الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة المدية
كلية العلوم
قسم علوم المادة



مذكرة

من أجل الحصول على شهادة ماستر في الفيزياء
تخصص: فيزياء نظرية

ريحة برّحال

تحضير و خصائص الحالات الكمومية غير الغاوسية ذات المتغيرات المستمرة

26 جوان 2023

أعضاء لجنة المناقشة :

د. عثمان شرود	أستاذ محاضر قسم ب	جامعة المدية	رئيس اللجنة
د. محمد احمد عمار	أستاذ محاضر قسم أ	جامعة المدية	ممتحن
د. أسامة حوحو	أستاذ محاضر قسم أ	جامعة المدية	مشرف

السنة الجامعية 2022-2023

ملخص

يتم توليد بعض الحالات الكمومية غير الغاوسية في أنظمة فيزيائية ذات متغيرات مستمرة. بالإضافة إلى ذلك، يتم دراسة بعض الخصائص المرتبطة بها. تحديدًا، يتم حساب توزيعة فِغنر ومعامل النقاوة، ويتم قياس السالبية. بعد ذلك، يتم التحقق من صحة النتائج ومطابقتها للتوقعات النظرية المتعلقة بتلك الحالات الكمومية غير الغاوسية.

الكلمات المفتاحية: النظام الكمي المفتوح، الحالات غير الغاوسية، سالبية دالة فِغنر، الموثوقية، النقاوة.

Abstract

Non-Gaussian quantum states are generated in physical systems with continuous variables. Furthermore, the associated properties are studied. Specfiically, the Wigner distribution, the purity and negativity are calculated. Subsequently, the results are verfiied for their accuracy and compared to the expected theoretical results for these non-Gaussian quantum states.

Keywords: Open quantum system, non-Gaussian states, Wigner function negativity, fidelity, purity.

تصريح المؤلف

أقر بأنني أنا المؤلفة الوحيدة لهذه المذكرة. وأن هذه النسخة المقدمة هي النسخة النهائية بما في ذلك أي تعديلات نهائية مطلوبة، وفقًا لملاحظات و اقتراحات لجنة المناقشة.

إهداء

إلى من أبصرت بها طريق حياتي وإستمديت منها قوتي وإعتزازي بذاتي إلى نور عيني وضوء دربي ومهجة حياتي أمي. إلى من شرفني بحمل إسمه من بذل الغالي والنفيس في سبيل وصولي إلى درجة علمية عالية أبي الغالي. إلى السند والعضد إخوتي وأخواتي، أهدي لكم ثمرة جهدي المتواضع.

كما أهدي هذه المذكرة أيضا إلى كل العائلة الكريمة كاملة و كل صديقاتي و زملائي.

شكر و عرفان

أود أن أعبر عن إمتناني العميق للأستاذ المشرف على هذه المذكرة، الدكتور أسامة حوحو، على دعمه المستمر وإرشاداته القيمة، و توجيهاته و نصائحه كانت مفيدة للغاية طوال فترة البحث وكتابة هذه المذكرة.

كما أشكر الدكتور عثمان شرود على توليه رئاسة لجنة مناقشة المذكرة وتحسين هذا العمل عن طريق تقديم ملاحظات مهمة. و أشكر أيضا الدكتور محمد أحمد عمار على فحصه وتصحيحه وتقديم تعليقات مفيدة.

كما أود أن أشكر عائلتي: والدي وإخوتي وأخواتي على دعمهم لي طوال فترة إنجاز هذه المذكرة.

تمهيد

تم كتابة هذه المذكرة في إطار التحضير لشهادة الماستر في الفيزياء تخصص الفيزياء النظرية، بكلية العلوم، جامعة المدية، و هذا خلال السنة الجامعية 2022-2023.

نركز في هذه المذكرة بشكل رئيسي على دراسة و تحضير حالات كمومية غير غاوسية لأنظمة فيزيائية ذات متغيرات مستمرة. بعد إيجاد توزيعة فِغنر لهذه الحالات، ندرس بعض خصائصها مثل النقاوة و السالبية. إضافة إلى ذلك، ندرس تأثير المحيط الحراري على هذه الحالات الكمومية غير الغاوسية.

المحتويات

ملخص **iii**

تصريح المؤلف **v**

إهداء **vii**

شكر و عرفان **ix**

تمهيد **xi**

قائمة الأشكال **xvi**

مقدمة **1**

1 مدخل الى ميكانيكا الكم **3**

1.1 المهتز التوافقي الكمومي أحادي البُعد 3

2.1 مؤثر الكثافة 5

1.2.1 الحالة النقية 5

2.2.1 الحالة المختلطة 7

3.2.1 الخصائص العامة لمؤثر الكثافة 7

3.1 معامل النقاوة 8

4.1 الموثوقية 8

5.1 دالة فغنر 8

6.1 الحالاَت الغاوسية 9

7.1 الحالات غير الغاوسية 10

8.1 الانظمة المركبة 10

2 الأنظمة الكمومية المفتوحة **13**

1.2 مفهوم النظام الكمومي المفتوح 13

2.2 المعادلة الرئيسية 14

3.2 الحالة المستقرة 14
4.2 مهتز توافقي متخامد 16
5.2 مهتزان توافقيان يتبادلان الطاقة فيما بينهما 17
6.2 الحالة الحرارية 19

3 تحضير الحالات غير الغاوسية **23**
1.3 نظام مفتوح لمهتزين توافقيين 23
2.3 الحالة الكمية للنظام 24
3.3 الحالة المستقرة للنظام 24
4.3 حالة الطور التكعيبي 27
5.3 الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية 28
6.3 دراسة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية 30
7.3 السالبية 31

4 تأثير المحيط الحراري على الحالات مزاحة ومنضغطة غير الغاوسية **33**
1.4 المعادلة الرئيسية 33
2.4 الموثوقية 34
3.4 معامل النقاوة 35
4.4 دالة فِغنر 36

الخاتمة **41**

ا الطريقة الجبرية **43**

ب حالة الطور التكعيبي **49**

ج برامج المحاكاة المستعملة **53**

د قاموس المصطلحات **63**

قائمة الأشكال

1.1 الرسم البياني لدالة فِغنر لحالة الفراغ $|0\rangle$. في اليمين رسم ثلاثي الأبعاد أما في اليسار فالرسم عبارة عن مناطق ملونة تمثل قيم دالة فِغنر. 9

2.1 الرسم البياني لدالة فِغنر للحالة الكمية $|1\rangle$. 10

1.2 تمثيل لنظام كمومي مفتوح. 13

2.2 رسم توضيحي لنظام كمومي مفتوح مكون من مهتز توافقي يفقد طاقته بمعدل κ. . . 16

3.2 التطور الزمني للموثوقية بين حالة النظام $\hat{\rho}(t)$ و الحالة $|0\rangle$. 17

4.2 نظام كمومي مفتوح مكون من مهتزين توافقيين حيث أحدهما له حركة متخامدةبمعدل κ. 18

5.2 رسم بياني للموثوقية بين الحالة المستقرة $|\psi\rangle$ و $\hat{\rho}_{\rm th}$ بدلالة الزمن. 19

6.2 رسم توضيحي لنظام كمومي مفتوح مكون من مهتز توافقي $\hat{a}$ يكتسب طاقة بمعدل $\gamma n_{\rm th}$ ويفقد طاقة بمعدل $\gamma(n_{\rm th}+1)$. 20

7.2 رسم بياني للموثوقية بين الحالة الحرارية و حالة النظام عند اللحظة t. 21

1.3 نظام كمومي مفتوح مكون من مهتزين توافقيين موصوفين بمؤثري الهدم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ مع فقدان المهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{a}$ طاقة بمعدل κ. 24

2.3 رسم بياني لدالة فِغنر الخاصة بحالة الطور التكعيبي من أجل $r=0$ و $\gamma'=0.8$. . . 28

3.3 الرسم البياني لدالة فِغنر للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية. 31

4.3 رسم بياني لنقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بدلالة الزمن. 31

1.4 رسم توضيحي لمهتزين توافقيين أحدهما متخامد و الآخر في توازن مع محيط حراري. . 34

2.4 الرسم البياني للموثوقية بين الحالة المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية قبل وبعد تأثير المحيط الحراري عليها بدلالة الزمن. المنحنى ذو اللون الأزرق، يمثل تغيرات قيم الموثوقية بدلالة الزمن وذلك عند درجة حرارة $T=6\times10^{-4}K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma=10^{-4}\kappa$. والمنحنى البياني ذو اللون البرتقالي، فيمثل تغيرات قيم الموثوقية بدلالة الزمن وذلك عند درجة حرارة $T=6\times10^{-4}K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma=6\times10^{-4}\kappa$. 35

3.4 الرسم البياني للموثوقية بين $\hat{\rho}_\infty$ و $\hat{\rho}_\infty^{\text{th}}$. 36
4.4 رسم بياني لتغيرات نقاوة الحالات المزاحة و المنضغطة غير الغاوسية قبل وبعد تأثير المحيط الحراري عليها بدلالة الزمن. المنحنى الأزرق يمثل نقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية قبل تأثير المحيط الحراري عليها أما المنحنى البرتقالي فيمثل نقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري عليها. . . 37
5.4 رسم بياني لنقاوة الحالة المستقرة $\hat{\rho}_\infty^{\text{th}}$ بدلالة درجة الحرارة T و معامل التخامد الحراري γ. 38
6.4 الرسم البياني لدالة فِغنر للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري. وذلك عند درجة حرارة ثابتة عند قيمة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 10^{-4} \kappa$. 39
7.4 الرسم البياني لدالة فِغنر للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري. وذلك عند درجة حرارة ثابتة عند قيمة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 6 \times 10^{-4} \kappa$. 39

مقدمة

نظرية الكم هي نظرية أساسية في الفيزياء تصف سلوك المادة والطاقة على المستوى الذري وما دونه، تستند إلى فرضية ماكس بلانك الكمومية التي تم تقديمها في عام 1900. يكمن أساس نظرية الكم في وصفها للجسيمات كموجات متحدية المفاهيم الكلاسيكية لموقع ومسار محددين جيدًا. يقدم لنا مفهوم ازدواجية الجسيم و الموجة حقيقة مثيرة للإهتمام حيث تُظهر الكيانات المجهرية سلوكيات تشبه الجسيمات وتشبه الموجات. هذا المبدأ الأساسي يتحدى تصوراتنا الكلاسيكية ولكنه يوفر إطارًا ملائمًا لشرح الظواهر على النطاق الكمي.

إن الأنظمة الكمومية تمثل وصفاً للأنظمة الفيزيائية على المقياس الدقيق جداً، حيث تنطوي على قوانين وظواهر تختلف عن تلك التي يمكن وصفها بواسطة الميكانيكا الكلاسيكية، يمكن تصنيف الأنظمة الكمومية إلى نوعين متلازمين. النوع الأول يشمل الأنظمة ذات المتغيرات المنفصلة، حيث يكون لديها عدد منتهٍ من مستويات الطاقة. أو بمعنى آخر، يكون لها قيم متفرقة ومحددة للمتغيرات الكمومية. ويمكن أن تكونَ أمثلة على هذا النوع من الأنظمة هي ذرات الهيدروجين وذرات الهيليوم، حيث تحتوي على مستويات طاقة محددة ومنفصلة. أما النوع الثاني فيصف الأنظمة بالمتغيرات المستمرة، حيث يكون للنظام فضاء هيلبرت ذي بُعدٍ لانهائي. وهذا يعني أن الأنظمة المستمرة تحتوي على متغيرات ذات قيم مستمرة. سنركز في دراستنا هذه على هذا النوع من الأنظمة الكمومية والتي تتميز باختلاف قيم المتغيرات الكمومية في مجال مستمر، بدلاً من قيم متفرقة ومحددة كما هو الحال في النوع الأول.

الحالات الغاوسية هي الحالات التي تتخذ دالة فِغنر الخاصة بها شكلا جرسياً، على عكس الحالات غير الغاوسية والتي سنركز عليها في دراستنا. فهم هذه الحالات يساعدنا في تطوير تقنيات جديدة وفهم أعمق للعالم الكمومي وتطبيقاته المحتملة في مجالات مثل الحوسبة الكمومية والتشفير الكمومي والاتصالات الكمومية.

الأنظمة الكمومية المعزولة هي الأنظمة التي تكون مُنغلقة تمامًا عن البيئة الخارجية ولا تتفاعل أو تتأثر بالمكونات الخارجية. و في المقابل، الأنظمة الكمومية المفتوحة هي الأنظمة التي تتفاعل وتتأثر بالبيئة الخارجية و تبادل الطاقة والمادة معها. في هذه المذكرة، سنستخدم مفاهيم الأنظمة الكمومية المفتوحة لدراسة وتحضير عائلة من الحالات الكمية غير الغاوسية. وكما هو الحال في أي نظام فيزيائي، هناك تفاعلات

غير مرغوب فيها مع المحيط، و بالأخص التفاعل الحراري بين النظام ومحيطه. يؤثر هذا التفاعل بشكل سلبي على الخصائص الكمومية للحالات وتغيير خصائصها وهذا ما سنسعى إلى دراسته أيضا في هذه المذكرة.

تم تنظيم المذكرة على النحو التالي. في الباب (1) قمنا بتقديم شرح موجز ودقيق لمجموعة من المفاهيم الأساسية في ميكانيكا الكم والتي ستُستعمل لاحقا في بعض الحسابات. مثل مؤثر الكثافة ، دالة فِغنر و الموثوقية. وفي الباب (2) قدمنا مجموعة من الأمثلة لأنظمة كمومية مفتوحة مع بيان طريقة التوصل إلى حالتها المستقرة، وإعطاء تعريف عام للمعادلة الرئيسية والحالة المستقرة التي سنستعملها كثيرا في دراستنا. يُعد الباب (3) جوهر هذه المذكرة حيثُ تضمن كيفية التوصل إلى الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية و دراسة خصائصها والتحقق من كل النتائج. أما الباب (4) فتضمن دراسة تأثير المحيط الحراري على الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية و مراجعة خصائصها عندئذ.

كما رافقنا هذه المذكرة بمجموعة ملاحق نبين ونوضح من خلالها تفاصيل الحسابات و شرح برامج البايثون و طرق أخرى للحساب. والتي كانت كما يلي. في الملحق (ا) قدمنا كيفية إيجاد الحالة المستقرة للنظام باستعمال الطريقة الجبرية، و الملحق (ب) وضحنا من خلاله كيفية التحصل على الشروط اللازمة كي يكون الحل الفيزيائي مقبولًا. كما تضمن الملحق (ج) شرحًا دقيقًا ومختصرًا لبرامج المحاكاة المستعملة في هذه المذكرة. و في الأخير أدرجنا ملحقًا للمصطلحات الواردة في المذكرة، الملحق (د)، مرفقًا بها الترجمة إلى اللغة الإنجليزية في شكل قاموس مختصر.

باب 1

مدخل الى ميكانيكا الكم

ميكانيكا الكم هي نظرية رياضية في الفيزياء تدرس و تصف الطبيعة المجهرية على المستوى الذري وما دونه وتفسر رياضيًا سلوك المادة وتفاعلاتها. سنقدم في هذا الباب، إضافة إلى المهتز التوافقي الكمومي، مجموعة من المفاهيم الكمية والأساسية التي سنستعملها لاحقا في الأبواب الموالية.

1.1 المهتز التوافقي الكمومي أحادي البُعد

يحظى المهتز التوافقي الكمومي بأهمية فريدة في ميكانيكا الكم، حيث أنه حل مفيد للغاية بشكل عام، سواء في العديد من النماذج التقريبية أو في الحلول الدقيقة لمختلف المسائل.

يُكتب هاملتوني المهتز التوافقي كما يلي [1]:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2 \ , \tag{1}$$

حيثُ m و ω هما على التوالي كتلة الجسيم و تردد (نبض) الاهتزاز، أما $\hat{P}$ و $\hat{X}$ فيمثلان ملاحِظة كمية الحركة و ملاحِظة الموضع على الترتيب.

يمكن التعبير عن مُؤثري الموضع $\hat{X}$ و كمية الحركة $\hat{P}$ بالعلاقتين :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\ (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \ , \tag{2}$$

$$\hat{P} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\ (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \ , \tag{3}$$

حيث $\hbar$ هو ثابت بلانك، و $\hat{a}^\dagger$ و $\hat{a}$ هما مؤثري الانشاء و الهدم[1] على التوالي .

[1] يُسمى المؤثران $\hat{a}$ و$\hat{a}^\dagger$ بمؤثري الرفع والخفظ أوالإنشاء والإفناء.

