UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA

Faculté des Sciences
Département des Sciences de la Matière

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Physique Théorique des hautes énergies et cosmologie

Électrodynamique quantique et décalage de Lamb

par

Ismail DJEDDOU
et
Mohamed Amine ZEBBICHE

Supervisé par : Dr Noureddine BOUAYED

soutenu le 20 octobre 2016 devant le jury composé de :

Dr. DEKAR Lyes	Maitre de Conférences A	UYFM, Médéa	Président
Prof. KOUADIK Smain	Professeur	UYFM, Médéa	Examinateur
Dr. ZITOUNI Hannachi	Maitre de Conférences A	UYFM, Médéa	Examinateur
Dr. BOUAYED Noureddine	Maitre de Conférences A	USDB, Blida	Rapporteur

Médéa, 2016

Dédicace

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mes parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A mes beaux frères ainsi qu'à mes sœurs pour leur tendresse, leur complicité et leur présence .

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis et mes collègues, pour les moments qu'on a passé ensemble.

Merci
Ismail DJEDDOU

Dédicace

Je dédie ce travail à :

mes parents, vous être toujours là pour me soutenir et m'encourager au cours de la réalisation de ce mémoire, merci du fond du cœur. Je dédie ce mémoire à mes frères, Chems eddine et Abderahmane et à mes sœurs.

Et également, je dédie aussi à toute ma famille

A mes camarades surtout : Soufta Mohamed Ali, MEGDACHE Zoheyr

Spécial dédicace à : Dr BENREKIA Ahmed Redha

A tous les membres de ma promotion.

A mes amis.

Merci
Mohamed Amine ZEBBICHE

Remerciements

Nos remerciements vont tout d'abord à Allah le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a accordées.

Nous remercions nos parents qui depuis notre jeune âge, nous ont encouragé et nous ont procuré tous les moyens nécessaires à notre réussite.

Nous remercions respectueusement notre encadreur Dr. BOUAYED Noureddine qui a accepté de nous encadrer et d'aborder le thème de Électrodynamique quantique et décalage de Lamb et nous a beaucoup aidé et encouragé.

Nos remerciements à tous les membres du jury : Pr KOUADIK Smail, Dr ZITOUNI Hannachi et Dr DEKAR Liès qui nous ont fait l'honneur d'évaluer notre travail.

Nous remercions très spécialement SAADAT Djilali qui nous a fortement aidé concernant le programme Latex afin d'écrire notre mémoire.

Résumé

Dans une expérience réalisée en 1947, Lamb et Retherford ont montré que les niveaux du deuxième état quantique de l'atome d'hydrogène ne sont pas totalement en accord avec les prédictions de la théorie de Dirac. En fait le décalage entre les états $2P_{3/2}$ et $2P_{1/2}$ reflète les prédictions de la théorie de Dirac. Par contre, les états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ qui selon le formalisme de Dirac sont dégénérés, ne le sont pas en fait. L'expérience de Lamb montre que ces derniers sont décalés l'un de l'autre d'un intervalle correspondant à une radiation de $1057\,MHz$. La théorie de Dirac est donc mise en défaut, et il faut aller au delà. Ce décalage de Lamb ne trouva son explication qu'avec l'établissement de l'électrodynamique quantique. Cette électrodynamique quantique qui n'est en fait qu'une partie intégrée dans une théorie plus générale connue sous le nom de modèle standard des interactions électrofaible et forte. Ce modèle standard qui avait passé avec succès jusqu'à la fin du siècle dernier les tests de précision dans le domaine du GeV au niveau des collisionneurs électron positron le LEP et proton-antiproton le Tevatron, est actuellement soumis aux tests de précision dans la région du TeV au niveau du grand collisionneur hadronique le LHC.

Dans ce mémoire, on veut élucider l'explication que donne l'électrodynamique quantique au décalage de Lamb. On effectue alors un travail de synthèse et de mise en évidence des techniques de calcul des corrections radiatives dans le cadre de l'électrodynamique quantique. On passe d'abord en revu la construction de l'électrodynamique quantique. Puis, on explicite les détails du calcul des corrections radiatives à l'ordre de la boucle des propagateurs photonique et fermionique ainsi que du vertex électromagnétique. Ensuite, on calcule le déplacement des niveaux d'énergies atomiques de l'atome d'hydrogène due à la prise en compte de l'électrodynamique quantique. Enfin, on déduit le décalage entre les niveaux des énergies des états atomiques $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$. On montre alors que la valeur théorique calculée à l'ordre de la boucle dans le cadre de l'électrodynamique quantique est à 0.6 % proche de la valeur expérimentale.

Abstract

In an experiment done in 1947, Lamb and Retherford showed that levels of the second quantum state of the hydrogen atom are not entirely in agreement with Dirac theory predictions. In fact the gap between energy states $2P_{3/2}$ and $2P_{1/2}$ reflects the predictions of the Dirac theory. For cons, the states $2S_{1/2}$ and $2P_{1/2}$ which according to Dirac formalism are degenerate, are not in fact. The Lamb's experiment shows that they are offset from each other by an interval corresponding of $1057\,MHz$. Dirac's theory is then in trouble, and we must go beyond. The Lamb shift finds its natural explanation in the context of quantum electrodynamics. In fact quantum electrodynamics is a part of a more general theory known as the Standard Model of electroweak and strong interactions. The standard model that passed succesfuly till the end of the last century, all precision tests in the GeV range at the Large Electron Positron collider (LEP) and at the Tevatron proton-antiproton collider is currently subject to a further precision tests in the TeV scale at the Large Hadron Collider (LHC).

In this thesis, we want to elucidate the explanation given by quantum electrodynamics to the Lamb shift. We then perform a synthesis job about this subject, and highlight computational techniques of the radiative corrections in quantum electrodynamics. So, we first review the structure of the quantum electrodynamics theory. Then we see details of the calculation of radiative corrections to the one loop order applied to the photon and the fermion propagators as well as to the electromagnetic vertex. Then, we calculate the displacement of the energies of the hydrogen atomic levels due to the account of quantum electrodynamics. Finally, we deduce the gap between the energies levels of the $2S_{1/2}$ and $2P_{1/2}$ atomic states. This enable us to show that the theoretical value calculated through quantum electrodynamics at the one loop level is 0.6 % close to the experimental one.

Abréviations, conventions et notations

Abréviations

$\mathcal{MS}$	Modèle Standard
QED	Quantum Electro-Dynamics
QCD	Quantum Chromo-Dynamics
EW	Electro-Weak
GF	Gauge Fixing
IR	Infra-Red
UV	Ultra-Violet
OS	On Shell scheme
$\overline{MS}$	Modified Minimal Substraction scheme

Conventions

On utilise :

- le système des unités naturelles : $\hbar = c = 1$
- la métrique : $g^{\mu\nu} = (+, -, -, -)$

Notation

$\mathcal{L}$	Densité Lagrangienne
$\Psi(x)$	Spineur de Dirac
$A^\mu(x)$	Quadri-potentiel électromagnétique
∂^μ	Quadri-dérivée
D^μ	Quadri-dérivée covariante
$D^{\mu\nu}$	Propagateur photonique
$i\hat{\Pi}^{\mu\nu}$	Opérateur polarisation du vide
$F^{\mu\nu}$	Tenseur électromagnétique
Λ^μ	Vertex électromagnétique propre
Γ^μ	Vertex électromagnétique exact ($\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu$)
Σ	Énergie propre fermionique
ν	Fréquence
F	Facteur de Forme
Z	Constante de renormalisation

Liste des figures

3.1 Spectre des états liés de l'atome d'hydrogène à la Schrödinger 47
3.2 Interactions électromagnétiques multiples d'un électron avec une source statique externe. 50
3.3 L'atome d'hydrogène à la QED dans le domaine des hautes fréquences des photons virtuels 51
3.4 Niveaux d'énergies les plus bas de l'atome d'hydrogène incluant la structure fine, la structure hyperfine et le décalage de Lamb. 59

Table des matières

Dédicace ii

Remerciements iii

Résumés iv

Abréviations et conventions vi

Liste des figures vii

Table des matières ix

Introduction 1

1 Électrodynamique quantique 3
- 1.1 Lagrangien de l'électrodynamique quantique . . . 5
- 1.2 Seconde quantification canonique de l'électrodynamique quantique . . . 8
  - 1.2.1 Règles de Feynman de QED à l'arbre : . . . 11
- 1.3 Propagateurs et vertex : Méthode pratique . . . 11

2 Corrections radiatives et renormalisation de QED 15
- 2.1 Correction radiative et renormalisation à la boucle du propagateur photonique : 15
  - 2.1.1 Propagateur photonique libre . . . 15
  - 2.1.2 Propagateur photonique exact . . . 16
  - 2.1.3 Calcul à la boucle de la correction au propagateur photonique libre . . . 17
  - 2.1.4 Renormalisation à la boucle du propagateur photonique : . . . 23
- 2.2 Correction radiative et renormalisation à la boucle du propagateur fermionique : 29
  - 2.2.1 Propagateur fermionique libre . . . 29
  - 2.2.2 Propagateur fermionique exact . . . 29
  - 2.2.3 Calcul à la boucle de la correction au propagateur fermionique libre . . . 30
  - 2.2.4 Renormalisation à la boucle du propagateur fermionique : . . . 34
- 2.3 Correction radiative et renormalisation à la boucle du vertex électromagnétique : 37
  - 2.3.1 Vertex électromagnétique libre . . . 37
  - 2.3.2 Vertex électromagnétique exact . . . 37
  - 2.3.3 Calcul à la boucle de la correction au vertex électromagnétique libre . . . 37
  - 2.3.4 Renormalisation à la boucle du vertex électromagnétique : . . . 43

3 Atome d'hydrogène et décalage de Lamb 46
- 3.1 L'atome d'hydrogène à la Schrödinger . . . 46
- 3.2 L'atome d'hydrogène à la Dirac et structure fine . . . 48

3.3 L'atome d'hydrogène à la QED et décalage de Lamb 49
3.3.1 La contribution des hautes fréquences au décalage des niveaux atomiques 51
3.3.2 La contribution des basses fréquences au décalage des niveaux atomiques 54
3.3.3 Le décalage total des niveaux atomiques 56
3.3.4 Décalage de Lamb entre les niveaux atomiques des états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$. 57

Conclusion **60**

A Outils mathématiques pour QED **61**

Bibliographie **62**

Introduction

En physique classique, la description des phénomènes physiques qui font intervenir des particules chargées électriquement et le champ électromagnétique se fait à travers les équations de Maxwell. Par contre, en physique quantique ce genre de phénomènes est régis par l'électrodynamique quantique (QED). Cette dérnière découle de la seconde quantification de l'équation quantique relativiste de Dirac [1] couplée au champ électromagnétique. En fait, QED est une théorie covariante de Lorentz, invariante sous le groupe des transformations de jauge locales $U(1)_{em}$, perturbative et renormalisable. Les résultats théoriques d'observables obtenues à travers QED peuvent donc être aussi précis que l'on veut en fonction d'un nombre restreint de paramètres à savoir les masses physiques des partcicules et la charge électrique élémentaire [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Par ailleurs, QED fait partie intégrante d'une théorie plus générale englobant l'interaction faible [12] et l'interaction forte [13], connue sous le nom de modèle standard ($\mathcal{MS}$) des interactions.

Dans ce mémoire de master, on ne prétend pas pouvoir couvrir toutes les réalisations de QED. Mais plutôt, on repasse en revue les caractéristiques essentielles du formalisme de QED en mettant l'accent sur la gestion des divergences ultraviolettes et infrarouges induites lors du calcul perturbatif à boucles. Puis comme application, on traite de la concordance expérience théorie que fournie ce formalisme dans le cadre du décalage de Lamb des raies atomiques [14] dont les plus simples sont celles de l'atome d'hydrogène [15].

Notre mémoire est organisé comme suite :

Au chapitre un, on traite d'abord de la construction du lagrangien « classique » de l'électrodynamique quantique, en imposant un certains nombre de prescriptions . Puis, on aborde la seconde quantification canonique de ce lagrangien à travers la méthode de Gupta-Bleuler. On termine ce chapitre, par la description d'une méthode pratique pour l'élaboration des expressions des propagateurs et des vertex.

Au chapitre deux, on aborde d'abord le calcul des corrections radiatives à la boucle aux propagateurs photonique et fermionique ainsi qu'au vertex électromagnétique. Ceci nous permet d'apprécier les divergences ultra-violettes (UV) et infra-rouges (IR) qui apparaissent dans ces calculs. Puis, pour traiter les divergences ultraviolettes qui ne sont en fait que fictives dues à notre procédure de calcul et non pas à une réalité physique. On introduit les notions de constantes de renormalisation et de contre termes pour contrecarrer à ce genre de singularités. La forme explicite de ces constantes de renormalisation se détermine via le choix d'un schéma de renormalisation. On traitera en particulier deux schémas de renormalisation l'un dit schéma sur la couche de masse (OS) et l'autre dit schéma de la soustraction minimale modifiée $\overline{MS}$. Par ailleurs, les divergences infra-rouges disparaissent lorsqu'on ajoute la contribution à basses fréquences du rayonnement photonique réel de freinage (bremsstrahlung) émis par les fermions voyageurs.

Au chapitre trois, on rappelle le traitement de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la mécanique quantique à la Schrödinger, puis dans le cadre du formalisme de Dirac en faisant le lien avec la structure fine atomique. Ensuite, on insert la formulation des corrections radiatives

de l'électrodynamique quantique dans le traitement de l'atome d'hydrogène, pour montrer la concordance entre le résultat expérimental et le résultat théorique concernant le décalage de Lamb entre les niveaux d'énergies atomiques des états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$.

Une conclusion, nous permet d'une part de mettre en valeur le travail de synthèse réalisé dans ce mémoire, et d'autre part d'énumérer les autres applications relatives aux tests de précision de l'électrodynamique quantique et qui sont hors de portée de ce mémoire.

On trouve aussi à la fin de ce mémoire une annexe sur certains outils mathématiques utilisés dans les calculs à boucles dans le cadre de QED.

Chapitre 1

Électrodynamique quantique

L'électrodynamique quantique (QED) est la théorie qui décrit l'interaction entre d'une part
• un champ spinoriel $\Psi_f(x)$ de fermions élémentaires chargés électriquement [1] (de charge : $Q_f\, e$ et de masse m_f) dont la dynamique est régit par l'équation de Dirac [1],

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)\Psi_f = 0 \tag{1.1}$$

invariante sous les transformations de Lorentz [16, 17] :

$$x^\mu \xrightarrow{\Lambda} x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu \quad \text{et} \quad \Psi_f(x) \xrightarrow{S(\Lambda)} \Psi'_f(x') = S(\Lambda)\Psi_f(x) \quad \text{avec} \quad S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu \gamma^\mu \tag{1.2}$$

et vérifiant l'équation de continuité :

$$\partial_\mu j_f^\mu = 0 \quad \text{avec :} \quad j_f^\mu = Q_f\, e \overline{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_f \tag{1.3}$$

et d'autre part
• le champ électromagnétique vectoriel des photons neutres $A^\mu(x) = (V, \vec{A})$ vérifiant [2] les équations de Maxwell inhomogènes,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \nabla.\vec{E} = \rho \\ \nabla \times \vec{B} - \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \end{cases} \tag{1.5}$$

et homogènes :

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \nabla.\vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

avec :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{1.7}$$

Il est aussi à noter que les équations de mouvement (1.5) prennent, en imposant le condition

1. Chaque espèce de fermion élémentaire chargée, qu'elle soit lepton ou quark interagit électromagnétiquement avec le photon. Le cas de l'électrodynamique scalaire faisant interagir un champ scalaire élémentaire chargé tel qu'un éventuel Higgs chargé avec le photon n'est pas considéré ici.
2. On rappelle :

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1.4}$$

de jauge de Lorentz : $\partial_\mu A^\mu = 0$, la forme :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) = \Box A^\nu(x) = j^\nu(x) \tag{1.8}$$

Remarque : L'équation de continuité $\partial_\nu j^\nu(x)$ reste valable si on ajoute à l'équation (1.8) un terme de masse sous la forme $m^2 A^\nu(x)$ tout en observant toujours la condition de jauge de Lorentz. Soit alors :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) + m^2 A^\nu(x) = (\Box + m^2) A^\nu(x) = j^\nu(x) \tag{1.9}$$

Qui est l'équation de Klein-Gordon en présence d'une source.

