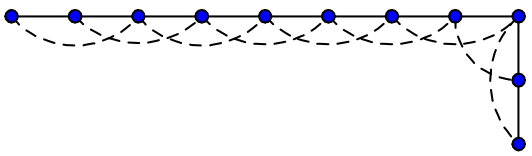


Figure 3.1.1 : *Un graphe puissance* P_{11}^2

3.1.1 Coloration de packing du graphe puissance d'un graphe biparti complet

Proposition 3.1.1 *[13] Pour un graphe* $K_{p,q}$, $p, q \geq 1$,

$$\chi_p(K_{p,q}^2) = p + q$$

La Figure 3.1.2 illustre un graphe puissance d'un graphe biparti complet $K_{4,3}^2$.

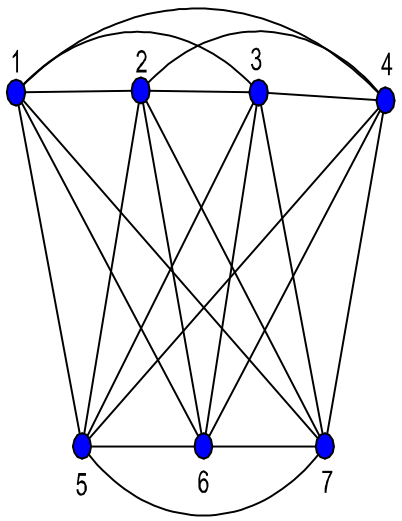


Figure 3.1.2: Une coloration de packing de $K_{4,3}^2$

3.1.2 Coloration de packing du graphe puissance d'une étoile

Proposition 3.1.2 *[13] Pour tout $n \geq 1$,*

$$\chi_p(K^2_{1,n}) = n + 1$$

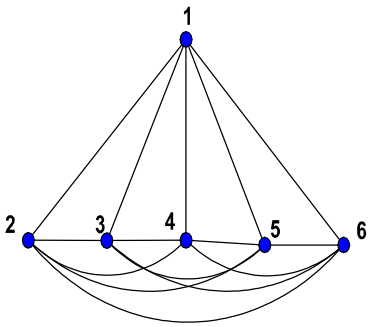


Figure 3.1.3: Une coloration de packing de $K^2_{1,5}$

3.1.3 Coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 3

Proposition 3.1.3 *[13] Soit $T = S_{p,q}$, $p, q \geq 1$. Alors*

$$\chi_p(T^2) = p + q + 1$$

La Figure 3.1.4 fournit une coloration de packing de $S^2_{p,q}$.

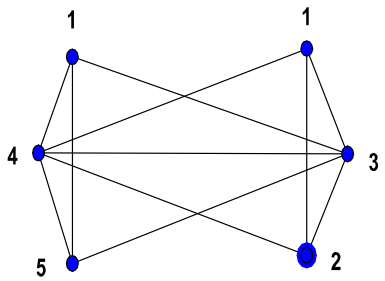


Figure 3.1.4: Une coloration de packing de $S^2_{2,2}$

3.1.4 Coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 4

Proposition 3.1.4 *[13] Soit T un arbre de diamètre 4 et d'ordre n, et soit l_1 le nombre de voisins par rapport son sommet central v de degré 1, et l_2 le nombre de voisins par rapport à v de degré supérieur ou égal à 2. Alors*

$$\chi_p(T^2) = \begin{cases} n - l_2 + 1; & \text{si } l_1 = 0, \\ n - l_2; & \text{si } l_1 \geq 1. \end{cases}$$

La Figure 3.1.5 montre une coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 4.

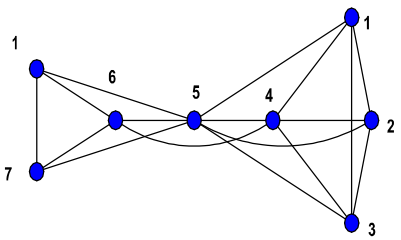


Figure 3.1.5: Une coloration de packing de T^2

3.1.5 Coloration de packing du graphe puissance d'un cycle

Proposition 3.1.5 *[13] Pour tout n, $n \geq 3$,* $\chi_p(C_n^2) = \begin{cases} n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1; \ n \leq 9, \\ \geq n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1; \ n > 9. \end{cases}$

La Figure 3.1.6 illustre un graphe puissance d'un cycle C_7^2.

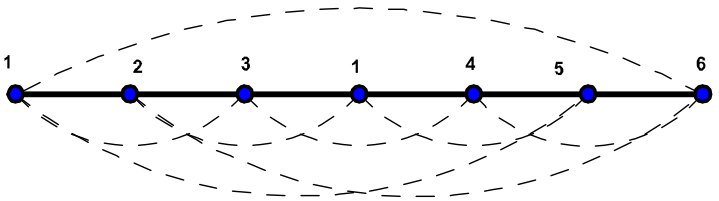


Figure 3.1.6: Une coloration de packing de C_7^2

3.2 Coloration de packing d'un graphe de diamètre 1

Avant de déterminer le nombre chromatique de packing de quelques types de graphes, on a besoin de l'observation suivante. Cette observation donne le diamètre du graphe puissance d'un graphe quelconque G à diamètre connu.

Observation 1 Pour un graphe G quelconque vérifiant $diam(G) = d$,

$$diam(G^2) = \begin{cases} \frac{d}{2} \text{ si } d \text{ est pair}, \\ \lceil \frac{d}{2} \rceil \text{ si } d \text{ est impair}. \end{cases} .$$

3.2.1 Coloration de packing du joint des deux graphes

La proposition suivante donne la valeur exacte du nombre chromatique de packing pour un graphe puissance du joint de deux graphes quelconques.

Proposition 3.2.1 *Soient G et H deux graphes quelconques tels que $o(G) = n$ et $o(H) = p$. Alors $\chi_p((G + H)^2) = n + p$.*

Preuve. Le graphe joint de G et H est formé en reliant toutes les sommets de G par les sommets de H et donc le graphe $G + H$ et de diamètre 2 et d'après l'Observation 1, $diam((G + H)^2) = 1$, par conséquence $(G + H)^2 \simeq K_{n+p}$ et donc $\chi_p((G + H)^2) = n + p$. ■

3.3 Coloration de packing du graphe de diamètre 2

3.3.1 Coloration de packing du graphe puissance de la couronne d'un graphe complet avec une chaîne

On commence par donner la coloration de packing du graphe puissanc d'une couronne d'un graphe complet K_n avec une chaîne P_p, et donc on a la proposition suivante.

Théorème 3.3.1 *Pour $n \geq 3$ et $p \geq 1$, $\chi_p((K_n \odot P_p)^2) = np - n\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1$.*

Preuve. Soit c une coloration de packing sur $(K_n \odot P_p)^2$. On note par v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du sous graphe K_n et pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, soit $P_{i,p}$ la chaîne correspondante au sommet v_i . On note par $u_{i,j}$, $j \in \{1, ..., p\}$ les sommets de la chaîne correspondante au sommet v_i. En particulier, si $p = 1$, alors les sommets $u_{i,j}$ sont notés par u_i. Soit c une coloration de packing sur $(K_n \odot P_p)^2$. Premièrement, on prend le sous graphe $K_3 \odot P_1$ de $K_n \odot P_p$. On cherche une coloration de pcking de $(K_3 \odot P_1)^2$. Notons que $K_3 \odot P_1 \simeq Cr(K_3)$. On voit que $c(v_i) \neq 1$ pour tout i, $i \in \{1, 2, 3\}$ car $d_{(K_n \odot P_p)^2}(v_i, v_j) = 1$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$ et dans ce cas toutes les couleurs sont utilisées une seule fois pour colorer ce graphe. Par contre on peut mettre la couleur 1 sur chaque sommet u_i, $i \in \{1, ..., p\}$ car $d_{(K_n \odot P_p)^2}(u_h, u_l) = 2$ pour tout $h \neq l$, et dans ce cas nous avons $\chi_p((K_3 \odot P_1)^2) \geq 6 - 3 + 1 = 4$. Pour montrer la borne supérieure, on utilise la coloration de packing suivante: $c(u_i) = 1$, $i \in \{1, 2, 3\}$ et les sommets v_j, $j \in \{1, 2, 3\}$ prennent des couleurs différentes par paire de $\{2, 3, 4\}$ et donc $\chi_p((K_3 \odot P_1)^2) \leq 4$. Par conséquence $\chi_p((K_3 \odot P_1)^2) = 4$ et notre résultat est vrai (voir la Figure 3.2.1).

Maintenant, supposons que $n \geq 4$ et $p \geq 2$. Puisque le graphe $(K_n \odot P_p)^2$ est de diamètre 2, la seule coleur qui peut être utilisée plusieurs fois est la coleur 1, et par conséquence les autres couleurs sont utilisées au plus une seule fois, et comme $c(v_i) \neq 1$ pour tout i, $i \in \{1, ..., n\}$ d'après le cas 1, la couleur 1 peut être utilisée sur chaque chaîne $P_{i,p}$ d'une manière séquentielle comme suit: pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, mettons $c(u_{i,j}) = 1$ such that $j = 3k+1$, $k \in \left\{0, ..., \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right\}$. Ainsi, la couleur 1 est utilisée $\left[\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1\right]$ sur chaque chaîne $P_{i,p}$, i.e, $n\left[\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1\right]$ fois sur le graphe $(K_n \odot P_p)^2$. Comme $o((K_n \odot P_p)^2) = (p+1)n$, nous en déduisons que $\chi_p((K_n \odot P_p)^2) \geq (p+1)n - n\left[\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1\right] + 1 = np - n\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1$ et notre

borne inférieure est démontrée. Pour montrer la borne supérieure, on forme une cololration $\left[np - n\left\lfloor\frac{p-1}{3}\right\rfloor + 1\right] - packing$ comme suit : pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, mettons $c(u_{i,j}) = 1$; $j = 3k + 1$, $k \in \left\{0, ..., \left\lfloor\frac{p-1}{3}\right\rfloor\right\}$ et pour tout $g \in \{1, ..., p\}$; $g \neq j$, les sommets $u_{i,g}$ et les sommets v_i reçoivent par paire des couleurs différentes de $\left\{2, ..., np - n\left\lfloor\frac{p-1}{3}\right\rfloor + 1\right\}$. Par conséquence la coloration c utilise au plus $\left[np - n\left\lfloor\frac{p-1}{3}\right\rfloor + 1\right]$ couleurs et donc $\chi_p((K_n \odot P_p)^2) \leq np - n\left\lfloor\frac{p-1}{3}\right\rfloor + 1$. Finalement, $\chi_p((K_n \odot P_p)^2) = np - n\left\lfloor\frac{p-1}{3}\right\rfloor + 1$ et notre théorème est prouvé. ■

La figure suivante fournit une coloration de packing de $(K_3 \odot P_1)^2$.