نُعرف مؤثري الموضع و كمية الحركة من دون بُعد بدلالة $\hat{X}$ و $\hat{P}$ على التوالي بالعلاقتين :

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{X}\ , \tag{4}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\,\hat{P}\ . \tag{5}$$

وعليه تُصبح المعادلة (1)، أي عبارة الهاملتوني $\hat{H}$، تُكتب بدلالة المؤثرين الجديدين $\hat{x}$ و $\hat{p}$ على النحو التالي:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{p}^2\right)\ . \tag{6}$$

ملاحظة: من الآن فصاعدا نستخدم عبارة $\hat{x}$ دون بُعد.
تُكتب معادلة القيم الذاتية للهاملتوني المُعطى بالمعادلة (6) كما يلي:

$$\hat{H}\,|\varphi_n\rangle = E_n\,|\varphi_n\rangle\ , \tag{7}$$

حيثُ E_n هي مستويات الطاقة ويُعبر عنها بـ :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\ , \tag{8}$$

n فهو العدد الكمومي الأساسي ويأخذ القيم $n = 0, 1, \ldots$. الحالات الذاتية للطاقة $|n\rangle$ يُعبر عنها بالدوال الموجية بالشكل التالي [1] :

$$\varphi_n(x) \equiv \langle x|n\rangle = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2^n n!}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)\ , \tag{9}$$

حيث $H_n(x)$ كثير حدود هرميت يعرف بالعلاقة الآتية[2]:

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}\ . \tag{10}$$

يُمكن التعبير عن مؤثري الهدم و الانشاء بدلالة $\hat{x}$ و $\hat{p}$ على النحو التالي :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})\ , \tag{11}$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})\ . \tag{12}$$

تُعطى علاقة التبادل بين مؤثري الموضع وكمية الحركة كما يلي :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \ , \tag{13}$$

والذي يُمكن تحويله إلى علاقة التبادل بين $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ على هذا النحو:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \ . \tag{14}$$

في مايلي تأثير $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ على حالة ذاتية للطاقة[2] و تُكتب على هذا النحو :

$$\hat{a} \left|n\right\rangle = \sqrt{n} \left|n-1\right\rangle \qquad ; \ n \geq 1 \ , \tag{15}$$

$$\hat{a} \left|0\right\rangle = 0 \ , \tag{16}$$

$$\hat{a}^\dagger \left|n\right\rangle = \sqrt{n+1} \left|n+1\right\rangle \qquad ; \ n \geq 0 \ . \tag{17}$$

يجب الإشارة هنا إلى أن الحالات الذاتية للطاقة تشكل أساسا لفضاء هلبرت و أن فضاء هلبرت للمهتز التوافقي هو فضاء شعاعي ذو بعد لا نهائي. كل حالة يُمكن كتابتها في أساس حالات الطاقة بالشكل التالي:

$$\left|\psi\right\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|n\right\rangle \left\langle n\right| \right) \left|\psi\right\rangle \equiv \sum_{n} C_n \left|n\right\rangle \ , \tag{18}$$

حيث $C_n = \langle n|\psi\rangle$ هي مركبات الشعاع $|\psi\rangle$.

2.1 مؤثر الكثافة

يسمح مؤثر الكثافة بوصف الحالة الكمّية للنظام الفيزيائي. تلخص مصفوفة واحدة كل المجموعات الإحصائية الممكنة من الحالات الكمية لنظام فيزيائي معين في لحظة زمنية. و نميز حالتين، الحالة النقية والحالة المختلطة.

1.2.1 الحالة النقية

إذا كانت الحالة الكمية للنظام معطاة بالشعاع $|\psi(t)\rangle$ فيقال حينئذٍ أن النظام موجود في حالة نقية. تُكتب مصفوفة الكثافة في هذه الحالة على هذا النحو [1]:

$$\hat{\rho}(t) = \left|\psi(t)\right\rangle \left\langle\psi(t)\right| \ . \tag{19}$$

[2] Fock state.

في الحالة النقية يُمكن كتابة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ في أساس[3] متعامد متجانس $\{|u_n\rangle\}_{n=0,1,...,}$ في فضاء الحالات كما يلي :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)\,|u_n\rangle \ , \tag{20}$$

حيث $C_n(t) = \langle u_n|\psi(t)\rangle$ هي مركبات الشعاع في هذا الأساس و تحقق

$$\sum_n |C_n(t)|^2 = 1 \ . \tag{21}$$

بصفة عامة يمكن تمثيل مؤثر الكثافة $\hat{\rho}(t)$ في هذا الأساس بواسطة مصفوفة الكثافة ذات العناصر التالية :

$$\begin{aligned} \rho_{p,n}(t) &= \langle u_p|\hat{\rho}(t)|u_n\rangle \\ &= \langle u_p|\psi(t)\rangle\,\langle\psi(t)|u_n\rangle \\ &= C_n^*(t)C_p(t) \ , \end{aligned} \tag{22}$$

لذا يُمكن إعادة كتابة مُؤثر الكثافة على هذا النحو :

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{p,n} \rho_{p,n}(t)\,|u_p\rangle\,\langle u_n| \ . \tag{23}$$

وفقا للمعادلة (22) تُشير المعادلة (21) إلى أن مجموع العناصر القُطرية لمصفوفة الكثافة يساوي 1:

$$\sum_n |C_n(t)|^2 = \sum_n \rho_{n,n}(t) = \mathrm{Tr}\hat{\rho}(t) = 1 \ , \tag{24}$$

هذا معناه أن $\hat{\rho}(t)$ مقننة طويلتها تُساوي 1 دوماً.

كما أنّه تُكتب معادلة شرودنجر بدلالة مؤثر الكثافة كما يلي [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) &= \frac{\mathrm{d}\,|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t}\,\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle\,\frac{\mathrm{d}\,\langle\psi(t)|}{\mathrm{d}t} \ , \\ &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle\,\langle\psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar}\,|\psi(t)\rangle\,\langle\psi(t)|\,\hat{H}(t) \ , \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}(t), |\psi(t)\rangle\,\langle\psi(t)|\right] \ , \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)\right] \ . \end{aligned} \tag{25}$$

[3] كما يُمكن تسميتها قاعدة.

2.2.1 الحالة المختلطة

عندما لا يمكن وصف حالة النظام بواسطة شعاع حالة $|\cdot\rangle$، فنقول أن النظام موجود في حالة مختلطة (غير نقية).

كمثال توضيحي لهذه الفكرة نعتبر نظاماً موجودا في الحالة النقية $|\psi_1(t)\rangle$ بإحتمال P_1 و موجود في الحالة $|\psi_2(t)\rangle$ بإحتمال P_2. يُعبر عن الحالة الكمية لهذا النظام بمؤثر الكثافة $\hat{\rho}$ بالشكل التالي:

$$\hat{\rho}(t) = P_1\hat{\rho}_1(t) + P_2\hat{\rho}_2(t) \ . \tag{26}$$

يُمكن تعميم هذا المفهوم من أجل أكثر من حالتين، تُعطى عبارة $\hat{\rho}(t)$ على هذا النحو [1]:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_k P_k \left|\psi_k(t)\right\rangle \left\langle\psi_k(t)\right| \ , \tag{27}$$

حيث P_k هي إحتمال التواجد في مختلف الحالات الكمية $|\psi_k(t)\rangle$:

$$0 \leq P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots \leq 1 \ , \tag{28}$$

مع شرط انحفاظ الاحتمال:

$$\sum_k P_k = 1 \ . \tag{29}$$

3.2.1 الخصائص العامة لمؤثر الكثافة

في ما يلي بعض خصائص مؤثر الكثافة:

مؤثر الكثافة هرميتي:

$$\hat{\rho}^\dagger(t) = \hat{\rho}(t) \ . \tag{30}$$

إنحفاظ الاحتمال الكلي:

$$\mathrm{Tr}\hat{\rho}(t) = 1 \ . \tag{31}$$

في الحالة النقية مؤثر الكثافة هو مؤثر الإسقاط:

$$\hat{\rho}^2(t) = \hat{\rho}(t) \ . \tag{32}$$

في الحالة المختلطة مؤثر الكثافة ليس مؤثر الإسقاط:

$$\hat{\rho}^2(t) \neq \hat{\rho}(t) \ . \tag{33}$$

أثر مربع مؤثر الكثافة :

$$0 < \mathrm{Tr}\hat{\rho}^2(t) \leq 1 \ , \tag{34}$$

حيثُ المساواة بـ 1 تكون فقط من أجل الحالة النقية.

3.1 معامل النقاوة

يُعرف معامل نقاوة حالة كمية ما بالمقدار :

$$\mu(t) = \mathrm{Tr}\hat{\rho}^2(t) \ , \tag{35}$$

حيثُ:

$$0 \leq \mu(t) \leq 1 \ . \tag{36}$$

تتميز الحالة النقية بمعامل نقاوة $\mu = 1$.

4.1 الموثوقية

تعد الموثوقية [4,5] واحدة من بين أدوات التمييز بين حالتين كموميتين أو معرفة مدى التشابه أو التقارب بينهما. تُعطى عبارة الموثوقية من أجل الحالتين $\hat{\rho}_1(t)$ و $\hat{\rho}_2(t)$ كما يلي [3, 4]:

$$F\left(\hat{\rho}_1(t), \hat{\rho}_2(t)\right) \equiv \left(\mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_1(t)}\hat{\rho}_2(t)\sqrt{\hat{\rho}_1(t)}}\right) \ , \tag{37}$$

و في ما يلي بعض خصائص الموثوقية :

1. الموثوقية عملية تبديلية:

$$F\left(\hat{\rho}_1(t), \hat{\rho}_2(t)\right) = F\left(\hat{\rho}_2(t), \hat{\rho}_1(t)\right) \ . \tag{38}$$

2. الموثوقية دالة محدودة :

$$0 \leq F\left(\hat{\rho}_1(t), \hat{\rho}_2(t)\right) \leq 1 \ , \tag{39}$$

حيث إذا كان $F\left(\hat{\rho}_1(t), \hat{\rho}_2(t)\right) = 0$ فهذا يعني أن $\hat{\rho}_1(t)$ و $\hat{\rho}_2(t)$ متعامدان. أمّا إذا كان $F\left(\hat{\rho}_1(t), \hat{\rho}_2(t)\right) = 1$ فهذا معناه أن $\hat{\rho}_1(t)$ و $\hat{\rho}_2(t)$ متساويان أو متوازيان.

5.1 دالة فِغنر

بالإضافة لشعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ و مؤثر الكثافة $\hat{\rho}(t)$ نستطيع وصف حالة النظام بواسطة دالة فِغنر.

---

[4] Fidelity.

[5] تُعرف أيضاً بموثوقية أولمان جوزا Uhlmann-Jozsa.

تُعطى العبارة العامة لدالة فِغنر لنظام N مهتز توافقي موصوف بدالة الموجة $\psi(x_1,\ldots,x_N)$ كما يلي : [5]

$$W_{|\psi\rangle}\left(x_1...x_N,p_1,\ldots,p_N\right)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}y_1,\ldots,\mathrm{d}y_N\,\mathrm{e}^{i(y_1p_1+\ldots+y_Np_N)}$$
$$\times\,\psi\left(x_1-\frac{1}{2}y_1,\ldots,x_N-\frac{1}{2}y_N\right)\psi^*\left(x_1+\frac{1}{2}y_1,\ldots,x_N+\frac{1}{2}y_N\right)\ . \quad (40)$$

يُمكن كتابة دالة فِغنر بالنسبة لمهتز توافقي واحد على هذا النحو:

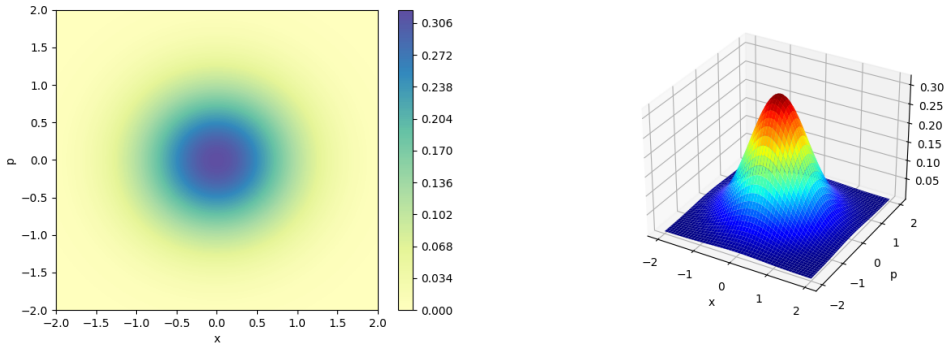
$$W\left(x,p\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(x-\frac{y}{2}\right)\psi^*\left(x+\frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{ipy}\mathrm{d}y\ . \quad (41)$$

6.1 الحالات الغاوسية

الحالات الكمية التي تأخذ دالة فِغنر الخاصة بها شكلا غاوسيا -شكلا جرسياً- تُسمى حالة غاوسية. على سبيل المثال حالة الفراغ $|0\rangle$ للمهتز التوافقي. تُعطى دالة فِغنر لهذه الحالة على هذا النحو [6]:

$$W_{|0\rangle}(x,p)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2-p^2}\ . \quad (42)$$

واضح أن دالة فِغنر لحالة الفراغ هي دالة غاوسية، أنظر الشكل 1.1.



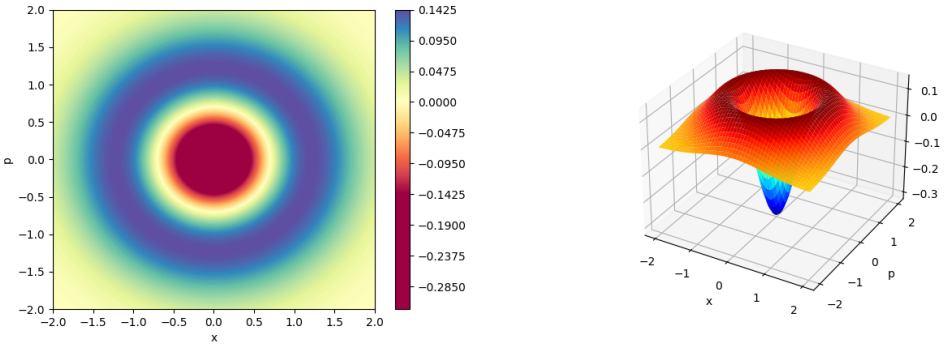
شكل 1.1: الرسم البياني لدالة فِغنر لحالة الفراغ $|0\rangle$. في اليمين رسم ثلاثي الأبعاد أما في اليسار فالرسم عبارة عن مناطق ملونة تمثل قيم دالة فِغنر.

7.1 الحالات غير الغاوسية

عندما تكون دالة فِغنر للحالة الكمية لا تأخذ شكلا غاوسياً نقول أن هذه الحالة غير غاوسية. على سبيل المثال حالات الطاقة لمهتز توافقي $|n\rangle$ من أجل $n \geq 1$. تُعطى عبارة دالة فِغنر الخاصة بها كما يلي [7, 8]:

$$W_{|n\rangle}(x,p) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-\hat{x}^2-\hat{p}^2} L_n\left(\frac{\hat{x}^2+\hat{p}^2}{2}\right) , \tag{43}$$

حيثُ L_n هي دالة لاغر[6]. يوضح الشكل 2.1 تمثيل دالة فِغنر للحالة $|1\rangle$. واضح أنّ هذه الدالة غير غاوسية، كما أن لها قيمًا سالبة.



شكل 2.1: الرسم البياني لدالة فِغنر للحالة الكمية $|1\rangle$.

من المهم أن نشير هنا إلى أنّه كل حالة كمية تأخذ دالة فِغنر المرفقة بها قيمًا سالبة فهي حالة غير غاوسية. لكن العكس ليس دوماً صحيح، إذ أن هناك بعض الحالات الكمومية التي لها دالة فِغنر موجبة ولكنها حالة غير غاوسية.

8.1 الانظمة المركبة

النظام المركب هو النظام المكون من أكثر نظام فيزيائي. على سبيل المثال نعتبر نظامين جزئيين مستقلين عن بعضهما البعض لكل منهما شعاع حالة. شعاع الحالة $|\psi\rangle_1$ $(|\phi\rangle_2)$ الخاص بالنظام الأول (الثاني) S_1 (S_2) و ينتمي للفضاء الشعاعي $\mathcal{H}_1$ $(\mathcal{H}_2)$ ذو الأساس $\{|n\rangle_1\}_{n=0,...}$. يُكتب شعاع الحالة كما

[6] Laguerre polynomial.

يلي:

$$|\psi\rangle_1 = \sum_n a_n |n\rangle_1 \ , \tag{44}$$

$$|\phi\rangle_2 = \sum_n b_n |n\rangle_2 \ . \tag{45}$$

تُكتب الحالة الكلية للنظام بدلالة الجداء الموتري للحالتين الكموميتين $|\psi\rangle_1$ و $|\phi\rangle_2$ كما يلي [9]:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 &= \left(\sum_n a_n |n\rangle_1\right) \otimes \left(\sum_n b_n |n\rangle_2\right) \\ &= \sum_{n,m} a_n b_m |n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2 \ , \\ &\equiv \sum_{n,m} a_n b_m |n,m\rangle \ . \end{aligned} \tag{46}$$

من جهة أخرى، عندما يتألف النظام المركب من أنظمة جزئية غير مستقلة عن بعضها البعض -تتبادل التأثير فيما بينها- و لها نفس الفضاء الشعاعي، هنا لايُمكن وصف الحالة الكمية لنظام الجزئي بشكل مستقل عن الأخر. وهذا مايُسمى بالتشابك الكمي. هنا تكتب عبارة شعاع الحالة من الشكل:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,m} c_{n,m} |n,m\rangle \ . \tag{47}$$

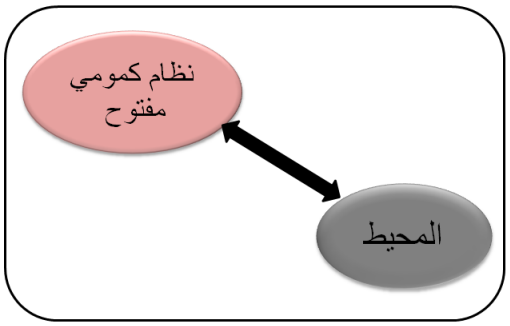
باب 2

الأنظمة الكمومية المفتوحة

في هذا الباب نعتبر مجموعة من الأنظمة الكمومية المفتوحة، حيث ندرس تطور حالتها مع الزمن و أيضا نبحث عن الحالة المستقرة لها بعد مرور زمن طويل بما يكفي.

