Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

Sur la domination restreinte dans les graphes

par

Mohammed Mahmoud Mohammed & Belhenniche Chabane

Devant le jury Composé de:

M.	N. IKHLEF ESCHOUF	Maître de conférences	UYF de Médéa	Président
M.	A. BOUCHOU	Maître de conférences	UYF de Médéa	Examinateur
M.	S. KHELIFI	Maître de conférences	UYF de Médéa	Promoteur

Juin 2018

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو المساهمة في دراسة السيطرة المقيدة في البيانات. مجموعة مسيطرة مقيدة للبيان G هي مجموعة الرؤوس $S \subseteq V$ حيث يكون كل رأس داخل $V\text{-}S$ له جار على الأقل في S وآخر في $V\text{-}S$. عدد السيطرة المقيدة للبيان G هو أصغر مجموعة مسيطرة مقيدة.

نحن مهتمون في المقام الأول في عرض النتائج السابقة التي تم الحصول عليها في هذا المجال، مساهمتنا تتعلق بمحورين مختلفين. في الأول، نهتم بالبيانات التي يزيد أو ينقص أو يبقى عدد سيطرتها المقيدة ثابتا عند تقليص أي حافة. في الثاني نهتم بالبيانات التي يزيد أو ينقص أو يبقى عدد سيطرتها المقيدة ثابتا عند حذف أي رأس. لقد نجحنا في تحديد بعض النتائج وإثبات بعض خصائص هذه العائلات من البيانات.

Résumé

Le but de ce mémoire est de contribuer à l"étude de la domination restreinte dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble $S \subseteq G$ est un dominant restreint si pour tout sommet dans $V - S$ est adjacent à au moins un sommet dans S et un autre dans $V - S$. Le nombre de domination restreinte d'un graphe G, noté par $\gamma_r(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant restreint (EDR) de G.

Nous nous intéressons en premier lieu à la présentation des résultats antérieurs obtenus dans ce domaine. Notre contribution concerne deux axes différents. Dans le premier, nous considérons les graphes dont le nombre de domination restreinte augmente, diminue ou reste stable suite à la contraction de n'importe quelle arête. Dans le second, nous considérons les graphes dont le nombre de domination restreinte augmente ou diminue ou demeure stable si n'importe quel sommet est supprimé. Nous sommes parvenus à établir quelques résultats et à montrer des propriétés de ces familles de graphes.

Abstract

The purpose of this thesis is to contribute to the study of restrained domination in graphs. Let $G = (V, E)$ be a simple graph. A set $S \subseteq V$ is a restrained dominating set if every vertex in $V - S$ is adjacent to at least one vertex in S as well as another vertex in $V - S$. The restrained domination number of G, denoted by $\gamma_r(G)$, is the smallest cardinality of a restrained dominating set (RDS) of G.

We are interested primarily in the presentation of previous results obtained in this area. Our contribution concerns two different axis. In the first, we consider the graphs whose the restrained domination number increases, decreases or remains unchanged if any edge is contracted. In the second, we consider the graphs whose the restrained domination number increases, decreases or stays stable if any vertex is removed. We have succeeded in establishing some results and showing properties of these families of graphs.

Remerciements

Au terme de ce travail nous tenons à faire louange À «Allah» qui nous a donné la force d'achever cette réalisation.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur : **Soufiane KHELIFI** pour ses conseils et son aide précieuse.

Nos gratitudes à tous les membres de jury qui nous font l'honneur de juger notre travail.

A tous les enseignants du département de mathématiques et informatique sans exception pour leurs efforts fournis durant ces cinq agréables années.

A l'ensemble des étudiants de notre promotion 2017 /2018.

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs*

encouragements

A *mes frères*

A *mes amis et mes camarades*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du*

primaire, du moyen, du secondaire ou de

l'enseignement supérieur.

Mohammed

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs*

encouragements

A *mes frères*

A *mes amis et mes camarades*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du*

primaire, du moyen, du secondaire ou de

l'enseignement supérieur.

Chabane

Table des matières

Introduction **1**

1 Généralités sur les graphes **4**

1.1 Concepts et notations de graphes non orientés 4

1.1.1 Voisinages et degrés 5

1.1.2 Graphes particuliers 6

1.1.3 Chaînes et cycles 12

1.1.4 Ensemble minimal, enemble maximal 13

1.1.5 Invariants de graphes 14

2 Domination et domination restreinte **18**

2.1 La dominantion dans les graphes 18

2.1.1 Historique 18

2.1.2 Eensemble dominant 19

2.1.3 Problèmes étudiés en domination 20

2.1.4 Applications de la domination 21

2.1.5 Bornes sur γ 22

2.1.6 Autres paramètres de domination 24

2.2 Eensemble dominant restreint 25

2.2.1 Définitions et propriétés 25

2.2.2 Le nombre de domination restreinte de certains graphes particuliers . 26

2.2.3 Bornes sur γ_r 27

2.3 Autres paramètres de domination restreinte 30
2.3.1 La domination restreinte totale 30
2.3.2 La domination restreinte double 31
2.3.3 Valeurs exactes et bornes sur $\gamma_t^r(G)$ et $\gamma_{2r}(G)$ 31

3 Quelques résultats sur la domination restreinte 33
3.1 Notions de criticité et de stabilité 33
3.2 Graphes critiques et stables par rapport à la contraction d'une arête 35
3.2.1 Graphes γ_r^+-dot-critiques 37
3.2.2 Graphes γ_r^--dot-critiques. 40
3.2.3 Graphes γ_r-dot-stables. 41
3.3 Graphes critiques et stables par rapport à la suppression d'un sommet 45
3.3.1 Graphes γ_r^+-sommet-critiques 47
3.3.2 Graphes γ_r-sommet-critiques 49
3.3.3 Graphes γ_r-sommet-stables 50

Conclusion 52

Bibliographie 53

Liste des Figures

0.0.1 Les 7 ponts de Königsberg 2

1.1.1 Un graphe $G = (V, E)$. 5
1.1.2 Un graphe simple G, un sous-graphe G_A et un graphe partiel G_B. 6
1.1.3 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 7
1.1.4 Un graphe complet K_8. 7
1.1.5 Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,2}$. 8
1.1.6 Le graphe de Petersen G_{10}. 9
1.1.7 Une étoile $K_{1,8}$. 9
1.1.8 Une double étoile $S_{3,3}$. 10
1.1.9 La subdivision d'une étoile $K^*_{1,s}$. 10
1.1.10 Un graphe C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$. 11
1.1.11 d, g ,h sont des sommets d'articulation. L'arête gh est un isthme. 11
1.1.12 Un arbre. 12
1.1.13 Un cycle C_8 et une chaîne P_8. 13
1.1.14 Exemple de deux graphes isomorphes. 14
1.1.15 Les cliques $A = \{a, b, g\}$ et $B = \{d, e, h\}$. 15
1.1.16 $S = \{a, c, h, i\}$ est un ensemble stable avec $\alpha(G) = 4$. 15
1.1.17 $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un couplage parfait et $R = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un recouvrement. 16
1.1.18 $S = \{g, b, d, e, f\}$ représente un transversal minimum avec $\tau(G) = 5$. 17

2.1.1 Un graphe simple $G = (V, E)$ d'ordre 12. 19

2.2.1 $S_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$, $S_2 = \{x_4, x_7\}$ et $S_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ sont des ensembles dominants restreints de G. 25
2.2.2 L'ensemble B. 27
2.3.1 Un graphe G avec $\gamma_{2r}(G) = 4$ et $\gamma_t^r(G) = 2$. 31

3.2.1 Exemples d'identification de sommets. 35
3.2.2 Exemple de graphe pour lequel la borne supérieure est atteinte. 37
3.2.3 Exemple de graphe pour lequel la borne inférieur est atteinte. 37
3.2.4 Une chenille T_c avec $c(T_c) = (3, 0, 2, 0, 4, 0, 0, 0, 1)$. 43

Introduction

En quelques décennies, la théorie des graphes est devenue l'un des domaines les plus féconds et les plus dynamiques des mathématiques et de l'informatique. Cette évolution constante est sans doute due au large spectre d'applications dans des domaines comme l'électronique, la linguistique, la chimie, la sociologie, les mathématiques, l'informatique. . .

Le début a été hésitant : l'histoire veut que la théorie des graphes ait commencé avec l'article du mathématicien suisse Leonhard Euler ($1707-1783$) à l'Académie de Saint Pétersbourg en 1735, puis publié en 1741, sur le problème des sept ponts de **Königsberg** (voir [1]). Le problème consistait à trouver une promenade qui, à partir d'un point donné, fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg. (Voir la figure).

Le développement de la théorie des graphes est assez similaire au développement de la théorie des probabilités dont beaucoup de résultats sont dus à l'effort de compréhension des jeux de hasard. Les graphes ont d'abord été considérés comme curiosité mathématique et comme outil pour étudier les jeux logiques : on peut citer par exemple le problème du cavalier du jeu d'échec devant visiter chaque case de l'échiquier exactement une fois tout en revenant à la case de départ.

Parmi les domaines les plus importants et très étudiés en théorie des graphes, on trouve les problèmes de domination dans les graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions qui peuvent être imposées.

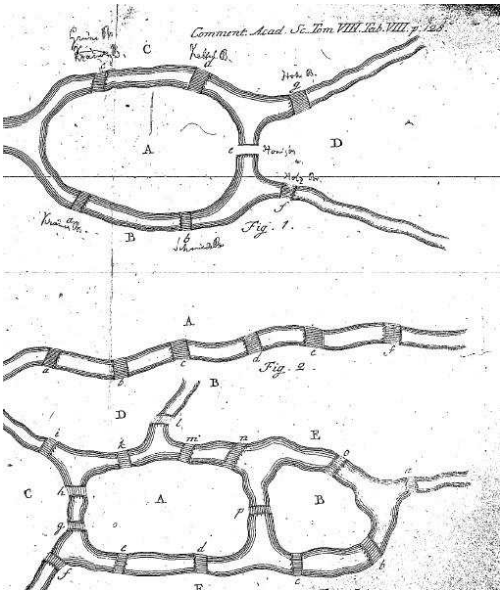


Figure 0.0.1 : Les 7 ponts de Königsberg

Plus d'un siècle plus tard, en 1962, Ore [2] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination n'a connue sa véritable expansion qu'après les travaux de Cockayne et al. en 1977 [3].

Les deux livres de Haynes et al. [4], [5] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années.

Un sous-ensemble D de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est un dominant si tout sommet de G est soit dans D soit adjacent à un sommet de D. En domination on peut définir d'autres paramètres en imposant des conditions supplémentaires. Actuellement, il existe plus de 120 types de domination introduits dans la littérature.

Parmi les types de domination qui existent, nous nous intéressons dans ce mémoire à la domination restreinte. Un sous-ensemble S de sommets de G est un dominant restreint si tout sommet à l'exterieur de S possède au moins un voisin S et un autre dans $V - S$. Le nombre de domination restreinte d'un graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant restreint (EDR) de G. Il est noté $\gamma_r(G)$.

Aprés une introduction générale, le mémoire s'atricule autour de trois chapitre:

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire.

Le deuxième chapitre comporte deux parties, dans la première nous donnons la définition de la domination et ses paramètres, ensuite nous rappelons quelques principales propriétés de la domination et du nombre de domination. La seconde est consacrée à la domination restreinte. Nous y donnons quelques propriétés, quelques bornes et des valeurs exactes du nombre de domination restreinte $\gamma_r(G)$.

Dans le troisième chapitre, nous présentons ce que nous avons pu concrétiser comme contributions dans le domaine des graphes critiques et stables par rapport à la domination restreinte concernant deux types d'opérations: la contraction d'une arête (ou l'identification de deux sommets adjacents) et la suppression d'un sommet.

En dernier, nous donnons une conclusion sur le travail accompli.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

Dans ce chapitre, nous allons introduire les définitions et notations de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension.

1.1 Concepts et notations de graphes non orientés

Un graphe non orienté G est un couple (V, E), où V est l'ensemble des **sommets**, et E est un ensemble de paires d'éléments de V applées **arêtes.** Pour un graphe G, on notera $V(G)$ l'ensemble des sommets et $E(G)$ l'ensemble des arêtes. Un graphe est dit **trivial** s'il ne possède qu'un seul sommet et aucune arête.

- On appelle ordre d'un graphe G le nombre de ses sommets. On le note habituellement par n. Le nombre des arêtes de G est appelé taille et noté par m.
- Deux sommets u, v d'un graphe $G = (V, E)$ sont **voisins** ou **adjacents** s'ils ont au moins une arête qui les relie. Si $e = uv$ est une arête de G, alors u et v sont les extrémités de e, et e est dite incidente à u et v.
- Une **boucle** est une arête dont les deux extrémités sont identiques.
- Un graphe est dit simple s'il est sans boucles est sans arêtes multiples. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples.

Exemple 1.1.1 *La figure 1.1.1 montre un graphe simple* $G = (V, E)$ *avec* $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ *et* $E(G) = \{x_1x_3, x_1x_2, x_2x_4, x_4x_3, x_4x_5, x_3x_5, x_1x_6, x_2x_6, x_1x_4, x_2x_3\}$.

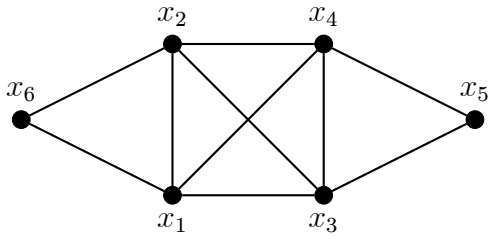


Figure 1.1.1 : Un graphe $G = (V, E)$.

1.1.1 Voisinages et degrés

- **Le voisinage ouvert** d'un sommet v d'un graphe G, noté $N_G(v)$ est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v. C'est à dire $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$.
- **Le voisinage fermé** d'un sommet v d'un graphe G, noté $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- **Le voisinage privé** d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn[v, S]$ et défini par $pn[v, S] = \{u\colon\ N_G[v] \cap S = \{v\}\}$.
- Soit S un sous-ensemble de V, le voisinage ouvert de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G\ (v)$ et le voisinage fermé est $N_G[S] = N(S) \cup S$.
- **Le degré** d'un sommet v de G est le nombre d'arêtes incidentes à v. Il est noté $d(v)$ ou bien $d_G(v)$.
- Lorsque $d(v) = 0$, on dit que le sommet v est **isolé**, et lorsque $d(v) = 1$, on dit que le sommet v est **pendant**. L'ensemble des sommets pendants de G est noté par $L(G)$.
- Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé sommet **support**. L'ensemble des sommets supports de G est noté par $S(G)$.
- Si un support v adjacent à un seule sommet pendant, alors v est un support faible, si non (adjacent à au moins deux sommets pendants) alors v est un support fort.
- Lorsque $d(v) = n - 1$, on dit que le sommet v est **universel.**

- **Le degré maximum** d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\Delta(G) = max_{v \in V} \{d(v)\}$.