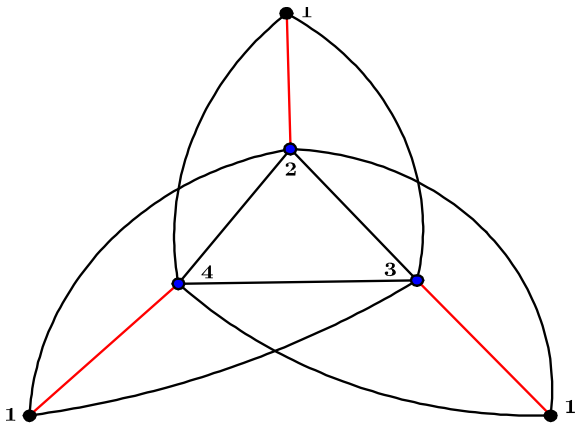


Figure 3.2.1 : Une coloration de packing de $(K_3 \odot P_1)^2$

3.3.2 Coloration de packing du graphe puissance de la couronne d'une étoile avec une chaîne

Théorème 3.3.2 *Pour tout n et p, $\chi_p((K_{1,n} \odot P_p)^2) = (n+1)\left[p - \left\lfloor\frac{p-1}{3}\right\rfloor\right] + 1$.*

Preuve. *Soit* $K_{1,n}$ une étoile et P_p une chaîne à p sommets. On note par $u_0, u_1, ..., u_n$ les sommets de $K_{1,n}$ tel que $d_{K_{1,n}}(u_0) = n + 1$.

Pour tout $i \in \{0, ..., n\}$,on note par $P_{i,p}$ la chaîne correspondante au sommet u_i . Notons par $v_{i,j}$, $j \in \{1, ..., p\}$ les sommets de la chaîne correspondante au sommet u_i .

Soit c une coloration de packing sur $(K_{1,n} \odot P_p)^2$. Notons que c une coloration de packing optimale sur $(K_{1,n} \odot P_p)^2$, et comme le graphe $(K_{1,n} \odot P_p)^2$ est de diamétre 2, alors la seule couleur utilisée plusieurs fois est la couleur 1. On distingue 3 cas.

Cas 1. Si $c(u_0) = 1$, alors comme $d_{(K_{1,n} \odot P_p)^2}(u_0, u_i) = 1$; $i \in \{1, ..., n\}$, alors $c(u_i) \neq 1$. De même $c(v_{0,j}) \neq 1$ pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, car $d_{(K_{1,n} \odot P_p)^2}(u_0, v_{0,j}) = 1$, ensuite $c(v_{i,j}) \neq 1$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., p\}$ et comme $o\left((K_{1,n} \odot P_p)^2\right) = n\,(p+1) + p + 1$, on conclut que $\chi_p((K_{1,n} \odot P_p)^2) \geq [n(p+1) + p + 1 - 1] + 1 = n(p+1) + p + 1$.

Cas 2. Supposons qu'il existe $h \in \{1, ..., n\}$, tel que $c(u_h) = 1$. Alors $c(u_i) \neq 1$, pour tout $i \neq h$; $i \in \{0, ..., n\}$, de même $c(v_{h,j}) \neq 1$ et $c(v_{0,j}) \neq 1$, $j \in \{1, ..., p\}$ car $d_{(K_{1,n} \odot P_p)^2}(u_h, u_i) = d_{(K_{1,n} \odot P_p)^2}(u_h, v_{h,j}) = d_{(K_{1,n} \odot P_p)^2}(u_h, v_{0,j}) = 1$, mais dans ce cas, on peut mettre la couleur 1 sur chaque chaîne $P_{i,p}$, $i \in \{1, ..., n\}$; $i \neq h$ de la manière suivante : mettons $c(v_{0,j}) = 1$; $j = 3k + 1$; $k \in \left\{0, ..., \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right\}$ et dans ce cas la couleur 1 est utilisée sur $(n-1)$ chaînes, on conclut que la couleur 1 est utilisée $(n-1)\left(\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1\right) + 1$ fois sur le graphe $(K_{1,n} \odot P_p)^2$(notons que le sommet u_h est aussi coloré par 1). Puisque $o\left((K_{1,n} \odot P_p)^2\right) = n\,(p+1) + p + 1$, nous avons $\chi_p((K_{1,n} \odot P_p)^2) \geq [n\,(p+1) + p + 1] - \left[(n-1)\left(\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1\right) + 1\right] + 1 = p\,(n+1) + (1-n)\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 2$.

Cas 3. On peut mettre la couleur 1 sur chaque chaîne $P_{i,p}$, $i \in \{0, ..., n\}$ en suivant la méthode que celle utilisée dans le *Cas* 2. Donc, nous avons $(n+1)\left(\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1\right)$ sommets colorés par 1, les autres sommets de $(K_{1,n} \odot P_p)^2$, c-à-d: $\left[(n+1)\left(p - \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right)\right]$ sommets reçoivent par paire des couleurs différentes de 1, et donc la coloration de packing c utilise au moins $\left[(n\,(p+1) + p + 1) - (n+1)\left(\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1\right)\right] + 1 = (n+1)\left[p - \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right] + 1$ couleurs.

En comparant les trois cas précédents, nous remarquons que $n(p+1)+p+1 \geq p\,(n+1) + (1-n)\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 2 \geq (n+1)\left[p - \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right] + 1$ et comme c est une coloration de packing optimale, on conclut que $\chi_p((K_{1,n} \odot P_p)^2) \geq (n+1)\left[p - \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right] + 1$ et notre borne inférieure est démontrée.

Pour montrer la borne supérieure, on forme une coloration $[p(n+1) + 1] - \textit{packing}$ comme suit. Mettons la couleur 1 sur chaque chaîne $P_{i,p}$; $i \in \{0, ..., n\}$ comme suit: posons $c(v_{i,j}) = 1$ pour $j = 3k + 1$; $k \in \left\{0, ..., \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right\}$, i.e, nous avons $\left[(n+1)\left(\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1\right)\right]$ sommets colorés par la couleur 1 et les autres sommets, c-à-d: $(n+1)\left(p - \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right)$ autres sommets prennent par paire des couleurs défférentes de $\left\{2, ..., (n+1)\left[p - \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right] + 1\right\}$.

Par conséquence $\chi_p((K_{1,n} \odot P_p)^2) \leq (n+1)\left[p - \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right] + 1$ et notre borne supérieure est démontrée. Par conclusion, on a montré que $\chi_p((K_{1,n} \odot P_p)^2) = (n+1)\left[p - \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor\right] + 1$ et notre théorème est démontrée. ■

La Figure 3.2.2 suivante montre une coloration de packing de $(K_{1,3} \odot P_3)^2$.

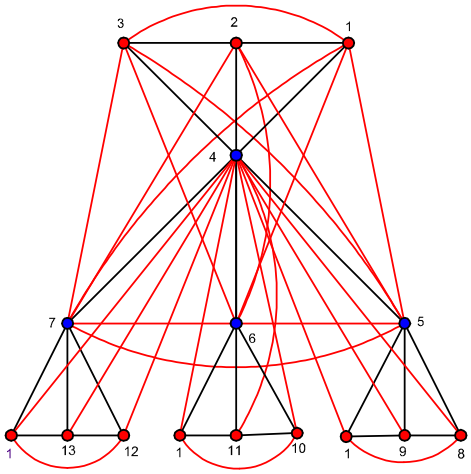


Figure 3.2.2: Une coloration de packing de $(K_{1,3} \odot P_3)^2$

3.3.3 Coloration de packing du graphe puissance de la couronne voisinage d'une étoile avec une chaîne

Proposition 3.3.1 *Pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, $\chi_p((K_{1,n} \bigstar P_p)^2) = p(n+1) + n$.*

Preuve. Soit $K_{1,n}$ une étoile et P_p une chaîne à p sommets. On note par u_0, u_1, ..., u_n, les sommets de $K_{1,n}$, tel que : $d_{K_{1,n}}(u_0) = n$. Pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, on note par $v_{i,j}$; $j \in \{1, ..., p\}$ les sommets de la chaîne corespondante au sommets u_i. Soit c une coloration de packing sur $(K_{1,n} \bigstar P_p)^2$. Notons que c une coloration de packing optimale sur $(K_{1,n} \bigstar P_p)^2$, et comme le graphe $(K_{1,n} \bigstar P_p)^2$ est de diamétre 2, la seule coleur utilisée plusieurs fois, c'est la coleurs 1. On distingue 3 cas.