1.2 مفهوم النظام الكمومي المفتوح

تُعتبر الأنظمة الكمومية المعزولة أنظمة مثالية. عندما يكون النظام قيد الدراسة يتبادل الطاقة مع المحيط الخارجي نقول أنه نظام كمومي مفتوح، لاحظ الشكل 1.2.



شكل 1.2: تمثيل لنظام كمومي مفتوح.

2.2 المعادلة الرئيسية

المعادلة الرئيسية[1] هي معادلة تفاضلية تصف تغير الحالة الكمية للأنظمة الكمومية المفتوحة بدلالة الزمن، و تأخذ الشكل التالي [10, 11, 12]:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] + \hat{\mathcal{L}}[\hat{\rho}(t)] \ , \tag{1}$$

حيث $\hat{\rho}(t)$ و $\hat{H}$ هما على التوالي الحالة الكمية للنظام المفتوح و الهاملتوني المرفق به . أما $\hat{\mathcal{L}}$ فهو مؤثر ليوفيل الفائق [2]، و الذي يمكن أن يأخذ الشكل التالي [10, 11]:

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum_k \left(\hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \right) \ , \tag{2}$$

حيث $\hat{L}_k$ هي مؤثرات تصف التبادل الطاقوي[3] بين النظام ومحيطه.

3.2 الحالة المستقرة

الحالة المستقرة[4] هي الحالة التي يثبُت عليها النظام بعد مرور زمن طويل:

$$\hat{\rho}_\infty = \lim_{t \to \infty} \hat{\rho}(t) \ . \tag{3}$$

في هذه المذكرة نهتم بالحالة المستقرة المستقلة عن الزمن:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}_\infty}{\mathrm{d}t} = 0 \ . \tag{4}$$

سنقوم فيما يلي بإيجاد شروط الحالة المستقرة للنظام، نفترض أن:

$$\hat{\rho}_\infty = |\psi\rangle \langle\psi| \ , \tag{5}$$

بتعويض هذه الأخيرة في المعادلة (1)، نتحصل على مايلي:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}_\infty}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}(t), \hat{\rho}_\infty] + \sum_k \left(\hat{L}_k \hat{\rho}_\infty \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \hat{\rho}_\infty - \frac{1}{2} \hat{\rho}_\infty \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \right) \ . \tag{6}$$

---

[1] Master equation.
[2] Liouville superoperator.
[3] Jump operators.
[4] Steady state.

وبما أن مصفوفة الكثافة $\hat{\rho}_\infty$ مستقلة عن الزمن فإن:

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{H}(t),\hat{\rho}_\infty]+\sum_k\left(\hat{L}_k\hat{\rho}_\infty\hat{L}_k^\dagger-\frac{1}{2}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k\hat{\rho}_\infty-\frac{1}{2}\hat{\rho}_\infty\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k\right)=0\ , \tag{7}$$

ومنه نحصل على ما يلي :

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{H}(t),\hat{\rho}_\infty]=0\Leftrightarrow\hat{H}(t)\hat{\rho}_\infty-\hat{\rho}_\infty\hat{H}(t)=0\ , \tag{8}$$

$$\sum_k\left[\hat{L}_k\hat{\rho}_\infty\hat{L}_k^\dagger-\frac{1}{2}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k\hat{\rho}_\infty-\frac{1}{2}\hat{\rho}_\infty\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k\right]=0\ . \tag{9}$$

بتعويض المعادلة (5) في المعادلة (8) نتحصل على:

$$\hat{H}(t)\hat{\rho}_\infty=\hat{H}(t)(|\psi\rangle\langle\psi|)=(\hat{H}(t)|\psi\rangle)\langle\psi|\ , \tag{10}$$

$$\hat{\rho}_\infty\hat{H}(t)=(|\psi\rangle\langle\psi|)\hat{H}(t)=|\psi\rangle(\langle\psi|\hat{H}(t))\ , \tag{11}$$

وبالتالي لتكون هاتين المعادلتين متكافئتين يجب أن يكون:

$$(\hat{H}(t)|\psi\rangle)\langle\psi|=|\psi\rangle(\langle\psi|\hat{H}(t))\ , \tag{12}$$

وهذا يتطلب أن يكون:

$$\hat{H}(t)|\psi\rangle=\varepsilon|\psi\rangle\ \ ;\varepsilon\geq0\ , \tag{13}$$

حيثُ ε هو قيمة ذاتية للمؤثر $\hat{H}(t)$.
من خلال المعادلة (9) نستنتج أن:

$$\hat{L}_k\hat{\rho}_\infty\hat{L}_k^\dagger=0\Rightarrow\hat{L}_k|\psi\rangle\langle\psi|\hat{L}_k^\dagger=0\Rightarrow\hat{L}_k|\psi\rangle=0\ , \tag{14}$$

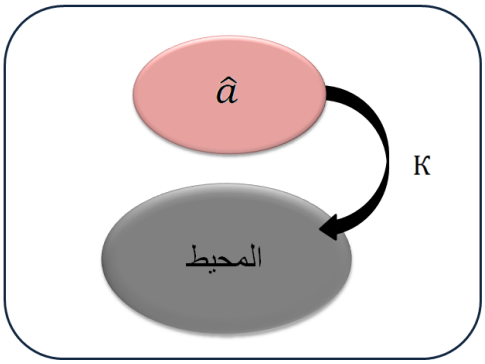
$$-\frac{1}{2}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k\hat{\rho}_\infty=0\Rightarrow-\frac{1}{2}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k|\psi\rangle\langle\psi|=0\Rightarrow\hat{L}_k|\psi\rangle=0\ , \tag{15}$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\rho}_\infty\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k=0\Rightarrow-\frac{1}{2}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k=0\Rightarrow\hat{L}_k|\psi\rangle=0\ , \tag{16}$$

وعليه، نقول عن $\hat{\rho}_\infty$ أنها حالة مستقرة إذا كانت $|\psi\rangle$ تحقق الشرطين التاليين:

$$\hat{H}|\psi\rangle=\varepsilon|\psi\rangle\ \ ;\varepsilon\geq0\ , \tag{17}$$

$$L_k|\psi\rangle=0\ . \tag{18}$$



شكل 2.2: رسم توضيحي لنظام كمومي مفتوح مكون من مهتز توافقي يفقد طاقته بمعدل κ.

4.2 مهتز توافقي متخامد

نعتبر مهتزاً توافقيا ذو حركة إهتزازية مُتخامدة[5]، لاحظ الشكل 2.2.
يُعطى هاملتوني هذا النظام بالعبارة التالية:

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \ , \tag{19}$$

و يوجد مؤثر تبادل طاقوي واحد يُكتب من الشكل [10]:

$$\hat{L} = \sqrt{\kappa}\hat{a} \ , \tag{20}$$

حيث $\kappa > 0$ هو معدل التخامد [6]. تُكتب إذن المعادلة الرئيسية لهذا النظام على النحو الآتي:

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -i\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}(t)] + \kappa\left(\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \ . \tag{21}$$

لإيجاد الحالة المستقرة لهذا النظام نطبق شروط الحالة المستقرة الموضحة في المعادلتين (17) و (18).
بوضع $\hat{\rho}_\infty = |\psi\rangle\langle\psi|$ نكتب:

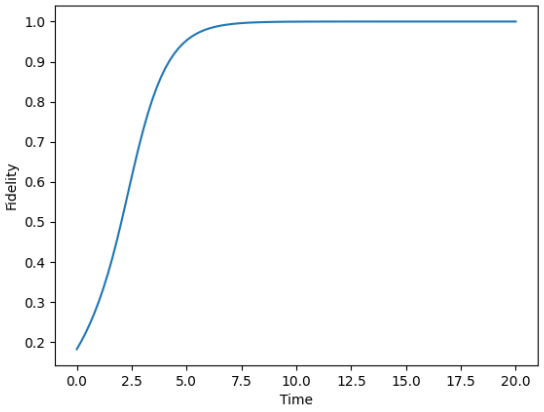
$$\hat{H}\,|\psi\rangle = 0 \ , \tag{22}$$
$$\hat{L}\,|\psi\rangle = 0 \Rightarrow \hat{a}\,|\psi\rangle = 0 \ . \tag{23}$$

و منه نستنتج أن الحالة المستقرة لهذا النظام هي الفراغ، $|\psi\rangle = |0\rangle$.

[5] يفقد طاقة.
[6] damping rate.

ملاحظة: يمكن الوصول إلى نفس النتيجة أعلاه بطريقة أخرى، راجع الملحق (أ).

ومن أجل أن نتحقق عدديا من أن النظام فعلا يصل إلى الحالة المستقرة $|0\rangle$ بعد زمن طويل، نحل المعادلة الرئيسية باستخدام برمجية كيوتيب، راجع الملحق (ج)، ثم نحسب الموثوقية بين حالة النظام عند كل لحظة زمنية t و بين حالة الفراغ $|0\rangle$. النتائج موضحة في الشكل 3.2. نلاحظ تزايد الموثوقية مع مرور الزمن إلى أن تتجاوز عتبة 0.99 في اللحظة $t = 8.88\ \kappa^{-1}$. هذا مايعني أن النظام يصل فعلا إلى الحالة المستقرة $|0\rangle$.



شكل 3.2: التطور الزمني للموثوقية بين حالة النظام $\hat{\rho}(t)$ و الحالة $|0\rangle$.

5.2 مهتزان توافقيان يتبادلان الطاقة فيما بينهما

نفترض الآن أن مهتزين توافقيين موصوفين بمؤثري الهدم $\hat{a}$ و $\hat{b}$، و أحد المهتزين متخامد، $\hat{L} = \sqrt{\kappa}\hat{a}$. لاحظ الشكل (4.2). كما نعتبر تفاعل بين المهتزين وفق الهاملتوني $\hat{H}_I$ حيث:

$$H_I = \hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger) \ . \tag{24}$$

تعبر Ω عن شدة التفاعل بين المهتزين التوافقيين.

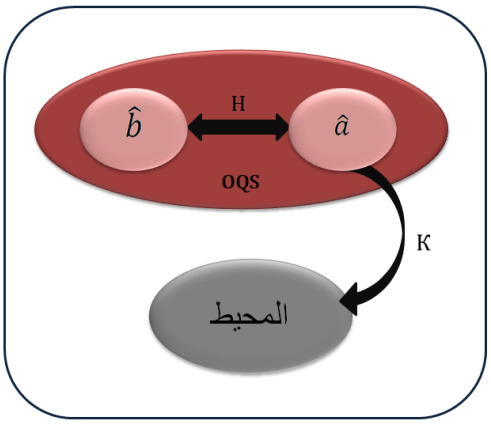
يُكتب الهاملتوني الخاص بهذا النظام كما يلي:

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_2\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger) \ , \tag{25}$$

حيثُ ω_1 و ω_2 هما نبضي المهتزين التوافقيين الموصوفين بمؤثري الهدم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ على الترتيب.

تُكتب إذن المعادلة الرئيسية الخاصة بهذا النظام من الشكل:

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \frac{-i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \kappa\left(\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \ . \tag{26}$$



شكل 4.2: نظام كمومي مفتوح مكون من مهتزين توافقيين حيث أحدهما له حركة متخامدةبمعدل κ.

لإيجاد الحالة المستقرة لهذا النظام نستعين بشروط الحالة المستقرة الموضحة في المعادلتين (17) و (18). بوضع $\hat{\rho}_\infty = |\psi\rangle\langle\psi|$ فإن $|\psi\rangle$ تحقق شروط الحالة المستقرة كما يلي:

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = \varepsilon\,|\psi\rangle \ , \tag{27}$$

$$\hat{L}\,|\psi\rangle = 0 \Rightarrow \hat{a}\,|\psi\rangle = 0 \ . \tag{28}$$

و منه نستنتج أن:

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |\varphi\rangle \ . \tag{29}$$

نهتم الآن بإيجاد $|\varphi\rangle$ نعوض المعادلة (29) في المعادلة (27) بالشكل التالي:

$$\left[\hbar\omega_1 \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_2 \hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger)\right] \hat{a} \otimes |\varphi\rangle = \varepsilon\,|0\rangle \otimes |\varphi\rangle \ ,$$

أي:

$$\begin{aligned}\hbar\omega_1 \hat{a}^\dagger\hat{a}\,|0\rangle \otimes |\varphi\rangle + \hbar\omega_2\,|0\rangle \otimes \hat{b}^\dagger\hat{b}\,|\varphi\rangle \\ + \hbar\Omega\left(\hat{a}^\dagger\,|0\rangle \otimes \hat{b}\,|\varphi\rangle + \hat{a}\,|0\rangle \otimes \hat{b}^\dagger\,|\varphi\rangle\right) = \varepsilon\,|0\rangle \otimes |\varphi\rangle \ .\end{aligned} \tag{30}$$

بما أن $\hat{a}\,|0\rangle = 0$ و $\hat{a}^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle$ فإن:

$$\hbar\omega_2\,|0\rangle \otimes \hat{b}^\dagger\hat{b}\,|\varphi\rangle + \hbar\Omega\,|1\rangle \otimes \hat{b}\,|\varphi\rangle = \varepsilon\,|0\rangle \otimes |\varphi\rangle \ . \tag{31}$$

بمطابقة طرفي المعادلة (31) نستنتج:

$$\hbar\omega_2\,|0\rangle \otimes \hat{b}^\dagger\hat{b}\,|\varphi\rangle = \varepsilon\,|0\rangle \otimes |\varphi\rangle \ , \tag{32}$$

$$\hbar\Omega\,|1\rangle \otimes \hat{b}\,|\varphi\rangle = 0 \ , \tag{33}$$

و عليه نستنتج أن:

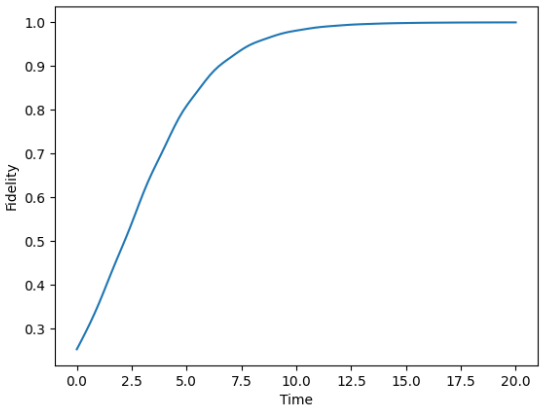
$$|\varphi\rangle = |0\rangle \ , \tag{34}$$

$$\varepsilon = 0 \ . \tag{35}$$

ومنه فالحالة المستقرة للنظام هي:

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \ . \tag{36}$$

في ما يلي نتحقق عدديا من هذه النتائج وذلك بإنشاء منحنى بياني للموثوقية بدلالة الزمن بين $\hat{\rho}(t)$ و الحالة المستقرة للنظام $|\psi\rangle$، الموضحة في المعادلة (36). النتائج ممثلة في الشكل 5.2. نلاحظ تزايد الموثوقية مع مرور الزمن إلى أن تتجاوز عتبة 0.99 في اللحظة $t = 11.31\ \kappa^{-1}$، مايعني أن $|\psi\rangle$ هي الحالة المستقرة لهذا النظام وهذا ما يؤكد صحة النتائج.



شكل 5.2: رسم بياني للموثوقية بين الحالة المستقرة $|\psi\rangle$ و $\hat{\rho}_{\text{th}}$ بدلالة الزمن.

6.2 الحالة الحرارية

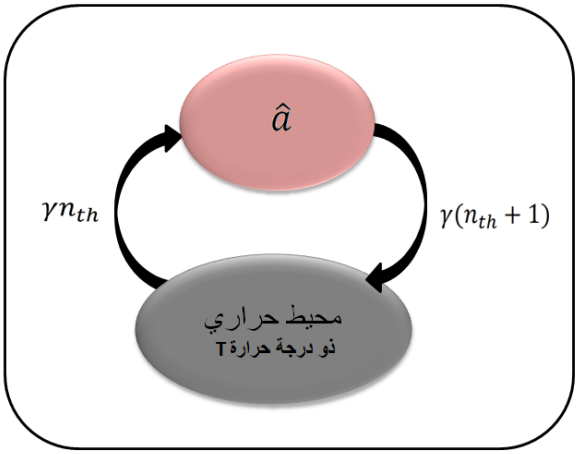
نعتبر فيما يلي مهتزاً توافقياً له مؤثر الهدم $\hat{a}$ و محيطه متوازن حراريا عند درجة حرارة T. يوجد مؤثرا تبادل طاقوي:

$$\hat{L}_1 = \sqrt{\gamma n_{\text{th}}}\hat{a}^\dagger \ , \tag{37}$$

و يُمثل معدل إنتقال الطاقة من المحيط الحراري إلى النظام و:

$$\hat{L}_2 = \sqrt{\gamma(n_{\text{th}}+1)}\hat{a} \ , \tag{38}$$

ويُمثل معدل إنتقال الطاقة من النظام إلى المحيط الحراري، لاحظ الشكل 6.2. معدل هذا التبادل الطاقوي هو γ.