- **Le degré minimum** d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\delta(G) = min_{v \in V} \{d(v)\}$.

1.1.2 Graphes particuliers

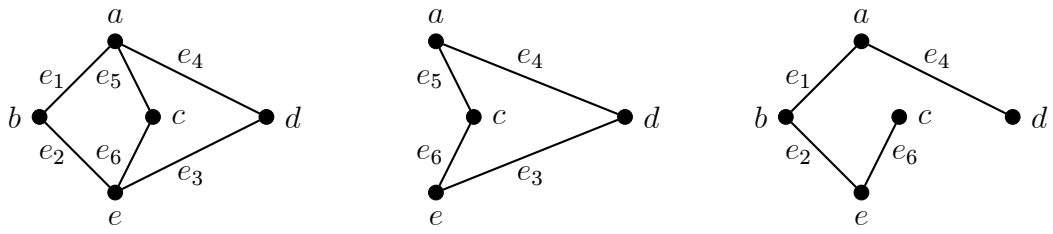
Sous-graphe et graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On appelle **sous-graphe** de G, un graphe $H = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous graphe induit par A, noté $G[A]$ où simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arête sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A.

Étant donné un graphe H, on dit que G est sans H si H n'est pas un des sous-graphes induits de G.

Un **graphe partiel** de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe $G_B = (V, B)$ ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(G_B) \subseteq E(G)$.

Des exemples de graphe partiel et de sous-graphe sont donnés dans la figure 1.1.2 .



$G = (V, E)$ $G_A = (A, E_A)$ $G_B = (V, B)$

Figure 1.1.2 : Un graphe simple G, un sous-graphe G_A et un graphe partiel G_B.

Graphe complémentaire

Définition 1.1.1 *Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe noté $\overline{G}$, défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.*

Autrement dit, le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si seulement s'ils ne le sont pas de G.

Par exemple dans la figure 1.1.3 sont donnés un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

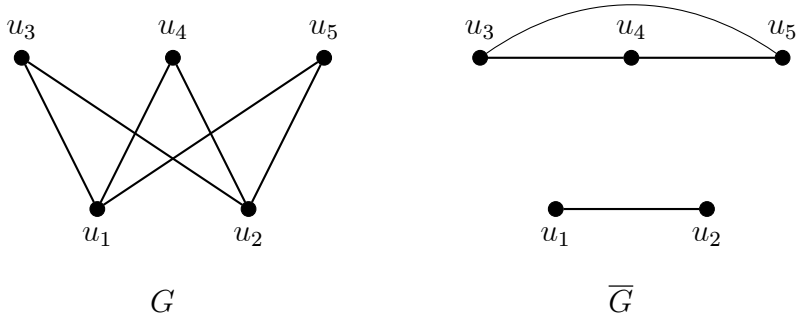


Figure 1.1.3 : Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

Graphe complet

Définition 1.1.2 *Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n - 1$.*

La figure 1.1.4 représente un graphe complet K_8.

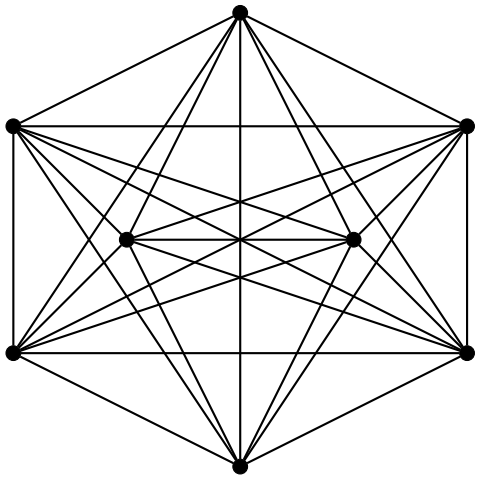


Figure 1.1.4 : Un graphe complet K_8.

Graphe biparti et Graphe biparti complet

Définition 1.1.3 *Un graphe est dit* ***biparti*** *si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ sont vides.*

Définition 1.1.4 *Un graphe* ***biparti complet*** *est un graphe biparti tel que tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$.*

La figure 1.1.5 représente un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,2}$.

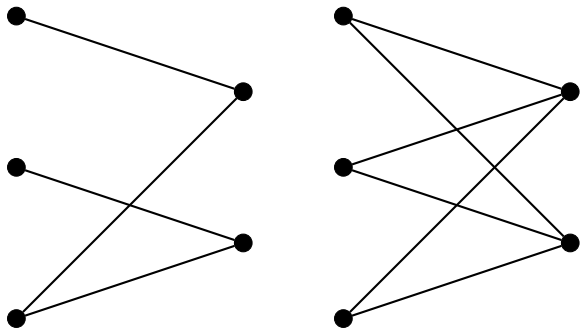


Figure 1.1.5 : Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,2}$.

Graphe régulier

Définition 1.1.5 *Un graphe est régulier si tous ses sommets ont le même degré.*

C'est-à-dire : $\forall u, v \in V(G)$, $d_G(u) = d_G(v)$.

Et d'autre part nous avous : $\delta(G) = \Delta(G)$.

*Un graphe est k-**régulier** ou régulier de degré k si tous ses sommets sont de degré k.*

Exemple 1.1.2 *Prenons par exemple le graphe de Petersen G_{10} de la figure 1.1.6 . Le graphe G_{10} est un graphe* 3***-régulier.***

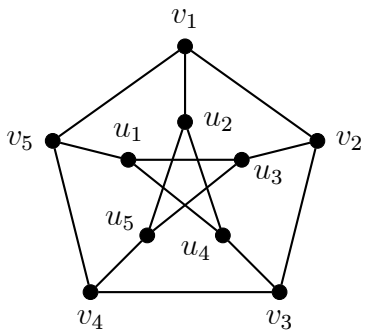


Figure 1.1.6 : Le graphe de Petersen G_{10}.

Étoile

Définition 1.1.6 *Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel* $|V_1| = 1$ *et* $|V_2| = s$ *est appelé une étoile et noté* $K_{1,s}$. *Le sommet de* V_1 *est appelé* ***centre*** *ou* ***sommet central*** *de l'étoile.*

La figure 1.1.7 représente un étoile $K_{1,8}$.

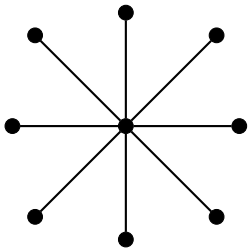


Figure 1.1.7 : Une étoile $K_{1,8}$.

Double étoile

Définition 1.1.7 *Une double étoile est le graphe obtenu en ajoutant une aréte reliant les deux centres des étoiles* $K_{1,p}$ *et* $K_{1,q}$, *et notée par* $S_{p,q}$.

La figure 1.1.8 représente un double étoile $S_{3,3}$.

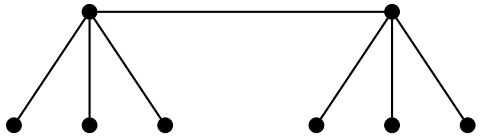


Figure 1.1.8 : Une double étoile $S_{3,3}$.

Étoile subdivisée

Définition 1.1.8 *L'opération de subdivision d'une arête xy d'un graphe G introduit un nouveau sommet z tel que $E(G \cup \{z\}) = ((E(G - \{xy\})) \cup \{xz, yz\}$.*

Définition 1.1.9 *Une **étoile subdivisée** (ou **araignée saine**) est obtenue d'une étoile $K_{1,s}$ en subdivisant chaque arête une fois , elle est notée par $K^*_{1,s}$.*

La figure 1.1.9 représente un étoile subdivisée $K^*_{1,s}$ (ou araingnée saine).

Si $q < s$ arêtes de l'étoile sont subdivisées, on appelle le graphe obtenu une **araignée blessée**.

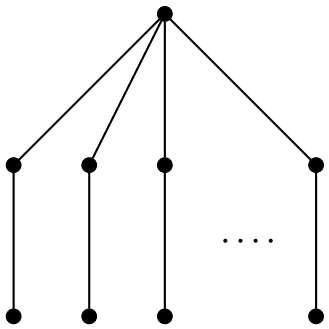
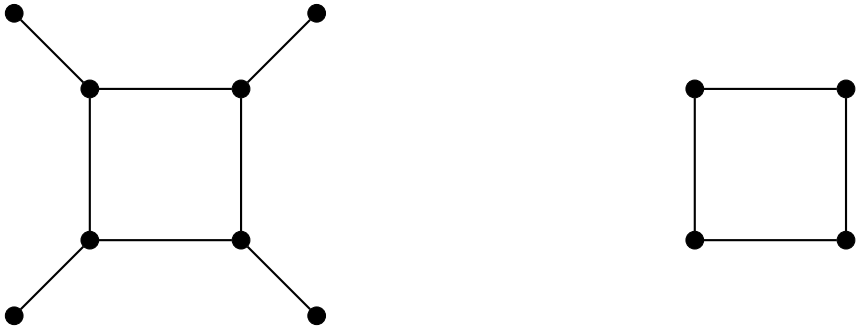


Figure 1.1.9 : La subdivision d'une étoile $K^*_{1,s}$.

Couronne d'un graphe

Définition 1.1.10 *La couronne $G = H \circ K_1$ d'un graphe H est le graphe obtenu d'une copie de H, et pour tout sommet v de $V(H)$, on relie un sommet pendant. Il est évident que l'ordre de G est égal à $2n$ si celui de H est n.*

La figure 1.1.10 représente un graphe C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$.



$C_4 \circ K_1$ C_4

Figure 1.1.10 : Un graphe C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$.

Graphe connexe

Définition 1.1.11 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets $u, v \in V$. Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe maximal connexe.*

Définition 1.1.12 *Un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$ est dit sommet d'articulation si sa suppression de V augmente le nombre de composantes connexes de G. L'arête $e \in E$ s'appelle un isthme si sa suppression de E augmente le nombre de composantes connexes de G.*

Exemple 1.1.3 *Le graphe connexe de la figure 1.1.11 possède un isthme, car $G - gh$ est non connexe, et possède aussi trois sommets d'articulations, car $G - g$, $G - h$ et $G - d$ sont non connexes. Dans la figure 1.1.11 , le graphe G est connexe puisque il contient une seule composante connexe.*

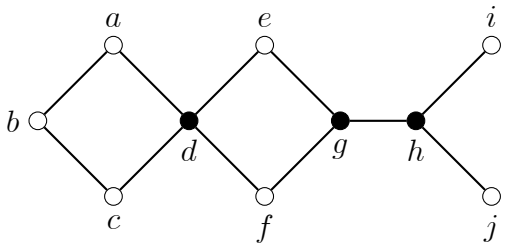


Figure 1.1.11 : d, g ,h sont des sommets d'articulation. L'arête gh est un isthme.

Arbre

Définition 1.1.13 *Un arbre est un graphe connexe sans cycles. Il comporte exactement* $(n-1)$ *arêtes, et il est noté généralement* T*.*

La figure 1.1.12 représente un arbre T.

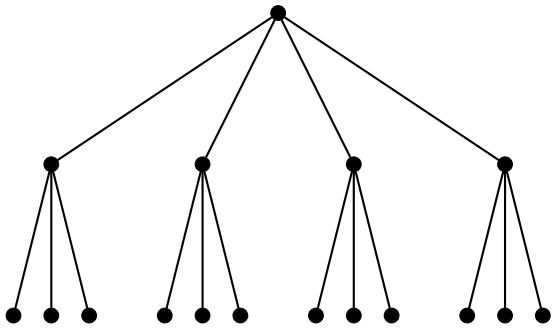


Figure 1.1.12 : Un arbre.

Forêt

Définition 1.1.14 *Une forêt est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.*

Galaxie

Définition 1.1.15 *Une* ***galaxie*** *est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles.*

Griffe

Définition 1.1.16 *Une griffe d'un graphe* $G = (V, E)$ *est un sous-ensemble de sommets de* G *qui engendre une étoile* $K_{1,3}$*.*

1.1.3 Chaînes et cycles

Définition 1.1.17 *Une chaîne d'un graphe non orienté* $G = (V, E)$ *est une suite alternée de sommets et d'arêtes de la forme* (v_0,e_0,v_1,..., e_K,v_k)*. Où* k *est un entier positif ou nul, les* v_i

sont des sommets de G et les e_i sont des arêtes de G tels que pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$, v_i et v_{i+1} sont extrémités de l'arête e_i. L'entier k est la longueur de la chaîne. Une chaîne est dite simple si elle ne contient pas deux fois une même arête. Elle est élémentaire si elle ne contient pas deux fois un même sommet. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire.

Par exemple voir la figure 1.1.13 .

Définition 1.1.18 *Un cycle est une chaîne telle que les extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire telle que ses deux extrémités sont confondues, il est noté par C_n.*

Par exemple voir la figure 1.1.13 .

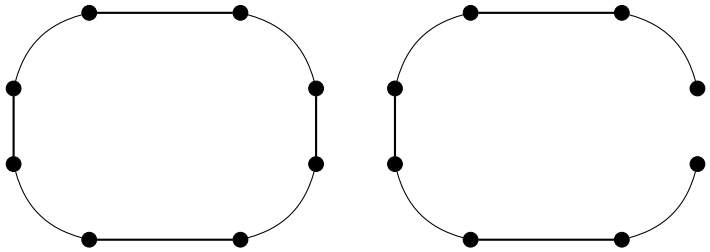


Figure 1.1.13 : Un cycle C_8 et une chaîne P_8.

1.1.4 Ensemble minimal, enemble maximal

Soient $G = (V, E)$ un graphe et P une propriété.

- Un sous-ensemble A de V est dit minimal par rapport à la propriété P si aucun sous-ensemble strict de A ne vérifie cette propriété.
- A est dit maximal par rapport à la propriété P, si aucun sous-ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie la propriété P.
- Un sous-ensemble B de V est minimum ou de taille minimale par rapport à la propriété P si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie cette propriété.

- B est maximum ou de taille maximale par rapport à P, si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie la propriété.

1.1.5 Invariants de graphes

Les graphes G et H sont dits isomorphes et on écrit $G \cong H$ s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes, $f : V(G) \to V(H)$ tel que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe.