En outre, les équations de Maxwell sont covariantes par construction sous l'effet des transformations de Lorentz [18] [3], et aussi invariantes [4] sous l'effet des transformations de jauge [19] :

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \frac{1}{Q_f\, e}\partial^\mu \theta(x) \quad \text{avec :} \quad \theta(x) \text{ une fonction réelle quelconque.} \tag{1.11}$$

• Le couplage minimale du champ spinoriel Ψ_f avec le champ vectoriel photonique A^μ s'obtient via la prescription [16]

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu - Q_f\, e A_\mu, \quad \text{avec :} \quad p_\mu = i\partial_\mu \tag{1.12}$$

qu'on introduit au niveau de l'équation de Dirac (1.1) pour obtenir :

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iQ_f\, eA_\mu) - m_f]\,\Psi_f \equiv [i\gamma^\mu D_\mu - m_f]\,\Psi_f = (i\not{D} - m_f)\Psi_f = 0 \tag{1.13}$$

Cette équation (1.13) n'est invariante de jauge selon le prescription (1.11) que si de plus simultanément le champ spinoriel $\Psi_f(x)$ est soumis à la transformation de jauge locale [16, 20]

$$\Psi_f(x) \longrightarrow \Psi'(x) = exp\,[i\theta(x)\mathbb{1}_4]\,\Psi_f(x) \tag{1.14}$$

qui est une transformation du groupe $U(1)_{em}$

Par ailleurs, à la limite non relativiste l'équation de Dirac (1.13) à quatre composantes se transforme en équation de Pauli à deux composantes [16] [5]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi_f = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m_f}\mathbb{1}_2 - \frac{Q_f\, e}{2m_f}(\vec{L}\mathbb{1}_2 + 2\vec{S}).\vec{B} + Q_f\, eV\mathbb{1}_2\right]\varphi_f \quad \text{avec : } \vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \text{et} \quad \varphi_f = \begin{pmatrix} \varphi_{f,1} \\ \varphi_{f,2} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

où

$$\Psi_f = \begin{pmatrix} \varphi_f \\ \chi_f \end{pmatrix} exp\,[-im_f t] \quad \text{avec :} \quad \chi_f = \frac{\vec{\sigma}.(\vec{p} - Q_f\, e\vec{A})}{2m_f}\varphi_f \tag{1.16}$$

3. Transformations de Lorentz des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$:

$$\begin{cases} \vec{E} \to \vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}.\vec{E}) \\ \vec{B} \to \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}.\vec{B}) \end{cases} \tag{1.10}$$

4. Inclure ici la différence entre covariance et invariance
5. Tel que :

$$\vec{\sigma} = \sigma_x\vec{i} + \sigma_y\vec{j} + \sigma_z\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{i} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\vec{j} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{k}$$

sont les matrices de Pauli.

qui montre bien que le coulage spin-orbite est une caractéristique résiduelle d'origine relativiste et que le facteur de Landé que prédit l'équation de Dirac est $g = 2$. La déviation de ce facteur de Landé par rapport à la valeur 2 permet de définir le moment magnétique anomal a_f des fermions par :

$$a_f = \frac{1}{2}(g_f - 2) \tag{1.17}$$

cette déviation observée expérimentalement pour les électrons et les muons [11]

$$a_e = 1.159652193(10) \times 10^{-3} \tag{1.18}$$
$$a_\mu = 1.1659230(84) \times 10^{-3} \tag{1.19}$$

trouve son explication à travers l'introduction des corrections radiatives, au même titre que le décalage de Lamb [14, 11] des raies atomiques qu'on traitera dans le chapitre quatre.

Dans ce qui reste de ce chapitre, on s'intéresse d'abord à la construction du Lagrangien classique de QED, puis à sa quantification.

1.1 Lagrangien de l'électrodynamique quantique

Le formalisme de Lagrange [21] permet d'obtenir les équations de mouvement d'un système physique à partir d'une densité Lagrangienne scalaire $\mathcal{L}$, et ceci à travers l'application des équations de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \Psi_{f,\sigma}/\partial x^\mu)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{f,\sigma}} \tag{1.20}$$

La densité Lagrangienne est relié à l'action S sans dimension de masse ($[S]_{masse} = 1$) à travers la relation :

$$S = \int dtL = \int d^4x\mathcal{L} = \int d^Dx\mathcal{L} \quad \text{(avec : } D \text{ étant la dimension « spatiale » de l'espace-temps)} \tag{1.21}$$

Et comme la dimension de l'espace est inverse de celle de la masse alors, en terme de la dimension en masses on a :

$$[d^Dx]_{masse} = D^{-1} \qquad \text{et par suite :} \quad [\mathcal{L}]_{masse} = D \tag{1.22}$$

Ainsi, dans le cadre de ce formalisme de Lagrange, l'équation (1.13) de Dirac couplée au champ électromagnétique peut être extraite à partir d'un Lagrangien[6] ($\mathcal{L}_{QED}$). D'où, il devient important d'établir la structure du Lagrangien de l'électrodynamique quantique, non seulement pour pouvoir re-extraire l'équation (1.13) à titre de confirmation de la justesse du Lagrangien, mais surtout pour pouvoir élaborer le formalisme des corrections radiatives électrodynamiques.

Notre démarche dans cette quête, s'articule sur un certain nombre de prescriptions auxquelles doit subvenir notre Lagrangien [13] :

1. **Prescription de superposition :**
   Du fait qu'il est possible de considérer les champs spinoriel et électromagnétique dans des états libres séparément l'un de l'autre, alors le Lagrangien de QED ($\mathcal{L}_{QED}$) peut se mettre sous la forme d'une association d'un Lagrangien représentant le champ spinoriel ($\mathcal{L}_f$), d'un Lagrangien représentant le champ vectoriel photonique ($\mathcal{L}_\gamma$) et d'un Lagrangien

6. Par abus de langage et sans risque de confusion, on utilisera dans ce qui suit la nomenclature Lagrangien pour densité Lagrangienne

d'interaction ($\mathcal{L}_{(\gamma,f)}$) entre ces deux champs.

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{\gamma} + \sum_{f}(\mathcal{L}_{f} + \mathcal{L}_{(\gamma,f)}) \tag{1.23}$$

2. **Prescription de localité et du déterminisme du Lagrangien :**
Du fait que l'interaction à distance est à proscrire, alors les termes du Lagrangien doivent être construit exclusivement avec les champs locaux $\Psi(x)$, $\overline{\Psi}(x)$ et $A^{\mu}(x)$ et des quadri-dérivées $\partial_{\nu}\Psi(x)$, $\partial_{\nu}\overline{\Psi}$ et $\partial_{\nu}A^{\mu}(x)$ correspondantes. De plus, comme la donnée du champ et de sa dérivée à un instant donné doit être suffisante pour déterminer l'état à tout instant ultérieur, alors il ne peut y avoir intervention dans le Lagrangien de dérivées d'ordre supérieure à un. Ainsi, on a :

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{QED}\left(\Psi(x),\, \overline{\Psi}(x),\, A^{\mu}(x),\, \partial^{\nu}\Psi(x),\, \partial^{\nu}\overline{\Psi}(x),\, \partial^{\nu}A^{\mu}(x)\right). \tag{1.24}$$

3. **Prescription de la propriété Scalaire de Lorentz**[13]
Le Lagrangien $\mathcal{L}_{QED}$ est construit en formant toutes les combinaisons « scalaires de Lorentz » possibles entre les 16 produits bilinéaires des champs spinoriels ($\overline{\Psi}_f\Psi$, $\overline{\Psi}_f\gamma^5\Psi$, $\overline{\Psi}_f\gamma^{\mu}\Psi$, $\overline{\Psi}_f\gamma^5\gamma^{\mu}\Psi$, $\overline{\Psi}_f\sigma^{\mu\nu}\Psi$), le champ vectoriel photonique A^{μ} et les dérivées vectorielles $\partial_{\mu}\Psi_f$ et $\partial_{\mu}\overline{\Psi}_f$ et tensorielle $\partial_{\nu}A^{\mu}$ de ces champs.
On obtient ainsi les termes possibles :

$$\begin{array}{ccccccc} \partial_{\nu}A^{\nu} & & A_{\nu}A^{\nu} & & \partial^{\nu}A^{\mu}\partial_{\nu}A_{\mu} & \partial^{\nu}A^{\mu}\partial_{\mu}A_{\nu} & (\partial_{\lambda}A^{\lambda})\partial^{\nu}A^{\mu}\partial_{\mu}A_{\nu} \quad \cdots \\ \overline{\Psi}_f\Psi_f & \overline{\Psi}_f\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\Psi_f & \overline{\Psi}_f\gamma^{\nu}A_{\nu}\Psi_f & \overline{\Psi}_f\gamma^5\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\Psi_f & \overline{\Psi}_f\sigma^{\nu\mu}\partial_{\nu}A_{\mu}\Psi_f & \cdots \end{array} \tag{1.25}$$

On remarque de plus que l'invariance sous l'inversion spatiale P ainsi que sous le renversement du temps T [22, 23] observées par l'interaction électromagnétique permettent d'exclure par exemple le terme pseudo-scalaire $\overline{\Psi}_f\gamma^5\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\Psi_f$. [7]

4. **Prescription de l'invariance de jauge $U(1)_{em}$:**
Du fait que l'électromagnétisme observe l'invariance de jauge $U(1)_{em}$, qui se traduit via les transformations de jauge (1.11) et (1.14), alors les termes du Lagrangien doivent respecter cette invariance. En fait, parmi les termes (1.25) il n'y a que $\overline{\Psi}_f\Psi_f$ qui vérifie cette prescription. Alors, en recombinant certains de ces termes on peut former des invariant de jauge $U(1)_{em}$ tel que :

$$\begin{array}{ccccc} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} & F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\overline{\Psi}_f\Psi_f & F^{\mu\nu}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\mu} & \cdots \\ \overline{\Psi}_f\gamma^{\nu}D_{\nu}\Psi_f & \overline{\Psi}_f\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi_f & \overline{\Psi}_f\gamma^{\nu}D_{\nu}\Psi_f\overline{\Psi}_f\Psi_f & \cdots \end{array} \tag{1.26}$$

avec :

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \quad \text{et} \quad D^{\mu} = \partial^{\mu} + iQ_f\, eA^{\mu} \tag{1.27}$$

Ainsi, le Lagrangien QED vérifiant les prescriptions de superposition, de localité, de déterminisme, d'invariance sous les transformations de Lorentz continues, d'inversion spatiale, de renversement du sens du temps, et aussi les transformations de jauge locale

7. Inclure ici les différentes actions des opérateurs P et T

$U(1)_{em}$, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= a_1 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + a_2\overline{\Psi}_f\gamma^\nu D_\nu\Psi_f + a_3\overline{\Psi}_f\Psi_f + a_4 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\overline{\Psi}_f\Psi_f \\ &\quad + a_5 F^{\mu\nu}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\mu} + a_6\overline{\Psi}_f\gamma^\nu D_\nu\Psi_f\overline{\Psi}_f\Psi_f + a_7\overline{\Psi}_f\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi_f + \cdots \end{aligned} \tag{1.28}$$

auquel, il faudrait maintenant déterminer les coefficients a_i.

5. **Prescription des dimensions de masse des champs et renormalisabilité :**

Partant du fait que la renormalisabilité d'une théorie est relié au signe de la dimension de masse des coefficient a_i [13]. En fait, les termes pour lesquels : $[a_i]_{masse} < 0$ est non-renormalisable. Il est donc important de déterminer la dimension de masse de chacun des termes du lagrangien (1.28). Pour cela, on doit d'abord déterminer les dimensions de masse des champs Ψ et A^μ. On procède alors comme suite.

Vu le terme de droite de l'équation (1.20) de Lagrange et le premier terme de l'équation (1.1) de Dirac, on peut écrire l'équation aux dimensions :

$$\frac{[\partial\mathcal{L}]}{[\partial\Psi]} = [i\gamma^\nu\partial_\nu\Psi] \quad \Rightarrow \quad [\Psi]^2 = [\mathcal{L}][\partial_\nu]^{-1} = M^{D-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[\Psi]_{masse} = \frac{D-1}{2}} \tag{1.29}$$

Par ailleurs, en utilisant de plus le terme de gauche de l'équation (1.8) de Maxwell, on peut aussi écrire

$$\frac{[\partial\mathcal{L}]}{[\partial A^\mu]} = [\partial_\nu\partial^\nu A^\mu] \quad \Rightarrow \quad [A^\mu]^2 = [\mathcal{L}][\partial_\nu]^{-2} = M^{D-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[A^\mu]_{masse} = \frac{D-2}{2}} \tag{1.30}$$

D'où, en prenant en compte que $[\mathcal{L}]_{masse} = D = 4$, on déduit les dimensions de masse des termes du Lagrangien (1.28) et des coefficients correspondants :

$$\begin{aligned}
&[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]_{masse} = D = 4 && [a_1]_{masse} = 0 \\
&[\overline{\Psi}_f\gamma^\nu D_\nu\Psi_f]_{masse} = D = 4 && [a_2]_{masse} = 0 \\
&[\overline{\Psi}_f\Psi_f]_{masse} = D-1 = 3 && [a_3]_{masse} = 1 \\
&[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\overline{\Psi}_f\Psi_f]_{masse} = 2D-1 = 7 && [a_4]_{masse} = -3 \\
&[F^{\mu\nu}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\mu}]_{masse} = \frac{3}{2}D = 6 && [a_5]_{masse} = -2 \\
&[\overline{\Psi}_f\gamma^\nu D_\nu\Psi_f\overline{\Psi}_f\Psi_f]_{masse} = 2D-1 = 7 && [a_6]_{masse} = -3 \\
&[\overline{\Psi}_f\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi_f]_{masse} = \frac{3}{2}D-1 = 5 && [a_7]_{masse} = -1
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Donc en imposant le renormalisabilité du Lagrangien QED, on ne peut conserver que les trois premiers termes. D'où :

$$\mathcal{L}_{QED} = a_1 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + a_2\overline{\Psi}_f\gamma^\nu D_\nu\Psi_f + a_3\overline{\Psi}_f\Psi_f \tag{1.32}$$