Cas 1. Si $c(u_0) = 1$, alors comme $d(u_0, u_i) = 1$, $i \in \{1, ..., n\}$, $c(u_i) \neq 1$. De même $c(v_{i,j}) \neq 1$ pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, car $d_{(K_{1,n} \bigstar P_p)^2}(u_0, v_{i,j}) = 1$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et

$j \in \{1, ..., p\}$, par suite la couleur 1 est utilisée une seule fois sur $(K_{1,n}\bigstar P_p)^2$ et puisque $o\left((K_{1,n}\bigstar P_p)^2\right) = (n+1)(p+1)$, on conclut que $\chi_p((K_{1,n}\bigstar P_p)^2) \geq [(n+1)(p+1) - 1] + 1 = (n+1)(p+1)$.

Cas 2. Supposons qu'il existe $q \in \{1, ..., n\}$, tel que $c(u_q) = 1$. Alors $c(u_i) \neq 1$, pour tout $i \neq q$, $i \in \{0, ..., n\}$, car $d(u_q, u_i) = 1$, de même $c(v_{i,j}) \neq 1$, $j \in \{1, ..., p\}$. Les autres sommets du graphe $(K_{1,n}\bigstar P_p)^2$ prennent des couleurs défférentes par paire de $\{2, ..., (n+1)(p+1)\}$. Notons que ce cas est similaire avec le cas précédent et on conclut que $\chi_p((K_{1,n}\bigstar P_p)^2 \geq (n+1)(p+1)$.

Cas 3. On peut mettre la couleur 1 sur une seule sommet de la chaîne correspondante de u_0, et sans perte de généralité, soit $v_{0,h}$ tel sommet, $c(v_{0,h}) = 1$. Donc, $c(v_{0,j}) \neq 1$, pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, $j \neq h$, car $d(v_{0,h}, v_{0,j}) = 1$. D'autre part, on peut utiliser la coulleur 1 sur un autre sommet $v_{i,j}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., p\}$, et puisque c est une coloration optimale alors $\chi_p((K_{1,n}\bigstar P_p)^2) \geq [(n+1)(p+1) - 2] + 1 = p(n+1) + n$.

Pour montrer la borne supérieure, on forme une coloration $[p(n+1)+n] - packing$. Posons $c(v_{0,1}) = 1$, $c(v_{1,1}) = 1$ et les autres sommets de $(K_{1,n}\bigstar P_p)^2$ reçoivent des couleurs différentes de $\{2, ..., p(n+1)+n\}$. Notons que cette dernière coloration vérifie bien une coloration de packing, et donc $\chi_p((K_{1,n}\bigstar P_p)^2) \leq p(n+1)+n$. Par conséquence, on a démontré que $\chi_p((K_{1,n}\bigstar P_p)^2) = p(n+1)+n$. ■

La Figure 3.2.3 fournit une coloration de packing de $(K_{1,3}\bigstar P_3)^2$.

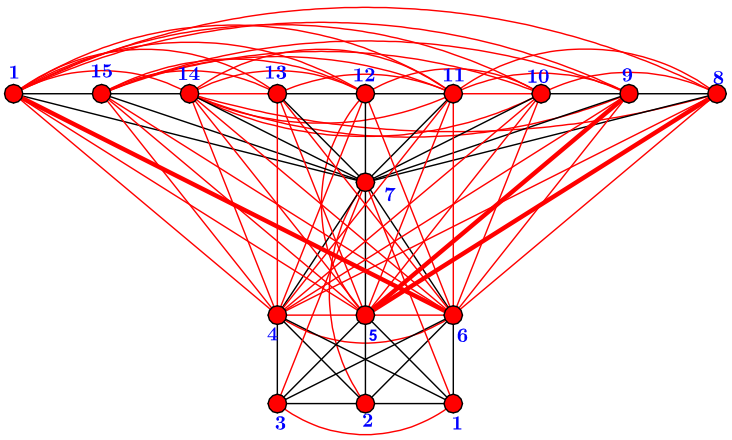


Figure 3.2.3: Une coloration de packing de $(K_{1,3}\bigstar P_3)^2$

3.3.4 Coloration de packing du graphe puissance d'un graphe myceilski de quelques types de graphes particuliers

Dans cette partie, on étudie la coloration de packing pour le graphe **Mycielski** de queques types de graphes, et donc on a besoin de définir cette classe de graphe.

Graphe myceilski

Définition 3.3.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe de **Mycielski** de G, noté par $\mu(G)$, est un graphe connexe avec $V(\mu(G)) = V(G) \cup V' \cup \{W\}$, $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $V' = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $E(\mu(G)) = E(G) \cup E' \cup E''$ avec $E' = \{v_i x_j, v_j x_i$: si et seulement si $v_i v_j \in E(G)$, $1 \leq j \leq n\}$ et $E'' = \{wx_i;\ 1 \leq i \leq n\}$. Voir la Figure* 3.2.4.

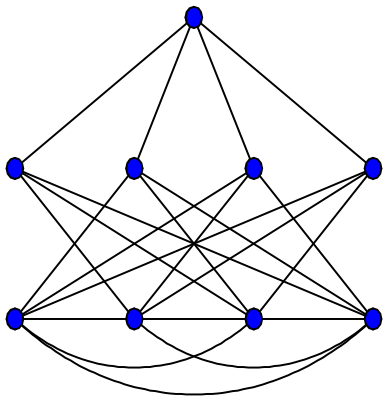


Figure 3.2.4 *: Graphe de Mycielski de K_4*

3.3.5 Coloration de packing du graphe puissance de myceilski d'une chaîne

Le théorème suivant donne la valeur exacte du graphe puissance de myceilski d'une chaîne d'ordre n.

Théorème 3.3.3 *Pour tout $n \geq 2$, $\chi_p((\mu(P_n)^2) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$.*

Preuve. On note par v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de la chaîne P_n et par x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets v_i. Notons par w le sommet relié par les sommets x_i. Soit c une coloration de packing sur $(\mu(P_n))^2$.

Premièrement, si $n = 2$. Le graphe $(\mu(P_2)^2$ est isomorphe au graphe K_5. Par conséquence, $\chi_p((\mu(P_2))^2) = \chi_p(K_5) = 5$ et le résultat est vrai.

Si $n = 3$, alors $\chi_p((\mu(P_3)^2)$ est isomorphe au graphe K_7 et donc $\chi_p((\mu(P_3))^2) = 7$ et le résultat est vrai.

Maintenant, supposons que $n \geq 4$.

Pour monter la borne supérieure $\chi_p((\mu(P_n))^2) \leq \left[2n - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1\right]$, on forme une coloration $\left[2n - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1\right] - packing$ sur $(\mu(P_n))^2$ comme suit :

On pose $c(v_i) = 1$ pour $i = 3k + 1$, $k \in \{0, ..., \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor\}$ et donc, nous avons $\left[\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1\right]$ sommets colorés par 1 et $[2n + 1] - \left[\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1\right]$ sommets reçoivent par paire des couleurs différentes de $\{2, ..., 2n - \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1\}$. Cette dernière coloration vérifie bien une coloration de packing, par conséquence $\chi_p(\mu(P_n))^2) \leq 2n - \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1$ et notre borne supérieure est démontrée.

Maintenant, montrons la borne inférieure $\chi_p(\mu(P_n)^2) \geq 2n - \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1$. Comme $diam[\mu(P_n))^2] = 2$, alors la seule couleur utilisée plusieurs fois est la couleur 1, par conséquence, si $c(w) = 1$, alors $c(x_i) \neq 1$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. De même $c(v_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ car $d(w, x_i) = 1$ et $d(w, v_i) = 1$. Par conséquence, la couleur 1 est utilisée une seule fois sur $(\mu(P_n))^2$.

D'autre part, il existe deux autres manières de coloration qui sont les suivantes.

D'une part, on peut utiliser la couleur 1 une seule fois sur les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ (car le sous graphe engendré par $\{x_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ est un graphe complet) de la manière suivante: $c(x_i) = 1$ pour $i = 3k + 1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor\}$ et alors, la couleur 1 peut être utilisée dans ce cas sur les sommets $\{v_i, 1 \leq i \leq n\}$ de la manière suivante $c(v_i) = 1$ pour $i = 3k + 1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor\}$ de tel sorte que $c(v_i) \neq c(x_i)$, et dans ce cas, on peut utiliser la couleur 1 sur les sommets $\{v_i, 1 \leq i \leq n\}$ au plus $\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$ sommets sur la chaîne P_n, sans oublier le seul sommet de l'ensemble $\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ qui est aussi coloré par 1. Donc, nous avons $\left[\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1\right]$ sommets colorés par 1. Les autres sommets du graphe $(\mu(P_n))^2$ reçoivent par paire des couleurs différentes de 1.

D'autre part, on peut utiliser la couleur 1 seulement sur la chaîne P_n comme suit : $c(v_i) = 1$ pour $i = 3k + 1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor\}$ et nous avons aussi dans ce cas $\left[\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1\right]$ sommets colorés par 1. Notons que ce cas est identique concernant l'utilisation de la couleur 1. Par conséquence et comme $o\left((\mu(P_n))^2\right) = 2n + 1$, nous réitérons que $\chi_p(\mu(P_n)^2) \geq \left[(2n+1) - \left[\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1\right]\right] + 1 = 2n - \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1$, et notre borne inférieure est démontrée. Donc, d'après ce qui précède, on conclut que $\chi_p((\mu(P_n))^2) = 2n - \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1$. ■

La figure suivante fournit une coloration de packing de $(\mu(P_8))^2$.