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées invariants de graphes. En d'autre termes un invariant est une propriétés stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe. Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

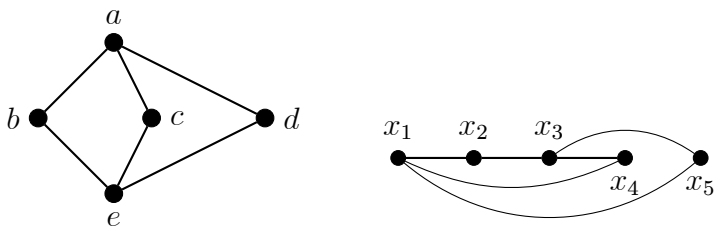


Figure 1.1.14 : Exemple de deux graphes isomorphes.

Clique

Une clique d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet.

Une clique maximum de G est une clique de cardinalité maximale. La cardinalité d'une clique maximum est appelée nombre de clique. On la désigne par $\omega(G)$.

Exemple 1.1.4 *Dans le graphe G de la figure 1.1.15 , les ensembles $A = \{a, b, g\}$ et $B = \{h, d, e\}$ représentent deux cliques de cardinalité maximales de G, avec $\omega(G) = 3$.*

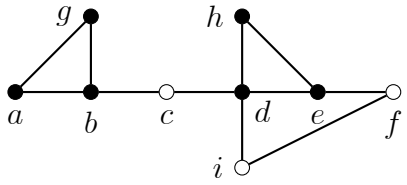


Figure 1.1.15 : Les cliques $A = \{a, b, g\}$ et $B = \{d, e, h\}$.

Stable

Un stable S (appellé aussi ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents.

Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité (ou nombre d'indépendance). On la désigne par $\alpha(G)$, tel que $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$.

Exemple 1.1.5 *Dans le graphe G de la figure 1.1.16 , l'ensemble $S = \{a, c, h, i\}$ représente un stable maximum de G, d'où $\alpha(G) = 4$.*

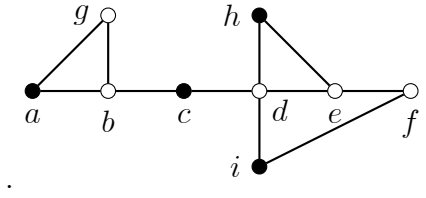


Figure 1.1.16 : $S = \{a, c, h, i\}$ est un ensemble stable avec $\alpha(G) = 4$.

Couplage

Un couplage dans un graphe G est un sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.

Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage. Un couplage qui sature tous les sommets de G est dit parfait.

Exemple 1.1.6 *Dans la figure 1.1.17 l'ensemble des arêtes* $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ *représente un couplage parfait dans le graphe* G.

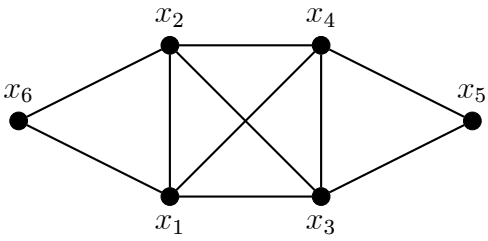


Figure 1.1.17 : $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un couplage parfait et $R = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un recouvrement.

Recouvrement

Etant donné un graphe simple G sans sommets isolés, on appelle recouvrement de G est un ensemble R d'arêtes de E tel que tout sommet de G est extrémité d'une arête de R. En d'autres termes, un recouvrement R est un ensemble d'arêtes qui couvre tous les sommets de G.

Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G.

Exemple 1.1.7 *Dans la figure 1.1.17 l'ensemble des arêtes* $R = \{x_6x_1, x_2x_4, x_3x_5\}$ *représente un recouvrement minimum de* G *avec* $\upsilon(G) = 3$.

Transversal

On appelle transversal d'un graphe G un ensemble T de sommets de V tel que toute arête de E a au moins une de ses extrémités dans T. En d'autres termes, un transversal T est un ensemble de sommets qui couvre toutes les arêtes de G.

Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal. On désigne par $\tau(G)$.

Exemple 1.1.8 *Dans le graphe* G *de la figure 1.1.18 , l'ensemble* $T = \{g, b, d, e, f\}$ *représente un transversal minimum de* G, *d'où* $\tau(G) = 5$.

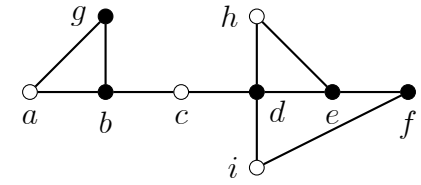


Figure 1.1.18 : $S = \{g, b, d, e, f\}$ représente un transversal minimum avec $\tau(G) = 5$.

Identités de Gallai

En 1959, Gallai [6] a donné deux identités entre quelques invariants de graphes.

Théorème 1.1.1 (Gallai 1959 [6]) *Soit G un graphe simple d'ordre n sans sommets isolés. Alors*

$$\alpha(G) + \tau(G) = n.$$

Théorème 1.1.2 (Gallai 1959 [6]) *Soit G un graphe simple d'ordre n sans sommets isolés. Alors*

$$\upsilon(G) + \beta(G) = n.$$

Chapitre 2

Domination et domination restreinte

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation générale du domaine de la domination dans les graphes, ainsi que celui de la domination restreinte. En dernier nous faisons un tour sur les principaux résultats existants sur la domination restreinte.

2.1 La dominantion dans les graphes

2.1.1 Historique

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'étude mathématique des ensembles dominants n'a commencé qu'à la fin des années 50 du siècle précédent. En 1862, De Jaenisch [7] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines, pour un échiquier 8×8, cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier, et pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3. Le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent.

En 1892, Ball [8] a traité la question de De Jaenisch en consedérant des conditions supplémentaires. En 1964, les frères Yalgom [9] on étudiè les problèmes posés par De Jaenisch et Ball. L'appellation "coefficient de stabilité externe" a été introduite par Berge [10] pour définir le nombre de domination.

2.1.2 Eensemble dominant

Définition 2.1.1 *Un sous-ensemble de sommets D de V est dit ensemble dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins un voisin dans D.*

Définition 2.1.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble dominant D est dit dominant minimal si pour tout sommet $v \in D$, l'ensemble $D - \{v\}$ n'est pas dominant.*

Définition 2.1.3 *Le nombre de domination inférieur d'un graphe G (appelé nombre de domination), noté $\gamma(G)$, représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant de G de cardinal minimun est noté $\gamma(G)$-ensemble. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.*

Exemple 2.1.1 *Dans le graphe de la figure 2.1.1 , l'ensemble $D = \{a, d, g, j, h, \}$ est un ensemble dominant de G.*

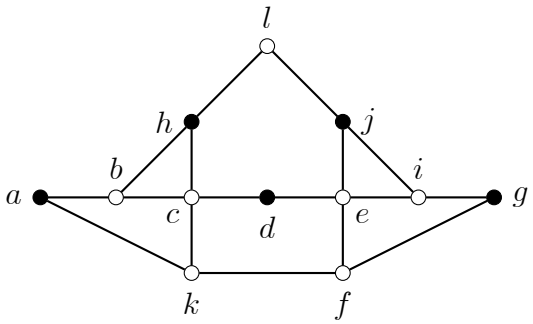


Figure 2.1.1 : Un graphe simple $G = (V, E)$ d'ordre 12.

Exemple 2.1.2 *Le nombre de domination du graphe G de la figure 2.1.1 est égal à 5 ($\gamma(G) = 5$), puisqu'il n'existe aucun ensemble dominant de G de cardinal 4. D'où $D = \{a, d, g, j, h, \}$ est un $\gamma(G)$-ensemble.*

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes des ensembles dominants dans les graphes, en voici des exemples:

1. Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si pour tout sommet $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$.

2. Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$.

3. Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si $\underset{v \in D}{\cup} N[v] = V$.

Remarque 2.1.1 *Si D est un ensemble dominant d'un graphe G, alors D contient tous les sommets isolés de G.*

Remarque 2.1.2 *Puisque le nombre de domination est défini pour tout graphe, et puisque tout graphe est dominé par son ensemble de sommets, alors le nombre de domination est toujours défini et* $1 \leq \gamma(G) \leq |V(G)|$.

2.1.3 Problèmes étudiés en domination

Puisque la détermination de la plupart des paramètres de domination est difficile, les chercheurs du domaine se sont penchés vers:

1. La recherche de bornes en fonction de l'ordre du graphes, de son degré minimum ou maximum, en fonction d'autres paramètres de domination.

2. Caractériser les graphes pour lesquelles ces bornes sont atteintes.

3. pour un paramètre de domination donné $\mu(G)$, trouver des relations entre $\mu(G)$ et $\mu(\overline{G})$ de type Nordhauss-Gaddum, sont formées de deux fonction $f_1(n, \delta, \Delta)$ et $f_2(n, \delta, \Delta)$ telles que

$$\mu(G) + \mu(\overline{G}) \leq f_1(n, \delta, \Delta) \text{ et}$$
$$\mu(G)\mu(\overline{G}) \leq f_2(n, \delta, \Delta)$$

4. Des recherches d'algorithmes polynomiaux pour la détermination de paramètres de domination ont été menées dans des classes de graphes ayant des structures relativement simples comme les arbres, les graphes complets, etc.

D'autres axes de recherche sont présents dans le domaine de la domination comme:

5. L'étude des graphes critiques et stables, c'est à dire les graphes dont le paramètre de domination étudié est altéré ou reste inchangé suite à des modifications sur le graphe en question.

6. L'étude des graphes excellents par rapport à un paramètre de domination μ, c'est à dire ceux dont tous les sommets appartiennent à un μ-ensemble.

2.1.4 Applications de la domination

La domination offre la possibilité dans de nombreux domaines d'améliorer les performances d'un système donné ou bien d'un problème caractérisé; qu'il soit problème de réseau de communication ou bien dans les systèmes électroniques ou d'autre.

La domination dans la pratique est très présente et cela revient a l'existence d'autres nouveaux paramètres de domination qui sont apparus lorsque une condition supplémentaire dans le graphe représenté a été exigée. Voici quelmques exemples d'application:

- La domination peut avoir des applications dans le domaine militaire. Considérons un problème de localisation des radars où un certain nombre de sites doivent être contrôlés par des radars. L'objectif est de déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leurs emplacements de façon a surveiller tous les points (les sites), ce qui revient à trouver un dominant de cardinal minimum du graphe représentant cette situation..

- Dans les réseaux de communication, on peut chercher le nombre minimum de stations pour installer des transmetteurs de telle sorte que tout le perimètre considéré soit couvert, c'est-à-dire les stations qui ne sont pas munies d'un transmetteur doivent en avoir une liaison directe.

- Dans le but de comprendre les molécules d'ARN (acide ribonucléique), des chercheurs au "Courant Institute of Mathematical Sciences" ont utilisé la théorie des graphes pour modéliser les molécules d'ARN et ont fourni une base de données constituée d'arbres représentant des structures secondaires possibles de ces molécules. Ces chercheurs ont

utilisé certains invariants de graphes afin d'identifier numériquement des motifs secondaires d'ARN, en particulier le nombre de domination qui est un invariant sensible au changement de la structure d'un arbre [11].

2.1.5 Bornes sur γ

On résume ci-dessous quelques bornes concernant le nombre de domination.

Walikar et al. [13] ont donné deux bornes inférieur pour le nombre de domination $\gamma(G)$.

Théorème 2.1.1 (Walikar et al. [13]) *Pour tout graphe G avec n sommets, m arêtes, et de degré maximum Δ, on a:*

$\gamma(G) \geq n - m$ *et* $\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta+1}$.

Une borne supèrieure a été établie par Ore [2] sur le nombre de domination $\gamma(G)$. En 1962, il a prouvé que le nombre domination d'un graphe sans sommet isolé est au plus la moitié de son ordre.

Théorème 2.1.2 (Ore [2]) *Si G est un graphe d'ordre n sans sommets isolés ,alors*

$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ a été donnée indépendamment par Payan et al.[14] et Jacobson et al. [15].

Théorème 2.1.3 (Payan et al.[14] et Jacobson et al. [15]) *Pour un graphe G d'ordre pair n sans sommets isolés, $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si les compostantes de G sont le cycle C_4 où la couronne $H \circ K_1$ de n'importe quel graphe connexe H.*

Une autre borne supèrieure a été établie par Berge [10].

Théorème 2.1.4 (Berge [10]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ alors*

$\gamma(G) \leq n - \Delta$.

La classe des arbres T qui vérifient cette borne a été caractérisée par Markus et al. [16].

Théorème 2.1.5 (Markus et al. [16]) *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ alors $\gamma(T) = n - \Delta$ si et seulement si T est une araignée blessée.*

Payan et al. [17] ont établi les résultats de type Nordhaus-Gaddum suivants.

Théorème 2.1.6 (Payan et al. [17]) *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors*

1. $3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$.

2. $2 \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n$.

Cockayne et al. [3] ont donné une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$.

Théorème 2.1.7 (Cockayne et al. [3]) *Si G est un graphe d'ordre n, alors $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) = n + 1$ si et seulement si $G = K_n$ où $\overline{G} = \overline{K_n}$.*

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$ est donnée par Laskar et al. [18].

Théorème 2.1.8 (Laskar et al. [18]) *Si G est un graphe d'ordre n tels que G et $\overline{G}$ sont connexes, alors*

$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$, *si et seulement si* $G = P_4$.

Joseph et al. [19] ont amélioré la borne supérieur de (1) dans les graphes sans sommets isolés.

Théorème 2.1.9 (Joseph et al. [19]) *Si G est un graphe tel que G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \tfrac{n}{2} + 2.$$

Joseph et al. [19] ont donné une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = \frac{n}{2} + 2$.

Théorème 2.1.10 (Joseph et al. [19]) *Si G est un graphe d'ordre $n \neq 9$ tel que G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = \frac{n}{2} + 2$ si et seulement si $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ où $\gamma(\overline{G}) = \frac{n}{2}$.*

2.1.6 Autres paramètres de domination

Dans cette partie, nous exposons certains paramètres de dominations où des conditions supplémentaires sont imposées sur l'ensemble dominant, sur l'ensemble dominé ou même sur la façon de dominer.

La domination stable

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble S de V est un dominant stable si le sous-graphe induit par D est sans arêtes, où bien stable.

Le nombre de domination stable d'un graphe G est le cardinal minimum d'un stable maximal de G. Il est noté $i(G)$ et un ensemble indépendant (stable) maximal de cardinal minimum est dit $i(G)$-ensemble.

La domination totale

Soit $G = (V, E)$ un graphe, Un sous-ensemble S de V est un dominant total (EDT) de G s'il est dominant et le sous-graphe induit par S ne contient pas de sommets isolés.

Le nombre de domination totale d'un graphe G est le cardinal minimum d'un dominant total, noté $\gamma_t(G)$.