شكل 6.2: رسم توضيحي لنظام كمومي مفتوح مكون من مهتز توافقي $\hat{a}$ يكتسب طاقة بمعدل $\gamma n_{\rm th}$ ويفقد طاقة بمعدل $\gamma(n_{\rm th}+1)$.

يُعطى هاملتوني هذا النظام بالعبارة التالية:

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \ , \tag{39}$$

و الحالة الكمية للنظام تتبع المعادلة الرئيسية والتي تُكتب على النحو الآتي:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}(t) = \frac{-i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}(t)] + \gamma(n_{\rm th}+1)\left(\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \\ + \gamma n_{\rm th}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{a} - \frac{1}{2}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger\right) \ , \end{aligned} \tag{40}$$

حيثُ $n_{\rm th}$ يمثل العدد المتوسط لكمات الطاقة الحرارية ويُكتب على هذا النحو:

$$n_{\rm th} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \ , \tag{41}$$

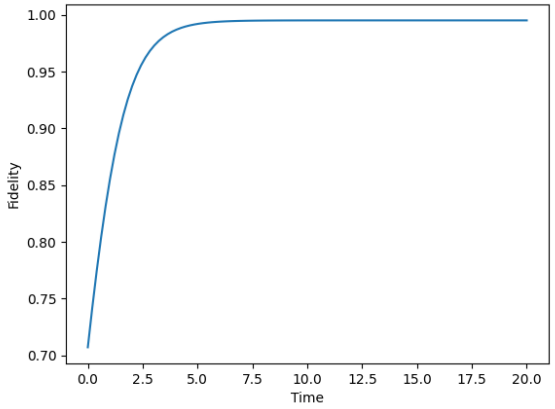
k_B ثابت بولزمان.

تُدعى الحالة المستقرة لهذا النظام بالحالة الحرارية[7]. حيث تُعطى مصفوفة الكثافة بالعلاقة [13]:

$$\hat{\rho}_\infty^{\rm th} = \sum_n \frac{(\gamma n_{\rm th})^n}{(\gamma n_{\rm th}+1)^{n+1}} |n\rangle\langle n| \ . \tag{42}$$

[7] Thermal state.

بحل المعادلة الرئيسية نجد حالة النظام مع الزمن، أنظر الملحق (ج). ثم نحسب الموثوقية بين هذه الحالة مع الحالة الحرارية. النتائج موضحة في الشكل 7.2. نلاحظ من خلال المنحنى البياني أنه بعد مرور زمن $t = 4.64\ \kappa^{-1}$ فإنّ الموثوقية تتجاوز القيمة 0.99. هذا يدل على أنّ حالة النظام الفيزيائي هي بالفعل الحالة الحرارية.



شكل 7.2: رسم بياني للموثوقية بين الحالة الحرارية و حالة النظام عند اللحظة t.

باب 3

تحضير الحالات غير الغاوسية

الحالات غير الغاوسية هي حالات كمومية لا تُظهر توزيع احتمالي غاوسي في فضاء الطور، وتتميز دالة فِغنر الخاصة بها بالشكل غير الجرسي على عكس دالة فِغنر الخاصة بالحالات الغاوسية. للحالات غير الغاوسية أهمية كبيرة في مختلف مجالات فيزياء الكم، مثل الاتصال الكمي والحساب الكمي.

في هذا الباب سنتطرق إلى تحضير عائلة من الحالات غير الغاوسية و دراسة بعض خصائصها.

1.3 نظام مفتوح لمهتزين توافقيين

نعتبر مهتزين توافقيين موصوفين بمؤثري الهدم $\hat{a}$ و $\hat{b}$. نفترض أن المهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{a}$ يفقد طاقة نحو محيطه أي أن حركته إهتزازية متخامدة، وليكن معدل تخامده هو κ. يتم وصف التبادل الطاقوي بينهما بواسطة الهاملتون $\hat{H}$، لاحظ الشكل 1.3.

نعتبر في ما يلي عبارة الهاملتوني الخاص بهذا النظام من الشكل:

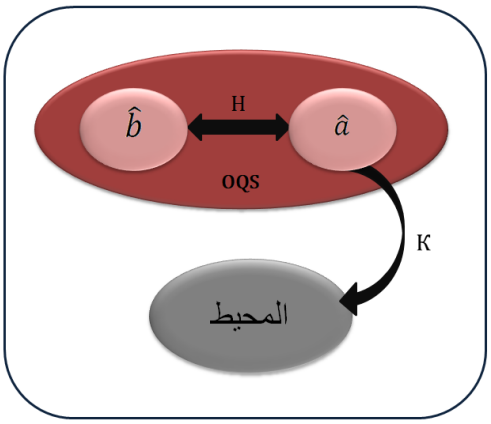
$$\hat{H} = \hbar(\hat{a}^\dagger \hat{f} + \hat{a}\hat{f}^\dagger) \,, \tag{1}$$

و هو نموذج لأنظمة فيزيائية مثل النظام الكهروميكانيكي[1] و الميكانيكوضوئي[2]، حيثُ $\hat{f}$ مؤثر نعتبره من الشكل:

$$\hat{f} = g_1\hat{b} + g_2\hat{b}^\dagger + g_3\hat{b}^2 + g_4\hat{b}^{\dagger 2} + g_5(\hat{b}\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b}) \,, \tag{2}$$

مع $g_1, \ldots, g_5 \in \mathbb{C}$.

[1] Electromechanics.
[2] Optomechanics.



شكل 1.3: نظام كمومي مفتوح مكون من مهتزين توافقيين موصوفين بمؤثري الهدم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ مع فقدان المهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{a}$ طاقة بمعدل κ .

2.3 الحالة الكمية للنظام

الحالة الكمية للنظام تتبع المعادلة الرئيسية التالية:

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \frac{-i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \kappa \left(\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger}\hat{a} \right) . \qquad (3)$$

بما أن المهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{a}$ يفقد طاقته نحو الفراغ، فإن حالته بعد مرور زمن طويل جداً تكون حالة الفراغ. وعليه نهتم بدراسة المهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{b}$ ولذلك نستعمل معادلة مكافئة للمعادلة (3) و التي يمكن كتابتها كما يلي [14, 15, 16]:

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \kappa \left(\hat{f}\hat{\rho}(t)\hat{f}^{\dagger} - \frac{1}{2}\hat{f}^{\dagger}\hat{f}\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{f}^{\dagger}\hat{f} \right) , \qquad (4)$$

حيثُ $\hat{\rho}(t)$ يرمز فقط إلى حالة المهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{b}$.

3.3 الحالة المستقرة للنظام

الحالة المستقرة للنظام هي الحالة الكمية للمهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{b}$ بعد مرور زمن طويل جداً $t \longrightarrow \infty$ أي أن حالة النظام حينئذٍ هي:

$$\hat{\rho}_{\infty} = |\varphi\rangle \langle\varphi| . \qquad (5)$$

وعليه فإن $|\varphi\rangle$ تُحقق شرط الحالة المستقرة الآتي:

$$\hat{f}\,|\varphi\rangle = 0\ . \tag{6}$$

بضرب طرفي المعادلة (6) في $\langle x|$ نحصل على:

$$\langle x|\,\hat{f}\,|\varphi\rangle = 0\ . \tag{7}$$

بالإستنباط من المعادلتين (12) و (11) من الباب (1) يُمكن إعادة كتابة $\hat{b}$ و $\hat{b}^{\dagger}$ دون بعد كالتالي :

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})\ , \tag{8}$$

$$\hat{b}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})\ , \tag{9}$$

ومن خلالهما يُمكن إستنتاج عبارة كل من $\hat{b}^2$، $\hat{b}^{\dagger 2}$، $\hat{b}\hat{b}^{\dagger} + \hat{b}^{\dagger}\hat{b}$ على التوالي كما يلي:

$$\hat{b}^2 = \frac{1}{2}\left[\hat{x}^2 - \hat{p}^2 + i(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\right] = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 - \hat{p}^2 + 2i\hat{x}\hat{p} + 1)\ , \tag{10}$$

$$\hat{b}^{\dagger 2} = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 - \hat{p}^2 - 2i\hat{p}\hat{x} + 1) = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 - \hat{p}^2 - 2i\hat{x}\hat{p} - 1)\ , \tag{11}$$

$$\hat{b}\hat{b}^{\dagger} = \frac{1}{2}[\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - i(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})] = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2 + 1)\ , \tag{12}$$

$$\hat{b}^{\dagger}\hat{b} = \frac{1}{2}[\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - i(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p})] = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - 1)\ . \tag{13}$$

تحصلنا على المعادلة (10) بإستخدام المعادلة التالية:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \Rightarrow \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i \Rightarrow \hat{p}\hat{x} = \hat{x}\hat{p} - i\ . \tag{14}$$

بإستعمال المعادلتين (12) و (13) نتحصل على :

$$\hat{b}\hat{b}^{\dagger} + \hat{b}^{\dagger}\hat{b} = \hat{x}^2 + \hat{p}^2\ . \tag{15}$$

بتعويض المعادلات (10) ، (11) و (15) في المعادلة (2) تُصبح عبارة هذه الأخيرة كالتالي:

$$\hat{f} = c_1\hat{x} + c_2\hat{p} + c_3\hat{x}\hat{p} + c_4\hat{x}^2 + c_5\hat{p}^2 - \frac{i}{2}c_3\ , \tag{16}$$

حيثُ:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g_1 + g_2\right) \ , \tag{17}$$

$$c_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(g_1 - g_2\right) \ , \tag{18}$$

$$c_3 = i\left(g_3 - g_4\right) \ , \tag{19}$$

$$c_4 = \frac{1}{2}\left(g_3 + g_4\right) + g_5 \ , \tag{20}$$

$$c_5 = \frac{-1}{2}\left(g_3 + g_4\right) + g_5 \ . \tag{21}$$

يُكتب المؤثران $\hat{x}$ و $\hat{p}$ في تمثيل الإحداثيات على هذا النحو :

$$\hat{x} \longrightarrow x \ , \tag{22}$$

$$\hat{p} \longrightarrow -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ , \tag{23}$$

وعليه نكتُب المعادلة (16) في تمثيل الإحداثيات بالشكل التالي:

$$\hat{f} = c_1 x - ic_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - ic_3 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_4 x^2 - c_5\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{i}{2}c_3 \ . \tag{24}$$

الآن نقوم بتعويض هذه الأخيرة في المعادلة (7) لتصبح كما يلي:

$$\langle x|\, c_1 x - ic_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - ic_3 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_4 x^2 - c_5\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{i}{2}c_3\,|\varphi\rangle = 0 \ , \tag{25}$$

وبما أن $\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle$ فإن:

$$\left(c_1 x - ic_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - ic_3 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_4 x^2 - c_5\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{i}{2}c_3\right)\varphi(x) = 0 \ , \tag{26}$$

أي أنه لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$-c_5\varphi'' - i\left(c_2 + c_3 x\right)\varphi' + \left(c_4 x^2 + c_1 x - \frac{i}{2}c_3\right)\varphi = 0 \ , \tag{27}$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية المجهول فيها هو $\varphi(x)$. سنحل هذه المعادلة عن طريق إعطاء قيم مختلفة للوسائط c ومناقشة الحلول الناتجة عن ذلك في كل مرة.

4.3 حالة الطور التكعيبي

نفترض أن $c_5 = 0$ و $c_3 = 0$ وهذا معناه أن:

$$\begin{cases} c_3 = 0 \Rightarrow i\,(g_3 - g_4) = 0 \Rightarrow g_3 = g_4\ , \\ c_5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\,(g_3 - g_4) \Rightarrow g_3 = g_4 = g_5\ , \end{cases}$$

فتُصبح (27) معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى:

$$ic_2\varphi^{'} - \left(c_4x^2 + c_1x - \frac{i}{2}c_3\right)\varphi = 0\ , \tag{28}$$

و حلها يأخذ الشكل:

$$\varphi(x) = Ae^{\frac{-i}{c_2}(\frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_4}{3}x^3)}\ , \tag{29}$$

حيثُ A ثابت تقنين.

لا يُمكن إعتبار $\varphi(x)$ حلاً فيزيائيا مقبولاً إلا إذا كانت تحقق العلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 < \infty\ , \tag{30}$$

ولأجل ذلك يجب أن تحقق $|\varphi(x)|^2$ الشرطين التاليين:

$$c_2c_4^* \in \mathbb{R}\ , \tag{31}$$

$$\Im(c_1c_2^*) < 0\ , \tag{32}$$

و هو ما يُترجم إلى:

$$\Re g_3 = 0\ , \tag{33}$$

$$|g_1| > |g_2|\ . \tag{34}$$

وتُسمى هذه الحالة بحالة الطور التكعيبي[3]. تُعطى دالة فغنر الخاصة بها على هذا النحو [15 ,16]:

$$W_{\gamma',r}(x,p) = \mathcal{M}_{\gamma',r}e^{-\frac{p}{3\gamma' e^{2r}}} \times \mathrm{Ai}\left[\left(\frac{4}{3\gamma'}\right)^{\frac{1}{3}}\left(3\gamma' x^2 - p + \frac{1}{12\gamma' e^{4r}}\right)\right]\ , \tag{35}$$

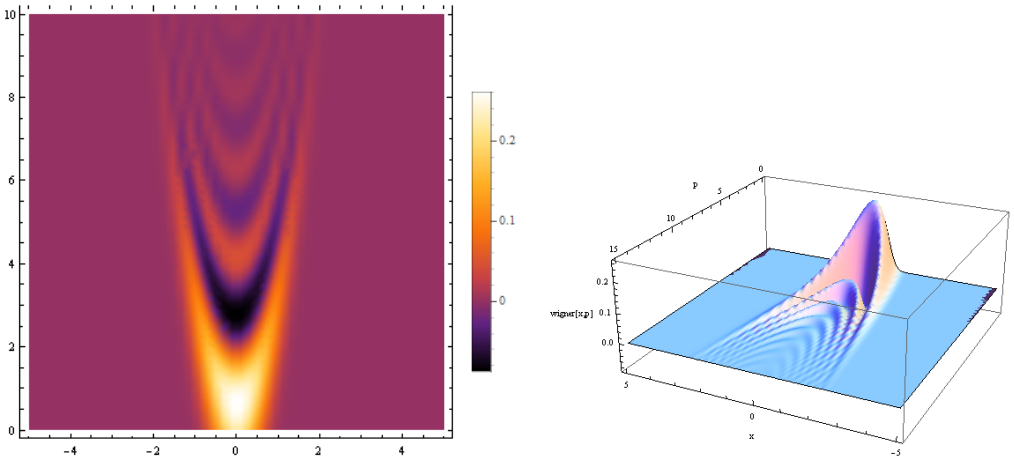
حيث $\mathcal{M}_{\gamma',r}$ ثابت التقنين ويُعطى بالعبارة التالية:

$$\mathcal{M}_{\gamma',r} = \frac{e^{\frac{1}{54\gamma'^2 e^{6r}}}}{\sqrt{\pi}e^r}\left(\frac{4}{3\,|\gamma'|}\right)^{\frac{1}{3}}\ , \tag{36}$$

أما Ai و r فهما على التوالي دالة البيرمان[4] ومعامل الإنضغاط. واضح من خلال عبارة دالة فِغنر والرسم

[3] Cubic phase state.
[4] Airy function.

البياني لها، لاحظ الشكل (2.3)، أن حالة الطور التكعيبي حالة غير غاوسية.



شكل 2.3: رسم بياني لدالة فِغنر الخاصة بحالة الطور التكعيبي من أجل $r = 0$ و $\gamma' = 0.8$.

5.3 الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية

نضع الآن أن $c_5 = 0$ و $c_2 c_3 c_4 \neq 0$ و c_1 كيفي فتُصبح المعادلة (27) معادلة تفاضلية من الدرجة الاولى:

$$i\left(c_2 + c_3 x\right)\varphi' - \left(c_4 x^2 + c_1 x - \frac{i}{2}c_3\right)\varphi = 0\ , \tag{37}$$

وحلها هو:

$$\varphi(x) = A \exp\left[\frac{i}{2c_3^3}\left(-2c_3\left(c_1 c_3 - c_2 c_4\right)x - c_3^2 c_4 x^2\right)\right] \times \left[c_2 + c_3 x\right]^{\frac{i}{2c_3^3}\left(2c_1 c_2 c_3 - 2c_2^2 c_4 - 4ic_3^3\right)}\ , \tag{38}$$

حيثُ A ثابت تقنين.