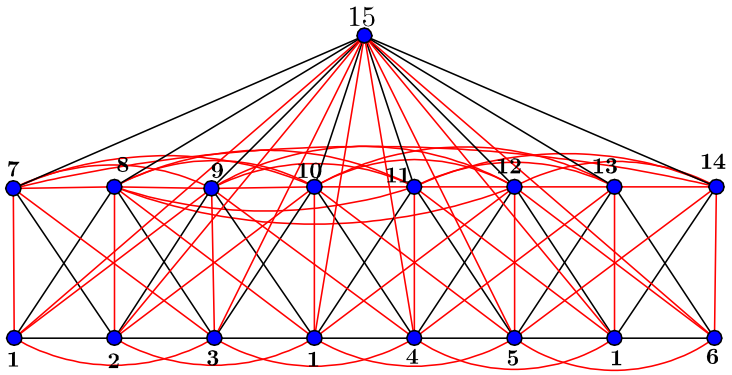


Figure 3.2.5 : Une coloration de packing de $(\mu(P_8))^2$

3.3.6 Coloration de packing du graphe puissance de Mycielski d'un cycle

Théorème 3.3.4 *Pour tout $n \geq 3$, $\chi_p((\mu(C_n))^2) = 2n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1$.*

Preuve. On note par v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du cycle C_n et x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets v_i. Soit w le sommet voisin à tous les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Comme $diam(\mu(C_n)^2) = 2$, la seule couleur utilisée plusieurs fois est la couleur 1. Soit c une coloration de packing sur $(\mu(C_n))^2$.

Premièrement, supposons que $n \in \{3,\ 4,\ 5\}$. Le graphe $(\mu(C_n))^2$ est isomorphe à K_{2n+1} et par conséquence $\chi_p((\mu(C_n))^2) = 2n + 1$ et notre résultat est vrai.

Maintenant, supposons que $n \geq 6$. On distingue les 3 cas suivants.

Cas 1. $c(w) = 1$. Alors les autres sommets de ce graphe prennent des couleurs différentes de 1, i.e, $c(x_i) \neq 1$, $c(v_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, car $d(w, x_i) = 1$ et $d(w, v_i) = 1$, $i \in \{1, ..., n\}$, et dans ce cas, la couleur 1 est utilisée seulement une seule fois sur $(\mu(C_n))^2$.

Cas 2. $c(w) \neq 1$. S'il existe $h \in \{1, ..., n\}$ tel que $c(x_h) = 1$, alors $c(x_i) \neq 1$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$; $i \neq h$, car $d(x_i, x_h) = 1$ (notons que le graphe formé par les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ est un graphe complet) et dans ce cas la couleur 1 est utilisée une seule fois sur les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Par conséquence, la coloration c consiste à utiliser la couleur 1 sur le cycle C_n suivant la manière de l'utilisation de la couleur 1 sur les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Supposons qu'il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $c(x_i) = 1$, et sans perte de généralité, supposons que $c(x_1) = 1$. Alors c utilise la couleur 1 sur les sommets v_i, $i \in \{1, ..., n-2\}$ comme suit: $c(v_i) = 1$, $i = 3k + 1$ et $k \in \{1, ..., \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor\}$, et donc la couleur 1 est utilisée $\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor$ fois sur le cycle et puisque $c(x_1) = 1$, on conclut que la couleur 1 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1\right]$ fois sur $(\mu(C_n))^2$.

Cas 3. On utilise la couleur 1 juste sur le cycle C_n. On pose $c(v_i) = 1$, $i = 3k + 1$ et $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor\}$; . Donc la couleur 1 est utilisée dans ce cas $\left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1\right]$ fois et les autres sommets du graphe $(\mu(C_n))^2$ sont colorés par des couleurs différentes. D'après les trois cas précédents, et comme $o\left((\mu(C_n))^2\right) = 2n + 1$, on conclut que $\chi_p((\mu(C_n))^2) \geq \left[(2n + 1) - (\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1)\right] + 1 = 2n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1$. Maintenant, on forme une coloration $\left[2n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1\right]-packing$ comme suit : posons $c(v_i) = 1$ pour $i = 3k+1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor\}$. Les autres sommets du graphe reçoivent par paire des couleurs différentes de 1, i.e, de l'ensemble $\left\{2, ..., 2n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1\right\}$. Par conséquence $\chi_p((\mu(C_n))^2) \leq 2n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1$.

Finalement, on a montré que $\chi_p(\mu(C_n)^2) = (2n + 1) - [\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1] + 1 = 2n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1$.

■

La Figure 3.2.6 fournit une coloration de packing de $\mu((C_{10})^2)$.

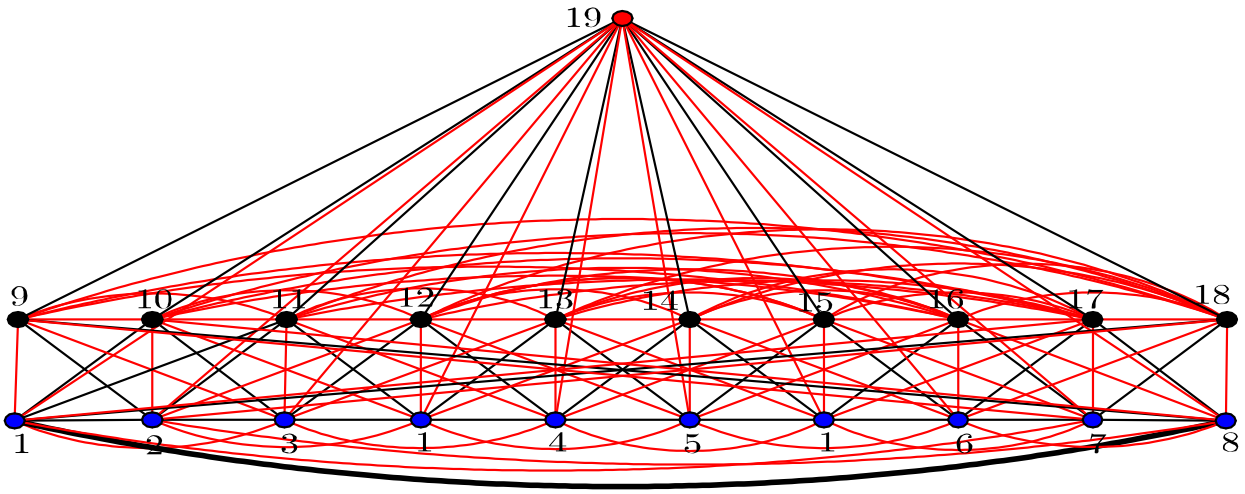


Figure 3.2.6 : Une coloration de packing de $\mu((C_{10})^2)$

3.3.7 Coloration de packing du graphe Myceilski d'une étoîle

Proposition 3.3.2 *Pour tout* $n \geq 1$, $\chi_p(\mu(K_{1,n})) = 4$.

Preuve. On note par u_i, $i \in \{0, ..., n\}$, les sommets de $K_{1,n}$ tel que $d_g(u_0) = n$. On note par x_i, $i \in \{0, ..., n\}$, les sommets correspondants aux sommets u_i, $i \in \{0, ..., n\}$, tel que le sommet x_0 est correspondant au sommet u_0.

Soit w le sommet connecté aux sommets x_i, $i \in \{0, ..., n\}$, et soit c est une coloration de packing sur $\mu(K_{1,n})$.

Le graphe $\mu(K_{1,n})$ est de diamètre 2, donc la seule couleur utilisée plusieurs fois est la couleur 1, et donc on distingue les cas suivants concernant l'"utilisation de la couleur 1.

Cas 1 : Si $c(w) = 1$, alors $c(\ x_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, et dans ce cas on peut colorer les sommets u_i, $i \in \{0, ..., n\}$ par 1 et donc nous avons $(n + 1)$ sommets colorés par 1.

Les autres sommets de $\mu(K_{1,n})$ reçoivent des couleurs différentes de 1 et donc, nous avons au moins $(2n + 3) - (n + 1) = n + 2$ couleurs.

Cas 2 : Si $c(\ w) \neq 1$ et $c(x_i) = 1$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, alors $c(\ u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$ et dans ce cas, nous avons au moins $(2n + 3) - (n + 1) = n + 2$ couleurs.

Finalement, une meilleure coloration de packing est donnée comme suit : on peut colorer n sommets $\{x_1, ..., x_n\}$ par 1 et de même, on peut colorer les n sommets $\{u_1, ..., u_n\}$ par 1, les autres sommets, c'est-à-dire : w, x_0, u_0 reçoivent des couleurs différentes de 1. Donc nous avons au moins $(2n+3)-(2n)+1 = 4$ couleurs, et comme $n+3 \geq n+2 \geq 4$, alors : On conclut que $\chi_p(\mu(K_{1,n})) \geq 4$. Pour montrer que $\chi_p(\mu(K_{1,n})) \leq 4$ on cherche une coloration de packing quelconque de $\mu(K_{1,n})$ qui est la suivante: on pose $c(x_i) = 1$ pour $i \in \{1, ..., n\}$, $c(\ u_i) = 1$ pour $i \in \{1, ..., n\}$ et les autres sommets, i.e, w, x_0, u_0 reçoivent des couleurs différentes de 1, i.e, les couleurs $2, 3, 4$. Par conséquence: $\chi_p(\mu(K_{1,n})) \leq 4$. Finalement, nous avons prouvé que $\chi_p(\mu(K_{1,n})) = 4$ et notre proposition a été démontré. ■

Figure 3.2.7 illustre une coloration de packing du graphe $\mu((K_{1,8})$.