Mais, les coefficients a_1, a_2 et a_3 ne sont pas encore fixés. Pour le faire on exige que ce lagrangien puisse redonner les équations de Dirac et de Maxwell. Ainsi, il est facile de

trouver :

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\overline{\Psi}_f\gamma^\nu D_\nu\Psi_f - m_f\overline{\Psi}_f\Psi_f \tag{1.33}$$

6. **Prescription d'hermiticité**
L'hemiticité du Lagrangien voudrait que :

$$\mathcal{L}^\dagger_{QED} = \mathcal{L}_{QED} \tag{1.34}$$

D'où on obtient :

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}_f\gamma^\nu(D_\nu\Psi_f) - (D^*_\nu\overline{\Psi}_f)\gamma^\nu\Psi_f\right) - m_f\overline{\Psi}_f\Psi_f \tag{1.35}$$

avec le dérivée covariante : $D^*_\nu = \partial_\nu - iQ_f\,eA_\nu$ puisque $A^*_\nu = A_\nu$ est réel du fait qu'il représente un champ neutre (photonique).
Cette dernière expression du Lagrangien QED peut aussi être mise sous la forme (1.23) :

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}_f\gamma^\nu(\partial_\nu\Psi_f) - (\partial_\nu\overline{\Psi}_f)\gamma^\nu\Psi_f\right) - m_f\overline{\Psi}_f\Psi_f + A^\nu\left(Q_f\,e\overline{\Psi}_f\gamma^\nu\Psi_f\right) \tag{1.36}$$

$$\equiv -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \sum_f\left[\frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}_f\gamma^\nu(\partial_\nu\Psi_f) - (\partial_\nu\overline{\Psi}_f)\gamma^\nu\Psi_f\right) - m_f\overline{\Psi}_f\Psi_f\right] + A_\nu\sum_f\left(Q_f\,e\overline{\Psi}_f\gamma^\nu\Psi_f\right) \tag{1.37}$$

$$\equiv \mathcal{L}_\gamma + \sum_f\mathcal{L}_f + A_\nu\sum_f j^\nu_f \tag{1.38}$$

Soit donc :

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{libre} + \mathcal{L}_{int} \equiv \mathcal{L}_{libre} + A_\nu j^\nu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{libre} = \mathcal{L}_\gamma + \sum_f\mathcal{L}_f \\ j^\nu = \sum_f j^\nu_f \end{cases} \tag{1.39}$$

Il reste donc maintenant à procéder à la seconde quantification de ce Lagrangien « semi-classique » de QED.

1.2 Seconde quantification canonique de l'électrodynamique quantique

Après la première quantification canonique qui a dû faire passer la quadri-position x^μ et la quadri-impulsion p^μ à l'échelle d'opérateur agissant sur les fonctions d'ondes classique $\Psi(x)$:

$$x^\mu \longrightarrow \hat{x}^\mu \quad \text{et} \quad p^\mu \longrightarrow \hat{p}^\mu = i\partial^\mu \tag{1.40}$$

La seconde quantification canonique de QED consiste à élever les champs classiques spinoriels $\Psi_f(x)$ de spin 1/2 obéissant à la statistique de Fermi-Dirac, et le champ classique vectoriel $A^\mu(x)$ de spin 1 obéissant à la statistique de Bose-Einstein, au rang d'opérateurs champs quantiques agissant dans l'espace de Hilbert des états des particules :

$$\Psi_f(x) \longrightarrow \hat{\Psi}_f(x) \qquad \text{et} \qquad A^\mu(x) \longrightarrow \hat{A}^\mu(x) \tag{1.41}$$

Ainsi, le formalisme canonique de la seconde quantification [24, 25, 26] voudrait, d'une part, que les opérateurs champs fermioniques tel que $\hat{\Psi}_f(x)$ et leurs conjugués canoniques :

$$\hat{\Pi}_f(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_f}{\partial\left(\partial_0 \hat{\Psi}_f(x)\right)} = i\hat{\Psi}_f^\dagger(x) \tag{1.42}$$

soient contraints à travers les relations d'anti-commutation à temps égaux :

$$\{\hat{\Psi}_{f,\alpha}(\vec{x},t), \hat{\Psi}^\dagger_{f,\beta}(\vec{y},t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{1.43a}$$
$$\{\hat{\Psi}_{f,\alpha}(\vec{x},t), \hat{\Psi}_{f,\beta}(\vec{y},t)\} = \{\hat{\Psi}^\dagger_{f,\alpha}(\vec{x},t), \hat{\Psi}^\dagger_{f,\beta}(\vec{y},t)\} = 0 \tag{1.43b}$$

et d'autre part, que les opérateurs champs bosoniques tel que $\hat{A}^\mu(x)$ et leurs conjugués canoniques

$$\hat{\Pi}^\mu_{(\gamma)}(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_\gamma}{\partial\left(\partial_0 \hat{A}_\mu(x)\right)} = -\hat{F}^{0\mu} \tag{1.44}$$

soient contraints par les relations de commutation :

$$\left[\hat{A}^\mu(\vec{x},t), \hat{\Pi}^\nu_{(\gamma)}(\vec{y},t)\right] = ig^{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{1.45a}$$
$$\left[\hat{A}^\mu(\vec{x},t), \hat{A}^\nu(\vec{y},t)\right] = \left[\hat{\Pi}^\mu_{(\gamma)}(\vec{x},t), \hat{\Pi}^\nu_{(\gamma)}(\vec{y},t)\right] = 0 \tag{1.45b}$$

En fait, les règles d'anti-commutations fermioniques (1.43) n'affectent pas les prescriptions précédentes que doit vérifier la contribution fermionique $\hat{\mathcal{L}}_f$ au Lagrangien de QED, en particulier la prescription d'invariance de jauge de la contribution fermionique sous les transformations locales $U(1)_{em}$. Par suite, l'organigramme de la seconde quantification canonique peut être exécuter automatiquement pour la contribution fermionique jusqu'à la déduction des règles de Feynman fermionique.

Par contre, les règles de commutations bosoniques (1.45a) se trouve pour le champ quantique électromagnétique $\hat{A}_\mu$ et son conjugué canonique $\hat{\Pi}^\nu_{(\gamma)}$ en contradictions avec l'équation (1.44). En fait, pour le cas $\mu = 0$, l'équation (1.44) voudrait que :

$$\hat{\Pi}^0_{(\gamma)}(x) = -\hat{F}^{00} = -(\partial^0\hat{A}^0 - \partial^0\hat{A}^0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\Pi}^0_{(\gamma)}(x) = 0} \tag{1.46}$$

Par contre l'équation (1.45a) voudrait que :

$$\left[\hat{A}^0(\vec{x},t), \hat{\Pi}^0_{(\gamma)}(\vec{y},t)\right] = ig^{00}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\Pi}^0_{(\gamma)}(x) \neq 0}\,! \tag{1.47}$$

Cette contradiction bloque l'application du processus de seconde quantification au cas du champ quantique électromagnétique. Pour débloquer cette situation l'idée est de modifier le lagrangien photonique $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ de manière à ce que l'équation (1.46) ne soit plus nulle. Et par suite, la contradiction sera lever. Mais aussi, il faut que le nouveau Lagrangien puisse redonner les mêmes équations de Maxwell qui sont bien établit expérimentalement. Néanmoins, d'après les équations (1.31) $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ est la seule possibilité qui soit en même temps renormalisable et invariante de jauge $U(1)_{em}$ tout en observant les équations de Maxwell. Si donc, on ne peut pas s'en passer de la prescription de renormalisabilité, il devient inévitable de sacrifier l'invariance de jauge avec l'espoir de pouvoir la restaurer ultérieurement. C'est ainsi qu'est exécutée la substitution suivante :

$$\hat{\mathcal{L}}_\gamma = -\frac{1}{4}\hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_\gamma = -\frac{1}{4}\hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} - \frac{\zeta}{2}(\partial^\alpha\hat{A}_\alpha)^2 \equiv \hat{\mathcal{L}}^{(0)}_\gamma + \hat{\mathcal{L}}^{(GF)}_\gamma \tag{1.48}$$

Donnant, comme il se doit, la relation :

$$\hat{\Pi}^{\mu}_{(\gamma)}(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{\gamma}}{\partial\left(\partial_0 \hat{A}_{\mu}(x)\right)} = -\hat{F}^{0\mu} - \zeta g^{\mu 0}\partial_{\alpha}\hat{A}^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Pi}^{0}_{(\gamma)}(x) = -\zeta\partial_{\alpha}\hat{A}^{\alpha} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\alpha}\hat{A}^{\alpha} \neq 0 \tag{1.49}$$

qui veut dire que la condition de jauge de Lorentz applicable pour le champ de jauge électromagnétique classique ($A^{\mu}(x)$), ne serait plus valable pour le cas du champ de jauge électromagnétique quantique ($\hat{A}^{\mu}(x)$) :

$$\boxed{\partial_{\mu}A^{\mu}(x) = 0} \quad \longrightarrow \quad \text{Champ photonique classique} \tag{1.50}$$

$$\boxed{\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}(x) \neq 0} \quad \longrightarrow \quad \text{Champ photonique quantique} \tag{1.51}$$

Ce qui veut dire que les équations de mouvements quantiques ne serait plus celles de Maxwell. Pour lever cette enigme Gupta et Bleuler [27, 28], ont attiré l'attention sur le fait que les opérateurs champs quantiques $\hat{A}^{\mu}(x)$ et $\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}(x)$ ne sont pas les observables qu'on mesure et qui devrait satisfaire aux équations de Maxwell à travers l'utilisation de la condition de jauge de Lorentz avec la formulation Lagrangienne. Ces opérateurs champs quantiques sont régies par l'équation de Heisenberg :

$$\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} = i\left[H, \mathcal{O}\right] \tag{1.52}$$

Mais en fait, c'est l'action de ces opérateurs champs quantiques sur l'espace des états physiques de Hilbert qui est observable. Ainsi, la condition classique de jauge de Lorentz ne devrait pas s'appliquer pour les opérateurs mais pour leur action sur l'espace physique de Hilbert. Ceci nous mène vers la condition de Gupta-Bleuler :

$${}_{(phys)}\langle\Phi|\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}(x)|\Phi\rangle_{(phys)} = 0 \tag{1.53}$$

qui dans la seconde quantification remplacerait la condition de Lorentz de la première quantification.

Ainsi, l'invariance de jauge est bien rétablit dans l'espace physique observable et de même pour les équations de Maxwell.

En somme, les champs quantiques fermioniques et photonique acceptent la décomposition de Fourier en ondes planes de fréquences positives et négatives $\omega = \pm|E_{\vec{p}}|$ comme suite :

• **Opérateur champ quantique photonique :**

$$\hat{A}^{\mu}(x) = \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k^0(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=0}^{3}\left[\hat{a}_{\vec{k}\lambda}\epsilon^{\mu}(\vec{k},\lambda)e^{-ik.x} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}\lambda}\epsilon^{\mu *}(k)(\vec{k},\lambda)e^{ik.x}\right] \tag{1.54}$$

où $k^0 = |\vec{k}| = \omega_{\vec{k}}$ et la somme sur λ touche les quatre degrés de liberté dont deux physiques (les deux modes transversaux) et deux non physiques (le mode longitudinal et le mode temporel, qui s'éliminent mutuellement dans les expressions des observables au sens de la seconde quantification). Les opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}$ et $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}\lambda}$ sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de photon. Ces opérateurs observent les relations suivantes :

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}_1\lambda_1}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_2\lambda_2}\right] = -g_{\lambda_1\lambda_2}\delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \tag{1.55a}$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}_1\lambda_1}, \hat{a}_{\vec{k}_2\lambda_2}\right] = \left[\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_1\lambda_1}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_2\lambda_2}\right] = 0 \tag{1.55b}$$

$$\forall \vec{k}, \lambda : \ \hat{a}_{\vec{k}\lambda}|0\rangle = 0, \qquad \text{où l'état du vide est normé selon :} \quad \langle 0|0\rangle = 1 \tag{1.56}$$

• **Opérateurs champs quantiques fermioniques :**

$$\hat{\Psi}_f(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2|E_{\vec{p}}|}(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \left[\hat{b}(p,s)u(p,s)e^{-ip.x} + \hat{d}^\dagger(p,s)v(p,s)e^{ip.x}\right] \tag{1.57}$$

$$\hat{\overline{\Psi}}_f(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2|E_{\vec{p}}|}(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \left[\hat{b}^\dagger(p,s)\overline{u}(p,s)e^{ip.x} + \hat{d}(p,s)\overline{v}(p,s)e^{-ip.x}\right] \tag{1.58}$$

où $\hat{b}^\dagger$, $\hat{b}$, $\hat{d}^\dagger$ et $\hat{d}$ sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation de fermions et d'antifermions, tel que :

$$\left\{\hat{b}(p_1,s_1), \hat{b}^\dagger(p_2,s_2)\right\} = \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\delta_{s_1 s_2} \tag{1.59a}$$

$$\left\{\hat{d}(p_1,s_1), \hat{d}^\dagger(p_2,s_2)\right\} = \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\delta_{s_1 s_2} \tag{1.59b}$$

tous les autres anticommutateurs sont nuls. L'action de ces opérateurs sur l'état du vide est spécifiée par : [8]

$$\forall \vec{p}, s : \qquad \hat{b}(p,s)|0\rangle = 0, \qquad \hat{d}(p,s)|0\rangle = 0. \tag{1.60}$$

Par conséquent, la voie vers les règles de Feynman est bien ouverte. Les règles de Feynman de QED et la manière de les extraire (soit par la méthode canonique ou bien par la méthode des intégrales de chemins de Feynman [2]) peuvent être facilement trouver dans les ouvrages usuels de théorie quantique des champs, tel que [17, 26, 25]. Ces règles sont les suivantes :

1.2.1 Règles de Feynman de QED à l'arbre :

1.3 Propagateurs et vertex : Méthode pratique

A titre de complément, on traite ici d'une méthode pratique [25] pour l'établissement des expressions des propagateurs fermionique et photonique ainsi que du vertex photon-fermion-antifermion, et ceci directement à partir du Lagrangien.