La domination couplée

Un sous-ensemble S de V est dit dominant couplé de G si S est dominant et le sous-graphe induit par S admet un couplage parfait. Le nombre de domination couplée noté $\gamma_{pr}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé (EDC) de G. Un EDC de G de cardinal $\gamma_{pr}(G)$ est appelé $\gamma_{pr}(G)$-ensemble.

La domination double

Un sous-ensemble S de V est dit dominant double de G, si pour tout sommet v de V , on a $|N(v) \cap S| \geq 2$, c'est à dire si le sommet $v \in V - S$ alors v a deux voisins dans S, et si $v \in S$ alors v a au moins un voisin dans S. Le nombre de domination double noté $\gamma_{\times 2}(G)$ est le cardinal minimum d'un (EDD) de G. Un EDD de G de cardinal $\gamma_{\times 2}(G)$ est appelé $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble.

La domination connexe

Un sous ensemble S de V est dit dominant connexe de G si S est un dominant et le sous-graphe induit par S est connexe. Le nombre de domination connexe, noté par $\gamma_c(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de G.

2.2 Eensemble dominant restreint

La présente section est consacrée à la présentation des résultats antérieurs obtenus dans le domaine de domination restreinte. Nous commençons par définir le concept de domination restreinte.

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.2.1 *Un sous-ensemble S de V est un dominant restreint d'un graphe simple $G = (V, E)$, si pour tout sommet $v \in V - S$ les deux conditions suivantes sont vérifiéer.*

- *v possède au moins un voisin dans S.*
- *v n'est pas isolé dans $V - S$.*

Exemple 2.2.1 *Dans le graphe G de la figure 2.2.1 , les ensembles $S_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$, $S_2 = \{x_4, x_7\}$ et $S_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ sont des ensembles dominants restreints de G.*

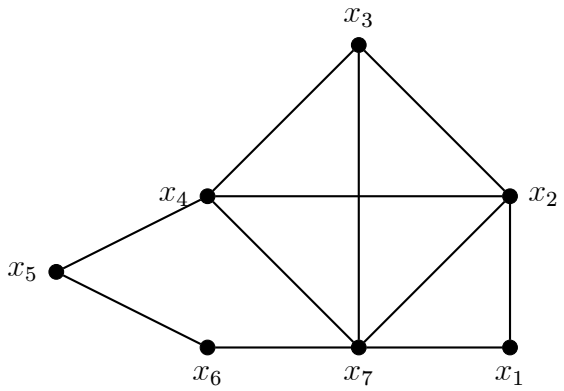


Figure 2.2.1 : $S_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$, $S_2 = \{x_4, x_7\}$ et $S_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ sont des ensembles dominants restreints de G.

Définition 2.2.2 *Un ensemble dominant restreint de G est dit minimal s'il ne contient aucun sous-ensemble strict qui est dominant resteint.*

Définition 2.2.3 *Le nombre de domination restreinte d'un graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant restreint (EDR) de G. Il est noté $\gamma_r(G)$. Un EDR de G de cardinal $\gamma_r(G)$ est appelé $\gamma_r(G)$-ensemble.*

Exemple 2.2.2 *Le nombre de domination restreinte du graphe G de la figure 2.2.1 est égal à 2 ($\gamma_r(G) = 2$), puisqu'il n'existe aucun ensemble dominant restreint de G de cardinal 1. On peut en déduire aussi que $S_2 = \{x_4, x_7\}$ est un γ_r-ensemble.*

Remarque 2.2.1 *Si S est un ensemble dominant restreint d'un graphe $G = (V, E)$, alors S contient tous les sommets isolés et les sommets pendants de G.*

Remarque 2.2.2 *Puisque l'ensemble des sommets d'un graphe est toujours un ensemble dominant restreint et un dominant restreint contient au moins un sommet, alors le nombre de domination restreinte est toujours défini et $1 \leq \gamma_r(G) \leq |V|$.*

2.2.2 Le nombre de domination restreinte de certains graphes particuliers

Domke et al. [20] ont déterminé la valeur exacte du nombre de domination restreinte γ_r pour les chaînes P_n, les cycles C_n, les graphes bipartis complets, les graphes multipartis complets et les étoiles.

Proposition 2.2.1 (Domke et al. [20]) *Si $n \geq 1$, alors $\gamma_r(P_n) = n - 2\lfloor (n-1)/3 \rfloor$.*

Proposition 2.2.2 (Domke et al. [20]) *Si $n \geq 3$, alors $\gamma_r(C_n) = n - 2\lfloor n/3 \rfloor$.*

Proposition 2.2.3 (Domke et al. [20]) *Si n_1,$n_2 \in \mathbb{N}$ telle que $\min\{n_1, n_2\} \geq 2$, alors $\gamma_r(K_{n_1,n_2}) = 2$.*

Proposition 2.2.4 (Domke et al. [20]) *Si $t \geq 3$ avec $t \in \mathbb{N}$, alors*

$$\gamma_r(K_{n_1,...,n_t}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \min(n_1, ..., n_t) = 1 \\ 2 \text{ si non} \end{cases} .$$

Proposition 2.2.5 (Domke et al. [20]) *Si G est un graphe connexe d'ordre n et de taille $m \neq 0$, alors $\gamma_r(G) = n$ si et seulement si G est une étoile.*

Pandya et al. [21] ont déterminé la valeur exacte de γ_r pour les chaînes et les cycles par une autre manière.

Proposition 2.2.6 (Pandya et al. [21]) *La valeur exacte de γ_r pour les chaînes et les cycles est donnée par:*

$$\gamma_r(P_n) = \begin{cases} \frac{n+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{n+4}{3} & \text{si } n \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{n}{3} + 2 & \text{si } n \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases} \text{, et } \gamma_r(C_n) = \begin{cases} \frac{n+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{n+4}{3} & \text{si } n \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{n}{3} & \text{si } n \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases} .$$

2.2.3 Bornes sur γ_r

On résume ci-dessous quelques bornes concernant le nombre de domination restreinte.

Domke et al. [22] ont donné une borne supèrieure pour le nombre de domination restreinte pour un graphe $G \notin B$ tel que B est l'ensemble de graphes.de la figure 2.2.1 .

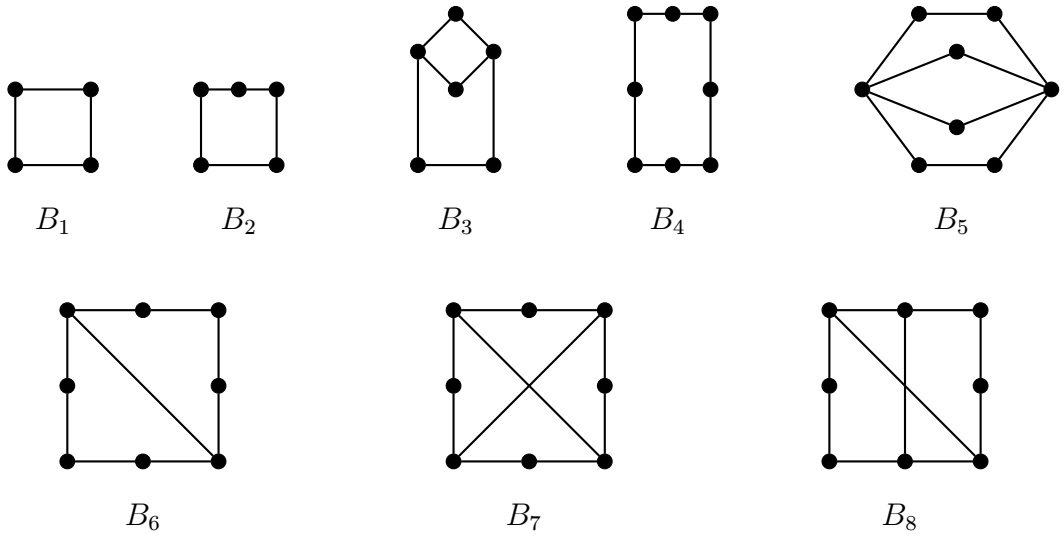


Figure 2.2.2 : L'ensemble B.

Théorème 2.2.1 (Domke et al. [22]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n de degré minimum $\delta \geq 2$. Si $G \notin B$, alors $\gamma_r(G) \leq \frac{n-1}{5}$.*

Soit $H_1 = \{C_4, C_7\}, H_2 = \{C_5, C_8, ..., C_{17}\}$, et soit $H = H_1 \cup H_2$. Si la suppression de certains sous-graphes induits G' de G donne un graphe connexe, alors U_1 (U_2, respectivement) désignera le sous-graphe de $G - G'$ induit par tous les composants isomorphes à un graphe dans H_1 (H_2, respectivement).

Nous considérons maintenant une borne infèrieure établie par Domke et al. [20] pour un graphe $G \in H$.

Proposition 2.2.7 (Domke et al. [20]) *.Soit G un graphe d'ordre n. Si $G \in H$, alors $\gamma_r(G) > \frac{2n}{5}$.*

Hattingh et al. [23] ont amélioré la borne dans le Théorème **2.2.1** pour un graphe G sans griffe de degré minimum $\delta \geq 2$ avec $G \notin H$.

Théorème 2.2.2 (Hattingh et al. [23]) *Soit G un graphe connexe sans griffes d'ordre n de degré minimum $\delta \geq 2$. Si $G \notin H$ alors $\gamma_r(G) \leq \frac{2n}{5}$.*

Pour la classe des arbre Dankelmann et al. [24] ont donné une borne supèrieure pour $\gamma_r(T)$.

Théorème 2.2.3 (Dankelmann et al. [24]) *Pour toute arbre T d'ordre n avec ℓ sommets pendants. Alors*

$$\gamma_r(T) \leq (n + \ell + 1)/2.$$

Dankelmann et al. [24] ont donné une caractérisation des arbres T tels que $\gamma_r(T) = (n + \ell + 1)/2$.

Théorème 2.2.4 (Dankelmann et al. [24]) *Soit T un arbre d'ordre n avec ℓ sommets pendants. Alors $\gamma_r(T) = (n + \ell + 1)/2$ si et seulement si T est une étoile non triviale.*

Hattingh et al. [25] ont donné une borne inférieure pour les arbres en général.

Théorème 2.2.5 (Hattingh et al. [25]) *Si T un arbre d'ordre $n \geq 1$, alors $\gamma_r(T) \geq \lceil (n+2)/3 \rceil$.*

Une autre borne inférieure a été établie par Domke et al. [20] pour les arbres en fonction du degré maximum $\Delta(T)$.

Théorème 2.2.6 (Domke et al. [20]) *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_r(T) \geq \Delta(T)$.*

Domke et al. [20] ont donné une caractérisation des arbres T tels que $\gamma_r(T) = \Delta(T)$.

Théorème 2.2.7 (Domke et al. [20]) *Soit T est un arbre d'ordre $n \geq 3$. alors $\gamma_r(T) = \Delta(T)$ si et seulement si T est une araignée blessée.*

Joubert et al**.** [26] ont donné une borne supèrieure et inférieure pour les graphes 3-réguliers.

Théorème 2.2.8 (Joubert et al. [26]) *Si G est un graphe 3-régulier d'ordre n, alors $\gamma_r(G) \geq \frac{n}{4}$.*

Théorème 2.2.9 (Joubert et al. [26]) *Si G est un graphe 3-régulier d'ordre n, alors $\gamma_r(G) \leq \frac{5n}{11}$.*

Soient $C_1, ..., C_\ell$ des cycles mutuellement disjoints tels que $\sum_{i=1}^{\ell} n(C_i) = n_C = 0 \bmod 3$, et soit G est un graphe 3-régulier obtenu à partir de l'union disjointe de $\overline{K}_{\frac{n_C}{3}}$ et les cycles $C_1, ..., C_\ell$ en joignant chaque sommet de $\overline{K}_{\frac{n_C}{3}}$ à exactement trois sommets de l'union disjointe de $C_1, ..., C_\ell$. Notons que $n(G) = 4\frac{n_C}{3}$. Tous les graphes d'ordre n construits de cette manière seront notés par $\mathcal{F}_n$.

Joubert et al**.** [26] ont donné une caractérisation des graphes 3-réguliers tels que $\gamma_r(G) = \frac{n}{4}$.

Théorème 2.2.10 (Joubert et al. [26]) *Soit G un graphe 3-régulier d'ordre n. Alors $\gamma_r(G) = \frac{n}{4}$ si et seulement si $G \in \mathcal{F}_n$.*

Domke et al. [20] ont établi les résultats de type Nordhaus-Gaddum suivants.

Théorème 2.2.11 (Domke et al. [20]) *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors $4 \leq \gamma_r(G) + \gamma_r(\overline{G})$. Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$ tel que $G \ncong P_3$ et $\overline{G} \ncong P_3$, alors $\gamma_r(G) + \gamma_r(\overline{G}) \leq n + 2$.*

Considérons un graphe complet K_n. Pour $n = 4$, considèrons une chaîne P_4. Pour $n \geq 5$, soit n_1 et n_2 sont des entiers tels que $\min\{n_1, n_2\} \geq 2$ et $n_1 + n_2 = n - 1$. Soit $\overline{H} \cong K_{n_1,n_2}$ et $G \cong K_1 + H$.

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma_r(G) + \gamma_r(\overline{G}) = 4$ où $\gamma_r(G) + \gamma_r(\overline{G}) = n + 2$ est donnée par Domke et al. [20].

Théorème 2.2.12 (Domke et al. [20]) *Si G est un graphe d'ordre n tel que G et $\overline{G}$ sont connexes, alors*

- $\gamma_r(G) + \gamma_r(\overline{G}) = n + 2$, *si et seulement si* $G \cong K_{1,n-1}$ *ou* $\overline{G} \cong \overline{K}_{1,n-1}$.
- $\gamma_r(G) + \gamma_r(\overline{G}) = 4$, *si et seulement si* $G \cong K_1 + H$.

2.3 Autres paramètres de domination restreinte

Les chercheurs dans le domaine de la domination ont défini plusieurs paramètres dérivés de la domination restreinte en imposant des contraintes connues mais en gardant le fait que les sommets à l'extérieur de l'ensemble dominant ne soient pas isolés. Dans cette partie, nous nous contentons de présenter deux de ces paramètres liés à la domination restreinte totale et la domination restreinte double.