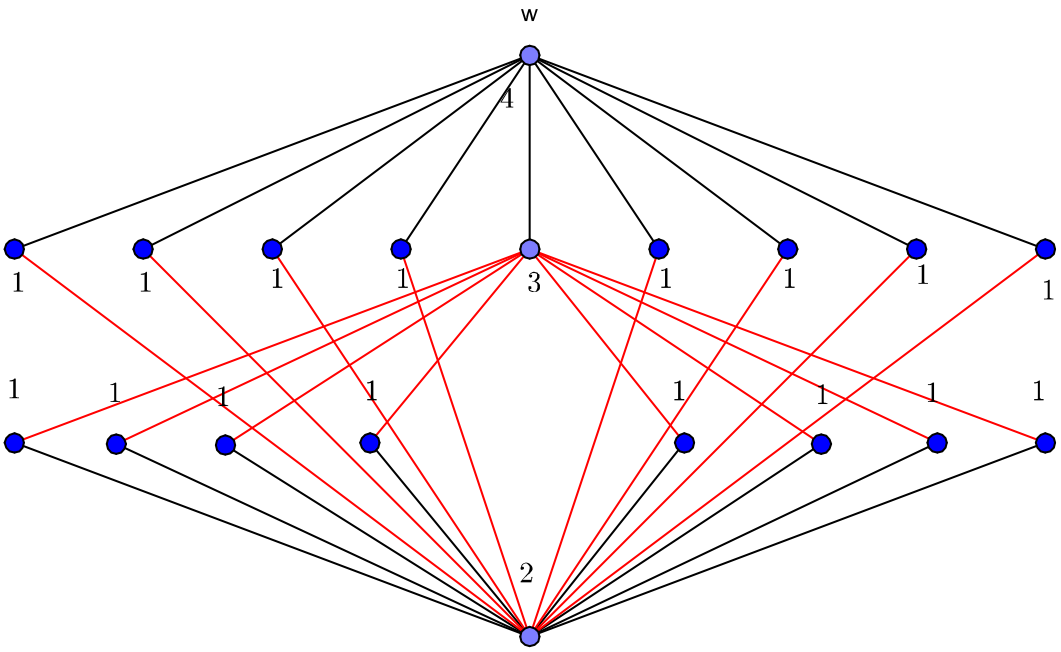


Figure 3.2.7 : Une coloration de packing de $\mu(K_{1,8})$

3.3.8 Coloration de packing du graphe Myceilski d'une roue

Théorème 3.3.5 *Pour tout $n \geq 3$, $\chi_p(\mu(W_n)) = n+2$.*

Preuve. On note par w le sommet de degré n dans $\mu(W_n)$, et par v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du graphe roue W_n tel que $d_{\mu(W_n)}(v_1) = 2n-2$ et x_i les sommets correspondants

aux v_i, $i \in \{1, ..., n\}$, et comme le $diam(\mu(W_n)) = 2$, alors la couleur utilisée pleusieurs fois, c'est la couleur 1. Soit c une coloration de packing de $\mu(W_n)$.

Cas 1. Si $c(w) = 1$, alors $c(x_i) \neq 1$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ car $d(w, x_i) = 1$, et dans ce cas, on peut utiliser la couleur 1 sur la roue comme suit : $c(v_i) = 1$, $i = 2k$ pour $i \in \{2, ..., n-1\}$, $k \in \{1, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ ($c(v_n) \neq 1$ car $d_{W_n}(v_2, v_n) = 1$). Donc la couleur 1 est utilisée $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ fois, et comme $c(w) = 1$, la couleur 1 est utilisée $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ fois sur le graphe $\mu(W_n)$. Les autres sommets du graphe $\mu(W_n)$ reçoivent par paire des couleurs différentes de 1. Ainsi $\chi_p(\mu(W_n)) \geq (2n+1) - [\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1] + 1 = 2n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$. Notons que $c(v_1) \neq 1$, car si $c(v_1) = 1$, alors $c(v_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{2, ..., n\}$ et dans ce cas la couleur 1 est utilisée une seule fois sur le sous grapheW_n.

Cas 2. On peut utiliser la couleur 1 sur les sommets x_i et v_i en même temps comme suit.

Pour les sommets x_i, on pose $c(x_i) = 1$, $i = 2k$, $i \in \{2, ..., n-1\}$, $k \in \{1, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$. Alors la couleur 1 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\right]$ fois sur les sommets x_i.

Pour les sommets v_i, on pose $c(v_i) = 1$, $i = 2k$ pour $i \in \{2, ..., n-1\}$ et $k \in \{1, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$. Alors la couleur 1 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\right]$ fois sur les sommets v_i. Finalemment, la couleur 1 est utilisée $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ fois sur $\mu(W_n)$. Alors comme $o(\mu(W_n)) = 2n + 1$, on conclut que $\chi_p(\mu(W_n)) \geq \left[(2n+1) - 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\right] + 1 = 2n - 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2$.

Cas 3. $c(x_i) = 1$, pour $i \in \{1, ..., n\}$, les autres sommets du graphe prennent des couleurs différentes de 1 et alors $\chi_p(\mu(W_n)) \geq [(2n+1) - n] + 1 = n + 2$. Comme $n + 2 < 2n - 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2 < 2n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$, on conclut que $\chi_p(\mu(W_n)) \geq n + 2$.

Ensuite, prouvons que que $\chi_p(\mu(W_n)) \leq n+2$ pour tout $n \geq 3$. On forme une coloration $(n+2) - packing$ comme suit.

On pose $c(x_i) = 1$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et les autres sommets, c'est-à-dire v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ et le sommet w reçoivent par paire des couleurs différentes de $\{2, ..., n+2\}$, et donc cette dernière coloration est une coloration de packing sur $\mu(W_n)$ et $\chi_p(\mu(W_n)) \leq n + 2$. Par conséquence $\chi_p(\mu(W_n)) = n + 2$ et la preuve est complète. ■

La figure suivante montre une coloration de packing de $\mu(W_8)$.

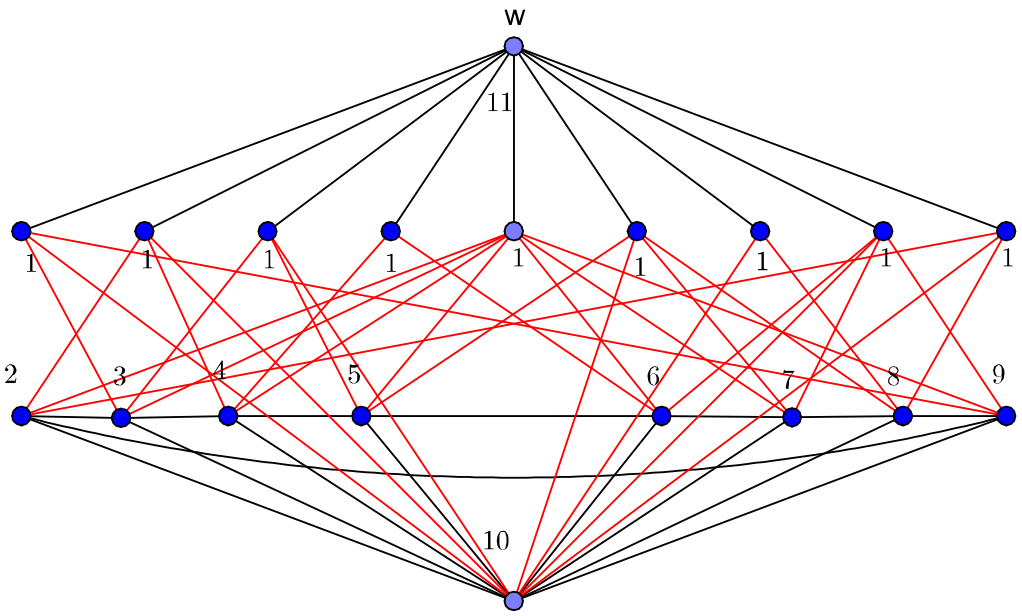


Figure 3.2.8 : Une coloration de packing de $\mu(W_8)$

3.4 Coloration de packing du graphe de diamètre 3

3.4.1 Coloration de packing de Myceilski d'une double étoile

Proposition 3.4.1 *Pour tout* $p, q \geq 1$, $\chi_p(\mu(S_{p,q})) = 6$.

Preuve. Soit $T = S_{p,q}$ un arbre à diametre 3 et d'ordre n (ou une double étoile). On note par c_1, c_2 les deux sommets centaux de T. On note par $v_{1,1}$, $v_{1,2}$, ..., $v_{1,p}$ et par $v_{2,1}$, $v_{2,2}$, ..., $v_{2,q}$ les sommets pendants voisins de c_1, c_2 respectivement. On note par u_1, u_2 les deux sommets correspondants aux sommets c_1 ,c_2 respectivement, et $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, ..., $x_{1,p}$ les sommets correspondants aux sommets $v_{1,1}$, $v_{1,2}$,..., $v_{1,p}$. De même $x_{2,1}$, $x_{2,2}$,..., $x_{2,q}$ les sommets correspandants aux sommets $v_{2,1}$, $v_{2,2}$,..., $v_{2,q}$ dans le graphe $\mu(S_{p,q})$. Soit w le sommet relié aux sommets $x_{1,i}$, $i \in \{1, ..., p\}$, $x_{2,j}$, $j \in \{1, ..., q\}$ et aux sommets u_1, u_2. Soit c une coloration de packing sur $\mu(S_{p,q})$. Comme $diam(\mu(S_{p,q})) = 3$, alors les couleurs qui peuvent être utilisées deux fois ou plus sont 1 et 2.