1. **Propagateur du photon :**

   (a) **Étape 1 :**
   On considère juste la partie du Lagrangien QED qui correspond aux champs photoniques libres, soit :
   $$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)^2 \tag{1.61}$$

   (b) **Étape 2 :**
   On extrait l'opérateur différentiel $\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(x)$ de ce lagrangien en le mettant sous la forme :
   $$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{2}A^\sigma \mathcal{D}_{\sigma\lambda}(x)A^\lambda \tag{1.62}$$

8. On rappelle que : $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_f^2}$

soit :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)^2 \tag{1.63a}$$

$$= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(g_{\alpha\nu}\partial_\mu A^\alpha - g_{\beta\mu}\partial_\nu A^\beta) - \frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)(\partial_\lambda A^\lambda) \tag{1.63b}$$

$$= -\frac{1}{4}A^\sigma\left[2g_{\lambda\sigma}\overleftarrow{\partial}^\mu\vec{\partial}_\mu - 2g_{\lambda\mu}\overleftarrow{\partial}^\mu\vec{\partial}_\sigma\right]A^\lambda - \frac{1}{2}\zeta A^\sigma\left(\overleftarrow{\partial}_\sigma\vec{\partial}_\lambda\right)A^\lambda \tag{1.63c}$$

$$= \frac{1}{2}A^\sigma\left[-g_{\lambda\sigma}\overleftarrow{\partial}^\mu\vec{\partial}_\mu + g_{\lambda\mu}\overleftarrow{\partial}^\mu\vec{\partial}_\sigma - \zeta\overleftarrow{\partial}_\sigma\vec{\partial}_\lambda\right]A^\lambda \equiv \frac{1}{2}A^\sigma\left[\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(x)\right]A^\lambda \tag{1.63d}$$

(c) **Étape 3 :**
On exprime l'opérateur différentiel $\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(x)$ dans l'espace des impulsions à travers les règles de correspondances suivantes (équivalentes aux transformées de Fourier)

$$\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(x) \longrightarrow \mathcal{D}_{\sigma\lambda}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\partial}^\mu \longrightarrow -ik^\mu \\ \overleftarrow{\partial}_\mu \longrightarrow ik_\mu \end{cases} \tag{1.64}$$

Soit :

$$\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(k) = -g_{\lambda\sigma}\,k^2 + (1-\zeta)\,k_\lambda k_\sigma \tag{1.65}$$

$$= \underbrace{-k^2\left(g_{\lambda\sigma} - \frac{k_\lambda k_\sigma}{k^2}\right)}_{\text{provenant de : } -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} + \underbrace{-\zeta\,k_\lambda k_\sigma}_{\text{provenant de : } -\frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)^2} \tag{1.66}$$

(d) **Étape 4 :**
On cherche l'inverse $\mathcal{D}^{-1\,\lambda\rho}(k)$ de $\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(k)$ tel que :

$$\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(k)\mathcal{D}^{-1\,\lambda\rho}(k) = g_\sigma{}^\rho = \delta_\sigma{}^\rho \tag{1.67}$$

Pour cela, puisque $\mathcal{D}^{-1\,\lambda\rho}(k)$ est un tenseur d'ordre deux, alors sa forme générale est :

$$\mathcal{D}^{-1\,\lambda\rho}(k) = A(k^2)g^{\lambda\rho} + B(k^2)k^\lambda k^\rho \tag{1.68}$$

Ainsi :

$$\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(k)\mathcal{D}^{-1\,\lambda\rho}(k) = \left[-g_{\lambda\sigma}\,k^2 + (1-\zeta)\,k_\lambda k_\sigma\right]\left[A(k^2)g^{\lambda\rho} + B(k^2)k^\lambda k^\rho\right]$$

$$= -k^2A(k^2)g_\sigma{}^\rho + \left[(1-\zeta)A(k^2) - \zeta B(k^2)k_\sigma k^\rho\right] \tag{1.69}$$

D'où, par respect à l'équation (1.67), on obtient [9] :

$$A(k^2) = -\frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad B(k^2) = \frac{\zeta-1}{\zeta}\frac{1}{(k^2)^2} \tag{1.70}$$

9. Le cas $\zeta = 0$ coupe le lien entre $A(k^2)$ et $B(k^2)$. Il correspond aussi à un déterminant nul de la matrice $\mathcal{D}_{\sigma\lambda}(k)$. Par suite, cette matrice n'est plus inversible. Et, on ne peut pas construire le propagateur de Feynman dans ce cas. Donc, l'ajout du terme de fixation de jauge est important pour la construction du propagateur de Feynman photonique.

Par conséquent, le propagateur photonique $D_F^{\mu\nu}$ s'écrit :

$$D_F^{\mu\nu}(k) \equiv i\mathcal{D}^{-1\,\mu\nu}(k) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} + \frac{\zeta-1}{\zeta}\frac{ik^\mu k^\nu}{(k^2+i\epsilon)^2} \tag{1.71}$$

$$= -\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\frac{ik^\mu k^\nu}{(k^2+i\epsilon)^2} \tag{1.72}$$

Où, la partie imaginaire $i\epsilon$ avec $\epsilon > 0$ et $\epsilon \simeq 0$ est ajoutée pour satisfaire à la condition de causalité.

Remarques :

(a) **Schéma de la jauge de Landau ($\zeta \to \infty$) :**

$$D^{\mu\nu}_{F,\,(\text{jauge de Landau})}(k) = -\frac{i}{k^2+i\epsilon}\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \tag{1.73}$$

Dans cette jauge il n'y a que la partie transversale du propagateur photonique qui persiste.

(b) **Schéma de la jauge de Feynman ($\zeta = 1$) :**

$$D^{\mu\nu}_{F,\,(\text{jauge de Feynman})}(k) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} \tag{1.74}$$

qui a une forme simple. Et en utilisant la relation [25] :

$$g^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^{3} g_{\lambda\lambda}\varepsilon^\mu(\vec{k},\lambda)\varepsilon^\nu(\vec{k},\lambda) \tag{1.75}$$

on peut extraire le propagateur de Coulomb [25] :

$$D^{\mu\nu}_{F,\,(\text{Coulomb})}(k) = \frac{\delta^{\mu 0}\delta^{\mu 0}}{|\vec{k}^2|} \tag{1.76}$$

qui n'est autre que la transformée de Fourier de l'interaction Coulombienne, avec :

$$D^{\mu\nu}_{F,\,(\text{jauge de Feynman})}(k) = D^{\mu\nu}_{F,\,(\text{transversale})}(k) + D^{\mu\nu}_{F,\,(\text{Coulomb})}(k) + D^{\mu\nu}_{F,\,(\text{résiduelle})}(k) \tag{1.77}$$

2. **Propagateur du fermion :**

On applique les même étapes précédentes au cas de fermions :

(a) **Étape 1 :**

$$\mathcal{L}_f = \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}_f\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi_f) - (\partial_\mu\overline{\Psi}_f)\gamma^\mu\Psi_f\right) - m_f\overline{\Psi}_f\Psi_f \tag{1.78}$$

(b) **Étape 2 :**

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2}\overline{\Psi}_f\left[\left(i\vec{\partial}_\mu - i\overleftarrow{\partial}_\mu\right)\gamma^\mu - 2m_f\right]\Psi_f \equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}_f\left[\mathcal{D}(x)\right]\Psi_f \tag{1.79}$$

(c) **Étape 3 :**

$$\mathcal{D}(x) \longrightarrow \mathcal{D}(k) = \not{k} - m_f \tag{1.80}$$

(d) **Étape 4 :** Le propagateur fermionique $S_F(p)$ s'écrit :

$$\boxed{S_F(p) \equiv iD^{-1}(p) = \frac{i}{\not{p} - m_f + i\epsilon}} \tag{1.81}$$

3. **Vertex $(\gamma - f - \bar{f})$:**

(a) **Étape 1 :**

On extrait du Lagrangien $\mathcal{L}_{QED}$ juste la partie qui correspond à l'interaction entre les trois champs $A^\mu(x)$, $\Psi_f(x)$ et $\overline{\Psi}_f(x)$ pour une espèce donnée de fermions, soit [29, 30] :

$$\mathcal{L}_{int} = A^\mu \overline{\Psi}_f (Q_f\, e\gamma_\mu) \Psi_f \equiv (A^\mu)^{n_1} \left(\overline{\Psi}_f\right)^{n_2} \underbrace{(Q_f\, e\gamma^\mu)}_{\lambda} (\Psi_f)^{n_3} \tag{1.82}$$

alors ce Lagrangien contribue avec le facteur de vertex suivant :

$$\text{Vertex}\,(\gamma - f - \bar{f}) \longrightarrow i\,\lambda\, n_1!\, n_2!\, n_3! = iQ_f\, e\, \gamma_\mu\, 1!\, 1!\, 1! = iQ_f\, e\gamma_\mu \tag{1.83}$$

$$\boxed{\text{Vertex}\,(\gamma - f - \bar{f}) \longrightarrow iQ_f\, e\gamma_\mu} \tag{1.84}$$

Chapitre 2

Corrections radiatives et renormalisation de QED

Au sens de la théorie des champs quantiques, les corrections radiatives sont les corrections qu'apporte, le développement perturbatif de l'amplitude de transition $S(i \to f)$ d'un état physique initial (i) vers un autre état physique final (f), et ceci en fonction d'un petit paramètre qui dans le cas de QED est la constante de structure fine ($\alpha \simeq 1/137$ à basses énergies). Par ailleurs, dans le contexte des diagrammes de Feynman appliqués à QED, ces corrections radiatives se concrétisent par des diagrammes à boucles venants en corrections aux diagrammes à l'arbre d'un processus physique donné faisant intervenir l'interaction électromagnétique. Dans ce chapitre, on traite des divergences qu'induisent ces corrections radiatives QED à l'ordre de la boucle, ainsi que de la manière avec laquelle elles sont gérées pour mener à des résultats observables finis ou autrement dit des résultats observables renormalisés [13, 31, 32], et par suite comparables avec les résultats expérimentaux correspondants. Ce chapitre est influencé par l'excellente contribution de L. Landau et E. Lifchitz à l'étude de corrections radiatives en QED [33], par les notes explicites sur les corrections radiatives QED et QCD de P. Aurenche et J.P. Guillet [31], ainsi que par l'ouvrage « Fondations of Quantum Chromodynamics » de T. Muta [13] avec bien sur les adaptions, les développements et les reformulations adéquates. On note aussi que dans ce chapitre, on s'est délibérément étalé dans les développements techniques et conceptuels reliés aux corrections radiatives et à la renormalisation, et ceci vu les subtilités que renferme ce formalisme.

2.1 Correction radiative et renormalisation à la boucle du propagateur photonique :

2.1.1 Propagateur photonique libre

Ce propagateur photonique libre ($D^{\mu\nu}_{F,(lib)}(k)$) comme son nom l'indique correspond à une propagation libre du photon à l'arbre sans aucune correction d'ordre supérieure. Il est donné par l'équation (1.71) qu'on décompose en composantes transversale et longitudinale comme

suite :

$$D^{\mu\nu}_{F,(lib)}(k) \equiv i\mathcal{D}^{-1\,\mu\nu}(k) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}+\frac{\zeta-1}{\zeta}\frac{ik^\mu k^\nu}{(k^2+i\epsilon)^2} = \underbrace{\overbrace{-\frac{i}{k^2}}^{D^{(T)}_{F,(lib)}(k^2)} \left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)}_{(transversale)} + \underbrace{\overbrace{\frac{-i}{\zeta\,k^2}}^{D^{(L)}_{F,(lib)}(k^2)} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}_{(longitudinale)} \tag{2.1}$$

2.1.2 Propagateur photonique exact

Néanmoins, comme on sait qu'en absence d'interaction de ce photon avec des fermions réels externes (c'est à dire d'observation), ce photon voyageur produit en un point donné de l'espace temps une paire fermion-antifermion virtuelles qu'il réabsorbe de suite donnant lieu à un diagramme à une seule boucle. Il peut de même produire une paire fermion-antifermion virtuelles qui à son tour émet un photon virtuel et le réabsorbe aussitôt avant la reconstitution de la paire initiale pour redonner ainsi le photon. Ceci donne lieu à un diagramme à deux boucles. Et ainsi de suite, les diagrammes d'ordre supérieurs se concrétisent donnant lieu à la production et annihilation de particules virtuelles sous toutes les formes possibles et imaginables autorisées par le Lagrangien. L'association de ces différents diagrammes à tous les ordres supérieurs et auxquels on a ôté les deux pattes photoniques externes, donne ce qu'on appelle l'opérateur de polarisation du vide : $i\Pi_{\mu\nu}(p)$. Il est évident que l'action de cet opérateur de polarisation peut se répéter indéfiniment lors du vol libre de ce photon voyageur. Par suite, le propagateur photonique qui prend en considération ce phénomène de polarisation répétée du vide lors de la propagation sans interaction du photon avec d'autres fermions réels externes est nommé propagateur photonique exact : $D^{\mu\nu}_{F,(exa)}(k)$.

D'après ce qu'on vient d'expliquer, il est possible d'écrire la relation qui lie le propagateur photonique exact et le propagateur photonique libre via l'opérateur de polarisation sous la forme :



$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu}_{F,(exa)} &= D^{\mu\nu}_{F,(lib)} + D^{\mu\alpha_1}_{F,(lib)}\, i\Pi_{\alpha_1\alpha_2}\, D^{\alpha_2\nu}_{F,(lib)} + D^{\mu\alpha_1}_{F,(lib)}\, i\Pi_{\alpha_1\alpha_2}\, D^{\alpha_2\alpha_3}_{F,(lib)}\, i\Pi_{\alpha_3\alpha_4}\, D^{\alpha_4\nu}_{F,(lib)} + \cdots && (2.2)\\
&= D^{\mu\alpha_1}_{F,(lib)} \left\{ g_{\alpha_1}{}^{\nu} + i\Pi_{\alpha_1\alpha_2} \underbrace{\left[D^{\alpha_2\nu}_{F,(lib)} + D^{\alpha_2\alpha_3}_{F,(lib)}\, i\Pi_{\alpha_3\alpha_4}\, D^{\alpha_4\nu}_{F,(lib)} + \cdots\right]}_{D^{\alpha_2\nu}_{F,(exa)}} \right\} && (2.3)\\
&= D^{\mu\nu}_{F,(lib)} + D^{\mu\alpha_1}_{F,(lib)}\, i\Pi_{\alpha_1\alpha_2}\, D^{\alpha_2\nu}_{F,(exa)} && (2.4)
\end{aligned}$$

d'où en multipliant à gauche par $\left[D^{-1}_{F,(lib)}\right]_{\alpha\mu}$ et à droite par $\left[D^{-1}_{F,(exa)}\right]_{\nu\beta}$, et en utilisant les relations :

$$\left[D^{-1}_{F,(lib)}\right]_{\alpha\mu} D^{\mu\nu}_{F,(lib)} = g_\alpha{}^\nu = \delta_\alpha{}^\nu \quad \text{et} \quad D^{\alpha_2\nu}_{F,(exa)} \left[D^{-1}_{F,(exa)}\right]_{\nu\beta} = g^{\alpha_2}{}_\beta = \delta^{\alpha_2}{}_\beta \tag{2.5}$$

on peut facilement déduire la relation :

$$i\widehat{\Pi}_{\alpha\beta} = \left[D^{-1}_{F,(lib)}\right]_{\alpha\beta} - \left[D^{-1}_{F,(exa)}\right]_{\alpha\beta} \tag{2.6}$$

Et comme pour des raisons de causalité et de covariance de Lorentz [31] les variations du propagateur photonique libre et du propagateur photonique exact sont égales entre elles, lors de leur soumission à une même transformation de jauge.

$$A^{\mu}(x) \longrightarrow A^{\mu}(x) + Q_f\, e\partial^{\mu}\theta(x) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^{\mu}(x) \longrightarrow \varepsilon^{\mu}(x) + Q_f\, e\theta(x)p^{\mu} \tag{2.7}$$

Et vu que de plus, la transformation de jauge (2.7) n'affecte que les composantes longitudinales des propagateurs alors :

1. Dans l'expression de l'opérateur de polarisation (2.6) les parties longitudinales provenant des propagateurs se compensent. Et l'opérateur de polarisation ne renferme donc qu'une composante transversale :

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{2.8}$$

2. La partie longitudinale du propagateur photonique exact s'écrit :

$$D^{(L)}_{F,(exa)}(k^2) = D^{(L)}_{F,(exa)}(k^2) = \frac{-i}{\zeta\, k^2} \tag{2.9}$$

3. La partie transversale du propagateur photonique exact vérifie la relation :

$$i\Pi(k^2) = \frac{1}{D^{(T)}_{F,(lib)}(k^2)} - \frac{1}{D^{(T)}_{F,(exa)}(k^2)} = ik^2 - \frac{1}{D^{(T)}_{F,(exa)}(k^2)} \tag{2.10}$$

d'où :

$$D^{(T)}_{F,(exa)}(k^2) = \frac{-i}{k^2 - \Pi(k^2)} \tag{2.11}$$

Par suite le propagateur exact prend la forme :

$$\boxed{D^{\mu\nu}_{F,(exa)}(k^2) = \left[\frac{-i}{k^2 - \Pi(k^2) + i\epsilon}\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) + \left[\frac{1}{\zeta}\frac{-i}{k^2 + i\epsilon}\right]\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}} \tag{2.12}$$

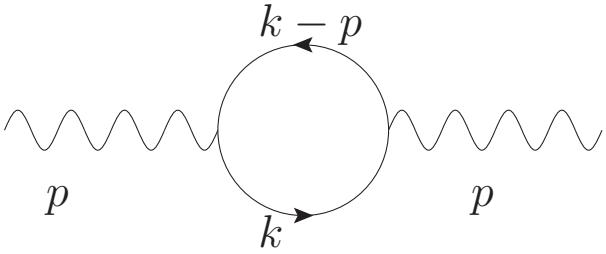
On remarque donc que les corrections radiatives à boucles contenues dans $\Pi(k^2)$ ne touche que le dénominateur de la partie transversale du propagateur photonique exact. On attire aussi l'attention sur le fait que :

$$\Pi(k^2) = \Pi^{(1)}(k^2) + \Pi^{(2)}(k^2) + \Pi^{(3)}(k^2) + \cdots \tag{2.13}$$

où $\Pi^{(1)}(k^2)$ est la correction à une boucle, $\Pi^{(2)}(k^2)$ est la correction à deux boucles, etc.