تكون $\varphi(x)$ حلاً فيزيائيا مقبولاً إذا كانت تحقق العلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 < \infty\ , \tag{39}$$

ولأجل ذلك يجب أن تحقق $|\varphi(x)|^2$ الشرطين التاليين:

$$\Im\left(-i\frac{c_4}{2c_3}\right) < 0 \Rightarrow \Im\left(\frac{c_4}{c_3}\right) < 0\ , \tag{40}$$

و يكفي أن يكون:

$$\frac{c_1 c_2}{c_3^2} - \frac{c_2^2 c_4}{c_3^3} \equiv -i\left(k+\frac{1}{2}\right) \; ; k \in \mathbb{N} \; . \tag{41}$$

نعيد صياغة المعادلة (38) لتصبح كما يلي:

$$\varphi(x) = B \exp\left[-ix\left(\frac{c_1}{c_3} + \frac{c_2}{c_3}\frac{c_4}{c_3}\right) + \frac{c_4}{c_3}x^2\right]\left[\frac{c_2}{c_3}+x\right]^{-\frac{1}{2}+i\left(\frac{c_1}{c_3}\frac{c_2}{c_3}-\frac{c_2^2}{c_3^2}\frac{c_4}{c_3}\right)} \; , \tag{42}$$

حيثُ B ثابت تقنين آخر. نضع:

$$\frac{c_1}{c_3} = \alpha \; , \tag{43}$$

$$\frac{c_2}{c_3} = \beta \; , \tag{44}$$

$$\frac{c_4}{c_3} = \gamma \; , \tag{45}$$

فتصبح المعادلة (42) على هذا النحو:

$$\varphi(x) = B \exp\left[-ix\left(\alpha+\beta\gamma\right) + \gamma x^2\right]\left[\beta+x\right]^{-\frac{1}{2}+i\left(\alpha\beta-\beta^2\gamma\right)} \; . \tag{46}$$

من خلال المعادلة (40) نستنتج أن:

$$\Im\left(\frac{c_4}{c_3}\right) < 0 \Leftrightarrow \gamma < 0 \; , \tag{47}$$

مايعني أن:

$$\gamma = -i \; . \tag{48}$$

من خلال المعادلة (41) نتوصل إلى:

$$\alpha\beta - \beta^2\gamma \equiv -i\left(k+\frac{1}{2}\right) \; ; k \in \mathbb{N} \; , \tag{49}$$

بما أن γ عدد تخيلي سالب، فمن الواضح أن β عدد حقيقي صرف و α عدد تخيلي موجب، وعليه تُصبح لدينا صيغة جديدة للشروط كالتالي:

$$\frac{c_1}{c_3} = i\mu \; , \tag{50}$$

$$\frac{c_2}{c_3} = \nu \; , \tag{51}$$

$$\frac{c_4}{c_3} = -i\eta \; . \tag{52}$$

يُمكن كتابة هذه الشروط بدلالة الوسائط g كما يلي:

$$\frac{c_1}{c_3} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{(g_1+g_2)}{g_3-g_4}\ , \tag{53}$$

$$\frac{c_2}{c_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(g_1-g_2)}{g_3-g_4}\ , \tag{54}$$

$$\frac{c_4}{c_3} = -i\frac{(g_3+g_4)}{g_3-g_4}\ , \tag{55}$$

حيث أخذنا بعين الإعتبار أن $c_5 = 0$ في تبسيط المعادلة الأخيرة.
اخترنا تسمية هذه العائلة من الحالات بالحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية[5]، و تعليل هذه التسمية سيأتي لاحقا.

6.3 دراسة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية

فيما يلي ندرس بعض خصائص الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية، الموافقة للوسائط التالية:

$$g_1 = 1\ , \tag{56}$$

$$g_2 = \frac{3g_1}{7}\ , \tag{57}$$

$$g_3 = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{7g_1}\ , \tag{58}$$

$$g_4 = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{7g_1}\ , \tag{59}$$

$$g_5 = \frac{g_3+g_4}{2}\ . \tag{60}$$

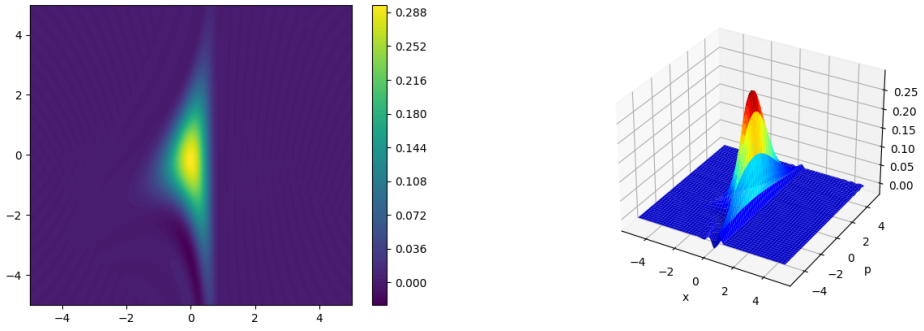
بإستعمال برمجية كيوتيب، ألق نظرة على الملحق (ج)، قمنا بحساب دالة فِغنر و حصلنا على الشكل 3.3.
بحساب القيم الكبرى والصغرى لدالة فِغنر وجدنا :

$$Wig.min = -0.02\ , \tag{61}$$

$$Wig.max = 0.29\ . \tag{62}$$

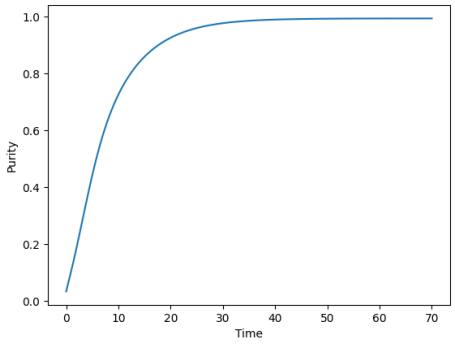
.واضح من خلال الرسم البياني والقيم الكبرى والصغرى لدالة فِغنر أن هذه الأخيرة حالة غير غاوسية. وقد سمّينا هذه العائلة من الحالات بالحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية، لاننا من خلال الرسم البياني نلاحظ أنها منضغطة في إتجاه المحور x ومنزاحة عن المبدأ.

[5] .Displaced squeezed non-gaussian states



شكل 3.3: الرسم البياني لدالة فِغنر للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية.

بالالتفات إلى تغيرات معامل النقاوة للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بدلالة الزمن، لاحظ الشكل 4.3، فإننا نلاحظ تزايد قيمة معامل النقاوة مع مرور الزمن إلى غاية أن يصل في الزمن $t = 41.71s$ إلى العتبة 0.99، وهذا ما يعني أن الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية هي حالة نقية.



شكل 4.3: رسم بياني لنقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بدلالة الزمن.

7.3 السالبية

باستعمال برمجية كيوتيب تمكنا من حساب سالبية دالة فِغنر للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية، التي درسناها سابقا، فحصلنا على النتيجة:

$$\mathcal{N} = 1 - \iint_{\mathbb{R}^2} |W(x,p)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}p = -0.09 \, , \tag{63}$$

وهذا ما يؤكد أن الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية هي حالات غير غاوسية.

نظرًا لأن للمحيط الحراري تأثيرًا غير مرغوب فيه على النظام الكمي، سننتقل الآن إلى دراسة تأثير المحيط الحراري على هذه العائلة من الحالات وفهم خصائصها في ذلك السياق. سنستكشف تأثير التفاعل مع المحيط الحراري وكيف يؤدي إلى تدهوره، وفقدان خصائصه الكمية و إكتساب أخرى بمرور الوقت. سيساعدنا فهم هذه الخصائص على تحسين فهمنا للتفاعل بين النظام الكمي والبيئة الحرارية وتوجيهنا لتصميم أنظمة كمية أكثر استقرارًا وكفاءة في وجود التأثير الحراري.

باب 4

تأثير المحيط الحراري على الحالات مزاحة ومنضغطة غير الغاوسية

إن للمحيط الحراري أثر سلبي على تطور حالة النظام الكمي، فالتبادل الطاقوي يؤدي إلى تشوه الحالة الكمية للنظام مما يؤدي إلى تغير خصائص الحالة الكمية.

سندرس في هذا الباب تأثير المحيط الحراري على الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية و معرفة خصائصها عندئذ.

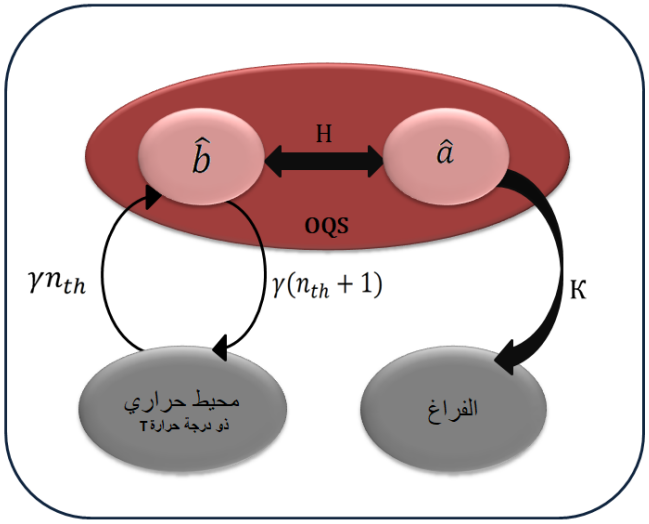
1.4 المعادلة الرئيسية

نعتبر نظاماً كمومياً مفتوحاً مكونا من مهتزين توافقيين موصوفين بمؤثري الهدم $\hat{a}$ و $\hat{b}$. نفترض أن المهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{a}$ يفقد طاقة نحو محيطه أي أن حركته إهتزازية متخامدة، وليكن معدل تخامده هو κ. المهتز التوافقي الموصوف بالمؤثر $\hat{b}$ متوازن حراريا مع محيطه عند درجة حرارة T. تتم الدراسة في معلم بحيث يمكن اعتبار $\hat{H} = 0$، لاحظ الشكل 1.4.

الحالة الكمية للمهتز التوافقي الذي مؤثر هدمه $\hat{b}$ تُعطى بالمعادلة الرئيسية التالية [14, 15, 16]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}(t) =& \kappa \left(\hat{f}\hat{\rho}(t)\hat{f}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{f}^\dagger\hat{f}\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{f}^\dagger\hat{f} \right) \\ &+ \gamma(n_{\text{th}}+1) \left(\hat{b}\hat{\rho}(t)\hat{b}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{b}^\dagger\hat{b} \right) \\ &+ \gamma n_{\text{th}} \left(\hat{b}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{b} - \frac{1}{2}\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{b}\hat{b}^\dagger \right) , \end{aligned} \tag{1}$$

حيثُ $\gamma(n_{\text{th}}+1)$ هو معدل إنتقال الطاقة من النظام إلى المحيط الحراري، أما γn_{th} فيمثل معدل إنتقال الطاقة من المحيط الحراري إلى النظام.



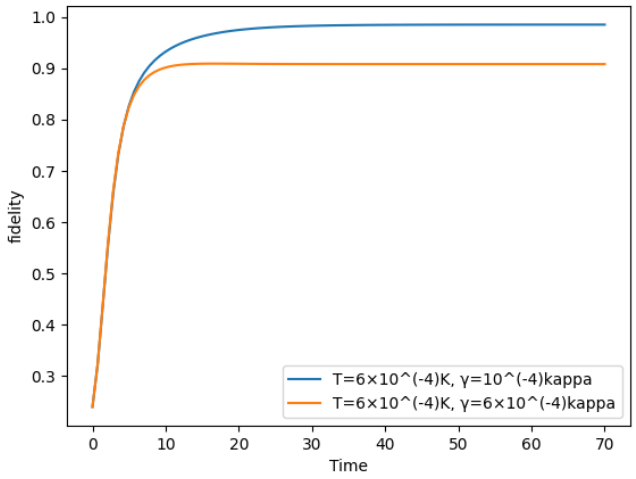
شكل 1.4: رسم توضيحي لمهتزين توافقيين أحدهما متخامد و الآخر في توازن مع محيط حراري.

فيما يلي سنقوم بحل المعادلة الرئيسية باستعمال برمجية كيوتيب من أجل حساب الموثوقية، معامل النقاوة، رسم دالة فِغنر، و حساب السالبية. حساب كل هذه المقادير سيساعدنا على معرفة الخصائص الجديدة للحالات المزاحة و المنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري عليها.

2.4 الموثوقية

بتوظيف برمجية كيوتيب قمنا بإنشاء رسم بياني يصف تغيرات الموثوقية بين الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري عليها، و الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية قبل تأثير المحيط الحراري عليها بدلالة الزمن، وذلك عند درجة حرارة ثابتة القيمة $T = 6 \times 10^{-4} K$. حصلنا على النتائج المبينة في الشكل 2.4. نلاحظ أن قيمة الموثوقية (المنحنى ذو اللون الأزرق) في هذه الحالة تتزايد إلى أن تبلغ العتبة عند 0.98 في الزمن $24.74\ \kappa^{-1}$. و بزيادة درجة الحرارة، المنحنى ذو اللون البرتقالي، نلاحظ إنخفاظ قيمة العتبة هذه المرة حيثُ بلغت 0.90 في الزمن $9.89\ \kappa^{-1}$، وهذا معناه أن نسبة التشابه بين الحالتين إنخفضت، وذلك يعود الى تأثير المحيط الحراري على الحالات المزاحة المنضغطة غير الغاوسية.

ننتقل الآن إلى دراسة تأثر الحالة المستقرة للنظام بوجود وغياب تأثير المحيط الحراري عليه. وذلك من أجل قيم عدة لدرجة الحرارة T و معامل التخامد الحراري γ. من أجل ذلك قمنا بحساب الموثوقية بين الحالة المستقرة للنظام في غياب تأثير المحيط الحراري ورمزنا لها بـ $\hat{\rho}_\infty$ في الباب (3)، و الحالة المستقرة للنظام بوجود تأثير المحيط الحراري عليه والتي سنرمز لها بـ $\hat{\rho}_\infty^{\text{th}}$، ألق نظرة على الملحق (ج), لنحصل على الرسم البياني الموضح في الشكل 3.4. نلاحظ أن الموثوقية تتناقص بالتزامن مع تزايد قيم معامل التخامد

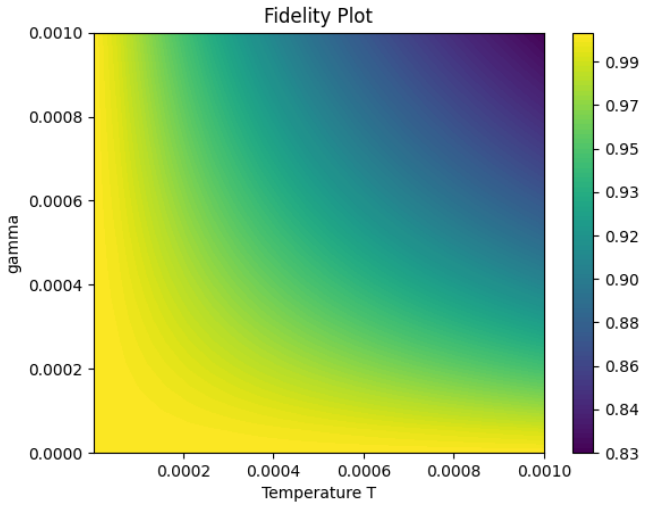


شكل 2.4: الرسم البياني للموثوقية بين الحالة المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية قبل وبعد تأثير المحيط الحراري عليها بدلالة الزمن. المنحنى ذو اللون الأزرق، يمثل تغيرات قيم الموثوقية بدلالة الزمن وذلك عند درجة حرارة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 10^{-4} \kappa$. والمنحنى البياني ذو اللون البرتقالي، فيمثل تغيرات قيم الموثوقية بدلالة الزمن وذلك عند درجة حرارة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 6 \times 10^{-4} \kappa$.

الحراري γ ودرجة الحرارة T، ينتج عن تزايد هذه الأخيرة زيادة قيمة n_{th} وهذا ما يؤدي إلى تناقص قيمة الموثوقية ما يعني إختلاف تام بين $\hat{\rho}_\infty$ و $\hat{\rho}_\infty^{\text{th}}$. وعليه فإن زيادة وتيرة التبادل الطاقوي تؤدي إلى تغير الحالة الكمية. وهو ما يُفسر تناقص قيم الموثوقية بالتوازي مع تزايد قيم كل من درجة الحرارة T و معامل التخامد الحراري γ.

3.4 معامل النقاوة

لفهم تأثير المحيط الحراري على نقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية، قمنا بدراسة تغيرات معامل النقاوة لهذه الأخيرة بعد تأثير المحيط الحراري عليها بدلالة الزمن، عند درجة حرارة ثابتة عند قيمة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 10^{-4} \kappa$، رافقناها بمنحنى البياني لمعامل نقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية قبل تأثير المحيط الحراري عليها وذلك باستخدام برمجية كيوتيب، وتحصلنا على الشكل 4.4. نلاحظ أن نقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري تتزايد إلى أن تبلغ العتبة عند 0.90 وذلك في الزمن $33.23\ \kappa^{-1}$، حيثُ إنخفظت مقارنة بما كانت عليه قبل تأثير المحيط الحراري. ومنه نستنتج أن التواجد الحراري يؤثر سلبا على نقاوة



شكل 3.4: الرسم البياني للموثوقية بين $\hat{\rho}_\infty$ و $\hat{\rho}_\infty^{\text{th}}$.

الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية ويؤدي إلى تناقصها.

نتوجه الآن إلى دراسة نقاوة الحالة المستقرة للنظام $\hat{\rho}_\infty^{\text{th}}$ بوجود تأثير المحيط الحراري عليه. بإستعمال برمجية كيوتيب تمكنا من حساب معامل النقاوة للحالة المستقرة $\hat{\rho}_\infty^{\text{th}}$ وذلك من أجل قيم عدة لدرجة الحرارة T و معامل التخامد الحراري γ، وعليه تحصلنا على الرسم البياني الموضح في الشكل 5.4. نلاحظ تناقص قيم معامل النقاوة للحالة المستقرة $\hat{\rho}_\infty^{\text{th}}$ يصاحبه تزايد قيم كل من درجة الحرارة T و معامل التخامد الحراري γ. وبناء على ذلك نستخلص أنه كلما يزداد التبادل الطاقوي تتناقص نقاوة الحالة الكمية.