2.3.1 La domination restreinte totale

Définition 2.3.1 *Un ensemble dominant restreint total de G est un ensemble dominant restreint $S \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par S ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination restreinte totale de G, noté $\gamma_t^r(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant restreint total.*

Exemple 2.3.1 *Dans la fugure 2.3.1 l'ensemble $S = \{e, f\}$ représente un ensemble dominant restreint total minimum ($\gamma_t^r(G)$-ensemble) et donc $\gamma_t^r(G) = 2$.*

2.3.2 La domination restreinte double

Définition 2.3.2 *Un sous-ensemble dominant restreint double de G est un ensemble dominant restreint $S \subseteq V$ tel que tout sommet de V est dominé par au moins deux sommets de S. C'est à dire ou bien le sommet $v \in S$ et possède au moins un voisin dans S, où bien $v \in V - S$ et possède au moins deux voisins dans S et au moins un voisin dans $V - S$. Le nombre de domination double, noté $\gamma_{2r}(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant restreint double, Et tout ensemble dominant restreint de cardinal $\gamma_{2r}(G)$ est appelé $\gamma_{2r}(G)$-ensemble.*

Exemple 2.3.2 *Dans la figure 2.3.1 , l'ensemble $S = \{a, b, c, d\}$ est un ensemble dominant restreint double minimum ($\gamma_{2r}(G)$-ensemble) et donc $\gamma_{2r}(G) = 4$.*

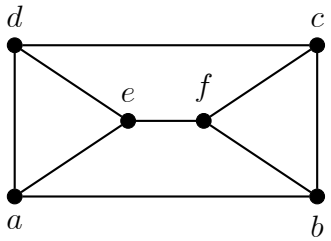


Figure 2.3.1 : Un graphe G avec $\gamma_{2r}(G) = 4$ et $\gamma_t^r(G) = 2$.

2.3.3 Valeurs exactes et bornes sur $\gamma_t^r(G)$ et $\gamma_{2r}(G)$

Samadi et al. [27] ont déterminé les valeurs exactes sur $\gamma_t^r(G)$ et $\gamma_{2r}(G)$ pour les graphes biparti complets, les chaînes, les graphes complets et les étoiles.

Proposition 2.3.1 (Samadi et al. [27]) *Soient m et n deux entiers positifs. Alors*

i. $\gamma_t^r(K_{m,n}) = \begin{cases} m+n, & \text{si } \min\{m,n\} = 2, \\ 2, & \text{si non,} \end{cases}$

ii. $\gamma_t^r(P_n) = n - 2\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$,

iii. $\gamma_{2r}(K_n) = \begin{cases} 2, \text{ si } n \neq 3, \\ 3, \text{ si } n = 3, \end{cases}$

iv. $\gamma_{2r}(K_{1,n}) = n + 1$.

Samadi et al. [27] ont établi quelques bornes inférieures sur les graphes G ayant ℓ sommets pendants et s supports pour les paramètres $\gamma_t^r(G)$ et $\gamma_{2r}(G)$.

Théorème 2.3.1 (Samadi et al. [27]) *Si G est un graphe d'ordre n sans sommets isolés avec ℓ sommets pendants et s supports. Alors*

1. $\gamma_t^r(G) \geq \ell + \max\left\{\frac{n-s}{\Delta}, \frac{n}{\Delta+1}\right\}$.
2. $\gamma_{2r}(G) \geq \max\left\{\frac{2n+(\Delta+1)\ell}{\Delta+2}, \frac{2n+\ell\Delta+(\Delta-2)n_2-s}{\Delta+1}\right\}$.

Où n_2 est le nombre des sommets de degré deux qui ne sont pas supports.

Une borne supèrieure et inférieure a été établie par Samadi et al. [27] pour les paramètres $\gamma_t^r(G)$ et $\gamma_{2r}(G)$.

Théorème 2.3.2 (Samadi et al. [27]) *Soit G un graphe d'ordre n de degré minimum $\delta \geq 3$. Alors*

$$\gamma_{2r}(G) \leq n - \delta + 1.$$

Théorème 2.3.3 (Samadi et al. [27]) *Si G est un graphe sans sommets isolés d'ordre n et de taille $m \neq 0$, alors*

$$\gamma_t^r(G) \geq 3n/2 - m.$$

Pour les arbres Hattingh et al**. [28]** ont donné une borne pour $\gamma_t^r(T)$.

Théorème 2.3.4 (Hattingh et al. [28]) *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$\gamma_t^r(T) \geq \lceil (n+2)/2 \rceil.$$

Chapitre 3

Quelques résultats sur la domination restreinte

Dans ce chapitre, nous commençons par définir les concepts de stabilité et de criticité. Nous y présentons quelques résultats obtenus sur les graphes critiques et stables par rapport à la domination restreinte. Ces résultats concernent deux types d'opérations: la contraction d'une arête (ou l'identification de deux sommets adjacaents) et la suppression d'un sommet.

3.1 Notions de criticité et de stabilité

Le problème des graphes critiques et stables est parmi les plus étudiés en domination, et cela est dû son importance aussi bien sur le plan théorique que pratique. Par exemple, lors de la conception de réseaux, il est important de prendre en compte sa tolérance aux pannes, en d'autres termes, sa capacité à fournir un service, même s'il contient un ou plusieurs composants défectueux. Le comportement d'un réseau en présence d'un défaut peut être analysé en déterminant l'effet que la suppression d'une arête (défaillance d'une liaison) ou d'un sommet (défaillance d'un processeur) de son graphe représentatif G a sur le critère de tolérance aux pannes.

Commençons par définir les trois opérations (ou modifications) les plus étudiées en domination dans un graphe $G = (V, E)$.

1. Pour $v \in V$, on note par $G - v$ le sous-graphe engendré par l'ensemble $V - \{v\}$. Le graphe $G - v$ est obtenu à partir de G, en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v.

2. Pour $e \in E(G)$, on note par $G - e$ le graphe partiel $G' = (V, E - \{e\})$. Le graphe $G - e$ est obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés).

3. Pour $e \in E(\overline{G})$, on note par $G + e$ le graphe $G'' = (V, E + \{e\})$. Le graphe $G + e$ est obtenu, à partir de G, en ajouttant l'arête e.

Pour un paramètre de domination μ, un graphe G est dit:

- μ-arête-critique si $\mu(G + e) < \mu(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
- μ^+-arête-critique si $\mu(G + e) > \mu(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
- μ-arête-stable si $\mu(G + e) = \mu(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
- μ-arête-enlevée-critique si $\mu(G - e) > \mu(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$
- μ^--arête-enlevée-critique si $\mu(G - e) < \mu(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$
- μ-arête-enlevée-stable si $\mu(G - e) = \mu(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$
- μ-sommet-critique si $\mu(G - v) < \mu(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$
- μ^+-sommet-critique si $\mu(G - v) > \mu(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$
- μ-sommet-stable si $\mu(G - v) = \mu(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$

D'autres modifications ont intéressé les chercheurs dans le domaine de la domination comme la subdivision d'une arête ou l'identification de deux sommets qui sera définie dans la section suivante.

Le concept des graphes critiques a été introduit par Walikar et Acharya [29] en 1979. Ensuite Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [30] ont abordé les graphes pour lesquels le nombre de domination est altéré quand une arête quelconque est supprimée.

Quelques années après la parution de l'article de Walikar et al. [29], Sumner et Blitch [31] ont initié l'étude des graphes γ-arête-critiques.

Concernant la domination restreinte, il existe un article de Thakkar et al. [21] qui se sont interessés à ce sujet par rapport à la suppression d'une arête.

3.2 Graphes critiques et stables par rapport à la contraction d'une arête

La contraction d'une arête ou l'identification de deux sommets adjacents est une opération qui consiste à remplacer ces deux sommets par un nouveau sommet dont le voisinage ouvert est l'union des voisinages ouverts des deux sommets remplacés. D'une façon formelle, l'identification de deux sommets adjacents u et v forme un nouveau sommet, noté par $\overline{uv}$ dont le voisinage ouvert est $(N(u) \cup N(v)) - \{u, v\}$. Le graphe obtenu sera noté par G_{uv}. Voir des exemples de contraction d'arêtes dans la figure 3.2.1 .

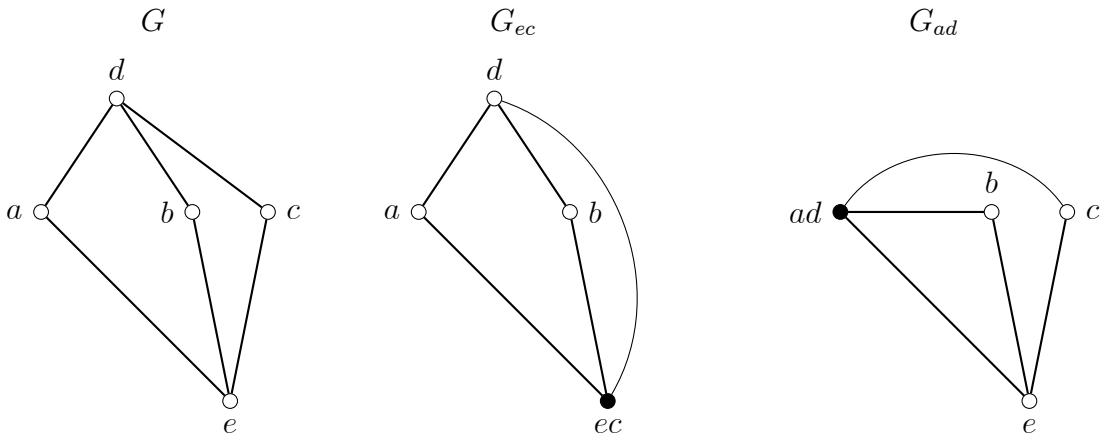


Figure 3.2.1 : Exemples d'identification de sommets.

Dans cette partie du mémoire, on étudie l'effet de l'identification de deux sommets adjacents sur le nombre de domination restreinte d'un graphe, et les graphes considérés sont non vides d'ordre au moins deux puisque l'identification est entre deux sommets adjacents de G.

Théorème 3.2.1 *Soit G un graphe non vide et $e = xy$ une arête de G. Alors*

$$\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) + \Delta(G) - 1.$$

Preuve. On commence par montrer la borne inférieure, considérons un $\gamma_r(G_{xy})$-ensemble D et examinons les deux cas suivant.

Cas 1: $\overline{xy} \notin D$. Si D domine x et y, alors D est un EDR de G, d'où $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G_{xy})$. Si D ne domine pas l'un des sommets x et y, alors on suppose sans perte de généralité que x n'est pas dominé par D et que y est dominé par D. Si y ne possède aucun voisin autre que x dans $V(G) - D$, alors $D \cup \{y\}$ est un EDR de G et donc $\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G_{xy})$. Sinon ($y$ possède au moins un voisin autre que x dans $V(G) - D$) on doit considérer les deux cax suivants:

- x ne possède aucun voisin autre que y dans $V(G) - D$. Dans ce cas $D \cup \{x\}$ est un EDR de G et $\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G_{xy})$.

- x possède au moins un voisin autre que y dans $V(G) - D$. Là aussi on doit examiner deux cas: si x possède un voisin u qui n'est adjacent à aucun sommet de $V(G) - D$, alors $D \cup \{u\}$ est un EDR de G, d'où $\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G_{xy})$. Sinon ($x$ ne possède aucun voisin (privé) dans $V(G) - D$), alors $D \cup \{x\}$ est un EDR de G, d'où $\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G_{xy})$.

Cas 2: $\overline{xy} \in D$. Alors l'ensemble $(D - \{\overline{xy}\}) \cup \{x, y\}$ est un EDR de G de cardinal $|D| + 1$, donc $\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G_{xy})$.

D'après tous les cas considérés, on déduit que $\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G_{xy})$.

Considérons à présent la borne supérieure et soit S un $\gamma_r(G)$-ensemble. Si $x, y \notin S$, alors s'il existe un voisin u de $\overline{xy}$ qui n'appartient pas à S, alors S est un EDR de G_{xy} et on a donc $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G)$. Si tous les voisins de $\overline{xy}$ apparteinnent à S, alors $S \cup \{\overline{xy}\}$ est un EDR de G_{xy} et donc $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) + 1$. Maintenant si $x, y \in S$, alors l'ensemble $(S - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un EDR de G_{xy}, d'où $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) - 1$. Considérons en dernier le cas où l'un des sommets x ou y, disons x, n'appartient pas à S. Supposons au pire des cas que tous les voisins x excepté y n'appartiennent pas à S et possèdent x comme seul voisin dans S, donc l'ensemble $(S - \{y\}) \cup \{\overline{xy}\} \cup (N_G(x) - \{y\})$ est un EDR de G_{xy} de cardinal $|S| + \deg_G(x) - 1$.

On déduit de tous les cas considérés que $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) + \Delta(G) - 1$. ■

Dans la figure 3.2.2 , nous donnons un exemple de graphe pour lequel la borne supérieure est atteinte. On peut facilement voir que l'ensemble $S = \{v_1, v_4, v_7, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{17}, v_{19}, x\}$ est un $\gamma_r(G)$-ensemble, que y est un sommet de degré maximum Δ, et que l'ensemble $T = \{v_1, v_4, v_7, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{17}, v_{19}, \overline{xy}, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{18}\}$ est un $\gamma_r(G_{xy})$-ensemble.

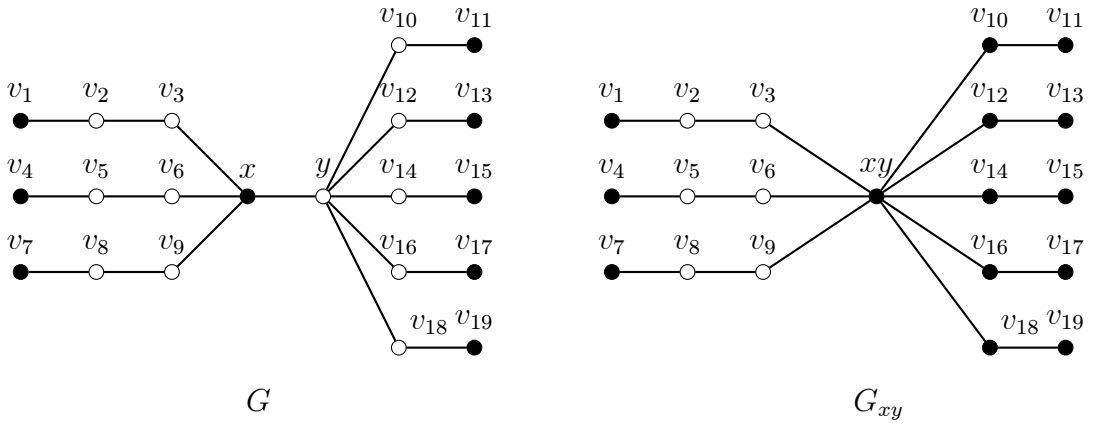


Figure 3.2.2 : Exemple de graphe pour lequel la borne supérieure est atteinte.