2.1.3 Calcul à la boucle de la correction au propagateur photonique libre

On s'intéresse à présent au calcul de l'opérateur de polarisation du vide à l'ordre de la boucle correspondant au diagramme de Feynman suivant :



L'application des règles de Feynman à ce diagramme permet d'écrire la relation :

$$i\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p) = -(Q_f\, e)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left[\gamma_\mu \frac{(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2 + i\epsilon}\gamma_\nu \frac{(\not{k} - \not{p} + m_f)}{(k-p)^2 - m_f^2 + i\epsilon}\right] \tag{2.14}$$

On remarque que pour des valeurs de k tendant vers l'infini, cette intégrale prend la forme :

$$\int^\infty \frac{d^4k}{k^2} \to \int^\infty \frac{[k^{(E)}]^3 dk^{(E)}}{[k^{(E)}]^2} = \int^\infty k^{(E)} dk^{(E)} = \frac{1}{2}\lim_{k^{(E)}\to\infty}[k^{(E)}]^2 = \infty \tag{2.15}$$

avec :

$$k_0 = ik_0^{(E)}, \quad k_i = k_i^{(E)} \Rightarrow d^4k = id^4k^{(E)} = i[k^{(E)}]^3 dk^{(E)} d\Omega^{(E)}, \quad k^2 = -([k_0^{(E)}]^2 + [\vec{k}^{(E)}]^2) \tag{2.16}$$

la transformation (rotation de Wick) permettant le passage de l'espace de Minkowski à l'espace Euclidien.

On voit donc bien que l'intégrale précédente est quadratiquement divergente. Mais la manipulation de quantités physiques observables voudrait que l'on ait à faire à des quantités finies. A cette fin, plusieurs méthodes d'évaluation sans ambiguïté de la forme de ce comportement infini (on dit aussi des méthodes de régularisation) existent. On choisit de travailler avec la méthode de la régularisation dimensionnelle qui préserve la covariance de Lorentz et l'invariance de jauge. L'idée est qu'on choisisse un espace de dimension D inférieure à 4, de manière à ce que cette intégrale puisse être rendue convergente. Ainsi, on aura la possibilité de procéder à toutes les manipulations souhaitées (comme par exemple le changement de variables, $\cdots$) via l'utilisation d'une forme analytique de cette intégrale. Puis à la fin des calculs, on fait tendre analytiquement dans l'espace complexe la dimension D vers 4 ($D \to 4$) pour retomber sur notre cas concret. [1]

Ainsi, par respect à la méthode de la régularisation dimensionnelle, on procède à la substitution suivante :

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \tag{2.17}$$

Mais de plus on remarque que dans le Lagrangien QED ($\mathcal{L}_{QED}$) le terme d'interaction ($\mathcal{L}_\gamma = Q_f\, eA_\mu \overline{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_f$) a la dimension D. Et en prenant en considération les dimensions de A^μ et Ψ qui est donnée respectivement par les équations (1.30) et (1.29). Il en découle que la dimension de la charge élémentaire e (Q_f étant un nombre sans dimension) est :

$$[e]_{(masse)} = 2 - \frac{D}{2} \tag{2.18}$$

On introduit alors une échelle de masse μ arbitrairement libre ($[\mu]_{(masse)} = 1$), mais en lui affectant la puissance $2 - \frac{D}{2}$ de manière à ce que la charge e_0 soit sans dimension de masse.

1. Ultérieurement, on procèdera aussi à la renormalisation de ces intégrales de manière à ce que le calcul à boucles des quantités physiques observable aboutisse à des résultats finies à la limite ($D \to 4$).

Cette démarche se traduit donc par la substitution :

$$e \quad \longrightarrow \quad e_0\,\mu^{2-\frac{D}{2}} \tag{2.19}$$

D'où l'expression (2.14)prend alors la forme :

$$i\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p) = -(Q_f\,e_0)^2\mu^{(4-D)}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{Tr\left[\gamma_\mu(\not k+m_f)\gamma_\nu(\not k-\not p+m_f)\right]}{\left[k^2-m_f^2+i\epsilon\right]\left[(k-p)^2-m_f^2+i\epsilon\right]} \tag{2.20}$$

Maintenant, pour procéder au calcul de cette quantité, on suit les étapes suivantes :

1. • **Évaluation de la trace au numérateur :**
   On procède d'abord au calcul de la trace qui se trouve au numérateur :

$$\begin{aligned} Tr\left[\gamma_\mu(\not k+m)\gamma_\nu(\not k-\not p+m_f)\right] &= (k^\alpha k^\beta - k^\beta k^\alpha)Tr\left[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] + m_f^2 Tr\left[\gamma_\mu\gamma_\nu\right] \\ &= 4\left[g_{\mu\nu}\left(m_f^2-k^2+k.p\right)+2k_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu - k_\nu p_\mu\right] \end{aligned} \tag{2.21}$$

2. • **Linéarisation du dénominateur via la paramétrisation de Feynman :**
   Pour linéariser le dénominateur, on introduit la paramétrisation de Feynman suivante :

$$\frac{1}{a\,b} = \int_0^1 dx \frac{1}{\left[ax+b(1-x)\right]^2} \tag{2.22}$$

   pour linéariser le dénominateur de l'intégrant dans (2.20). Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} i\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p) &= -(Q_f\,e_0)^2\mu^{(4-D)}\int_0^1 dx\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{Tr\left[\gamma_\mu(\not k+m_f)\gamma_\nu(\not k-\not p+m_f)\right]}{\left[k^2-2k.p(1-x)+p^2(1-x)-m_f^2+i\epsilon\right]^2} \\ &= -(Q_f\,e_0)^2\mu^{(4-D)}\int_0^1 dx\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{4\left[g_{\mu\nu}\left(m_f^2-k^2+k.p\right)+2k_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu - k_\nu p_\mu\right]}{\left[(k-p(1-x))^2+x(1-x)p^2-m_f^2+i\epsilon\right]^2} \end{aligned} \tag{2.23}$$

3. • **Changement de variables et réarrangement de l'intégrale :**
   Cette dernière expression nous inspire à faire le changement de variable :

$$k = l + p(1-x) \tag{2.24}$$

   En prenant en plus en considérant les relations :

$$\int l_\mu\, f(l^2)\,d^Dl = 0 \quad \text{et :} \quad \int l_\mu\, l_\nu\, f(l^2)\,d^Dl = \frac{1}{D}\,g_{\mu\nu}\int l^2\, f(l^2)\,d^Dl \tag{2.25}$$

Alors l'équation (2.23) prend la forme :

$$
\begin{aligned}
i\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p) &= -4(Q_f\, e_0)^2 \mu^{(4-D)} \left\{ g_{\mu\nu} \left(\frac{2-D}{D}\right) \int_0^1 dx \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^2}{\left[l^2 + x(1-x)p^2 - m_f^2 + i\epsilon\right]^2} \right. \\
&\quad + g_{\mu\nu} \int_0^1 \left(m_f^2 + x(1-x)p^2\right) dx \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left[l^2 + x(1-x)p^2 - m_f^2 + i\epsilon\right]^2} \\
&\quad \left. - 2p_\mu\, p_\nu \int_0^1 x(1-x) dx \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left[l^2 + x(1-x)p^2 - m_f^2 + i\epsilon\right]^2} \right\} \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

4. • **Calcul de l'intégrale sur l'espace de phase Euclidien :**

On remarque que les deux intégrales dans l'équation (2.26) sont exprimées dans l'espace de Minkowski en fonction de $l^2 = l_0^2 - \vec{l}^2$, et sont du type :

$$
I(r,m) = \int \frac{(l^2)^r}{(l^2 - R^2 + i\epsilon)^m} \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \quad \text{avec} : R^2 = m_f^2 - x(1-x)p^2, \quad \text{et} \quad r, m > 0 \qquad (2.27)
$$

Alors que pour tirer une expression analytique du résultat de cette intégrale, il importe d'abord d'assurer sa convergence. Mais, ceci n'est pas possible dans l'espace de Minkowski. On ne sait donc pas faire l'intégrale dans cette espace de Minkowski. Pour détourner cette difficulté, on effectue la rotation de Wick suivante :

$$
l = (l_0, \vec{l}) = (i\, K_0, \vec{K}) \quad \text{avec} : \quad K_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad K_i \in \mathbb{R} \qquad (2.28)
$$

qui nous ramène dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^D$, où la limite à hautes énergies est bien déterminée du fait que maintenant $K^2 = |K|^2 = K_0^2 + \vec{K}^2$, et où il est possible d'effectuer l'intégrale en suivant la procédure standard.

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
I(r,m) &= \int \frac{d^{D-1} l}{(2\pi)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} dl_0\, \frac{(l_0^2 - \vec{l}^2)^r}{(l_0^2 - \vec{l}^2 - R^2 + i\epsilon)^m} && (2.29) \\
&= \int \frac{d^{D-1} K}{(2\pi)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} i\, dK_0\, \frac{(-K_0^2 - \vec{K}^2)^r}{(-K_0^2 - \vec{K}^2 - R^2 + i\epsilon)^m} && (2.30) \\
&= i(-1)^{r-m} \int \frac{d^{D-1} K}{(2\pi)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_0\, \frac{(K_0^2 + \vec{K}^2)^r}{(K_0^2 + \vec{K}^2 + R^2 - i\epsilon)^m} && (2.31) \\
&= i(-1)^{r-m} \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{(K^2)^r}{(K^2 + R^2 - i\epsilon)^m} && (2.32) \\
&= i(-1)^{r-m} \int d\Omega_D \int_0^\infty \frac{|K|^{D-1}\, d|K|}{(2\pi)^D} \frac{(|K|^2)^r}{(|K|^2 + R^2 - i\epsilon)^m} && (2.33) \\
&= i(-1)^{r-m} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{|K|^{2r+D-1}\, d|K|}{(|K|^2 + R^2 - i\epsilon)^m} && (2.34) \\
&= i(-1)^{r-m} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} (R^2 - i\epsilon)^{r+\frac{D}{2}-m} \int_0^\infty \frac{t^{(r+\frac{D}{2})-1}\, dt}{(1+t)^m} \quad \text{avec} : t = \frac{|K|^2}{R^2} && (2.35)
\end{aligned}
$$

$$I(r,m) = i\frac{(-1)^{r-m}}{(4\,\pi)^{D/2}}\,\frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})}\,(R^2-i\epsilon)^{r+\frac{D}{2}-m}B(r+\frac{D}{2},m-r-\frac{D}{2}) \quad (2.36)$$

$$= i\frac{(-1)^{r-m}}{(4\,\pi)^{D/2}}\,(R^2-i\epsilon)^{r+\frac{D}{2}-m}\frac{\Gamma(r+\frac{D}{2})\Gamma(m-r-\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(m)} \quad (2.37)$$

D'où, on en déduit que :

$$i\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p) = -4(Q_f\,e_0)^2\mu^{(4-D)}\left\{g_{\mu\nu}\int_0^1 dx\left[\frac{2-D}{D}I(1,2)+\left(m_f^2-x(1-x)p^2\right)I(0,2)\right]\right.$$
$$\left.+2\,p^2\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu\,p_\nu}{p^2}\right)\int_0^1 x(1-x)dx\,I(0,2)\right\} \quad (2.38)$$

avec

$$I(1,2) = -\frac{i}{(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\left[m_f^2-x(1-x)p^2\right]^{\frac{D}{2}-1}\frac{D}{2}\Gamma(1-\frac{D}{2}) \quad (2.39)$$

$$I(0,2) = +\frac{i}{(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\left[m_f^2-x(1-x)p^2\right]^{\frac{D}{2}-2}(1-\frac{D}{2})\Gamma(1-\frac{D}{2}) \quad (2.40)$$

C'est à dire :

$$\frac{2-D}{D}I(1,2)+\left(m_f^2-x(1-x)p^2\right)I(0,2)=0 \quad (2.41)$$

Et par suite :

$$i\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p) = -\frac{8i}{(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\,Q_f^2\,e_0^2\,\mu^{(4-D)}\,p^2\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu\,p_\nu}{p^2}\right)\Gamma(2-\frac{D}{2})$$
$$\times\int_0^1 x(1-x)\left[m_f^2-x(1-x)p^2-i\epsilon\right]^{\frac{D}{2}-2}dx \quad (2.42)$$

Enfin, d'après l'équation (2.8), on peut écrire :

$$\boxed{\Pi^{(1)}(p^2) = -\frac{2\,Q_f^2}{\pi}\,\alpha\,p^2\,(4\,\pi)^{(2-\frac{D}{2})}\;\Gamma(2-\frac{D}{2})\int_0^1 x(1-x)\left[\frac{\mu^2}{m_f^2-x(1-x)p^2-i\epsilon}\right]^{2-\frac{D}{2}}dx} \quad (2.43)$$

où $\alpha=\frac{e_0^2}{4\,\pi}$

C'est cette expression (2.43) qui représente la correction à l'ordre de la boucle au propagateur photonique libre. Elle intervient au dénominateur de la partie transversale du propagateur photonique exact (2.12).

remarque :

L'équation (2.34) est convergente si $D<2(m-r)$. Par suite, les équations (2.38) et (2.43) sont justifiées pour $D<2$.