4.4 دالة فِغنر

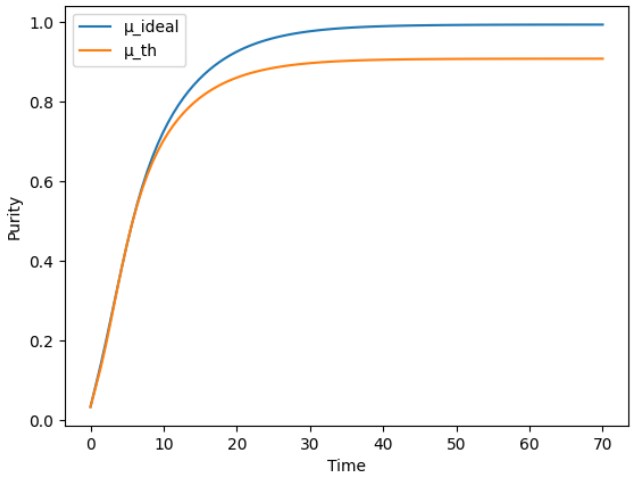
ندرس الآن دالة فِغنر الخاصة بالحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري. نستعين ببرمجية كيوتيب من أجل حساب و رسم دالة فِغنر من أجلدرجة حرارة ثابتة عند قيمة $T = 6\times10^{-4}K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 10^{-4}\kappa$. النتائج موضحة في الشكل 6.4. بحساب القيم الصغرى و الكبرى لدالة فِغنر الموافقة لها والتي كانت على هذا النحو :

$$Wig.min = -0.01\ , \tag{2}$$

$$Wig.max = 0.27\ . \tag{3}$$

وحساب السالبية أعطى القيمة التالية:

$$\mathcal{N} = 1 - \iint_{\mathbb{R}^2} |W(x,p)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}p = -0.05\ . \tag{4}$$



شكل 4.4: رسم بياني لتغيرات نقاوة الحالات المزاحة و المنضغطة غير الغاوسية قبل وبعد تأثير المحيط الحراري عليها بدلالة الزمن. المنحنى الأزرق يمثل نقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية قبل تأثير المحيط الحراري عليها أما المنحنى البرتقالي فيمثل نقاوة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري عليها.

بالمقارنة مع القيم التي تحصلنا سابقاً و المتعلقة بحساب دالة فِغنر للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية قبل تأثير المحيط الحراري عليها في الباب (3)، نلاحظ تزايد القيم الصغرى وإنخفاظ القيم الكبرى، مع تزايد قيم السالبية.

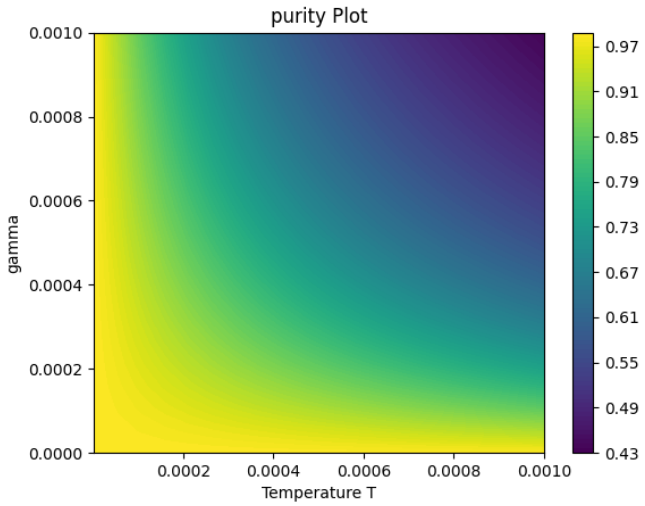
نعيد القيام بنفس العملية، لكن هذه المرة من أجل درجة حرارة ثابتة عند قيمة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 6 \times 10^{-4} \kappa$، لاحظ الشكل 7.4. حساب القيم الصغرى و الكبرى لدالة فِغنر أعطى النتائج التالية :

$$Wig.min = -0.004 \,, \tag{5}$$
$$Wig.max = 0.22 \,. \tag{6}$$

وحساب السالبية أعطى القيمة التالية:

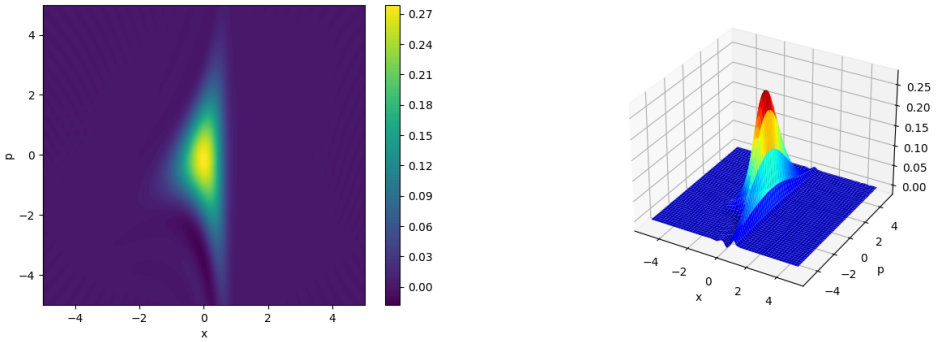
$$\mathcal{N} = 1 - \iint_{\mathbb{R}^2} |W(x,p)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}p = -0.008 \,. \tag{7}$$

بمقارنة هذه النتائج مع النتائج التي تحصلنا عليها سابقة عند درجة حرارة ثابتة عند قيمة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 10^{-4} \kappa$، نلاحظ تزايد القيم الصغرى وإنخفاظ القيم

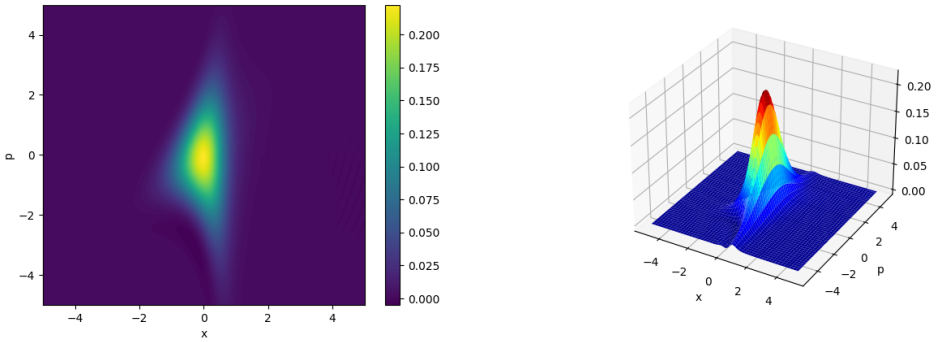


شكل 5.4: رسم بياني لنقاوة الحالة المستقرة $\hat{\rho}_{\infty}^{\mathrm{th}}$ بدلالة درجة الحرارة T و معامل التخامد الحراري γ.

الكبرى مع تزايد قيم السالبية، وعليه نستنتج أنه كلما يزداد التبادل الحراري كلما تصبح الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية أقل غير غاوسية مما كانت عليه.



شكل 6.4: الرسم البياني لدالة فِغنر للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري. وذلك عند درجة حرارة ثابتة عند قيمة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 10^{-4} \kappa$.



شكل 7.4: الرسم البياني لدالة فِغنر للحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية بعد تأثير المحيط الحراري. وذلك عند درجة حرارة ثابتة عند قيمة $T = 6 \times 10^{-4} K$ و معامل التخامد الحراري ثابت عند قيمة $\gamma = 6 \times 10^{-4} \kappa$.

الخاتمة

في هذه المذكرة قدمنا طريقة لتحضير حالات كمومية غير غاوسية ذات متغيرات مستمرة مع إيجاد خصائصها، وذلك لنظام كمومي مفتوح مكون من مهتزين توافقيين.

في البداية، بدأنا بتقديم و تعريف مجموعة من المفاهيم الكمية التي إستعمالناها لاحقاً في تحضير حالات كمومية. بعدها إنتقلنا إلى دراسة الأنظمة الكمومية المفتوحة، وهو مجال بحث شاسع وقدمنا بعض الأمثلة عنها، كما أعطينا تعريفاً عاماً لكل من المعادلة الرئيسية و الحالة المستقرة والتي تلعب دورًا رئيسيًا في دراسة الحالات الكمومية. توجهنا بعد ذلك إلى تحضير الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية ودراسة خصائصها. عن طريق حساب دالة فغنر الخاصة بها، مقدار السالبية، معامل النقاوة، و الموثوقية. و مناقشة تأثير الوسط الحراري وما يحدثه من تغيرات على الحالة الكمية للنظام وخصائصها، حيثُ وجدنا أنه كلما تزداد وتيرة التبادل الطاقوي يزداد تشوه حالة النظام الكمي، يتمثل هذا التشوه في فقدان خصائص الحالة الكمية كتغير طبيعتها الغوسية ودرجة نقاوتها.

تُعتبر الحالات الكمومية غير الغاوسية مجالًا واعدًا في عالم الحساب الكمي، و تعد هذه المذكرة من بين العديد من الأعمال التي أُجريت في هذا المجال، وهذا ما يفتح الطريق أمام إعادة صياغة شاملة للحساب الكمي و تحسين آدائه و تطوير أنظمة حوسبة كمية أكثر قدرة وكفاءة. في غضون ما نعيشه من تطور تقني وتكنولوجي. حيثُ أصبح هذا النهج أداة حاسمة للحصول على نتائج دقيقة للغاية، ويساعدنا في بناء أجهزة الكمبيوتر الكمية في المستقبل.

الملاحق ا

الطريقة الجبرية

في هذا الملحق سنقوم بإيجاد الحالة المستقرة لنظام فيزيائي عبارة عن مهتز توافقي $\hat{a}$ ذو حركة إهتزازية متخامدة بمعدل κ بالطريقة الجبرية.
نقوم فيما يلي بحساب عبارة $\dot{\rho}(t)$:

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \underbrace{\frac{-i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)]}_{I} + \underbrace{\kappa\left(\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)}_{II} , \tag{1}$$

حيث:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{n,l}^{\infty} C_{n,l} \left|n\right\rangle \left\langle l\right| , \tag{2}$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^{\dagger}\hat{a} , \tag{3}$$

تُؤثر مؤثرات الإنشاء $\hat{a}^{\dagger}$ والهدم $\hat{a}$ على أشعة الأساس وتُعطى بالعبارات التالية:

$$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle , \tag{4}$$

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle , \tag{5}$$

$$\left\langle n\right|\hat{a}^{\dagger} = \sqrt{n}\left\langle n-1\right| , \tag{6}$$

$$\hat{a}^{\dagger}\left\langle n\right| = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle . \tag{7}$$

حساب الجزء الاول I:

$$\frac{-i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] = \frac{1}{\hbar}\left(\hat{H}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{H}\right) , \tag{8}$$

من خلال المعادلتين (2) و (3) فإن:

$$\hat{H}\hat{\rho}(t) = \omega \sum_{n,l} C_{n,l}\, \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\, |n\rangle \langle l| \ , \tag{9}$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (9) نجد:

$$\hat{H}\hat{\rho}(t) = \omega \sum_{n,l} C_{n,l}\, n\, |n\rangle \langle l| \ , \tag{10}$$

ننتقل الأن الى عبارة $\hat{\rho}(t)\hat{H}$, بما أن $\hat{H}$ هرميتي وكذلك $\hat{\rho}(t)$:

$$\hat{H}^{\dagger} = \hat{H} \ , \tag{11}$$

$$\hat{\rho}^{\dagger}(t) = \hat{\rho}(t) \ . \tag{12}$$

فإن:

$$(\hat{\rho}\hat{H})^{\dagger}(t) = \hat{H}^{\dagger}\hat{\rho}^{\dagger}(t) = \hat{H}\hat{\rho}(t) \Leftrightarrow \hat{\rho}(t)\hat{H} = (\hat{H}\hat{\rho})^{\dagger}(t) \ , \tag{13}$$

وبالتالي يُمكن إستنتاج عبارة $\hat{\rho}(t)\hat{H}$ بسهولة على هذا النحو:

$$\hat{\rho}(t)\hat{H} = \omega \sum_{n,l} C^{*}_{n,l}\, n\, |l\rangle \langle n| \ , \tag{14}$$

$$= \omega \sum_{n,l} C^{*}_{l,n}\, l\, |n\rangle \langle l| \ . \tag{15}$$

بتعويض المعادلتين (10) و (15) في المعادلة (8) تُصبح هذه الاخيرة بالشكل التالي :

$$\frac{-i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] = \frac{\omega}{\hbar} \sum_{n,l} \left\{ nC_{n,l} - lC^{*}_{l,n} \right\} |n\rangle \langle l| \ , \tag{16}$$

وبما أن $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}^{\dagger}(t)$ فإن $C^{*}_{l,n} = C_{n,l}$ ومنه تُصبح العبارة النهائية للجزء الاول كما يلي:

$$[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] = -i\omega \sum_{n,l} C_{n,l}(n-l)\, |n\rangle \langle l| \ . \tag{17}$$

حساب الجزء الثاني II:

$$\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger} = \hat{a} \sum_{n,l}^{\infty} C_{n,l}\, |n\rangle \langle l|\, \hat{a}^{\dagger} \ , \tag{18}$$

$$= \sum_{n,l}^{\infty} C_{n,l}\hat{a}\, |n\rangle \langle l|\, \hat{a}^{\dagger} \ . \tag{19}$$

بتعويض المعادلتين (5) و (6) كما يلي:

$$\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger} = \sum_{n,l}^{\infty} C_{n,l}\sqrt{n}\,|n-1\rangle\,\sqrt{l}\,\langle l-1|\ , \tag{20}$$

$$= \sum_{n,l=1}^{\infty} \sqrt{n-l}C_{n,l}\,|n-1\rangle\,\langle l-1|\ , \tag{21}$$

$$= \sum_{n,l=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(l+1)}C_{n+1,l+1}\,|n\rangle\,\langle l|\ . \tag{22}$$

قُمنا بإستبدال الدليلين n و l بالدليلين $n+1$ و $l+1$ وذلك لتفادي إنعدام الحدين $n-1$ و $l-1$.

$$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}(t) = \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\sum_{n,l}^{\infty} C_{n,l}\,|n\rangle\,\langle l|\ , \tag{23}$$

$$= \sum_{n,l}^{\infty} C_{n,l}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\,|n\rangle\,\langle l|\ . \tag{24}$$

بتعويض المعادلة (4) نجد:

$$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}(t) = \sum_{n,l}^{\infty} C_{n,l}n\,|n\rangle\,\langle l|\ , \tag{25}$$

ومنه:

$$\hat{\rho}(t)\hat{a}^{\dagger}\hat{a} = (\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho})^{\dagger}(t)\ , \tag{26}$$

$$= \sum_{nl}^{\infty} C_{nl}^{*}n\,|l\rangle\,\langle n|\ , \tag{27}$$

$$= \sum_{nl}^{\infty} C_{ln}^{*}l\,|n\rangle\,\langle l|\ , \tag{28}$$

$$= \sum_{nl}^{\infty} C_{nl}l\,|n\rangle\,\langle l|\ , \tag{29}$$

بتعويض المعادلات (22)، (25)، (29) و (17) في المعادلة (1) نتحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}(t) &= -i\omega\sum_{n,l}^{\infty} C_{n,l}(n-l)\left|n\right\rangle\left\langle l\right| \\ &+\kappa\left\{\sum_{n,l}\sqrt{(n+1)(l+1)}C_{n+1,l+1}\left|n\right\rangle\left\langle l\right| - \frac{1}{2}\sum_{n,l}C_{n,l}n\left|n\right\rangle\left\langle l\right| - \frac{1}{2}\sum_{n,l}C_{n,l}l\left|n\right\rangle\left\langle l\right|\right\}, \\ &= \sum_{n,l}\left[-i\omega(n-l)C_{n,l} + \kappa\left\{\sqrt{(n+1)(l+1)}C_{n+1,l+1} - \frac{1}{2}C_{n,l}(n+1)\right\}\right]\left|n\right\rangle\left\langle l\right|, \end{aligned} \tag{30}$$

ولدينا أيضاً

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \sum_{n,l}\dot{C}_{n,l}\left|n\right\rangle\left\langle l\right|, \tag{31}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\sum_{n,l}\dot{C}_{n,l}\left|n\right\rangle\left\langle l\right| &= \sum_{n,l}\left[-i\omega(n-l)C_{n,l} + \kappa\left\{\sqrt{(n+1)(l+1)}C_{n+1,l+1} - \frac{1}{2}C_{n,l}(n+1)\right\}\right]\left|n\right\rangle\left\langle l\right|, \\ \Rightarrow \dot{C}_{n,l} &= C_{n,l}\left\{-i\omega(n-l) - \frac{\kappa}{2}(n+l) + \kappa\sqrt{(n+1)(l+1)}C_{n+1,l+1}\right\}, \end{aligned} \tag{32}$$

لدينا:

$$\lim_{t\to\infty}\dot{C}_{n,l} = 0, \tag{33}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}C_{n,l}\left\{-i\omega(n-l) - \frac{\kappa}{2}(n+l)\right\} + \kappa\sqrt{(n+1)(l+1)}C_{n+1,l+1} &= 0, \\ \Rightarrow C_{n+1,l+1} &= C_{n,l}\frac{\frac{\kappa}{2}(n+l) + i\omega(n-l)}{\kappa\sqrt{(n+1)(l+1)}}, \end{aligned} \tag{34}$$

نريد الأن إستنتاج $C_{n,l}$ بحساب $C_{n+1,l+1}$ وذلك بتعويض الدليلين n و l بقيم مختلفة كل مرة:

$$C_{1,1} = C_{0,0}\frac{\frac{\kappa}{2}(0+0) + i\omega(0-0)}{\kappa\sqrt{(0+1)(0+1)}} = 0, \tag{35}$$

أي:

$$C_{2,2} = C_{1,1} \times 0 = 0 \ , \tag{36}$$
$$C_{3,3} = C_{2,2} \times 0 = 0 \ , \tag{37}$$
$$\tag{38}$$

إلى آخره، ومنه يُمكن كتابة مصفوفة الكثافة $\hat{\rho}(t)$ كما يلي:

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & C_{0,2} & \cdots & C_{0,l} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,l} \\ C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n,0} & C_{n,1} & C_{n,2} & \cdots & C_{n,l} \end{pmatrix} \tag{39}$$

جميع عناصر هذه المصفوفة منعدم ماعدا مركبة العنصر $C_{0,0}$ ومنه:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{n,l} C_{n,l} \left|n\right\rangle \left\langle l\right| \ ,$$
$$= C_{\infty} \left|0\right\rangle \left\langle 0\right| \ , \tag{40}$$
$$\tag{41}$$

وبما أن $\hat{\rho} = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|$ يُمكن أن نستنتج أن :

$$\left|\psi\right\rangle = \sqrt{C_{0,0}} \left|0\right\rangle \ , \tag{42}$$
$$\left\langle\psi\right| = \sqrt{C_{0,0}} \left\langle 0\right| \ , \tag{43}$$

ومنه:

$$C_{0,0} = 1 \ , \tag{44}$$

أي:

$$\left|\psi\right\rangle = \left|0\right\rangle \ . \tag{45}$$

وهي الحالة المستقرة لهذا النظام.