Un exemple d'un graphe pour lequel la borne inférieure est atteinte est donné dans la figure 3.2.3 . Dans le graphe G qui est une étoile $K_{1,3}$, l'ensemble $S = \{x, y, z, w\}$ est un $\gamma_r(G)$-ensemble, avec $\gamma_r(G) = 4$, et $H = \{\overline{xy}, z, w\}$ est un $\gamma_r(G_{xy})$-ensemble. Donc $\gamma_r(G_{xy}) = 3 = \gamma_r(G) - 1$.

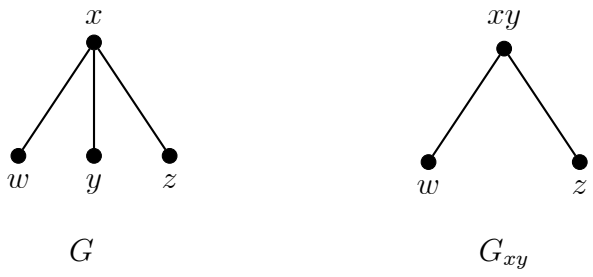


Figure 3.2.3 : Exemple de graphe pour lequel la borne inférieur est atteinte.

3.2.1 Graphes γ_r^+-dot-critiques

Nous commençons d'abord par définir les graphes γ_r^+-dot-critiques.

Définition 3.2.1 *Soit G un graphe non vide d'ordre $n \geq 2$. On dit que G est γ_r^+-dot-critique si la contraction de n'importe quelle arête augmente le nombre de domination restreinte. En d'autres termes, G est γ_r^+-dot-critique si pour tout couple de sommets adjacents u et v de G on a $\gamma_r(G_{uv}) > \gamma_r(G)$.*

Le Théorème 3.2.1 montre que la contraction d'une arête peut augmenter le nombre de domination restreinte. Notre premier objectif est de discuter l'existence ou la non existence des graphes γ_r^+-dot-critiques.

On remarque que la contraction de n'importe quelle arête d'une chaîne P_4 augmente le nombre de domination restreinte. On peut dire la même chose pour le cycle C_6 qui possède un nombre de domination restreinte égal à 2 et la contraction de n'importe quelle arête produit un cycle C_5 avec un nombre de domination restreinte égal à 3.

Après avoir prouvé l'existence des graphes γ_r^+-dot-critiques, on donne maintenant quelques propriétés de cette famille de graphes.

Remarque 3.2.1 *La contraction d'une arête pendante incidente à un support fort diminue le nombre de domination restreinte.*

D'après la Remarque 3.2.1, on peut déduire qu'un graphe γ_r^+-dot-critique ne contient pas de support fort.

Remarque 3.2.2 *Si G est un graphe γ_r^+-dot-critique, alors G ne contient pas de support fort.*

Proposition 3.2.1 *Si G est un graphe γ_r^+-dot-critique, alors pour tout $\gamma_r(G)$-ensemble S, S est stable et $\langle V - S\rangle$ contient seulement des chaînes P_2.*

Preuve. Supposons que l'une des composantes de $\langle V - S\rangle$ comporte une chaîne formée de trois sommets v,u,w (puisque $\langle V - S\rangle$ est sans sommets isolés). Il est évident que S est un EDR de G_{vu} et donc $\gamma_r(G_{vu}) \leq \gamma_r(G)$, une contradiction avec le fait que G est γ_r^+-dot-critique. Supposons maintenant que S contient deux sommets x et y qui sont adjacents. Mais alors $(S - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est EDR de G_{xy} de cardinal $\gamma_r(G) - 1$, une contradiction. ■

La réciproque n'est pas vraie, il suffit de prendre une double étoile qui n'est pas γ_r^+-dot-critique malgré qu'elle possède un γ_r-ensemble unique contenant tous les sommets pendants et formant un stable et à l'extérieur on trouve une chaîne P_2.

Nous passons maintenant à la caractérisation des chaînes et des cycles γ_r^+-dot-critiques. Rappelons d'abord que le nombre de domination restreinte des chaînes C_n et des cycles C_n peut être calculé d'une manière exacte.

Proposition 3.2.2 (Pandya et al. [21]) *La valeur exacte de γ_r pour les chaînes et les cycles est donnée par:*

$$\gamma_r(P_n) = \begin{cases} \frac{n+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{n+4}{3} & \text{si } n \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{n}{3}+2 & \text{si } n \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}, \text{ et } \gamma_r(C_n) = \begin{cases} \frac{n+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{n+4}{3} & \text{si } n \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{n}{3} & \text{si } n \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}.$$

Proposition 3.2.3 *Une chaîne P_n avec $n \geq 4$ est γ_r^+-dot-critique si et seulement si $n \equiv 1\,[3]$.*

Preuve. Afin de montrer la condition nécessaire, nous utilisons la contraposée, et on montre qu'une chaîne P_n avec $n \equiv 0[3]$ ($n \equiv 2[3]$, respectivement) n'est pas γ_r^+-dot-critique. Puisque $\gamma_r(P_n) = \frac{n}{3}+2$ ($\frac{n+4}{3}$, respectivement) et que la contraction de n'importe quelle arête produit une chaîne P_{n-1} qui possède un nombre de domination restreinte $\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{n+3}{3} < \frac{n}{3}+2 = \gamma_r(P_n)$ ($\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{n+1}{3} < \frac{n+4}{3} = \gamma_r(P_n)$, respectivement), et donc P_n est n'est pas γ_r^+-dot-critique. Montrons maintenant qu'une chaîne P_n avec $n \equiv 1\,[3]$ est γ_r^+-dot-critique. Puisque $\gamma_r(P_n) = \frac{n+2}{3}$ et que la contraction de n'importe quelle arête produit une chaîne P_{n-1} qui possède un nombre de domination restreinte $\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{n-1}{3}+2 = \frac{n+5}{3} > \gamma_r(P_n)$, et donc P_n est γ_r^+-dot-critique. ■

Proposition 3.2.4 *Un cycle C_n tel que $n \geq 4$ est γ_r^+-dot-critique si et seulement si $n \equiv 0\,[3]$.*

Preuve. Pour montrer la condition nécessaire, nous utilisons la contraposée. Montrons qu'un cycle C_n avec $n \equiv 1[3]$ ($n \equiv 2[3]$, respectivement) n'est pas γ_r^+-dot-critique. Puisque $\gamma_r(C_n) = \frac{n+2}{3}$ ($\frac{n+4}{3}$, respectivement) et la contraction de n'importe quelle arête produit

une cycle C_{n-1} qui possède un nombre de domination restreinte $\gamma_r(C_{n-1}) = \frac{n-1}{3}$ ($\frac{n+1}{3}$, respectivement), et donc C_n est n'est pas γ_r^+-dot-critique. Montrons maintenant qu'un cycle C_n avec $n \equiv 0[3]$ est γ_r^+-dot-critique. Puisque $\gamma_r(C_n) = \frac{n}{3}$, on a $\gamma_r(C_{n-1}) = \frac{n-1+4}{3} = \frac{n+3}{3} > \gamma_r(C_n)$, et donc C_n est γ_r^+-dot-critique. ■

3.2.2 Graphes γ_r^--dot-critiques.

Dans cette partie, nous étudions les graphes G tels que la contraction de n'importe quelle arête diminue le nombre de domination restreinte.

Définition 3.2.2 *Soit G un graphe non vide d'ordre $n \geq 2$. On dit que G est γ_r^--dot-critique si la contraction de n'importe quelle arête diminue le nombre de domination restreinte. En d'autres termes, G est γ_r^--dot-critique si pour tout couple de sommets adjacents u, v de G on a $\gamma_r(G_{uv}) < \gamma_r(G)$.*

La Théorème 3.2.1 montre que la contraction d'une arête peut diminuer le nombre de domination restreinte. Pour l'existence de la famille des graphes γ_r^--dot-critiques, il suffit de considérer la chaîne P_3 qui possède un nombre de domination restreinte égal à 3 et la contraction de l'une de ses arêtes produit une chaîne P_2 dont le nombre de domination restreinte est égal à 2. On peut aussi considérer le cycle C_5.

Maintenant, nous donnons certaines propriétés des graphes γ_r^--dot-critiques. Et puis nous caractérisons quelques classes simples de graphes de cette famille, à savoir les chaînes P_n , les cycles C_n et les étoiles.

Proposition 3.2.5 *Soit G un graphe tel que $\gamma_r(G) = |V(G)|$. Alors G est un graphe γ_r^--dot-critique.*

Preuve. Puisque $\gamma_r(G) = |V(G)| = n$ et la contraction de n'importe quelle arête $xy \in E(G)$ produit un graphe G_{xy} d'ordre $n-1$, $\gamma_r(G_{xy}) \leq n-1 = \gamma_r(G) - 1$. Par conséquent, G est un graphe γ_r^--dot-critique. ■

Puisque tous les sommets d'une étoile doivent appartenir à tout γ_r-ensemble, le corollaire suivant est conséquence directe de la Proposition 3.2.5.

Corollaire 3.2.1 *Si G est une étoile d'ordre $n \geq 2$, alors G est γ_r^--dot-critique.*

Proposition 3.2.6 *Une chaîne P_n avec $n \geq 4$ est γ_r^--dot-critique si et seulement si $n \equiv 0, 2\,[3]$.*

Preuve. Pour la nécessité, d'après la Proposition 3.2.3, toute chaîne P_n d'ordre $n \equiv 1[3]$, est γ_r^+-dot-critique donc n'est pas γ_r^--dot-critique. Maintenant, montrons qu'une chaîne P_n avec $n \equiv 0[3]$ ($n \equiv 2[3]$, respectivement) est γ_r^--dot-critique. Comme $\gamma_r(P_n) = \frac{n}{3} + 2$ ($\gamma_r(P_n) = \frac{n+4}{3}$, respectivement) et que la contraction de n'importe quelle arête produit une chaîne P_{n-1} qui possède un nombre de domination restreinte $\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{n-1+4}{3} = \frac{n+3}{3} > \gamma_r(P_n)$ ($\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{n-1+2}{3} = \frac{n+1}{3} > \gamma_r(P_n)$, respectivement), d'où P_n est γ_r^--dot-critique. ■

Proposition 3.2.7 *Un cycle C_n d'ordre $n \geq 4$ est γ_r^--dot-critique si et seulement si $n \equiv 1, 2\,[3]$.*

Preuve. Pour la condition nécessaire, en considérant la contraposée, on montre qu'un cycle C_n avec $n \equiv 0[3]$ n'est pas γ_r^--dot-critique. D'après la Proposition 3.2.4, il est montré que tout cycle C_n d'ordre $n \equiv 0[3]$ est γ_r^+-dot-critique. Maintenant, si $n \equiv 1\,[3]$ ($n \equiv 2\,[3]$, respectivement), alors on peut montrer en utilisant le fait que $\gamma_r(C_n) = \frac{n+2}{3}$ ($\gamma_r(C_n) = \frac{n+4}{3}$, respectivement) que C_n est γ_r^--dot-critique. ■

3.2.3 Graphes γ_r-dot-stables.

Nous nous interessons à présent aux graphs dont la contraction de n'importe quelle arête laisse le nombre de domination restreinte inchangé. commençons par définir cette famille de graphes.

Définition 3.2.3 *Un graphe non vide $G = (V, E)$ d'ordre $n \geq 2$ est dit γ_r-dot-stable si la contraction de n'importe quelle arête $e = uv \in E(G)$ laisse son nombre domination restreinte inchangé, c'est-à-dire $\gamma_r(G_{uv}) = \gamma_r(G)$.*

Définition 3.2.4 *Une arête d'un graphe G est dite dot-stable si sa contraction n'a aucune influence sur le nombre de domination restreinte de G.*

Donc définir un graphe γ_r-dot-stable revient à dire que toutes ses arêtes sont dot-stables.

Pour montrer l'existence de la famille des graphes γ_r-dot-stables, nous pouvons considérer le graphe complet K_4 qui possède un nombre de domination restreinte égal à 1 et la contraction de n'importe quelle arête donne un graphe complet d'ordre 3 ayant le même nombre de domination restreinte.

Nous avons vu auparavant que la contraction d'une arête pendante incidente à un support fort diminue le nombre de domination restreinte. Nous pouvons donc donner la remarque suivante:

Remarque 3.2.3 *Un graphe γ_r-dot-stable ne contient aucun support fort.*

Nous allons montrer que dans un graphe G γ_r-dot-stable, tous les supports n'appartiennent à aucun $\gamma_r(G)$-ensemble.

Définition 3.2.5 *On dit qu'un sommet d'un graphe G est libre s'il n'appartient à aucun $\gamma_r(G)$-ensemble.*

Proposition 3.2.8 *Si G est un graphe γ_r-dot stable, alors tous les supports de G sont libres.*

Preuve. Puisque G est un graphe γ_r-dot stable, tous ses supports sont faibles. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un support v non libre adjacent à un sommet pendant u. Soit S un $\gamma_r(G)$-ensemble qui contient v. Puisque $u, v \in S$, il est clair que $(S - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}$ est un EDR de G_{vu}, d'où $\gamma_r(G_{vu}) \leq |S - \{u\}| = \gamma_r(G) - 1$. Par conséquent, G n'est pas γ_r-dot stable, une contradiction. ■

Définition 3.2.6 *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. On dit que G est k-γ_r-dot-stable s'il est γ_r-dot-stable et $\gamma_r(G) = k$.*

Sachant qu'un graphe possède un nombre de domination restreinte égal à 1 si et seulement si c'est un graphe complet K_n avec $n \geq 3$, on a le résultat suivant.

Proposition 3.2.9 *Si G est un graphe complet K_n avec $n \geq 4$, alors G est 1-γ_r-dot-stable.*

Preuve. Supposons que G est un graphe complet K_n avec $(n \geq 4)$ et $e = xy$ une arête de G. Alors $\gamma_r(G_{xy}) = \gamma_r(G) = 1$, pour toute $e = xy \in E(G)$, donc G est 1-γ_r-dot-stable. ■

Les Chenilles γ_r-dot-stables

Une chenille T_c est un arbre non trivial dont la supression de ses sommets pendants donne une chaîne $P_s = v_1, v_2, ..., v_s$ appelée le squelette de la chenille tel que chaque sommet de T_c est ou bien sur la chaîne ou bien adjacent à un sommet de la chaîne P_s. Le code d'une chenille T_c est $c(T_c) = (t_1, t_2, ..., t_s)$ où t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à v_i. Il est à noter que $t_1 \neq 0$ et $t_s \neq 0$. (Voir la figure 3.2.4).