5. • **Mise en évidence de la divergence ultraviolette (UV) :**

L'expression (2.43) étant convergente pour $D<2$ donc pour $D<4$, par conséquent quand on fait tendre D vers 4 par valeurs inférieures, la quantité $2-\frac{D}{2}$ qui apparait dans (2.43) tend vers zéro par valeurs supérieures

$$\lim_{D\to 4} 2-\frac{D}{2}=0^+ \quad (2.44)$$

On défini alors la quantité positive $\varepsilon_{\rm uv}$ par :

$$\varepsilon_{\rm uv} = 2 - \frac{D}{2} \tag{2.45}$$

Et, on cherche le comportement de la correction (2.43) au propagateur photonique lorsque $\varepsilon_{\rm uv}$ tend vers zéro. Pour cela, on utilise les relations :

$$\Gamma(\varepsilon_{\rm uv}) = \frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon_{\rm uv}) \qquad \text{où : } \gamma \text{ est la constante d'Euler.} \tag{2.46}$$

$$a^{\varepsilon_{\rm uv}} = e^{ln(a^{\varepsilon_{\rm uv}})} = e^{\varepsilon_{\rm uv}\, ln(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\varepsilon_{\rm uv}\, ln(a)\right]^n \simeq 1 + \varepsilon_{\rm uv}\, ln(a) \tag{2.47}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(\alpha, \frac{m_f^2}{\mu^2}, \frac{p^2}{\mu^2}, p^2, \varepsilon_{\rm uv}) &= -\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\,\alpha\,(p^2+i\epsilon)\left\{\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} - \gamma + ln(4\pi)\right. \\ &\quad \left. -6\int_0^1 x(1-x)dx\, ln\left[\frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{(p^2+i\epsilon)}{\mu^2}\,x(1-x)\right]\right\} \qquad (2.48) \\ &\equiv (p^2+i\epsilon)\,\mathfrak{P}^{(1)}(\alpha, \frac{m_f^2}{\mu^2}, \frac{p^2}{\mu^2}, \varepsilon_{\rm uv}) \qquad (2.49) \end{aligned}$$

qui diverge en $\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}}$ lorsque $\varepsilon_{\rm uv} \to 0$.
Le propagateur photonique exact (2.12) prend, à l'ordre de la boucle, la forme :

$$\boxed{D^{\mu\nu}_{F,(exa)}(k^2) = \left[\frac{-i}{(k^2+i\epsilon)\left(1 - \mathfrak{P}^{(1)}(\alpha, \frac{m_f^2}{\mu^2}, \frac{p^2}{\mu^2}, \varepsilon_{\rm uv})\right)}\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) + \left[\frac{1}{\zeta}\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\right]\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}} \tag{2.50}$$

Remarques :

(a) Le seul terme divergent dans (2.50) est : $\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}}$ qui est constant et ne dépend pas de k^2. Cette divergence n'apparait que lorsqu'on fait passer la dimension de l'espace-temps à $D = 4$, induisant par suite une forte atténuation de la partie transversale du propagateur photonique exact. Mais, on sait que dans le monde physique réel quadridimensionnel les ondes électromagnétique sont plutôt transversales. Ainsi, la divergence recouverte dans notre calcul à boucle n'est que fictive et doit par suite disparaitre, pour qu'on puisse rejoindre nos observables physiques. La procédure d'élimination de ces divergences s'appelle re-normalisation.

(b) La masse nulle du photon donnée par le pôle du propagateur photonique exact régulé ($\varepsilon_{\rm uv} \neq 0$) à savoir $k^2 = 0$, n'est pas affectée par la correction à boucle.

(c) La correction radiative divergente à l'ordre de la boucle qui affecte le propagateur photonique exact : $D^{\mu\nu}_{F,(exa)}(k^2) = \langle 0|T[A^\mu(x)A^\nu(y)]|0\rangle$ peut être attribuée au champ photonique corrigé $A^\mu_{(exa)}$. Donc pour compenser cette divergence ultraviolette qui apparait au niveau du propagateur photonique exact, il faut normaliser une seconde fois ou autrement dit re-normaliser le champ photonique A^μ exact. Et comme, la divergence touche le dénominateur du propagateur et que le produit des champs $A^\mu A^\nu$ est relié à l'inverse du propagateur, alors il est tout à fait naturel de proposer la transformation de renormalisation reliant d'une part le champ exact $A^\mu_{(exa)}(x)$

calculé en prenant en considération les corrections à boucles, et d'autre part le champ renormalisé (c'est à dire indemne de divergences) $A^{\mu}_{r}(x)$ candidat pour représenter le champ physique, et ceci sous forme d'une factorisation de la divergence par :

$$A^{\mu}_{(exa)}(x) \longrightarrow A^{\mu}_{(exa)}(x) = \sqrt{Z_3} A^{\mu}_{r}(x) \tag{2.51}$$

où $\sqrt{Z_3} = \sqrt{Z_3(\varepsilon_{\text{uv}})}$ renferme la partie qui diverge lorsque $\varepsilon_{\text{uv}} \to 0$. Et, est aussi soumise à la contrainte, qu'à l'arbre :

$$A^{\mu}_{(lib)}(x) = A^{\mu}_{(exa,0)}(x) = A^{\mu}_{(r,0)}(x) \quad \text{soit :} \quad Z_3^{(0)} = 1 \tag{2.52}$$

Tout-en précisant ici que :

$A^{\mu}_{(lib)} \longrightarrow$ champ sans corrections radiatives
$A^{\mu}_{(exa)} \longrightarrow$ champ avec corrections radiatives
$A^{\mu}_{(r)} \longrightarrow$ champ avec corrections radiatives et constante de renormalisation

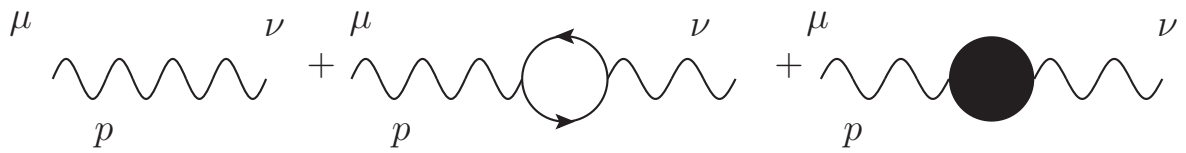
2.1.4 Renormalisation à la boucle du propagateur photonique :

La renormalisation du propagateur photonique consiste à tuer la divergence fictive (c'est à dire non physique) qui apparait au niveau du dénominateur de ce propagateur suite à la prise en compte des corrections radiatives à boucles. L'idée est d'insérer à un niveau fondamental, c'est à dire au niveau du Lagrangien photonique initial $\mathcal{L}_{\gamma}$, censé initialement représenté la réalité physique et donné par l'expression (1.61), un terme supplémentaire qui après quantification et application de la procédure d'extraction des règles de Feynman, aurai pour effet de contrecarrer le terme divergent $\mathfrak{P}^{(1)}(\alpha, \frac{m_f^2}{\mu^2}, \frac{p^2}{\mu^2}, \varepsilon_{\text{uv}})$ qui apparait au dénominateur de la partie transversale du propagateur photonique (2.50) suite à l'insertion de la correction à la boucle. Ainsi dit, notre lagrangien photonique de départ ($\mathcal{L}_{\gamma}$) ne représente pas à lui seul la réalité physique, mais doit plutôt être compléter par une partie $\delta\mathcal{L}_{\gamma}$ dite contre terme et qui traite ordre par ordre ($\delta\mathcal{L}_{\gamma} = \delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(0)} + \delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(1)} + \delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(2)} + \cdots$) les divergences qui apparaissent lors du calcul perturbatif :

$$\mathcal{L}_{\gamma} \quad \xrightarrow{\text{renormalisation}} \quad \mathcal{L}_{\gamma,(r)} + \delta\mathcal{L}_{\gamma} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\zeta(\partial_{\sigma}A^{\sigma})^2 + \delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(1)} + \delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(2)} + \cdots \tag{2.53}$$

Où $\delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(0)}$ correspond au contre terme à l'arbre qui est bien sur nulle ($\delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(0)} = 0$) du fait qu'aucune divergence n'apparait au niveau des amplitudes de transition à l'arbre.

A l'ordre de la boucle, cette procédure de renormalisation appliquée au propagateur photonique, peut être schématisée par l'ensemble des diagrammes suivants :



où le dernier diagramme serait issue du contre terme à l'ordre de la boucle : $\delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(1)}$.

On s'intéresse à présent à déterminer l'expression de $\delta\mathcal{L}_{\gamma}^{(1)}$.

1. Renormaliser à la boucle le propagateur photonique exact (2.50), revient à introduire une fonction dite constante de renormalisation $Z_A^{(1)}(\varepsilon_{\text{uv}})$ qui ait le même comportement

divergent que $\mathfrak{P}^{(1)}(\alpha, \frac{m_f^2}{\mu^2}, \frac{p^2}{\mu^2}, \varepsilon_{\text{uv}})$ lorsque $\varepsilon_{\text{uv}} \to 0$ de manière à pouvoir le compenser. C'est à dire :

$$\mathfrak{P}^{(1)} - Z_A^{(1)} \equiv \left[\mathfrak{P}^{(1)}\left(\alpha, \frac{m_f^2}{\mu^2}, \frac{p^2}{\mu^2}, \varepsilon_{\text{uv}}\right) - Z_A^{(1)}\left(\varepsilon_{\text{uv}}\right)\right] \quad \text{est indépendant de } \varepsilon_{\text{uv}} \tag{2.54}$$

avec :

$$Z_A^{(1)} = X_A^{(1)}\,\frac{1}{\varepsilon_{\text{uv}}} + Y_A^{(1)} = -\left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\frac{1}{\varepsilon_{\text{uv}}} - \left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,y_A^{(1)} \tag{2.55}$$

Soit :

$$\mathfrak{P}^{(1)} - Z_A^{(1)} = -\left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\left\{y_A^{(1)} - \gamma + ln(4\pi) - 6\int_0^1 x(1-x)dx\,ln\left[\frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{(p^2+i\epsilon)}{\mu^2}\,x(1-x)\right]\right\} \tag{2.56}$$

La liberté qu'on a dans le choix de la fonction $y_A^{(1)}$, permet de définir différents schémas de renormalisation. Un point important sur lequel on reviendra ultérieurement.
Soit alors à présent la forme suivante du propagateur photonique renormalisé :

$$\begin{aligned} & D^{\mu\nu}_{F,(exa)}(k^2) \xrightarrow{\text{renormalisation}} \\ D^{\mu\nu}_{F,(r)}(k^2) \;\; &= \;\; \left[\frac{-i}{(k^2+i\epsilon)\left(1-\mathfrak{P}^{(1)}+Z_A^{(1)}\right)}\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) + \left[\frac{1}{\zeta}\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\right]\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \end{aligned} \tag{2.57}$$

2. On remarque que $Z_A^{(1)}$ est la constante de renormalisation qui permet de compenser la divergence qui apparait à l'ordre de la boucle au niveau du dénominateur de la composante transversale du propagateur photonique. On peut aussi définir $Z_A^{(2)}$ comme étant la constante de renormalisation qui compenserait la divergence qui apparaitrait à l'ordre de deux boucles, et ainsi de suite. Alors, il serait préférable d'avoir affaire à une seule constante de renormalisation dont le développement à l'ordre un donne $Z_A^{(1)}$, à l'ordre deux donne $Z_A^{(2)}$, etc. Et en même temps, qui à l'arbre (ordre zéro) rejoint la constante $Z_A^{(0)} = 1$ (voir équation : 2.52). Ainsi, on peut écrire :

$$Z_A = Z_A^{(0)} + Z_A^{(1)} + Z_A^{(2)} + \cdots = 1 + Z_A^{(1)} + Z_A^{(2)} + \cdots \tag{2.58}$$

avec $Z_A^{(1)} \sim \alpha = \frac{1}{137}$, $Z_A^{(2)} \sim \alpha^2 = \left(\frac{1}{137}\right)^2$, $\cdots$.
Et comme dans notre cas présent, on se restreint à l'ordre un. On peut se permettre d'écrire :

$$\boxed{Z_A = 1 + Z_A^{(1)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(1-\mathfrak{P}^{(1)}+Z_A^{(1)}\right) = \left(1+Z_A^{(1)}\right)\left(1-\mathfrak{P}^{(1)}\right) = Z_A\left(1-\mathfrak{P}^{(1)}\right)} \tag{2.59}$$

Et par suite, le propagateur photonique renormalisé (2.57) prend la nouvelle forme plus générale :

$$D^{\mu\nu}_{F,(r)}(k^2) = \left[\frac{-i}{Z_A(k^2+i\epsilon)\left(1-\mathfrak{P}^{(1)}\right)}\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) + \left[\frac{1}{\zeta}\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\right]\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \tag{2.60}$$

$$\boxed{D^{\mu\nu}_{F,(r)}(k^2) = \left[\frac{-i}{\left((\sqrt{Z_A}\,k)^2 + i\epsilon\right)(1-\mathfrak{P}^{(1)})}\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) + \left[\frac{1}{\zeta}\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\right]\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}} \tag{2.61}$$

3. En comparant l'expression du propagateur photonique renormalisé donnée par l'équation (2.61) avec celle du propagateur photonique corrigé (exact) donnée par l'équation (2.50), on remarque que ces deux expressions sont les mêmes à l'exception que la quadri-impulsion k^μ dans le dénominateur de la partie transversale de (2.50) est remplacée dans (2.61) par $\sqrt{Z_A}\,k^\mu$. On en déduit donc que ces deux propagateurs résultent de la même forme de Lagrangien.

   Donc partant du fait que le Lagrangien qui nous a permis de tirer le propagateur (2.50) est donné par la relation (1.61) :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)^2 \qquad \text{avec :} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.62}$$

   avec utilisation du vertex électromagnétique à l'arbre (1.84) :

$$\boxed{\text{Vertex}\,(\gamma - f - \bar{f}) \longrightarrow iQ_f\, e\gamma_\mu} \tag{2.63}$$

   lors du calcul à la boucle induisant la correction $\mathfrak{P}^{(1)}$ dans le propagateur photonique.