الملاحق ب

حالة الطور التكعيبي

إيجاد الشروط التي تحققها $|\varphi(x)|^2$ لتكون $\varphi(x)$ حلاً فيزيائياً مقبولاً.

إفترضنا أن $c_5 = 0$ و $c_3 = 0$، فتُصبح معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى:

$$ic_2\varphi' - \left(c_4x^2 + c_1x - \frac{i}{2}c_3\right)\varphi = 0 \ , \tag{1}$$

وعليه حل هذه المعادلة هو:

$$\varphi(x) = Ae^{\frac{-i}{c_2}(\frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_4}{3}x^3)} \ , \tag{2}$$

لدينا نضع:

$$c_1 = \Re c_1 + \Im c_1 \ , \tag{3}$$
$$c_2 = \Re c_2 + \Im c_2 \ , \tag{4}$$
$$c_3 = \Re c_3 + \Im c_3 \ , \tag{5}$$
$$c_4 = \Re c_4 + \Im c_4 \ , \tag{6}$$
$$c_5 = \Re c_5 + \Im c_5 \ , \tag{7}$$

و

$$g_1, g_2 \in \mathbb{R} \ , \tag{8}$$

نتحصل على طويلة $\varphi(x)$ كما يلي:

$$|\varphi(x)|^2 = A^2 \exp\left[\frac{(\Re c_2\Im c_1 - \Re c_1\Im c_2)x^2}{(\Re c_2)^2 + (\Im c_2)^2} + \frac{-2(\Re c_4\Im c_2 - \Re c_2\Im c_4)x^3}{(3(\Re c_2)^2 + (\Im c_2)^2)}\right] \ , \tag{9}$$

واضح أنه من أجل أن تكون $|\varphi(x)|^2$ مقننة يجب أن يكون:

$$\frac{(\Re c_2 \Im c_1 - \Re c_1 \Im c_2)x^2}{(\Re c_2)^2 + (\Im c_2)^2} < 0 \ , \tag{10}$$

أي:

$$\Re c_2 \Im c_1 - \Re c_1 \Im c_2 < 0 \ , \tag{11}$$

وبما أن:

$$c_1 = \Re c_1 + \Im c_1 \ , \tag{12}$$
$$c_2^* = \Re c_2 - \Im c_2 \ , \tag{13}$$

فإن:

$$c_1 c_2^* = \Re c_1 \Re c_2 + \Im c_1 \Im c_2 + \Re c_2 \Im c_1 - \Re c_1 \Im c_2 \ , \tag{14}$$

أي:

$$\Re c_2 \Im c_1 - \Re c_1 \Im c_2 = \Im \left(c_1 c_2^* \right) \ , \tag{15}$$
$$\Re c_1 \Re c_2 + \Im c_1 \Im c_2 = \Re \left(c_1 c_2^* \right) \ . \tag{16}$$

من خلال المعادلة (11) نستنتج أنه لتكون $|\varphi(x)|^2$ مقننة يجب أن يكون:

$$\Im \left(c_1 c_2^* \right) < 0 \ , \tag{17}$$

وهذا معناه أن:

$$\begin{aligned} \Im \left(c_1 c_2^* \right) < 0 \Leftrightarrow \Im \left(\frac{-i}{2} \left(g_1^2 - g_2^2 \right) \right) < 0 \\ \Rightarrow \frac{-1}{2} \left(g_1^2 - g_2^2 \right) < 0 \Rightarrow g_1^2 - g_2^2 > 0 \Rightarrow g_1^2 > g_2^2 \\ \Rightarrow |g_1| > |g_2| \ , \end{aligned} \tag{18}$$

وهو الشرط الأول، ننتقل الأن لإيجاد الشرط الثاني حيثُ يجب أن يكون :

$$\frac{-2(\Re c_4 \Im c_2 - \Re c_2 \Im c_4)x^3}{3(\Re c_2^2 + \Im c_2^2)} = 0 \ , \tag{19}$$

أي:

$$\Re c_4 \Im c_2 - \Re c_2 \Im c_4 = 0 \ , \tag{20}$$

وبما أن:

$$c_2 = \Re c_2 + \Im c_2 \ , \tag{21}$$
$$c_4^* = \Re c_4 - \Im c_4 \ , \tag{22}$$

فإن:

$$c_2 c_4^* = \Re c_2 \Re c_4 + \Im c_2 \Im c_4 + \Re c_4 \Im c_2 - \Re c_2 \Im c_4 \ , \tag{23}$$

أي:

$$\Re c_4 \Im c_2 - \Re c_2 \Im c_4 = \Im \left(c_2 c_4^* \right) \ , \tag{24}$$
$$\Re c_2 \Re c_4 + \Im c_2 \Im c_4 = \Re \left(c_2 c_4^* \right) \ , \tag{25}$$

من خلال المعادلة (20) نستنتج أنه لتكون $|\varphi(x)|^2$ مقننة يجب أن يكون:

$$\Im \left(c_2 c_4^* \right) = 0 \ , \tag{26}$$

أي:

$$c_2 c_4^* \in \mathbb{R} \ , \tag{27}$$

وهذا معناه أن:

$$\Im \left(c_2 c_4^* \right) = 0 \Leftrightarrow \Im \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \left(g_1 - g_2 \right) 2 g_3 \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \left(g_1 - g_2 \right) \Im \left(i g_3 \right) = 0 \ , \tag{28}$$

وبما أن:

$$|g_1| > |g_2| \ , \tag{29}$$

فإن:

$$g_3 = \Re g_3 + i \Im g_3 \Leftrightarrow i g_3 = - \Im g_3 + i \Re g_3 \Rightarrow \Im \left(i g_3 \right) = \Re g_3 \ , \tag{30}$$

ومنه:

$$\Im \left(c_2 c_4^* \right) = 0 \Rightarrow \Re g_3 = 0 \ , \tag{31}$$

وعليه نعتبر $\varphi(x)$ حل فيزيائي مقبول ما دامت تحقق الشرطين التاليين:

$$|g_1| > |g_2| \ , \tag{32}$$
$$\Re g_3 = 0 \ . \tag{33}$$

الملاحق ج

برامج المحاكاة المستعملة

برامج المحاكاة الواردة في هذه المذكرة تم إنجازها بواسطة لغة البرمجة بايثون و بإستعمال برمجية كيوتيب. هذه البرمجية عبارة عن صندوق أدوات برمجي لمحاكاة الأنظمة الكمومية في الحاسوب. كما تم الإستعانة بلغة البرمجة ماثيماتيكا لحل المعادلات التفاضلية ورسم المنحنيات البيانية لدالة فغنر لحالات كمومية مختلفة.

في هذا الملحق سنشرح طريقة عمل مجموعة من البرامج الخاصة بلغة البايثون والمستعملة في تنفيذ برامج المحاكاة.

تفعيل برمجية كيوتيب

قبل إنجاز أي برنامج نحتاج أولا إلى تفعيل برمجية كيوتيب عن طريق التعليمة الموجودة في السطر 1، حيثُ يتم إستيراد العديد من المكتبات والوحدات و التي تمكننا من الوصول إلى مجموعة واسعة من الدوال والأدوات لحسابات ميكانيكا الكم.

```
1    pip install qutip
2
```

إستيراد المكتبات والدوال المتاحة في كيوتيب

تمكننا برمجية كيوتيب من الوصول إلى مجموعة شاملة من الدوال والأدوات التي تُستخدم في حسابات ميكانيكا الكم، ويتم منحها ترميزا معيناً كما هو موضح في الأسطر من 1 الى 5، إليك طريقة عمل هذا البرنامج.

```
1   import qutip as qt
2   import numpy as np
3   import matplotlib as mpl
4   import matplotlib.pyplot as plt
5   import matplotlib.cm as cm
6
```

في السطر رقم 1 نقوم بإستيراد مكتبة qutip ونعطيها ترميزاً qt، يتيح ذلك الوصول إلى الوظائف التي توفرها مكتبة qutip باستخدام الترميز qt. في السطر رقم 2 نقوم بإستيراد مكتبة numpy ونخصص لها ترميز np، وهي مكتبة رقمية توفر وظائف وهياكل بيانات للعمليات العددية الفعالة في بايثون. يستورد السطر رقم 3 مكتبة matplotlib وسنرمز لها بـ mpl، وهي عبارة عن مكتبة تخطيطية في بايثون والتي تُستعمل لتصور البيانات، يستورد السطر رقم 4 وحدة pyplot من matplotlib ويخصها بالرمز plt، يوفر pyplot مجموعة من الوظائف التي يتم استخدامها لإنشاء المنحنيات البيانية. في السطر رقم 5 نقوم بإستيراد matplotlib ونعطيها ترميز cm، توفر هذه الأخيرة مجموعة من الألوان التي يمكن استخدامها في المنحنيات البيانية.

الرسم البياني لدالة فِغنر الخاصة بحالة الفراغ

من خلال هذا البرنامج تمكنا من حساب ورسم دالة فِغنر الخاصة بـ $|0\rangle$، إليك طريقة عمل هذا البرنامج:

في السطر 4 يتم تعريف الحالة الكمومية $|0\rangle$ باستخدام دالة basis من qutip ، هذه الحالة تمثل حالة الكيوبت $|0\rangle$. في السطرين 7 و 8 يتم إنشاء مجموعتين من القيم المتساوية المسافة بين x و p ، باستخدام دالة linspace من numpy ، تحدد هذه القيم النطاق الذي سيتم حساب دالة Wigner ضمنه. ثم في السطر 10 يتم حساب دالة Wigner المرتبطة بالحالة الكمومية المحددة (state) باستخدام دالة wigner من qutip ، تقوم هذه الدالة بحساب دالة Wigner للحالة المحددة والنطاقات المحددة بواسطة x و p . في السطر 12 يتم إنشاء مصفوفتي X و P باستخدام دالة meshgrid من numpy ، تستخدم هذه المصفوفتين لإنشاء شبكة نقاط في مستوى x-p لرسم دالة Wigner .

ننتقل الآن لرسم دالة فِغنر الخاصة بـ $|0\rangle$ التي تحصلنا عليها، في السطرين 15 و 16 يتم إنشاء رسم ثلاثي الأبعاد باستخدام دالتين figure و add-subplot من matplotlib . في السطر 18 يُنجز رسم دالة Wigner على شكل سطح باستخدام الدالة plot-surface على المحاور التي تم إنشاؤها (ax) . يتم بعد ذلك تعيين تسميات لمحاور x و p باستخدام الدالتين set-xlabel و set-ylabel وذلك في السطرين 20 و 21. ثم يقوم في السطرين 23 و 24 بحفظ الرسم كملف صورة (ket-0-0.png) باستخدام الدالة savefig ومن ثم يتم تنزيله باستخدام الدالة files.download .

ننتقل الآن إلى إنشاء رسم بياني عبارة عن مناطق ملونة تمثل قيم المتغيرات، في الاسطر من 29 إلى 35، يتواصل البرنامج بتعريف مجموعات قيم جديدة بنطاق أصغر (3- إلى 3) لرسم مفصل أكثر، ثم

يقوم بإنشاء خريطة ألوان Wigner باستخدام الدالة wigner-cmap من qutip ، والتي تعيد تعيين قيم دالة Wigner إلى ألوان. ثم يتم إنشاء رسم كونتور باستخدام الدالة contourf من matplotlib لتصور دالة Wigner مع منحنيات ملونة. يتم تعيين خريطة الألوان إلى 'cm . Spectral' ويتم تعيين نطاق التوحيد من (W0.max()- إلى في.(W0.max() الأسطر من 37 إلى 45 يتم إضافة شريط ألوان إلى الرسم باستخدام الدالة colorbar . ثم تعيين تسميات لمحاور x و p مرة أخرى. ثم حفظ الرسم كملف صورة آخر (ket-2-0.png) وتنزيله. أخيرًا، يتم استدعاء (plt.show لعرض الرسم الأخير.

بنفس الطريقة يتم حساب ورسم دالة فِغنر الخاصة بـ $|1\rangle$.

```
1
2     # wigner of state |0
3     from qutip import wigner, basis
4     state = basis(2, 0)  # qubit state |0
5
6     # Set the range for x and p axes
7     x = np.linspace(-5, 5, 100)
8     p = np.linspace(-5, 5, 100)
9     # Calculate the Wigner function for the state |0
10    W0 = wigner(state, x, p)
11
12    X, P = np.meshgrid(x, p)
13
14    # Create a 3D plot
15    fig = plt.figure()
16    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
17    # Plot the Wigner function as a surface
18    ax.plot_surface(X, P, W0, cmap='jet')
19    # Set labels for x and p axes
20    ax.set_xlabel('x')
21    ax.set_ylabel('p')
22    # Save and download the plot
23    plt.savefig('ket-0.png')
24    files.download('ket-0.png')
25    # Show the plot
26    plt.show()
27
28    # Set a new range for x and p axes
29    x = np.linspace(-3, 3, 100)
30    p = np.linspace(-3, 3, 100)
31    wmap = qt.wigner_cmap(W0)  # Generate Wigner colormap
32    # Set the normalization range
33    nrm = mpl.colors.Normalize(-W0.max(), W0.max())
34    #Create a detailed drawing of the Wegner function with
      colored curves
35    fig=plt.contourf(x,p,W0,200,cmap=cm.Spectral, norm=nrm)
36    # Add a colorbar
```

```
    cbar = plt.colorbar(fig)
    # Set labels for x and p axes
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('p')
    # Save and download the plot
    plt.savefig('ket-0-2.png')
    files.download('ket-0-2.png')
    # Show the plot
    plt.show()

```

التحقق العددي من النتائج في المثال الخاص بالمهتز التوافقي المتخامد

تم إنشاء منحنى بياني للموثوقية بدلالة الزمن وذلك بين $\hat{\rho}_{\text{th}}$ وهي عبارة عن حالة كمية حرارية إفترضنا أنها حالة إبتدائية للنظام و $|0\rangle$ الحالة المستقرة للنظام. وذلك عن طريق هذا البرنامج الذي سنوضح كيفية عمله في هذه الخطوات الرئيسية:

في الاسطر من 2 إلى 8، يتم تعريف بعض المتغيرات مثل dim -البعد- و kappa و Omega و hbar و Kb و T و nth. تمثل هذه المتغيرات معاملات وقيمًا مختلفة في النظام الكمي الذي يتم دراسته.

في الأسطر من 11 إلى 17، تتم إنشاء الهدم b (destruction operator) باستخدام qutip وتعريف بعض المتغيرات الأخرى مثل ti و tf و Nt و t . تستخدم هذه المتغيرات لتحديد نطاق الزمن وعدد النقاط في النتيجة. نقوم في السطرين 23 و 25 بإنشاء الحالة الحرارية rho-0 باستخدام دالة thermal-dm من qutip . بعد ذلك نستخدم دالة mesolve من qutip لحل المعادلة الرئيسية للنظام الكمي. يتم تسمية النتيجة بـ result-ideal -وهي تمثل $\hat{\rho}(t)$-.