Premièrement, si $c(w) = 1$, alors $c(x_{1,i}) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, $c(x_{2,j}) \neq 1$ pour tout $j \in \{1, ..., q\}$, $c(u_1) \neq 1$ et $c(u_2) \neq 1$, et dans ce cas, on peut utiliser la couleur 1 sur les sommets $v_{1,i}$, $i \in \{1, ..., p\}$, et $v_{2,j}$, $j \in \{1, ..., q\}$ au plus $p + q$ fois, et donc la couleur 1 est utilisée $[p + q + 1]$ fois sur $\mu(S_{p,q})$,et les autres sommets prennent des couleurs différentes de 1. Alors dans ce cas, nous avons $\chi_p(\mu(S_{p,q})) \geq [2(p + q) + 5 - (p + q + 1)] + 1 = p + q + 5$. Supposons que $c(w) \neq 1$ et dans ce cas, on peut utiliser la couleur 1 sur les sommets $x_{1,i}$, $i \in \{1, ..., p\}$, et $x_{2,j}$, $j \in \{1, ..., q\}$ et sur les sommets u_1 et u_2. Dans ce cas, la couleur 1 est utilisée $([p + q + 2])$ fois, et les autres sommets prennent des couleurs différentes de 1, i.e, nous avons $(p + q + 3)$ couleurs différentes de 1. Donc ce cas $\chi_p(\mu(S_{p,q})) \geq [2(p + q) + 5 - (p + q + 2)] + 1 = p + q + 4$.

Une autre manière de coloration est de colorer les sommets $x_{1,i}$, $i \in \{1, ..., p\}$, $x_{2,j}$, $j \in \{1, ..., q\}$, $v_{1,i}$, $i \in \{1, ..., p\}$, et $v_{2,j}$, $j \in \{1, ..., q\}$ par la couleur 1, et dans ce cas, la couleur 1 est utilisée $2(p + q)$ fois. Les sommets restants sont $\{w, u_1, u_2, c_1, c_2\}$ qui sont deux à deux à distance inférieure où égale à deux, et donc ces sommets reçoivent des couleurs différentes de 1, i.e, des couleurs de l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Alors nous avons $\chi_p(\mu(S_{p,q})) \geq [2(p + q) + 5 - 2(p + q)] + 1 = 6$. Pour montrer que $\chi_p(\mu(S_{p,q})) \leq 6$, on forme une coloration $6 - packing$ comme suit: on pose $c(x_{1,i}) = 1$, $i \in \{1, ..., p\}$, et $c(x_{2,j}) = 1$, $j \in \{1, ..., q\}$, $c(c_1) = 2$, $c(c_2) = 3$, $c(u_1) = 4$, $c(u_2) = 5$ et $c(w) = 6$. Par conséquence $\chi_p(\mu(S_{p,q})) \leq 6$ et ainsi $\chi_p(\mu(S_{p,q})) = 6$. ■

La figure suivante montre une coloration de packing de $\mu(S_{p,q})$ quand $p = q = 3$.

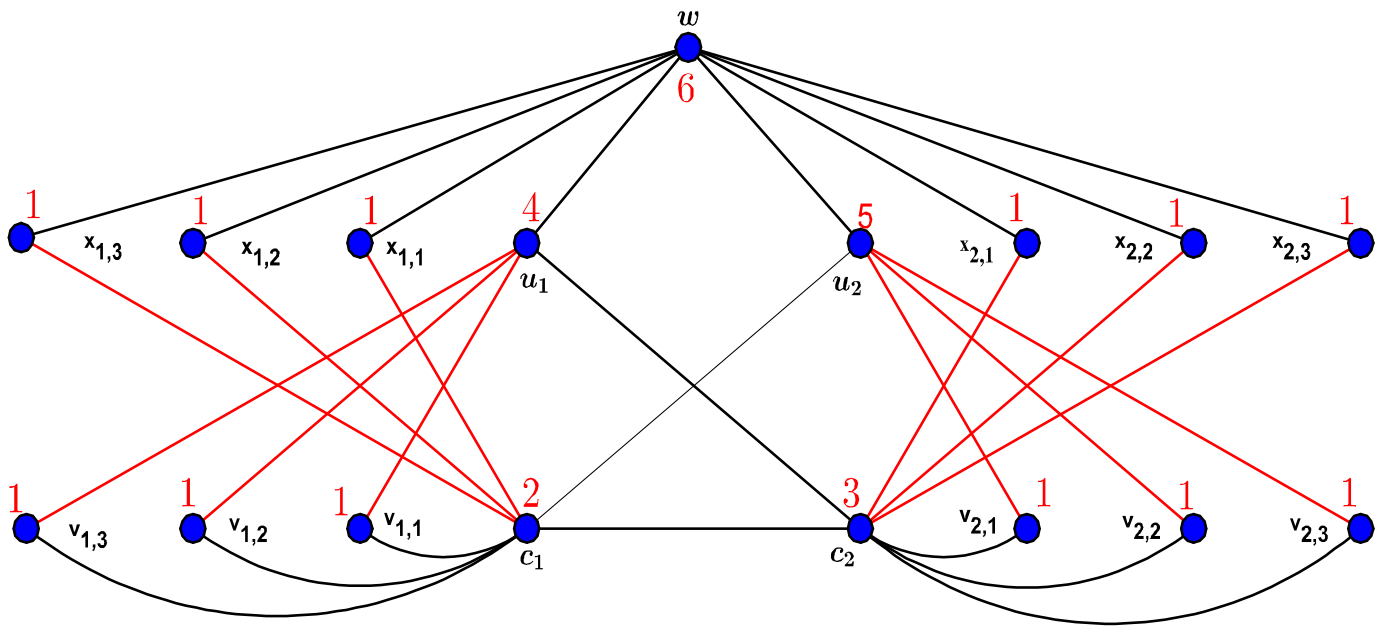


Figure 3.3.1 : Une coloration de packing de $\mu(S_{3,3})$

3.5 Coloration de packing de quelques graphes à diamètre 4

Dans cette section, on étudie la coloration de packing des graphes à diamètre 4.

3.5.1 Coloration de packing du graphe Myceilski d'une chaîne

Théorème 3.5.1 *Pour $n \geq 2$,*

$$\chi_p((\mu(P_n)) = \begin{cases} 2n - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 2; \text{ si } n \geq 4, \\ 4; \text{ si } n = 2,\ 3. \end{cases}.$$

Preuve. On note par v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de la chaîne P_n et par x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets v_i. Notons par w le sommet relié par les sommets x_i. Soit c une coloration de packing sur $\mu(P_n)$. Premièrement, Puisque $diam(\mu(P_n)) = 4$,

les couleurs qui peuvent être utilisées plusieurs fois sont les couleurs $1, 2$ et 3 et donc on distingue les cas suivants :

Cas 1. Si $c(w) = 1$, alors $c(x_i) \neq 1$, $i \in \{1, ..., n\}$ car $d(w, x_i) = 1$ et dans ce cas, on peut utiliser la couleur 1 sur les sommets de la chaîne P_n comme suit : posons $c(v_i) = 1$, $i = 2k + 1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$, dans ce cas, la couleur 1 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1\right]$ fois sur la chaîne P_n sans oublier que $c(w) = 1$, et donc la couleur 1 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2\right]$ fois sur $\mu(P_n)$.

Cas 2 . Si $c(w) \neq 1$, alors on distingue les deux cas suivants :

Cas 2.1. On utilise la couleur 1 sur les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ et dans ce cas $c(v_i) \neq 1$, $i \in \{1, ..., n\}$, et donc la couleur 1 est utilisée n fois sur $\mu(P_n)$.

Cas 2.2. On peut utiliser la couleur 1 sur les sommets x_i et v_i, $i \in \{1, ..., n\}$, comme suit :

Pour les sommets x_i, posons $c(x_i) = 1$, $i = 2k + 1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$. Ainsi, nous avons $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets colorés par 1 sur les sommets x_i.

Pour les sommets v_i, on peut colorer les sommets v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ par la même méthode précédente utilisée à la coloration des sommets x_i, et donc nous avons $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets colorés par 1 sur les sommets v_i.

Dans ce cas, nous avons au plus $2 \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets colorés par 1 sur $\mu(P_n)$. Comme $2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq n \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2$, on conclut que cette dernière coloration est la meilleure.

Maintenant, on arrive à l'utilisation de la couleur 2. S'il existe un sommet x_h, $h \in \{1, ..., n\}$ tel que $c(x_h) = 2$, alors ce sommet coloré par 2 est unique car $d(x_h, x_j) = 2$ pour tout j, $j \in \{1, ..., n\}$, $h \neq j$. Supposons qu'il existe i, tel que $c(x_i) = 2$, $i = 4k + 2$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor\}$ (rappelons que $c(x_i) = 1$, $i = 2k + 1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ d'après le *Cas* 2.2), alors on peut utiliser la couleur 2 sur les sommets v_i de tel sorte que $c(x_i) \neq c(v_i)$. Dans ce cas, on suppose que $c(x_2) = 2$. Par suite, posons $c(v_i) = 2$ pour $i = 4k + 6$ et $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor\}$. Donc, on peut utiliser la couleur 2 sur la chaîne P_n, $\left[\lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor + 1\right]$ fois (sans oublier que $c(x_2) = 2$) et par conséquence, la couleur 2 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor + 2\right]$ fois sur le graphe $\mu(P_n)$.

D'autre part, on peut utiliser la couleur 2 seulement sur les sommets v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ de la chaîne P_n comme suit.

Posons $c(v_i) = 2$ pour $i = 4k + 2$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor\}$ et donc, nous avons $\left[\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor + 1\right]$ sommets colorés par la couleur 2. Comme $\left[\lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor + 2\right] = \left[\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor + 1\right]$, on conclut que la dernière coloration est meilleure concernant l'utilisation de la couleur 2 sur la chaîne P_n. Maintenant, on arrivera au dernier cas concernant l'utilisation de la couleur 3.