   Et ajoutant à cela, le fait que l'examen de la méthode d'extraction du propagteur photonique exposé dans la section (1.3) nous permet d'une part de dire que le k^2 qui apparait dans le dénominateur de la partie transversale du propagateur photonique provient du terme cinétique : $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ du Lagrangien (2.62), et pour recouvrir (2.61) ce k^2 doit être remplacé par $Z_A k^2$. Et d'autre part que le terme de fixation de jauge $-\frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)^2$ contribue à rendre l'opérateur différentiel inversible et par suite à la formation du facteur $\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)$ qui doit rester inchangé. Ainsi, le terme de fixation de jauge doit être invariant sous l'effet de la procédure de renormalisation du propagateur photonique. Alors, que le terme cinétique doit permettre la substitution :

$$k^2 \longrightarrow Z_A\, k^2 \tag{2.64}$$

   On en déduit que le Lagrangien qui mène à la forme (2.61) du propagateur photonique (corrigé et renormalisé) est :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}Z_A\, F^{\mu\nu}_{(r)}F_{\mu\nu\,(r)} - \frac{1}{2}\zeta_{(r)}(\partial_\sigma A^\sigma_{(r)})^2 \qquad \text{avec :} \quad F^{\mu\nu}_{(r)} = \partial^\mu A^\nu_{(r)} - \partial^\nu A^\mu_{(r)} \tag{2.65}$$

   où :

$$A^\mu = Z_A^{1/2} A^\mu_{(r)} \quad \text{et :} \quad \zeta = Z_A^{-1}\zeta_{(r)} \tag{2.66}$$

   de sorte que :

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}Z_A\, F^{\mu\nu}_{(r)}F_{\mu\nu\,(r)} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)^2 = -\frac{1}{2}\zeta_{(r)}(\partial_\sigma A^\sigma_{(r)})^2 \tag{2.67}$$

4. Par conséquent :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\zeta(\partial_\sigma A^\sigma)^2 \tag{2.68}$$

$$= -\frac{1}{4}Z_A\, F^{\mu\nu}_{(r)}F_{\mu\nu\,(r)} - \frac{1}{2}\zeta_{(r)}(\partial_\sigma A^\sigma_{(r)})^2 \tag{2.69}$$

$$= -\frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}_{(r)}F_{\mu\nu\,(r)} - \frac{1}{2}\zeta_{(r)}(\partial_\sigma A^\sigma_{(r)})^2 \underbrace{\boxed{-\frac{1}{4}(Z_A-1)\, F^{\mu\nu}_{(r)}F_{\mu\nu\,(r)}}}_{\delta\mathcal{L}^{(1)}_\gamma} \tag{2.70}$$

Et à l'ordre de la boucle ($Z_A = 1 + Z_A^{(1)}$), cette dernière expression prend la forme :

$$\boxed{\mathcal{L}_\gamma = \underbrace{-\frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}_{(r)}F_{\mu\nu\,(r)} - \frac{1}{2}\zeta_{(r)}(\partial_\sigma A^\sigma_{(r)})^2}_{\mathcal{L}_{\gamma,\,(r)}} \underbrace{-\frac{1}{4}Z_A^{(1)}\, F^{\mu\nu}_{(r)}F_{\mu\nu\,(r)}}_{\delta\mathcal{L}^{(1)}_\gamma}} \tag{2.71}$$

avec

$$Z_A^{(1)} = Z_A - 1 = -\left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + y_A^{(1)}\right]$$

$$\boxed{A^\mu = Z_A^{1/2}A^\mu_{(r)} = \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + y_A^{(1)}\right]\right\}A^\mu_{(r)}}$$

$$\boxed{\zeta = Z_A^{-1}\zeta_{(r)} = \left\{1 + \left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + y_A^{(1)}\right]\right\}\zeta_{(r)}}$$

L'équation (2.71) nous permet de conclure que dans la méthode des contres termes qu'on a développé dans cette section en parallèle avec le calcul à boucles, le Lagrangien initial $\mathcal{L}_\gamma$ écrit en terme des champs nus (A^μ), ne peut plus être utilisé pour représenter la réalité physique. Il est par ailleurs, substitué par un nouveau Lagrangien $\mathcal{L}_{\gamma,\,(r)}$ qui a exactement la même forme morphologique que $\mathcal{L}_\gamma$, mais qui cette fois-ci est écrit en terme des champs renormalisés $A^\mu_{(r)}$. Ceci veut dire que sur le plan procédure, on gagne la conservation des mêmes règles de Feynman initiales, lors de l'établissement des amplitudes de transition pour un processus donné, mais cette fois-ci impliquant les champs renormalisés (donc physique). Ensuite, on ajoute la contribution du contre terme $\delta\mathcal{L}^{(1)}_\gamma$ qui nous garantisse que notre amplitude soit indemne de toute divergence ultraviolette. Cette contribution se concrétise par l'ajout d'une nouvelle règle de Feynman supplémentaire aux précédentes.

5. Cette nouvelle règle de Feynman n'agit pas directement sur le propagateur photonique, mais respect toutes les règles de Feynman initiales dans l'établissement de l'amplitude de transition et là où il y a une boucle fermionique au sein d'un propagateur photonique, on joute le même diagramme de Feynman renfermant cette boucle tout-en substituant cette boucle par un vertex de contre terme selon la règle :



$$: \; -iZ_A^{(1)}p^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \tag{2.72}$$

Ceci veut dire que l'opérateur de polarisation (2.42) représentant la boucle fermionique

est substitué selon le schéma :

$$
\begin{aligned}
i\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p) = i\Pi^{(1)}(p^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \quad &\longrightarrow \quad i\Pi^{(1)}(p^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) - iZ_A^{(1)}p^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \\
&= \quad i\left[\Pi^{(1)}(p^2) - Z_A^{(1)}p^2\right]\left(g_{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \qquad (2.73) \\
&= \quad i\,p^2\left[\mathfrak{P}^{(1)} - Z_A^{(1)}\right]\left(g_{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \qquad (2.74)
\end{aligned}
$$

où, on a utilisé les relations : (2.49) et (2.72). Ce qui nous mène vers une amplitude finie pour le processus en question. [2]
On rappelle ici que :

$$
\mathfrak{P}^{(1)}(p^2) = -\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\,\alpha\left\{\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} - \gamma + ln(4\pi) - 6\int_0^1 x(1-x)dx\,ln\left[\frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{(p^2+i\epsilon)}{\mu^2}\,x(1-x)\right]\right\}
$$

et

$$
Z_A^{(1)} = Z_A - 1 = -\left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + y_A^{(1)}\right]
$$

Enfin, pour être complet, il nous reste à spécifier l'expression de la fonction $y_A^{(1)}$ au niveau de la constante de renormalisation $Z_A = 1 + Z_A^{(1)}$. Pour ce faire, on introduit une condition supplémentaire qui nous définie cette constante. On dit qu'on choisit un schéma de renormalisation. Et la condition introduite s'appelle condition de renormalisation.

Schéma de renormalisation sur la couche de masse du propagateur photonique :

Dans ce schéma de renormalisation sur la couche de masse (OS) [3], la condition supplémentaire de renormalisation consiste en l'identification du résidu [4] du pôle de la partie transversale du propagateur photonique corrigé et renormalisé (2.60) avec le résidu du pôle de la partie transversale du propagateur photonique libre (2.1). Soit alors,

$$
\begin{aligned}
Res\left[D^{(T)}_{F,(r)}(p^2)\right]_{p^2=0} \quad &= \quad Res\left[D^{(T)}_{F,(lib)}(p^2)\right]_{p^2=0} \qquad (2.75) \\
&\Rightarrow \quad Res\left[\frac{-i}{Z_A^{OS}p^2\,(1-\mathfrak{P}^{(1)})}\right]_{p^2=0} = Res\left[-\frac{i}{k^2}\right]_{p^2=0} \qquad (2.76) \\
&\Rightarrow \quad \left[Z_A^{OS}\left(1-\mathfrak{P}^{(1)}\right)\right]_{p^2=0} = 1 \qquad (2.77) \\
&\Rightarrow \quad Z_A^{(1),\,OS} \equiv \left[Z_A^{(1),\,OS}\right]_{p^2=0} = \left[\mathfrak{P}^{(1)}\right]_{p^2=0} \qquad (2.78)
\end{aligned}
$$

2. Le propagateur photonique (corrigé et renormalisé) correspondant s'obtient après avoir effectuer la somme des répétitions infinies des polarisations du vide lors de la propagation du photon. Cette somme infinie

$$
\frac{1}{\widehat{X}+\widehat{Y}} = \frac{1}{\widehat{X}} - \frac{1}{\widehat{X}}\widehat{Y}\frac{1}{\widehat{X}} + \frac{1}{\widehat{X}}\widehat{Y}\frac{1}{\widehat{X}}\widehat{Y}\frac{1}{\widehat{X}} \cdots
$$

aboutie à un propagateur renormalisé fini.

3. OS pour : On Shell renormalisation scheme

4. Si la fonction complexe $f(z)$ admet en z_0 un pôle d'ordre un, alors le résidu de cette fonction au pôle z_0 est donné par :

$$
Res\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)
$$

Si alors : $f(z) = \frac{1}{z}$ alors $Res\left[f(z)\right]_{z=z_0} = 1$, Et si : $f(z) = \frac{1}{az(1+b)}$ alors $Res\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \frac{1}{a(1+b)}$

avec :

$$\left[\mathfrak{P}^{(1)}\right]_{p^2=0} = -\left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left\{\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + ln(4\pi) - \gamma - ln\left[\frac{m_f^2}{\mu^2}\right]\right\} \tag{2.79}$$

d'où l'expression de la constante[5] de renormalisation dans ce schéma sur la couche de masse prend la forme :

$$\boxed{Z_A^{OS} = 1 + Z_A^{(1),\,OS} = 1 - \left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left\{\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + \underbrace{ln(4\pi) - \gamma - ln\left[\frac{m_f^2}{\mu^2}\right]}_{y_A^{(1),\,OS}}\right\}} \tag{2.80}$$

Et par suite, le champ photonique renormalisé (OS) s'écrit :

$$\boxed{A_{(r)}^{OS,\,\mu} = \left[Z_A^{OS}\right]^{-1/2} A^\mu = \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + ln(4\pi) - \gamma - ln\left[\frac{m_f^2}{\mu^2}\right]\right]\right\} A^\mu} \tag{2.81}$$

et le propagateur photonique renormalisé (OS) s'écrit :

$$\boxed{D_{F,(r)}^{OS,\,\mu\nu}(p^2) = \left[\frac{-i}{(p^2+i\epsilon)\left(1 - \mathfrak{P}^{(1)}(p^2) + Z_A^{(1),\,OS}\right)}\right]\,\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + \left[\frac{1}{\zeta}\frac{-i}{p^2+i\epsilon}\right]\,\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}} \tag{2.82}$$

avec :

$$Z_A^{(1),\,OS} - \mathfrak{P}^{(1)}(p^2) = \left(\frac{2\,Q_f^2}{\pi}\right)\,\alpha\,\int_0^1 x(1-x)dx\,\left\{\ln\frac{m_f^2}{\mu^2} - ln\left[\frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{(p^2+i\epsilon)}{\mu^2}\,x(1-x)\right]\right\} \tag{2.83}$$

A la limite non-relativiste $p^2 \ll m_f^2$:

$$\begin{aligned} Z_A^{(1),\,OS} - \mathfrak{P}^{(1)}(p^2) &= \left(\frac{Q_f^2\,\alpha}{3\pi}\right)\,\ln\frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{2\,Q_f^2\,\alpha}{\pi}\,\ln\frac{m_f^2}{\mu^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)\,\ln\left[1 - \frac{(p^2+i\epsilon)}{m_f^2}\,x(1-x)\right] \\ &= \left(\frac{Q_f^2\,\alpha}{15\pi}\right)\,\frac{p^2}{m_f^2} \end{aligned} \tag{2.84}$$

Schéma de renormalisation de la soustraction minimale modifiée appliqué au propagateur photonique :

Dans ce schéma de soustraction minimale modifiée ($\overline{MS}$)[6], on enlève juste la partie divergente en $\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}}$ ainsi que les constantes dues à la procédure de régularisation dimensionnelle. Soit alors :

$$\boxed{Z_A^{\overline{MS}} = 1 + Z_A^{(1),\,\overline{MS}} = 1 - \left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left\{\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + \underbrace{ln(4\pi) - \gamma}_{y_A^{(1),\,\overline{MS}}}\right\}} \tag{2.85}$$

5. Le qualificatif « constante » est bien mérité du fait de l'indépendance en fonction de p^2.
6. $\overline{MS}$ pour : Minimal Substraction renormalization scheme.

Et par suite, le champ photonique renormalisé ($\overline{MS}$) s'écrit :

$$\boxed{A_{(r)}^{\overline{MS},\,\mu} = \left[Z_A^{\overline{MS}}\right]^{-1/2} A^\mu = \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{Q_f^2}{3\,\pi}\right)\,\alpha\,\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + ln(4\pi) - \gamma\right]\right\} A^\mu} \tag{2.86}$$

et le propagateur photonique renormalisé ($\overline{MS}$) s'écrit :

$$\boxed{D_{F,(r)}^{\overline{MS},\,\mu\nu}(p^2) = \left[\frac{-i}{(p^2+i\epsilon)\left(1 - \mathfrak{P}^{(1)}(p^2) + Z_A^{(1),\,\overline{MS}}\right)}\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + \left[\frac{1}{\zeta}\frac{-i}{p^2+i\epsilon}\right]\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}} \tag{2.87}$$

avec :

$$Z_A^{(1),\,\overline{MS}} - \mathfrak{P}^{(1)}(p^2) = -\left(\frac{2\,Q_f^2}{\pi}\right)\,\alpha\,\int_0^1 x(1-x)dx\,ln\left[\frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{(p^2+i\epsilon)}{\mu^2}\,x(1-x)\right] \tag{2.88}$$

2.2 Correction radiative et renormalisation à la boucle du propagateur fermionique :

2.2.1 Propagateur fermionique libre

Ce propagateur est donné par l'expression (1.81) :

$$S_{F,(lib)}(p) = \frac{i}{\not{p} - m_f + i\epsilon} \tag{2.89}$$

Il correspondant à une propagation libre du fermion à l'arbre sans l'intervention d'aucune boucle perturbative.

2.2.2 Propagateur fermionique exact

Ce propagateur correspond par contre à une propagation du fermion sans interaction avec un photon réel externe, mais plutôt avec l'émission et la réabsorption de photons virtuels :



Le sous diagramme situé entre deux lignes fermioniques et irréductible en parties indépendante juste en coupant une ligne fermionique porte le nom d'énergie propre du fermion. Et la somme de ces énergies propres forme l'opérateur de masse $-i\widehat{\Sigma}$ représenté par des ronds dans la figure précédente.