في السطرين 29 و 30 تقوم الحلقة بحساب قيمة الموثوقية -fidelity بين result-ideal والحالة الأساسية $|0\rangle$. هذا يتم باستخدام دالة fidelity من qutip . نسمي القيمة الناتجة بـ fid-1 وهي قائمة تحتوي على قيم الموثوقية في كل نقطة زمنية. في الأسطر من 33 إلى 39 يتم رسم الموثوقية كدالة للزمن باستخدام دالة plot من matplotlib . يتم حفظ الرسم البياني في ملف Fidelity-Exo1.png ويتم عرض الرسم البياني باستخدام دالة show من matplotlib .

في الأسطر 42 إلى 48 يتم حساب الوقت الذي يتجاوز فيه الموثوقية العتبة -threshold- باستخدام الدالة np.argmax للعثور على أول مؤشر يفي بالشرط fid-1 >= threshold . يتم استرداد الوقت المقابل لهذا المؤشر من قائمة الزمن t ويتم عرض النتيجة بواسطة print .

كل المنحنيات الخاصة بالموثوقية بدلالة الزمن تم حسابها بهذه الطريقة، بالإضافة إلى المنحنى البياني للنقاوة بدلالة الزمن حيثُ يتم فقط إستبدال دالة fidelity من qutip بقانون حساب معامل النقاوة $\mu(t) = \text{Tr}\hat{\rho}^2(t)$.

```
# Define system parameters
dim=30
kappa=1.0
Omega=10**-2*kappa
hbar=1.056*10**-34
Kb=1.380649*10**-23
T=10**-3*kappa
nth=(np.exp(hbar*Omega/Kb/T)-1)**-1

# Create the destruction operator
b=qt.destroy(dim)

# Define time range and number of points
ti=0.0
tf=20.0/kappa
Nt=10**2
t=np.linspace(ti,tf,Nt)
# Initialize fidelity array
fid_1 = np.zeros(Nt)
# Define the Hamiltonian
H=0*b
# Create the initial thermal state
rho_0 = qt.thermal_dm(dim, nth)
# Solve the master equation
result_ideal = qt.mesolve(H, rho_0, t, [np.sqrt(kappa) * b])
# Define the  ket state
ket0 =qt.ket2dm(qt.basis(dim,0))
# Calculate fidelity at each time point
for j in range(Nt):
fid_1[j] = qt.fidelity(result_ideal.states[j], ket0)
#plot Exo1
# Plot fidelity as a function of time
plt.figure()
plt.plot(t,fid_1)
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Fidelity')
plt.savefig('Fidelity-Exo1.png')
files.download('Fidelity-Exo1.png')
plt.show()
# Find the time when fidelity exceeds a threshold
# Set the desired threshold value
threshold = 0.999
# Find the index of the first element in the fid_1 array
that exceeds or equals the threshold
index_threshold = np.argmax(fid_1 >= threshold)
# Retrieve the corresponding time value from the t array
using the index_threshold
time_threshold = t[index_threshold]
# Print the time when fidelity exceeds the threshold
```

```
    print("Time when Fidelity exceeds", threshold, ":",
    time_threshold)

```

محاكاة الحالات المزاحة والمنضغطة غير الغاوسية

يقوم هذا البرنامج بحساب الحالة المستقرة للنظام $\hat{\rho}_{\infty}$ و التي يُرمز لها في البرنامج بـ rho_s، عن طريق استدعاء دالة qt.steadystate للنظام الكمي الموصوف بـ المؤثر $\hat{f}$ و الذي يُرمز له في البرنامج بـ f . وحساب دالة فِغنر الموافقة لها والتي يُرمزلها في البرنامج بـ wig3 . و باستخدام دالة qt.wigner ورسم هذه الأخيرة كان باستخدام دالة plt.contourf ، مع حساب القيم الكبرى wig3.max() والقيم الصغرى wig3.min() .

ثم يتم إنشاء رسم لدالة فِغنر بواسطة المخطط البياني contourf وحفظ الرسم البياني في ملف وعرضه. و يتم كذلك رسم دالة فِغنر بواسطة الرسم الثلاثي الأبعاد plot-surface وحفظ الرسم البياني في ملف وعرضه. بعد ذلك يقوم البرنامج بحساب قيمة السالبية negativity باستخدام دالة التكامل العددي trapz على دالة فغنر wig3 ، بعد ذلك يقوم بعرض النتيجة بواسطة print .

قبل ذلك تم تعريف مؤثر الهدم $\hat{b}$ و الذي يُرمز له في البرنامج بـ b ، و تحديد بعد الفضاء الشعاعي هلبرت (dim) ، كما عرفنا العديد من المعاملات (g1,g2,g3,g4,g5,kappa) والتي تُستخدم لاحقاً في حساب المؤثر $\hat{f}$ و من ثمَ إستكمال تنفيذ بقية الأوامر.

```
# dimension of Hilbert space
dim=100

# destruction operator
b=qt.destroy(dim)

# parameters
g1=1.0
g2=3.0*g1/7.0
g3=np.sqrt(2.0)*(-1.0+1j)/7.0*g1
g4=np.sqrt(2.0)*(1.0+1j)/7.0*g1
g5=(g3+g4)/2.0

kappa=1.0

# f operator
f=g1*b+g2*b.dag()+g3*b**2+g4*b.dag()**2+g5*(b*b.dag()+b.dag()*b)

# find the steady state
rho_s=qt.steadystate(0*b,[f])
```

```
x0=5.0
p0=5.0
N=100

# Create a set of serial numbers
x=np.linspace(-x0,x0,N)
p=np.linspace(-p0,p0,N)

# wigner function
wig3=qt.wigner(rho_s,x,p)

# Generate Wigner colormap
fig, ax = plt.subplots(1, 1)
plt1=ax.contourf(x, p, wig3, 100)
fig.colorbar(plt1, ax=ax)
plt.savefig('wigner of state x-1.png')
files.download('wigner of state x-1.png')
plt.show()

X, P = np.meshgrid(x, p)
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, P, wig3, cmap='jet')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('p')
plt.savefig('wigner of state x-2.png')
files.download('wigner of state x-2.png')
plt.show()

print(wig3.max())
print(wig3.min())
# negativity
negativity =1- np.trapz(np.trapz(np.abs(wig3), p, axis=0), x)
#  negativity =1- sp.integrate.simps(sp.integrate.simps(np.abs(
    wig1), x, axis=0), p)
print("negativity:", negativity)
```

حساب الموثوقية

يحسب هذا البرنامج موثوقية بين $\hat{\rho}_{\infty}^{\text{th}}$ و $\hat{\rho}_{th}$ و اللتان يُرمز لهما في البرنامج على التوالي بـ rho-s و rho-th، بدلالة قيم مختلفة لدرجة الحرارة T ومعامل التخامد الحراري γ والذي يُرمز له في البرنامج بـ gamma . إليك طريقة عمل هذا البرنامج:

1. في الاسطر من 1 إلى 12، يتم تعريف كل من مؤثر الهدم $\hat{b}$ و الذي يُرمز له في البرنامج بـ b ، و تحديد بعد الفضاء الشعاعي هلبرت (dim) ، كما عرفنا العديد من المعاملات (g1,g2,g3,g4,g5,kappa)

والتي تُستخدم لاحقاً في حساب المؤثر $\hat{f}$.

2. في الأسطر من 13 إلى 16 يتم تعريف الثوابت kappa ، Omega ، hbar ، و Kb بقيمها الخاصة.

3. في الأسطر من 18 إلى 21 نُمثل المتغيرات T-i , T-f و N-T درجة الحرارة الأولية ودرجة الحرارة النهائية وعدد قيم درجات الحرارة التي يجب مراعاتها على التوالي. يتم استخدام دالة np.linspace لإنشاء مصفوفة T من قيم درجة الحرارة المتباعدة بالتساوي N-T بين T-i و T-f .

4. في الأسطر من 23 إلى 26 نُمثل المتغيرات gamma-i , gamma-f و N-gamma معدل التخامد الأولي ومعدل التخامد النهائي وعدد قيم معدل التخامد التي يجب مراعاتها على التوالي. تُستخدم دالة np.linspace لإنشاء مصفوفة gamma من قيم معدل التخامد المتباعدة بالتساوي N-gamma بين gamma-i و gamma-f .

5. في الأسطر من 27 إلى 30 تم إنشاء الموثوقية على شكل مصفوفة فارغة بأبعاد N-gamma , N-T لتخزين الموثوقية المحسوبة لكل مزيج من درجة الحرارة ومعدل التخامد الحراري ,تتكرر حلقتان متداخلتان على كل قيمة درجة حرارة T[i] وكل قيمة لمعدل التخامد الحراري [j] .

6. في السطر 31 يتم حساب المتغير nth والذي يُمثل العدد المتوسط لكمات الطاقةn_{th}.

7. في السطر 33 يتم إنشاء المؤثر f باستخدام المعاملات المحددة g1 و g2 و g3 و g4 و g5 , b ومؤثر الهدم b .

8. في السطر 34 نستخدم الدالة qt.steadystate لحساب rho-s مصفوفة الكثافة للحالة المستقرة للنظام الكمي، مع الأخذ في الاعتبار التأثيرات الناتجة عن المؤثر f .

9. في السطر 35 تستخدم الدالة qt.steadystate مرة أخرى لحساب rho-th مصفوفة كثافة الحالة المستقرة للنظام الكمي، مع الأخذ في الاعتبار التأثيرات الناجمة عن المؤثر f ، بالإضافة إلى المعاملات الإضافية المتعلقة بالبيئة الحرارية المتمثلة في معدل التخامد الحراري gamma والعدد المتوسط لكمات الطاقة nth .

10. في السطر 37 يتم حساب الدقة بين مصفوفتي كثافة للحالة المستقرة rho-s و rho-th باستخدام الدالة qt.fidelity ، ويتم تخزين النتيجة في مصفوفة الموثوقية وفقاً للمؤشرات الموافقة [i ، j] .

11. في السطر 39 يتم عرض تقدم الحساب بنسبة مئوية بعد اكتمال كل تكرار في الحلقة .

12. في الأسطر من 40 إلى 46 يتم استخدام الدالة numpy.meshgrid لإنشاء شبكة من قيم درجة الحرارة ومعدل التخامد, ثم يتم استخدام plt.contourf لإنشاء رسم بياني ثنائي الأبعاد يُمثل النتائج بإستخدام الألوان، يتم إضافة شريط الألوان إلى الرسم باستخدام fig.colorbar و يتم إضافة عنوان للرسم، ويتم تسمية المحاور وفقًا لذلك.

13. في السطر 48 يتم عرض الرسم البياني باستخدام plt.show .

```
# dimension of Hilbert space
dim = 50

# destruction operator
b = qt.destroy(dim)

# Define the coefficients for f
g1 = 1.0
g2 = 3.0 * g1 / 7.0
g3 = np.sqrt(2.0) * (-1.0 + 1j) / 7.0 * g1
g4 = np.sqrt(2.0) * (1.0 + 1j) / 7.0 * g1
g5 = (g3 + g4) / 2.0
kappa = 1.0  # Define kappa value
Omega = 10**6
hbar = 1.056 * 10**-34
Kb = 1.380649 * 10**-23

T_i=10**-6
T_f=10**-3
N_T=20
T=np.linspace(T_i,T_f,N_T)  # Multiple T values

gamma_i=0.0
gamma_f=10**-3
N_gamma=20
gamma=np.linspace(gamma_i,gamma_f,N_gamma) # Multiple gamma
    values
fidelities = np.zeros([N_T,N_gamma])# Zero matrix
# loop repetition
for i in range(N_T):
for j in range(N_gamma):
nth = (np.exp(hbar * Omega / Kb / T[i]) - 1)**-1  # Define nth
    value
#Definition of Operators
f = g1 * b + g2 * b.dag() + g3 * b**2 + g4 * b.dag()**2 + g5 * (
    b*b.dag() + b.dag()*b)
rho_s = qt.steadystate(0 * b, [np.sqrt(kappa) * f])
rho_th = qt.steadystate(0 * b, [np.sqrt(kappa) * f, np.sqrt(
    gamma[j] * (nth + 1)) * b, np.sqrt(gamma[j] * nth) * b.dag()
```

```
    ])
# Calculating Fidelity between States rho_s and rho_th and
    Storing the Result in the Fidelities Array
fidelities[i,j]=qt.fidelity(rho_s, rho_th)

print('progress: %2.0f' % ((i+1)/N_T*100))
X, Y = np.meshgrid(T, gamma)
fig,ax=plt.subplots(1,1)
cp = ax.contourf(X, Y, fidelities,100)
fig.colorbar(cp) # Add a colorbar to a plot
ax.set_title('Fidelity Plot')
ax.set_xlabel('Temperature T')
ax.set_ylabel('gamma')

plt.show()

```

الملاحق د

قاموس المصطلحات

انجليزي	عربي
The energy states basis	أساس حالات الطاقة
Isolated quantum systems	الأنظمة الكمومية المعزولة
Open quantum systems	الأنظمة الكمومية المفتوحة
Composite systems	الأنظمة المركبة
Quantum entanglement	تشابك الكمي
The tensor product	جداء الموتري
Thermal states	حالة الحرارية
Energy eigenstate	حالة الذاتية للطاقة
The quantum state	حالة الكمية
Mixed state	حالة المختلطة
Steady state	حالة المستقرة
Pure state	حالة النقية
Negativity	سالبية
quanta mean-value	عدد المتوسط لكمات الطاقة
The phase space	فضاء الطوري
The eigenvalues of the quadratures	قيم الذاتية للتربيعات
The eigenvalue	قيمة الذاتية
Mean value	قيمة المتوسطة
The probability density	كثافة الإحتمالية
Master equation	معادلة الرئيسية
Classical harmonic oscillator	مهتز التوافقي الكلاسيكي
Quantum harmonic oscillator	مهتز التوافقي الكمي
Fidelity	موثوقية
Vibration frequency	النبض

Normalization coefficient	ثابت التقنين
Cubic phase state	حالة الطور التكعيبي
Vacuum state	حالة الفراغ
Gaussian state	حالة غاوسية
Non-Gaussian state	حالة غير غاوسية
The wave function	دالة الموجة
Wigner Function	دالة فِيغنر
State vector	شعاع الحالة
Imaginary number	عدد تخيلي
Real number	عدد حقيقي
Vector space	فضاء شعاعي
Hilbert space	فضاء هلبرت
Particle mass	كتلة الجسيم
The hermite polynomials	كثير حدود هرميتي
Operator	مؤثر
Creation operator	مؤثر الإنشاء
Jump operators	مؤثر التبادل الطاقوي
Density operator	مؤثر الكثافة
Position operator	مؤثر الموضع
Annihilaion operator	مؤثر الهدم
Momentum operator	مؤثر كمية الحركة
Liouville superoperator	مؤثر ليوفيل الفائق
Density matrix	مصفوفة الكثافة
Matrix	مصفوفة
Equation of eigenvalues	معادلة القيم الذاتية
Dffierential equation	معادلة تفاضلية
The Schrödinger equation	معادلة شرودنغر
Purity coefficient	معامل النقاوة
The damping rate	معدل التخامد
Quantum mechanics	ميكانيكا الكم
A physical system	نظام فيزيائي
Hamiltonian	هاملتوني

المصادر

[1] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloe, F.: Quantum mechanics, volume .1 Quantum Mechanics **1** (1986) 898

[2] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M.: Table of integrals, series, and products. Academic press (2014)

[3] Uhlmann, A.: The "transition probability" in the state space of a□-algebra. Reports on Mathematical Physics **9**(2) (1976) 279--273

[4] Jozsa, R.: Fidelity for mixed quantum states. Journal of modern optics **41**(12) (1994) 2323--2315

[5] Wigner, E.P.: On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. Part I: Physical Chemistry. Part II: Solid State Physics (1997) 120--110

[6] García-Patrón, W.C.P.S., Shapiro, R.C.N.R.T.: Jh lloyd s gaussian quantum information. Rev. Mod. Phys **84**(2) (2012) 621

[7] Ferraro, A., Olivares, S., Paris, M.G.: Gaussian states in continuous variable quantum information. arXiv preprint quant-ph/0503237 (2005)

[8] Morin, O.: Non-Gaussian states and measurements for quantum information. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI (2013)

[9] Sénéchal, D.: Mécanique quantique. Université de Sherbrooke (2000)

[10] Gardiner, C., Zoller, P.: Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics. Springer Science & Business Media (2004)

[11] Breuer, H.P., Petruccione, F., et al.: The theory of open quantum systems. Oxford University Press on Demand (2002)

[12] Rivas, Á., Huelga, S.F.: Introduction to the time evolution of open quantum systems. arXiv preprint arXiv:1104.5242 (2011)

[13] Davies, E.B.: Quantum theory of open systems. Academic Press (1976)

[14] Brunelli, M., Houhou, O., Moore, D.W., Nunnenkamp, A., Paternostro, M., Ferraro, A.: Unconditional preparation of nonclassical states via linear-and-quadratic optomechanics. Phys. Rev. A **98** (2018) 063801

[15] Brunelli, M., Houhou, O.: Linear and quadratic reservoir engineering of non-gaussian states. Physical Review A **100**(1) (2019) 013831

[16] Houhou, O., Moore, D.W., Bose, S., Ferraro, A.: Unconditional measurement-based quantum computation with optomechanical continuous variables. Phys. Rev. A **105** (2022) 012610