Cas 3. Si $c(w) = 3$, alors aucun autre sommet du graphe peut recevoir la couleur 3, car $d(w, x_i) = 1$, et $d(w, v_i) = 2$, $i \in \{1, ..., n\}$, de même s'il existe i, $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $c(x_i) = 3$, alors $c(x_j) \neq 3$ pour tout $i \neq j$, $j \in \{1, ..., n\}$, car $d(x_i, x_j) = 2$, ainsi $c(v_i) \neq 3$, car $d(x_i, v_i) \leq 3$. D'autre part, on peut utiliser la couleur 3 seulement sur la chaîne P_n plusieurs fois comme suit : Posons $c(v_i) = 3$, $i = 4k + 4$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor\}$, et dans ce cas, nous avons au plus $\left[\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 1\right]$ sommets colorés par la couleur 3, et les autres sommets du graphe prennent des couleurs différentes de 1, 2 et 3. Par conséquence, comme $o(\mu(P_n)) = 2n + 1$, on conclut que :

$\chi_p((\mu(P_n)) \geq (2n + 1) - [2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 2] + 3$

=

$2n - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 2.$

est donc notre borne inférieure est démontrée.

Pour montrer la bornne supérieure, on forme une coloration

$\left[2n - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 2\right] - packing$ comme suit :

Posons $c(x_i) = 1$ pour $i = 2k + 1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$,

$c(v_i) = 1$, pour $i = 2k + 1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$,

$c(v_i) = 2$, pour $i = 4k + 2$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor\}$,

$c(v_i) = 3$, pour $i = 4k + 4$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor\}$,

et les autres sommets reçoivent par paire des couleurs différentes de 1, 2 et 3, i.e de l'ensemble $\{4, ..., 2n - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 2\}$. Par conséquence, cette dernière est bien une coloration de packing et $\chi_p((\mu(P_n)) \leq 2n - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 2$.

Finalement $\chi_p((\mu(P_n)) = 2n - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 2$. ■

La Figure 3.4.1 suivante fournit une coloration de packing du graphe $\mu(P_8)$.

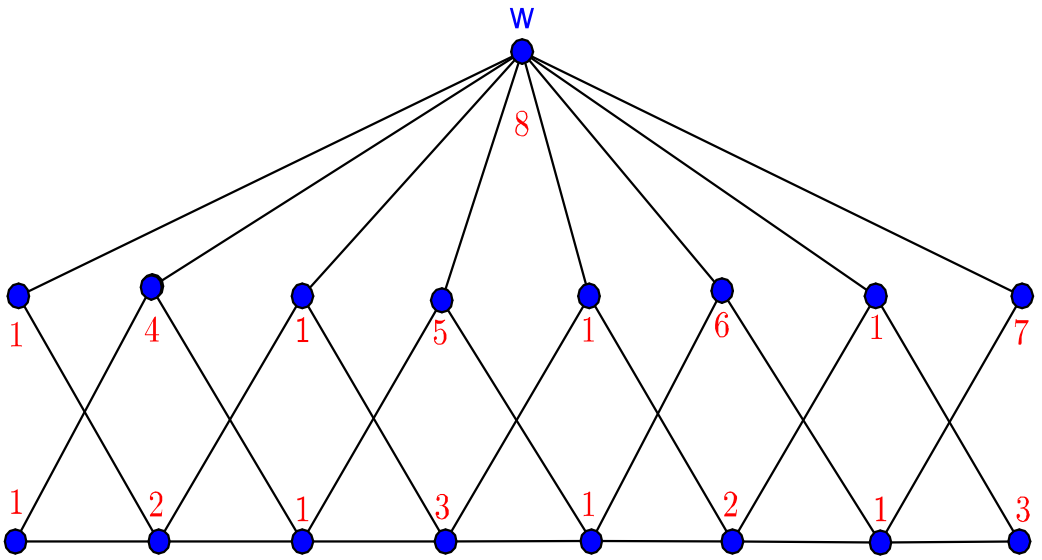


Figure 3.4.1 : Une coloration de packing de $\mu(P_8)$

3.5.2 Coloration de packing du graphe myceilski d'un cycle

Théorème 3.5.2 *Pour tout* $n \geq 4$,

$$\chi_p(\mu(C_n)) = n - \left[\left\lfloor \tfrac{n-3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{n-4}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{n-8}{9} \right\rfloor\right] + 1. \ \chi_p(\mu(C_3)) = 5.$$

Preuve. On note par v_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du cycle C_n. Soient $x_i, i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets v_i tels que le sommet x_h est correspond au sommet v_h. Soit w le sommet relié à tous les sommet x_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Puisque $diam(\mu(C_n)) = 4$, les seules couleurs utilisées deux fois ou plus sont 1, 2 et 3. Soit c une coloration de packing sur $\mu(C_n)$. Supposons que $n = 3$. Alors, comme $diam(\mu(C_3)) = 2$, la seule couleur utilisée deux fois ou plus c'est la couleur 1, et donc si $c(w) = 1$, alors on peut utliser la couleur 1 une autre fois sur une seul sommet de C_3, mais il y a une autre méthode meilleure de coloration que celle-ci, posons $c(x_i) = 1$ pour $i \in \{1, ..., 3\}$ les autres sommets, i.e. les sommets v_i, $i \in \{1, ..., 3\}$ et le sommet w reçoivent par paire de couleurs différentes de $\{2, ..., 5\}$, d'où le résultat.

Maintenant, supposons que $n \geq 4$.

Premiérement, si $c(w) = 1$, alors $c(x_i) \neq 1$, car $d(w, x_i) = 1$ pour tout i, $i \in \{1, ..., n\}$ et dans ce cas la couleur 1 peut utiliser sur le cycle C_n par la manière suivante : $c(v_i) = 1$ pour $i \in \{1, ..., n-1\}$, $i = 2k+1$, pour tout $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\}$, et donc la couleur 1 peut être utilisée $\left[\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1\right]$ fois sur le cycle C_n sans oublier que $c(w) = 1$. Alors, la couleur 1 est utiliser $\left[\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2\right]$ fois sur $\mu(C_n)$. Deuxièment, si $c(w) \neq 1$, alors on peut utiliser la couleur 1 sur les sommets x_i ou bien sur les sommets x_i et v_i en même temps pour $i \in \{1, ..., n\}$ (Notons que l'utilisation de la couleur 1 les sommets v_i sans x_i entraîne l'utilisation de cette couleur sur le sommet w, et donc on est dans le cas précédente). Ainsi, on discute les cas suivants:

Cas 1. Si $c(x_i) = 1$ pour $i \in \{1, ..., n\}$, alors la couleur 1 est utilisée n fois sur $\mu(C_n)$.

Cas 2. D'autre part, on peut utiliser la couleur 1 sur les sommets x_i et v_i, $i \in \{1, ..., n-1\}$ comme suit :

Pour les sommets x_i, posons $c(x_i) = 1$ pour $i = 2k+1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\}$ et ainsi, la couleur 1 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1\right]$ fois sur les sommets x_i.

Pour les sommets v_i, posons $c(v_i) = 1$ pour $i = 2k+1$, $k \in \{0, ..., \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\}$, est donc la couleur 1 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1\right]$ fois sur les sommets v_i. Par conséquence, la couleur 1 est utilisée $\left[2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2\right]$ fois sur $\mu(C_n)$.

Maintenant, en comparant les résultats obtenus concernant l'utilisation de la couleur 1, i.e. $\left[\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2\right]$ avec n et $\left[2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2\right]$, on trouve que $n \geq 2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2 \geq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2$. En effet, si $n = 2p$ (n est pair), nous avons $2\lfloor \frac{2p-2}{2} \rfloor + 2 = 2\lfloor p-1 \rfloor + 2 = 2p = n$.Si $n = 2p+1$ (n est impair),alors nous avons $2\lfloor \frac{2p+1-2}{2} \rfloor + 2 = 2\lfloor \frac{2p-1}{2} \rfloor + 2 = 2\lfloor p - \frac{1}{2} \rfloor + 2 = 2(p-1) + 2 = 2p \leq 2p+1$. Ainsi, $n \geq 2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2 \geq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2$ pour tout $n \geq 3$.

D'autre part, concernant les couleurs 2 et 3, la coloration de packing c utilise ces deux couleurs sur les sommets du cycle C_n, car les sommets x_i, $i \in \{1, ..., n\}$ reçoivent la couleur 1 d'après le cas précédent, ensuite, s'il existe $h \in \{1, ..., n\}$ tel que $c(x_h) = 2$ ou 3, alors le sommet x_h est le seul coloré par les couleurs 2 ou 3, car $d(x_h, x_i) = 2$ de même $d(x_h, w) = 1$. Par contre, on peut utiliser les couleurs 2 et 3 sur le cycle C_n de la manière suivante :

-Pour la couleur 2, on a $c(v_i) = 2$ pour $i = 3k+1$, $k \in \left\{0, ..., \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor\right\}$, et donc la couleur 2 est utilisée $\left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1\right]$ fois.

-Pour la couleur 3, on a $\begin{cases} c(v_i) = 3 \text{ pour } i = 9k+2,\ k \in \left\{0, ..., \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor\right\};\ n \geq 4, \\ c(v_i) = 3 \text{ pour } i = 9k+6,\ k \in \left\{0, ..., \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor\right\};\ n \geq 8. \end{cases}$ et donc la couleur 3 est utilisée $\lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor + 2$ fois sur $\mu(C_n)$.

Par conséquence et en tennant compte que $c(x_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et que w prend une couleur differente de 1, 2, 3 et toute couleur utulisée sur la coloration des sommets du cycle C_n. Et comme $O(\mu(C_n)) = 2n+1$, alors on réitérons que $\chi_p(\mu(C_n)) \geq (2n+1) - \left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor + 2 + n\right] + 3 = (2n+1) - \left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor + 3 + n\right] + 3$ $= n - \left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor\right] + 1$.