Pour l'étude sur les chenilles, nous considérons **les chaînes séparatrices,** qui se situent entre deux supports consécutifs, c'est-à-dire celles constituées par les sommets v_i ayant un $t_i = 0$ et notons par z_i le nombre de sommets qui constituent une chaîne séparatrice C_i. Par exemple, dans une chenilles T_c de la figure 3.2.4 , $C_1 = v_2$ avec $z_1 = 1$, $C_2 = v_4$ acec $z_2 = 1$ et $C_3 = v_6, v_7, v_8$ avec $z_3 = 3$.

Aussi, dans une chenille T_c, une **chaîne séparatrice augmentée (CSA)** est une chaîne séparatrice à laquelle on ajoute les deux supports qu'elle relie ainsi qu'un sommet pendant de chacun de ces derniers.

Exemple 3.2.1 *Dans l'exemple de la figure 3.2.4 , on a une chenille T_c avec $c(T_c) = (3, 0, 2, 0, 4, 0, 0, 0, 1)$.*

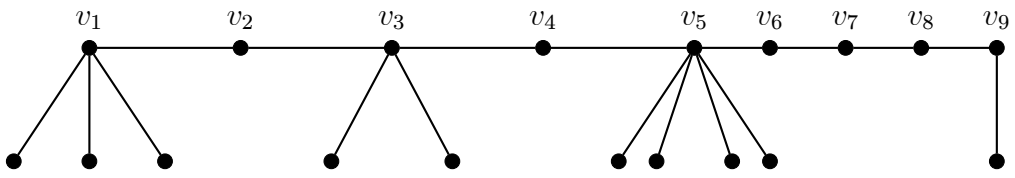


Figure 3.2.4 : Une chenille T_c avec $c(T_c) = (3, 0, 2, 0, 4, 0, 0, 0, 1)$.

Pour l'étude des chenilles γ_r-dot stables, nous aurons besoin de quelques résultats et remarques.

Proposition 3.2.10 *Si T_c est une chenille γ_r-dot stable, alors ne contient aucun support ayant un voisin (autre que son sommet pendant) qui n'est pas libre.*

Preuve. Soient T_c est une chenille γ_r-dot stable et u un sommet pendant adjacent à un support v possèdant un autre voisin w. D'après la Proposition 3.2.8,v est libre dans T_c. Supposons que w est non libre. Soit S est un $\gamma_r(T_c)$-ensemble tel que $w \in S$. Puisque $u, w \in S$, alors il est facile de voir que $(S-\{u\})$ est un EDR de $(T_c)_{uv}$, donc $\gamma_r(T_c)_{uv} \leq |S - \{u\}| = \gamma_r(T_c) - 1$. Contradiction avec le fat que T_c est γ_r-dot stable. ■

Proposition 3.2.11 *Soit G un graphe et x un support de G adjacent à un sommet pendant y. Alors $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) + 1$.*

Preuve. Soit S un $\gamma_r(G)$-ensemble. Si x est un support fort, alors l'ensemble $S - \{y\}$ est un EDR de G_{xy} et donc $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) - 1$. Supposons maintenant que x est faible. Si $x \in S$, alors l'ensemble $(S - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un EDR de G_{xy}, d'où $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) - 1$. On considère à présent le cas où $x \notin S$ et on traite les deux cas suivants:

Cas 1: $d(x) = 2$. Soit z l'autre voisin de x. Si z est isolé dans $(V - S) - \{x\}$, alors l'ensemble $(S - \{y\}) \cup \{\overline{xy}, z\}$ est un EDR de G_{xy} et donc $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) + 1$. Sinon ($z$ possède au moins un autre voisin dans $V - S$), alors $(S - \{y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un EDR de G_{xy} et donc $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G)$.

Cas 2: $d(x) \geq 3$. S'il existe au moins un voisin de x qui est isolé dans $(V - S) - \{x\}$, alors $(S - \{y\}) \cup \{w\}$ est un EDR de G_{xy} et donc $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G)$. Sinon, il est clair que l'ensemble $(S - \{y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un EDR de G_{xy}, d'où $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G)$.

De tous les cas précédents, on conclut que $\gamma_r(G_{xy}) \leq \gamma_r(G) + 1$. ■

Remarque 3.2.4 *Une chaîne P_n avec $n \geq 4$ possède un γ_r-ensemble unique si et seulement si $n \equiv 1[3]$.*

Remarque 3.2.5 *Les supports et leurs voisins non pendants d'une chaîne P_n d'ordre $n \geq 4$ avec $n \equiv 1[3]$ sont tous libres.*

Il est clair que les CSA d'une chenille T_c qui contient uniquement des CS d'ordre $n \equiv 0[3]$ et des supports faibles sont d'ordre $n + 4 \equiv 1[3]$ et peuvent être considérées comme des chaînes indépendantes.

Remarque 3.2.6 *Si T_c est une chenille telle que ses chaînes séparatrices sont d'ordre $n \equiv 0[3]$, alors*

- *T_c possède un γ_r-ensemble unique composé des sommets pendants et des sommets des chaînes séparatrices qui sont à distance $d \equiv 2[3]$ de leurs supports.*
- *Tous les supports et tous leurs voisins non pendants sont libres.*

Proposition 3.2.12 *Si T_c est une chenille γ_r-dot stable, alors toutes ses chaînes séparatrices sont d'ordre $n \equiv 0[3]$ et tous ses supports sont faibles.*

Preuve. Utilisons la contraposée et montrons que si une chenille contient une chaîne séparatrice $C = v_1, v_2, ..., v_k$ d'ordre $k \equiv 1$ ou $2[3]$ ou au moins un support est fort, alors elle n'est pas γ_r-dot stable. Si T_c contient un support est fort, alors d'après la Remarque 3.2.3 T_c n'est pas γ_r-dot stable. Maintenant si T_c contient une chaîne séparatrice C d'ordre $k \equiv 1[3]$, alors il clair que l'un des deux supports incidents à C n'est pas libre, donc d'après la Proposition 3.2.8 T_c n'est pas γ_r-dot stable. Maintenant si T_c contient une chaîne séparatrice C d'ordre $k \equiv 2[3]$, alors il facile de voir que l'un des deux supports incidents à C possède un voisin d'un sommet nons libre de T_c, d'où d'après la Proposition 3.2.10 T_c n'est pas γ_r-dot stable. ■

Nous pensons qu'une chenille ayant toutes ses chaînes séparatrices sont d'ordre $n \equiv 0[3]$ et tous ses supports sont faibles est forcément γ_r-dot stable.

Conjecture 3.2.1 *Une chenille T_c est chenille γ_r-dot stable si et seulement si toutes ses chaînes séparatrices sont d'ordre $n \equiv 0[3]$ et tous ses supports sont faibles.*

3.3 Graphes critiques et stables par rapport à la suppression d'un sommet

On s'intéresse dans cette partie aux graphes critiques et stables toujours par rapport à la domination restreinte mais cette fois l'opération considérée est la suppression d'un sommet. Commençons par étudier l'effet de la suppression d'un sommet quelconque sur le nombre de domination restreinte d'un graphe.

Théorème 3.3.1 *Soit G un graphe de degré maximum $\Delta(G)$ et v un sommet de G. Alors $\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G - v) \leq \gamma_r(G) + \Delta(G)d(v) - 1$.*

Preuve. Nous commençons d'abord par montrer la borne inférieure. Soit D un $\gamma_r(G-v)$-ensemble. Si D est un EDR de G, alors $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G-v)$. Sinon l'ensemble $D \cup \{v\}$ est un dominant restreint de G, d'où $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G-v)+1$. par conséquent, on $\gamma_r(G-v) \geq \gamma_r(G)-1$.

Pour montrer la borne superieure, considérons un $\gamma_r(G)$-ensemble S et examinons les deux cas suivants.

cas 1. $v \notin S$. Soit $M = \{v_i : \ 1 \leq i \leq p\}$ avec $p \leq d(v)-1$ l'ensemble des voisins de v qui ne possèdent aucun voisin dans $V-S$ autre que v (p est au plus égal à $d(v)-1$ puisque v est dominé par au moins un sommet). L'ensemble $S_1 = S \cup M$ est un EDR de $G-v$, et donc $\gamma_r(G-v) \leq \gamma_r(G)+d(v)-1$.

cas 2. $v \in S$. Notons $pn[v,S] = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ avec $k \leq d(v)+1$ l'ensemble des voisins privés de v par rapport à S. Soit $X = \left\{x_i : x_i \in \underset{i}{\cup} N(v_i) \text{ et } x_i \text{ est isolé dans } (V-S)-pn[v,S]\right\}$. Puisque tout sommet v_i est voisin de v et possède au plus $\Delta(G)-1$ autres voisins, $|X| \leq (\Delta(G)-1)d(v)$. Donc l'ensemble $S_2 = (S-\{v\}) \cup (pn[v,S]-\{v\}) \cup X$ est un ensemble dominant restreint de $G-v$ tel que $|S_2| \leq \gamma_r(G)-1+d(v)+1-1+(\Delta(G)-1)d(v) = \gamma_r(G)+\Delta(G)d(v)-1$. Par conséquent, $\gamma_r(G-v) \leq |S_2| \leq \gamma_r(G)+\Delta(G)d(v)-1$.

Des deux cas précédents, on a $\gamma_r(G-v) \leq \gamma_r(G)+\Delta(G)d(v)-1$. Nous concluons que $\gamma_r(G)-1 \leq \gamma_r(G-v) \leq \gamma_r(G)+\Delta(G)d(v)-1$. ■

Les deux bornes du théorème sont atteintes. Pour la borne inférieure, il suffit de supprimer un sommet pendant d'une étoile pour voir son nombre de domination restreinte diminuer d'une unité. La borne supérieure est atteinte si on supprime le sommet v_4 de la chaîne $P_7 = v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7$. Sachant que $\gamma_r(P_7) = 3$, on peut voir que $\gamma_r(P_7-v_4) = 6 = 3+d(v_4)\Delta(P_7)-1 = 3+2.2-1$.

On a vu que la suppression d'un sommet peut augmenter, diminuer et laisser stable le nombre de domination restreinte. Dans ce qui suit, nous allons étudier l'existence des familles de graphes critiques et stables et montrer quelques propriétés.

3.3.1 Graphes γ_r^+-sommet-critiques

Définition 3.3.1 *Un graphe G est dit γ_r^+-sommet-critique si la suppression de n'importe quel sommet augmente le nombre de domination restreinte de G.*

Définition 3.3.2 *On dit qu'un sommet d'un graphe G est critique si sa suppression augmente le nombre de domination restreinte de G.*

Afin de prouver l'existence des graphes γ_r^+-sommet-critiques, prenons une chaîne P_4 qui possède un nombre de domination restreinte égal à 2. La suppression d'un sommet pendant produit une chaîne P_3 dont le nombre de domination restreinte est égal à 3. Aussi, la suppression d'un support donne un graphe formé d'un sommet isolé et une chaîne P_2 et donc un nombre de domination restreinte égal à 3. Ainsi la suppression de n'importe quel sommet augmente γ_r, d'où l'existence des graphes γ_r^+-sommet-critiques.

Remarque 3.3.1 *Si v est un support fort d'un graphe G, alors la suppression de n'importe quel sommet pendant adjacent à v diminue $\gamma_r(G)$.*

Remarque 3.3.2 *Si G est un graphe γ_r^+-sommet-critique, alors G ne contient aucun support fort.*

Proposition 3.3.1 *Un cycle C_n tel que $n \geq 3$ est γ_r^+-sommet-critique si et seulement si $n \equiv 0, 1[3]$.*

Preuve. Afin de montrer la condition nécessaire, nous utilisons la contraposée. et on montre qu'un cycle C_n avec $n \equiv 2[3]$ n'est pas γ_r^+-sommet-critique. Puisque $\gamma_r(C_n) = \frac{n+4}{3}$ et que la suppression de n'importe quel sommet produit une chaîne P_{n-1} qui possède un nombre de domination restreinte $\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{(n-1)+2}{3} = \frac{n+1}{3} < \frac{n+4}{3} = \gamma_r(C_n)$, d'où C_n n'est pas γ_r^+-sommet-critique. Montrons maintenant qu'un cycle C_n avec $n \equiv 0[3]$ ($n \equiv 1[3]$, respectivement) est γ_r^+-sommet-critique. Puisque $\gamma_r(C_n) = \frac{n}{3}$ ($\frac{n+2}{3}$, respectivement) et que la suppression de n'importe quel sommet produit une chaîne P_{n-1} qui possède un nombre de domination restreinte $\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{(n-1)+4}{3} = \frac{n+3}{3} > \frac{n}{3} = \gamma_r(C_n)$ ($\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{(n-1)+6}{3} = \frac{n+5}{3} > \frac{n+2}{3} = \gamma_r(C_n)$, respectivement), d'où C_n est γ_r^+-sommet-critique. ■

Nous prouvons à présent un résultat que nous allons utiliser pour la caractérisation des chaînes γ_r^+-sommet-critiques.

Proposition 3.3.2 *Si C est une chaîne obtenue en attachant une chaîne $P_3 = x, y, z$ à un sommet pendant v d'une chaîne C' par l'arête vx, alors $\gamma_r(C) = \gamma_r(C') + 1$.*

Preuve. Soit S est un $\gamma_r(C')$-ensemble. Il est évident que $S \cup \{z\}$ est un EDR de C, d'où $\gamma_r(C) \leq |S \cup \{z\}| = \gamma_r(C') + 1$.

Soit maintenant D un $\gamma_r(C)$-ensemble. Supposons que $C = v_1, v_2, ..., v_k, x, y, z$ et considérons les cas suivants:

Cas 1. Si $x, y \notin D$, alors il est clair que $D - \{z\}$ est un EDR de C', d'où $\gamma_r(C') \leq |D - \{z\}| = \gamma_r(C) - 1$.

Cas 2. Si $x \notin D$ et $y \in D$, alors $v_k \notin D$ et donc $D - \{z, y\} \cup \{v_k\}$ est un EDR de C', d'où $\gamma_r(C') \leq |(D - \{z, y\}) \cup \{v_k\}| = \gamma_r(C) - 1$.

Cas 2. Si $x, y, z \in D$, alors $v_k, v_{k-1} \notin D$ et il est clair que $D - \{z, y, z\} \cup \{v_k, v_{k-1}\}$ est un EDR de C', d'où $\gamma_r(C') \leq |(D - \{z, y, z\}) \cup \{v_k, v_{k-1}\}| = \gamma_r(C) - 1$.