Pour montrer que $\chi_p(\mu(C_n)) \leq n - \left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor\right] + 1$. On forme une coloration de packing suivante : posons $c(x_i) = 1$ pour $i \in \{1, ..., n\}$ et dans ce cas, nous avons n sommets colorés par 1, et pour les sommets v_i, $i \in \{1, ..., n\}$, on utilise la coloration suivante: posons $c(v_i) = 2$ pour $i = 3k+1$; $k \in \left\{0, ..., \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor\right\}$, $i \in \{1, ..., n-2\}$. Dans ce cas $\left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1\right]$ sommets sont colorés par 2. De même, on pose $c(v_i) = 3$ pour $i = 9k+2$, $k \in \left\{0, ..., \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor\right\}$; $n \geq 4$ et $c(v_i) = 3$ pour $i = 9k+6$, $k \in \left\{0, ..., \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor\right\}$; $n \geq 8$, et donc nous avons $\left[\lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor + 2\right]$ sommets colorés par 3. Les autres sommets du cycle prennent par paire de couleurs differéntes de $1, 2$ et 3, i.e. nous avons $(2n+1) - \left[n + \left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1\right] + \left[\lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor + 2\right]\right] = n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor - \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor - 2$ autres sommets colorés par des couleurs différentes de 1, 2 et 3, et donc nous avons au total $(2n+1)$ sommets qui est l'ordre du graphe $\mu(C_n)$. Donc, cette dernière vérifie bien une coloration de packing, ainsi on conclut que $\chi_p(\mu(C_n)) \leq (n+1) - \left[\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n-8}{9} \rfloor\right]$. D'où, notre résultat est démontré. ■

La figure suivante donne une coloration de packing de $\mu(C_{10})$.

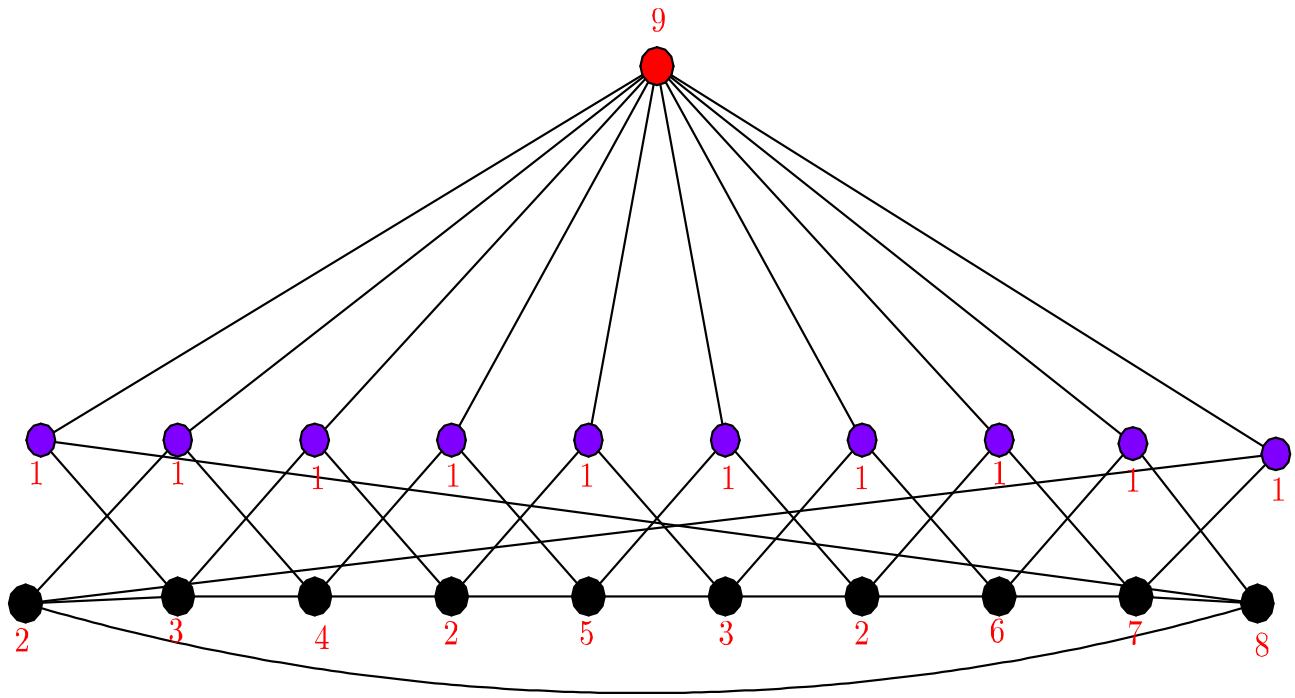


Figure 3.4.2 : Une coloration de packing de $\mu(C_{10})$

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssés principalement à l'étude du problème de la coloration de packing . On a commencé dans le premier chapitre par rappeler quelques notions de base sur la théorie des graphes et dans le deuxième chapitre par les différents résultats à propos de la coloration de packing, Le chapitre 3 porte sur notre étude sur la coloration de packing. Nos contributions relatives à ce chapitre concerne d'une part la détermination du nombre chromatique de packing de certains graphes. Dans ce contexte, nous avons obtenu les valeurs exactes du nombre chromatique de packing du graphe puissance des graphes: Joint de deux graphes, couronne d'un graphe complet avec une chaîne, couronne d'une étoile avec une chaîne. Notons que les trois graphes mentonnés sont de diamètres 2. Nous avons également obtenu les valeurs exactes du nombre chromatique de packing du graphe puissance d'une couronne voisinage d'une étoile avec une chaîne. D'autre part, nous avons étudié un autre type de graphes, appelé graphe de Myceilski. Dans ce contexte, on a pu déterminer la valeur exacte du nombre chromatique de packing d'un graphe Myceilski de plusieurs types de graphes en commançant par les graphes à diamètre 2, à savoir : graphe puissance de Myceilski d'une chaîne et d'un cycle, ainsi pour une étoile, une roue. Pour les graphes à diamètre 3, on a déterminé la valeur exacte du nombre chromatique de packing de Myceilski d'une étoile double. Pour les graphes à diamètre 4, nous avons déterminé les valeurs exactes du nombre chromatique de packing du graphe de Myceilski d'une chaîne et d'un cycle.

Finalement, Comme perspective à notre travail, nous proposons :

• Trouver d'autres valeurs exactes, bornes inférieures et supérieures de $\chi_p(G)$.

• Déterminer le nombre chromatique de packing de $\chi_p(G^p)$ $(p \geq 2)$ où G^p est le graphe puissance d'un graphe quelconque G.

• Déterminer le nombre chromatique de packing d'un graphe puissance pour les graphes : produit carré, produit cartésien et produit total.

• Déterminer le nombre chromatique de packing $\chi_p(\mu(G))$ pour d'autres graphes G, où $\mu(G)$ est le graphe de myceilski de G.

Bibliographie

[1] St. Aloysius College, Edathua, Kerala. The spectrum of neighborhood corona of graphs, Kerala, India, 689573.

[2] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.

[3] B. Bresãr, S. Klavsãr, D. F. Rall, On the packing chromatic number of cartesian products, Hexagonal lattice, and trees. Discrete Appl. Math., 155(17) : 2303- 2311; 2007.

[4] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, J. M. Harris, D.F. Rall, Packing chromatic numbers of graphs, Ars Combin., 86 : 33-49, 2008.

[5] M. Joice Punitha, Kernel in Interconnection Networks, Ph.D thesis, University of Madras, March 2009.

[6] R. LEMDANI, CHABANE Kwider et ZAHED Ahmed, Sur le Nombre de Subdivision de la Domination Broadcast, 17/06/2015.

[7] R. LEMDANI, A.TAIBAOUI et O. MEZIOUD. Opérations sur le nombre de la coloration de packing. Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle, juin 2015.

[8] R. LEMDANI, A. SOUADKIA et F.S DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 16/06/2016.

[9] R. LEMDANI, K BAKHTI et K. MELIANI, Opérations sur le nombre de la domination broadcast, Mémoire de Master, RO, 14/06/2017.

[10] R. LEMDANI, Y. MOUSSA et O. ALLOUCHE, Etude de la coloration packing dans les graphes, Mémoire de Master, RO, 18/06/2018.

[11] R. LEMDANI, C. OUNNAS et S. ZENIKHRI, Détermination du nombre de la coloration packing de certaines classes de graphes, Mémoire de Master, RO, 2019.

[12] R. LEMDANI, N.R. YAHIAOUI et B. BEN KOUIDER, Opérations sur le nombre de la coloration packing de certains types de graphes, Mémoire de Master, RO, 29/10/2020.

[13] R. LEMDANI. M. BESSERI et I. HADJADJ, Etude et détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 18 Juillet, 2021.

[14] D. Laiche, Mémoire présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).D. Laiche, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).

[15] D. Miller. Introduction à la théorie des graphes, www.apprendre-en-ligne.net/graphes, (2008).

[16] E. A. Nordhaus, J.W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Monthly, 63:175 − 177, (1956).

[17] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes.

[18] Christian Sloper. Packing-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002.

[19] E. Sopena, Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs, University of Bordeaux, JUNE 2015.

[20] A. SOUADKIA, F.S. DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, 2016.

[21] M. A. Tahraoui. Coloring, packing and embedding of graphs. Thèse de doctorat, Université de Lyon, Décembre 2012.

[22] S. K. Vaidya et P. L. Vihol, Discussion on Some Interesting Topics in Graph Theory, Ph.D Thesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[23] S. Velammel, Studies in Graph Theory : Covering, Independence, Domination and Related Topics, Ph.D. Thesis (Manonmaniam Sundaranar University),1997.

[24] A. William, S. Roy**,** Paking chromatic number of certain graphs. Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600034, INDIA.

[25] A. William, S. Roy, Packing Chromatic Number of Certain Trees and Cycle Related Graphs, Chennai 600034, INDIA.