D'après tous les cas considérés, on déduit que $\gamma_r(C) \leq \gamma_r(C') + 1$. Par conséquent , $\gamma_r(C) = \gamma_r(C') + 1$. ■

Proposition 3.3.3 *Une chaîne P_n avec $n \geq 4$ est γ_r^+-sommet-critique si et seulement si $n \equiv 1[3]$.*

Preuve. Pour montrer la condition nécessaire, on montre que si $n \equiv 0$ ou $2[3]$, alors P_n n'est pas γ_r^+-sommet-critique. Si $n \equiv 0[3]$, alors il est clair que la suppresion de sommet pendant produit une chaîne P_{n-1} qui possède un nombre de domination restreinte $\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{(n-1)+4}{3} = \frac{n+3}{3} < \frac{n+6}{3} = \gamma_r(P_n)$. Si $n \equiv 2[3]$ alors la suppresion de sommet pendant produit une chaîne P_{n-1} avec $\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{(n-1)+2}{3} = \frac{n+1}{3} < \frac{n+4}{3} = \gamma_r(P_n)$, et donc P_n n'est pas γ_r^+-sommet-critique.

Pour la suffisance, nous utilisons la récurrence sur l'entier k pour montrer qu'une chaîne P_{3k+1} avec $k \in \mathbb{N}^*$ est γ_r^+-sommet-critique.

Pour $k = 1$, on a la chaîne P_4 dont la suppression de n'importe quel sommet augmente le nombre de domination restreinte, donc P_4 est γ_r^+-sommet-critique. Supposons que la propriété est vérifiée pour k et prouvons qu'elle l'est pour $k + 1$. On doit prouver que la chaîne $C = P_{3k+4}$, qui peut être obtenue de $C' = P_{3k+1}$ en attachant une chaîne P_3, est γ_r^+-sommet-critique sous hypothèse que $C' = P_{3k+1}$ est γ_r^+-sommet-critique.

Supposons que $C' = v_1, v_2, ..., v_{3k+1}$. Puisque C' est γ_r^+-sommet-critique, $\gamma_r(C' - v_i) > \gamma_r(C')$ pour $1 \leq i \leq 3k+1$. Notons aussi que d'après la Proposition 3.3.2, $\gamma_r(C) = \gamma_r(C')+1$. Montrons maintenant que tous les sommets de C sont critiques et examinons les six cas suivant.

Cas 1. Le sommet v_1. Il est simple de voir que $\gamma_r(C-v_1) = \gamma_r(C'-v_1)+1 > \gamma_r(C')+1 = \gamma_r(C)$.

Cas 2. Les sommets $v_2, v_3, ..., v_{3k}$. La suppression de v_i pour $2 \leq i \leq 3k$ de C' produit deux chaînes $C'_1 = v_1, v_2, ..., v_{i-1}$ et $C'_2 = v_{i+1}, ..., v_{3k+1}$. D'après l'hypothèse d'induction, on a $\gamma_r(C' - v_i) > \gamma_r(C')$ et puisque C' produit les deux chaînes C'_1 et C'_2, alors $\gamma_r(C'_1) + \gamma_r(C'_2) > \gamma_r(C')$. Et d'autre part $\gamma_r(C - v_i) = \gamma_r(C' - v_i) + 1$, ce qui veux dire que $\gamma_r(C - v_i) = \gamma_r(C'_1) + \gamma_r(C'_2) + 1$.

Puique $\gamma_r(C'_1)+\gamma_r(C'_1) > \gamma_r(C')$ alors $\gamma_r(C'_1)+\gamma_r(C'_1)+1 > \gamma_r(C')+1$, d'où $\gamma_r(C-v_1) > \gamma_r(C)$.

Cas 3. Le sommet v_{3k+1}. Nous avons, D'après la Proposition 3.2.2, $\gamma_r(C' - v_{3k+1}) = \gamma_r(C') + 1$ et aussi $\gamma_r(C - v_{3k+1}) = \gamma_r(C' - v_{3k+1}) + 3 = (\gamma_r(C') + 1) + 3$, et comme $\gamma_r(C) = \gamma_r(C') + 1$ alors $\gamma_r(C - v_{3k+1}) = \gamma_r(C) + 3$, donc $\gamma_r(C - v_{3k+1}) > \gamma_r(C)$.

Cas 4. Le sommet v_{3k+2}. On a $\gamma_r(C - v_{3k+2}) = \gamma_r(C') + 2 = (\gamma_r(C') + 1) + 1$, donc $\gamma_r(C - v_{3k+2}) = \gamma_r(C) + 1 > \gamma_r(C)$.

Cas 5. Le sommet v_{3k+3}. On a $\gamma_r(C-v_{3k+3}) = \gamma_r(C')+1+1$. Donc $\gamma_r(C-v_{3k+3}) > \gamma_r(C)$.

Cas 6. Le sommet v_{3k+4}. D'après la Proposition 3.2.2, on a $\gamma_r(C - v_{3k+4}) = \gamma_r(C) + 1$, d'où $\gamma_r(C - v_{3k+3}) > \gamma_r(C)$.

D'après tous les cas considérés, on déduit que tous les sommets de C sont critiques. ■

3.3.2 Graphes γ_r-sommet-critiques

Définition 3.3.3 *Un graphe G est dit γ_r-sommet-critique si la suppression de n'importe quel sommet diminue le nombre de domination restreinte de G.*

Pour juger de l'existence des graphes γ_r-sommet-critiques, il suffit de prendre une chaîne P_3 dont le nombre de domination restreinte est 3 et la suppression de n'importe lequel de ses sommets donne un graphe dont γ_r est 2.

Proposition 3.3.4 *Si G est un graphe γ_r-sommet-critique, alors tous les supports de G sont non libres.*

Preuve. Supposons que v est un support libre de G. Puisque G est γ_r^--sommet-critique, $\gamma_r(G-v) = \gamma_r(G)-1$. Soit D un $\gamma_r(G-v)$-ensemble. Il est clair que $D \cup \{v\}$ est un EDR de G de cardinal $\gamma_r(G-v)+1$ c'est donc un $\gamma_r(G)$-ensemble qui contient v, une contradiction avec le fait que v est libre dans G. ■

Remarque 3.3.3 *Toutes les étoiles d'ordre $n \geq 2$ sont γ_r-sommet-critiques.*

Proposition 3.3.5 *Un cycle C_n tel que $n \geq 3$ est γ_r-sommet-critique si et seulement si $n \equiv 2[3]$.*

Preuve. Utilisons la contraposée pour montrer la condition nécessaire. Montrons qu'un cycle C_n avec $n \equiv 0, 1[3]$ n'est pas γ_r-sommet-critique. D'après la Proposition 3.3.1, nous avons montré que tout cycle C_n avec $n \equiv 0, 1[3]$ est γ_r^+-sommet-critique, d'où C_n n'est pas γ_r-sommet-critique. Maintenant montrons qu'un cycle C_n avec $n \equiv 2[3]$ est γ_r-sommet-critique. Comme $\gamma_r(C_n) = \frac{n+4}{3}$ et que la suppression de n'importe quel sommet produit une chaîne P_{n-1} qui possède un nombre de domination restreinte $\gamma_r(P_{n-1}) = \frac{(n-1)+2}{3} = \frac{n+1}{3} < \frac{n+4}{3} = \gamma_r(C_n)$, donc C_n est γ_r-sommet-critique. ■

3.3.3 Graphes γ_r-sommet-stables

Définition 3.3.4 *Un graphe G est dit γ_r-sommet-stable si la suppression de n'importe quel sommet laisse le nombre de domination restreinte de G inchangé.*

Le gaphe complet K_5 dont le nombre de domination restreinte est 1 est un exemple de graphes γ_r-sommet-stables, puisque la suppression de n'importe quel sommet produit un graphe complet d'ordre 4 ayant aussi un nombre de domination restreinte égal à 1.

D'après la Remarque 3.3.1, un graphe γ_r-sommet-stable ne peut pas contenir un support fort.

Remarque 3.3.4 *Si G est un graphe γ_r-sommet-stable, alors tous ses supports sont faibles.*

Proposition 3.3.6 *Si G est un graphe γ_r-sommet-stable, alors tous ses supports sont libres.*

Preuve. Supposons que v est un support non libre de G et soit D un $\gamma_r(G)$-ensemble qui contient v et u un sommet pendant adjacent à v. Il est clair que $D - \{u\}$ est un EDR de $G - \{u\}$, et donc $\gamma_r(G - v) \leq \gamma_r(G) - 1$, une contradiction avec le fait que G est un graphe γ_r-sommet-stable. ■

Définition 3.3.5 *Un graphe G est 1-γ_r-sommet-stable s'il est γ_r-sommet-stable et $\gamma_r(G) = 1$.*

Proposition 3.3.7 *Si G est un graphe complet K_n avec $n \geq 4$, alors G est 1-γ_r-sommet-stable.*

Preuve. Les mêmes arguments utilisés pour montrer la Proposition 3.2.9 peuvent être utilisés ici. ■

Conclusion

Pour de nombreuses applications comme la conception des réseaux, la criticité et la stabilité d'un graphe par rapport à un paramètre de domination est un problème important. Aussi, du point de vue théorique, l'étude de ces concepts s'est révélée d'un grand intérêt puisqu'elle permet de mieux connaître les propriétés structurelles des graphes considérés.

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de la domination restreinte dans les graphes, en particulier ceux qui sont critiques et stables. Une revue des résultats les plus importants obtenus dans ce domaine a été notre premier objectif, avant de tenter d'apporter quelques modestes contributions.

Ces contributions concernent en premier lieu l'opération de contraction d'une arête (ou l'identiffcation de deux sommets adjacents). Nous avons prouver l'existence des familles de graphes dont le nombre de domination restreinte augmente, diminue ou reste stable si n'importe quelle arête est contractée. Nous avons pu montrer quelques propriétés et caractériser quelques classes simples de graphes.

En second lieu, Nous avons considéré une autre opération qui est la suppression d'un sommet. Nous avons commencé par étudier l'effet de la suppression d'un sommet sur le nombre de domination restreinte d'un graphe. Nous avons pu prouver plusieures propriétés et montrer la criticité et la stabilité de quelques classes simples de graphes.

Bibliographie

[1] Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae Vol 8 (1736), 128–140.

[2] O. Ore, "theory of graphs, Amer", Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[3] Cockayne et S.T. Hedetniemi, "Towards a theory of domination in graphs", Networks 7 (1977), 247–261.

[4] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, "Fundamentals of Domination in Graphs", Marcel Dekker, New York, 1998.

[5] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, et P. J. Slater, "Domination in Graphs: Advanced Topics", Marcel Dekker, New York, 1998.

[6] T Gallai. Über extreme Punkt-und Kantenmengen. Ann . Univ. Sci. Budapest, Eotvos Sect. Math., 2:133–138, 1959.

[7] De jaenisch C. F., "Applications de l'analyse mathématiques au jeu d'échecs", Petrograd, 1962.

[8] W.W. Ball Rouse, "Mathematical recreation and problem of past and present times", Mac Millan, London, 1892.

[9] A.M. Yaglom et A.M. Yaglom, "Challenging mathematical problems with elementary solution, Combinatorial analyses and probability theory", San Franciscov, volume 1, 1964.

[10] C. Berge, "Theory of Graphs and its Applications", Methuen, London, 1962.

[11] T.W. Haynes, D. Knisley, E. Seier et Y. Zou, "A quantitative analysis of secondary RNA structure using domination based parameters on trees", BMC Bioinformatics 7, (2006), 108.

[12] L. Kelleher et M. Cozzens, "Dominating Sets in Social Network Graphs", Mathematical Social Sciences 16 (3), (1988), 267-279.

[13] H.B. Walikar, B.D. Acharya et E. Sampathkumar. "Recent develepments in the theory of domination in graphs", In MRI Lecture Notes in Math., Mahta Reseearch Instit., Allahabad volume 1, 1979.

[14] C. Payan et N.H. Xuong, "Domination-balanced graphs", J. Graph Theory, 6:23–32,1982.

[15] J.F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, et J. "Roberts. The bondage number of a graph", Discrete Math., 86:47–57, 1990.

[16] G. S. Domkee J. E. Dumbar et L. R. "Markus, Gallai-type theorems and domination parameters", Discrete, Matimatics 167/168 (1997) 237-248.

[17] F. Jaeger et C. Payan. "Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombred'absorption d'un graphe simple", C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 274 (1972) 728-730.

[18] R Laskar et K Peters. "Vertexand edge domination parameters in graphs", Congr. Numer., 48:291–305, 1985.

[19] J.P. Joseph et S. Arumugam, "Domination in graphs", Internat. J. Management Systems 11 (1995) 177–182.

[20] G. S. Domke, J. H. Hattingh, S. T. Hedetniemi, R C. Laskar et L. R. Markus, "Restrained domination in graph", Discrete, Matimatics 203 (1999) 61-69.

[21] D. K. Thakkar et D. D. Pandya, "CRITICAL GRAPHS IN RESTRAINED DOMINATION", Vol. 3, Issue 4, Oct 2013,87-94.

[22] G. S. Domke, J. H. Hattingh, M. A Henning et L. R. Markus, "Restrained domination in graphs with minimum degree two", J. Combin. Math. Combin. Comput. 35, 239–254 (2000).

[23] J H. Hattingh et E. J. Joubert, "Restrained Domination in Claw-Free Graphs with Minimum Degree at Least Two", Graphs and Combinatorics (2009) 25:693–706.

[24] P. Dankelmann, J H. Hattingh, M A. Henning et H. C. Swart, "Trees with Equal Domination and Restrained Domination numbers", Journal of Global Optimization (2006) 34: 597–607.

[25] G S. Domke, J H. Hattingh, M A. Henningb et L. R. Markus, "Restrained domination in trees", Discrete Mathematics 211 (2000) 1-9.

[26] J. H. Hattingh et E.J. Joubert, "Restrained domination in cubic graphs", J Comb Optim (2011) 22:166–179.

[27] B. Samadi, H. R. Golmohammadi et A. Khodkar, "BOUNDS ON SEVERAL VERSIONS OF RESTRAINED DOMINATION NUMBERS", Volume 12, Number 1, Pages 14-19, ISSN 1715-0868.

[28] J.H. Hattingh, E. Jonck, E.J. Joubert, et A.R. Plummer, Total restrained domination in trees, Discrete Math. 307 (2007), 1643-1650.

[29] H. B. Walikar et B. D. Acharya, "Domination critical graphs", Nat. Acad. Sci. Lett. 2, 70–72, 1979.

[30] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen et C. L. Suffel, "Domination alteration sets in graphs", Discrete Math. 47, 153–161, 1983.

[31] D. P. Sumner et P. Blitch, "Domination critical graphs", J. Combin. Theory Ser. B 34, 65-76, 1983.