Ainsi, on peut écrire le lien entre l'opérateur fermionique exact $S_{F,(exa)}$ et l'opérateur fermionique libre $S_{F,(lib)}$ sous la forme : :

$$\begin{aligned}
S_{F,(exa)}(p) &= S_{F,(lib)}(p) + S_{F,(lib)}(p)\,\left(-i\widehat{\Sigma}\right)\,S_{F,(lib)}(p) \\
&\qquad + S_{F,(lib)}(p)\,\left(-i\widehat{\Sigma}\right)\,S_{F,(lib)}(p)\,\left(-i\widehat{\Sigma}\right)\,S_{F,(lib)}(p) + \cdots && (2.90)\\
&= S_{F,(lib)}(p) + S_{F,(lib)}(p)\,\left(-i\widehat{\Sigma}\right)\,\left\{S_{F,(lib)}(p) + S_{F,(lib)}(p)\,\left(-i\widehat{\Sigma}\right)\,S_{F,(lib)}(p) + \cdots\right\} && (2.91)\\
&= S_{F,(lib)}(p) + S_{F,(lib)}(p)\,\left(-i\widehat{\Sigma}\right)\,S_{F,(exa)}(p) && (2.92)
\end{aligned}$$

d'où en multipliant à gauche par $S^{-1}_{F,(lib)}$ et à droite par $S^{-1}_{F,(exa)}$, on trouve :

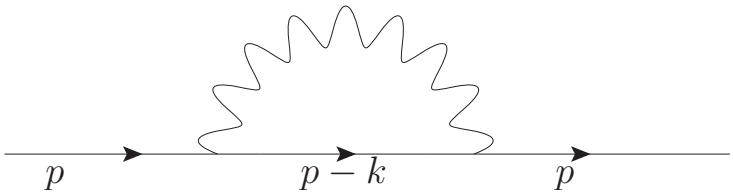
$$S^{-1}_{F,(exa)} = S^{-1}_{F,(lib)} + i\widehat{\Sigma} \tag{2.93}$$

Puis, en insérant l'expression (2.89) du propagateur fermionique libre, on obtient :

$$S_{F,(exa)}(p) = \frac{i}{\not{p} - m_f - \widehat{\Sigma}(p)} \tag{2.94}$$

2.2.3 Calcul à la boucle de la correction au propagateur fermionique libre

A travers le diagramme suivant amputé des pattes externes, on calcul l'opérateur de masse fermionique à l'ordre de la boucle,



L'application des règles de Feynman à ce diagramme permet d'écrire l'opérateur de masse à l'ordre de la boucle :

$$-i\widehat{\Sigma}(p) = -(ieQ_f)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} + \frac{1-\zeta}{\zeta} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \gamma_\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m_f}{(p-k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \tag{2.95}$$

On remarque que cette intégrale sur les quadri-impulsions au sein de la boucle, c'est à dire sur les quadri-impulsions non-contraintes par la loi de conservation de la quadri-impulsion totale, est linéairement divergente. Et comme cette intégrale intervient au niveau du dénominateur du propagateur fermionique exact, alors elle induirait une annulation de ce propagateur. Cependant, on sait que dans le monde physique réel, les fermions peuvent se propager, ce qui veut dire que le propagateur fermionique exact n'est pas nul. Ainsi, cette divergence qui apparait au niveau de l'inverse du propagateur fermionique n'est que fictive, et doit par suite être traitée par le procédé de remise à la norme, c'est à dire la renormalisation. Pour ce faire, il faut d'abord, comme dans le cas du propagateur photonique transformer cette intégrale sous une expression convergente. Ce but est atteint en régularisant dimensionnellement cette intégrale. D'où l'expression (2.95) prend la forme :

$$-i\widehat{\Sigma}(p) = 4\pi\,\alpha\,Q_f^2\,\mu^{(4-D)} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \frac{\gamma_\mu\,(\not{p} - \not{k} + m_f)\,\gamma_\nu}{(p-k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \tag{2.96}$$

1. • **Évaluation du numérateur de l'intégrant :**
   Après quelques manipulations, les deux expressions au numérateur de (2.96) peuvent être ramenées aux formes suivantes :

$$g^{\mu\nu}\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m_f)\gamma_\nu = (2-D)(\not{p} - \not{k}) + D\,m_f,$$

$$\begin{aligned} k^\mu k^\nu \gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m_f)\gamma_\nu &= k^2(m_f - \not{p} - \not{k}) + 2(pk)\not{k}, \\ &= -((p-k)^2 - m_f^2)\not{k} + (\not{p} - m_f)[\not{k}(\not{p} + m_f) - k^2] \end{aligned}$$

Et par suite, on a :

$$-i\widehat{\Sigma}(p) = 4\pi\,\alpha\,Q_f^2\,\mu^{(4-D)}\left\{\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{(2-D)(\not p-\not k)+D\,m_f}{\Big[(p-k)^2-m_f^2+i\epsilon\Big]\,(k^2+i\epsilon)}\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{-\Big[(p-k)^2-m_f^2\Big]\,\not k+(\not p-m_f)[\not k(\not p+m_f)-k^2]}{\Big[(p-k)^2-m_f^2+i\epsilon\Big]\,(k^2+i\epsilon)^2}\right\} \tag{2.97}$$

$$-i\widehat{\Sigma}(p) = 4\pi\,\alpha\,Q_f^2\,\mu^{(4-D)}\left\{\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{(2-D)(\not p-\not k)+D\,m_f}{\Big[(p-k)^2-m_f^2+i\epsilon\Big]\,(k^2+i\epsilon)}\right.$$
$$+\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\not k}{(k^2+i\epsilon)^2}\quad\longleftarrow\quad\text{(intégrale nulle)}$$
$$\left.-\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)(\not p-m_f)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\not k(\not p+m_f)-k^2}{\Big[(p-k)^2-m_f^2+i\epsilon\Big]\,(k^2+i\epsilon)^2}\right\} \tag{2.98}$$

$$-i\widehat{\Sigma}(p) = 4\pi\,\alpha\,Q_f^2\,\mu^{(4-D)}\left\{\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{(2-D)(\not p-\not k)+D\,m_f}{\Big[(p-k)^2-m_f^2+i\epsilon\Big]\,(k^2+i\epsilon)}\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)(\not p-m_f)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\not k(\not p+m_f)-k^2}{\Big[(p-k)^2-m_f^2+i\epsilon\Big]\,(k^2+i\epsilon)^2}\right\} \tag{2.99}$$

2. • **Linéarisation des dénominateurs via la paramétrisation de Feynman :**
En appliquant la formule généralisée de la paramétrisation de Feynman :

$$\frac{1}{a^p\,b^q}=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^1 dx\,\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[ax+b(1-x)]^{p+q}} \tag{2.100}$$

on trouve :

$$-i\widehat{\Sigma}(p) = 4\pi\,\alpha\,Q_f^2\,\mu^{(4-D)}\int_0^1 dx\left\{\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{(2-D)(\not p-\not k)+D\,m_f}{\Big[(k-px)^2+p^2\,x(1-x)-m_f^2\,x+i\epsilon\Big]^2}\right.$$
$$\left.-2\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)(\not p-m_f)(1-x)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\not k(\not p+m_f)-k^2}{\Big[(k-px)^2+p^2\,x(1-x)-m_f^2\,x+i\epsilon\Big]^3}\right\} \tag{2.101}$$

3. • **Changement de variables et réarrangement des intégrales :**
Pour obtenir aux dénominateurs de l'expression (2.101) des formes quadratiques en fonction de la quadri-impulsion d'intégration, on procède au changement de variable suivant :

$$k=l+px \tag{2.102}$$

D'où l'expression (2.101) prend la forme :

$$\begin{aligned}-i\widehat{\Sigma}(p) &= 4\pi\,\alpha\,Q_f^2\,\mu^{(4-D)}\int_0^1 dx\,\Big\{[(2-D)(1-x)\not{p}+D\,m_f]\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\frac{1}{[l^2-R_x^2]^2}\\ &+2\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)(\not{p}-m_f)(1-x)\left[\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\frac{l^2}{[l^2-R_x^2]^3}\right.\\ &\left.+[p^2x^2-x(p^2+m_f\not{p})]\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\frac{1}{[l^2-R_x^2]^3}\right]\Big\}\end{aligned} \tag{2.103}$$

où, on a omis les termes contenant les puissances impaires en l, et on a posé :

$$R_x^2 = m_f^2\,x - p^2\,x(1-x) - i\epsilon$$

4. • **Calcul des intégrales sur l'espace de phase Euclidien :**
On remarque que nos intégrales sur l'espace des quadri-impulsions dans l'expression (2.103) sont de la forme 2.27 et par suite, l'exécution du calcul via le passage à l'espace Euclidien donne le résultat (2.37) :

$$I(r,m) = \int\frac{(l^2)^r}{(l^2-R_x^2)^m}\frac{d^Dl}{(2\pi)^D} = i\frac{(-1)^{r-m}}{(4\,\pi)^{D/2}}\,(R_x^2)^{r+\frac{D}{2}-m}\frac{\Gamma(r+\frac{D}{2})\Gamma(m-r-\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(m)} \tag{2.104}$$

D'où, on en déduit que :

$$\begin{aligned}-i\widehat{\Sigma}(p) &= 4\pi\,\alpha\,Q_f^2\,\mu^{(4-D)}\int_0^1 dx\,\Big\{[(2-D)(1-x)\not{p}+D\,m_f]I(0,\,2)\\ &+2\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)(\not{p}-m_f)(1-x)\Big[I(1,\,3)+[p^2x^2-x(p^2+m_f\not{p})]I(0,\,3)\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{2.105}$$

Puis en utilisant la relation :

$$(2-D)(1-x)\not{p}+D\,m_f = (2-D)(1-x)(\not{p}-m_f)+m_f\,[2(1-x)+D\,x]$$

$$\begin{aligned}\widehat{\Sigma}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi}\,Q_f^2\,(4\,\pi\,\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}\,\Gamma(2-\frac{D}{2})\Bigg\{(\not{p}-m_f)\int_0^1 dx\frac{(2-D)(1-x)}{\Big[m_f^2\,x-x(1-x)p^2-i\epsilon\Big]^{2-\frac{D}{2}}}\\ &+m_f\int_0^1 dx\frac{2(1-x)+D\,x}{\Big[m_f^2\,x-x(1-x)p^2-i\epsilon\Big]^{2-\frac{D}{2}}}\\ &+\frac{D}{2}\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)(\not{p}-m_f)\int_0^1 dx\frac{(1-x)}{\Big[m_f^2\,x-x(1-x)p^2-i\epsilon\Big]^{2-\frac{D}{2}}}\\ &+\frac{4-D}{2}\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)(\not{p}-m_f)\int_0^1 dx\frac{x(1-x)[(1-x)p^2+m_f\not{p}]}{\Big[m_f^2\,x-x(1-x)p^2-i\epsilon\Big]^{3-\frac{D}{2}}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.106}$$

avec

$$I(0,2) = +\frac{i}{(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\left[m_f^2\,x - x(1-x)p^2 - i\epsilon\right]^{\frac{D}{2}-2}\Gamma(2-\frac{D}{2}) \quad (2.107)$$

$$I(1,3) = \frac{D}{4}\frac{i}{(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\left[m_f^2\,x - x(1-x)p^2 - i\epsilon\right]^{\frac{D}{2}-2}\Gamma(2-\frac{D}{2}) \quad (2.108)$$

$$= \frac{D}{4}I(0,\,2) \quad (2.109)$$

$$I(0,3) = -\frac{4-D}{4}\frac{i}{(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\left[m_f^2\,x - x(1-x)p^2 - i\epsilon\right]^{\frac{D}{2}-3}\Gamma(2-\frac{D}{2}) \quad (2.110)$$

$$= -\frac{4-D}{4}\left[m_f^2\,x - x(1-x)p^2 - i\epsilon\right]^{-1}\,I(0,\,2) \quad (2.111)$$

C'est cette expression (2.106) qui représente la correction à l'ordre de la boucle au propagateur fermionique libre. Elle intervient au dénominateur du propagateur fermionique exact (2.94).

5. • **Mise en évidence de la divergence ultraviolette :**

Comme on sait que l'équation (2.34) est convergente si $D < 2(m-r)$. Il s'en suit alors que l'équation (2.106) est justifiée pour $D < 4$. Et par suite, on peut définir, comme pour le cas du propagateur photonique, la quantité positive $\varepsilon_{\rm uv}$ par :

$$\varepsilon_{\rm uv} = 2 - \frac{D}{2} \quad (2.112)$$

Et, on cherche le comportement de la correction (2.106) au propagateur fermionique lorsque $\varepsilon_{\rm uv}$ tend vers zéro.

Pour cela, on utilise,en plus de la relation (2.112), les relations suivantes :

$$\Gamma(\varepsilon_{\rm uv}) = \frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon_{\rm uv})$$
$$a^{\varepsilon_{\rm uv}} = 1 + \varepsilon_{\rm uv}\,ln(a) + \mathcal{O}(\varepsilon_{\rm uv})$$

Et, on ne retient que les termes singuliers (c'est à dire en $\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}}$), ainsi que les termes finis lorsque $\varepsilon_{\rm uv} \to 0$.

On trouve alors que la relation (2.106), représentant l'opérateur de masse à l'ordre de la boucle, prend la forme :

$$\begin{aligned}\widehat{\Sigma}^{(1)}(p) &= \boxed{m_f}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\,Q_f^2\right)\left\{3\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + \ln 4\pi + \ln\frac{\mu^2}{m_f^2} - \gamma\right]\right.\\
&\quad \left. -1 - 2\int_0^1 dx\,(1+x)\,\ln\left[x - \frac{p^2}{m_f^2}x(1-x) - i\epsilon\right]\right\}\\
&+ \boxed{(\not{p} - m_f)}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\,Q_f^2\right)\left\{-\frac{1}{\zeta}\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + \ln 4\pi + \ln\frac{\mu^2}{m_f^2} - \gamma\right]\right.\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{2}{\zeta}\int_0^1 dx\,(1-x)\,\ln\left[x - \frac{p^2}{m_f^2}x(1-x) - i\epsilon\right]\\
&\quad \left. +\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\int_0^1 \frac{x(1-x)[(1-x)p^2 + m_f\not{p}]}{m_f^2\,x - x(1-x)p^2 - i\epsilon}\right\} \quad (2.113)\end{aligned}$$

$$\widehat{\Sigma}^{(1)}(p) = m_f\,\widehat{\Sigma}_a^{(1)}(p) + (\not{p} - m_f)\,\widehat{\Sigma}_b^{(1)}(p) \tag{2.114}$$
$$= m_f\,\widehat{\Sigma}_{(m_f)}^{(1)}(p) + \not{p}\,\widehat{\Sigma}_{(\not{p})}^{(1)}(p) \tag{2.115}$$

soit pour les termes singuliers :

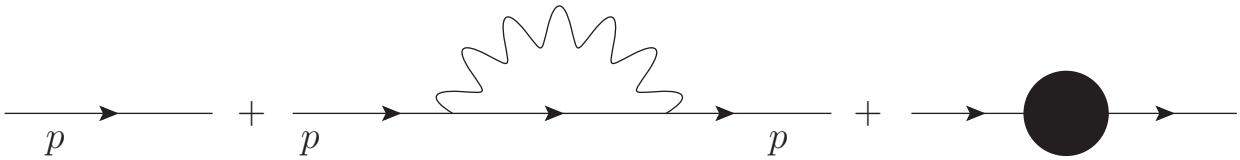
$$\widehat{\Sigma}^{(1)}(p) = \left(\frac{\alpha}{4\pi}\,Q_f^2\right)\left[\boxed{m_f}\,\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}}\left(3+\frac{1}{\zeta}\right) + \boxed{\not{p}}\,\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)\right] + \mathcal{O}(1) \tag{2.116}$$

2.2.4 Renormalisation à la boucle du propagateur fermionique :

Procéder à la renormalisation du propagateur fermionique, revient à éliminer les divergences ultraviolettes fictives qui apparaissent lors du calcul à boucles.

Selon la méthode des contre termes utilisée précédemment, on introduit au niveau du Lagrangien donnant lieu au propagateur fermionique une nouvelle composante dite contre terme et dont le rôle est, à chaque ordre de boucles, de tuer les divergences ultraviolettes au niveau de l'opérateur de masse qui bien sur intervient au dénominateur du propagateur fermionique exact (2.94).

Schématiquement, ceci peut être représenté à la boucle par les diagrammes suivants :



Tout d'abord, on attire l'attention sur le fait que l'analyse de l'équation (2.116) nous permet de voir que les divergences ultraviolettes (à : $\varepsilon_{\rm uv} \to 0$) apparaissent à deux niveaux : une fois proportionnellement avec $\boxed{m_f}$ et une autre fois proportionnellement avec $\boxed{\not{p}}$, et ceci avec deux facteurs différents.

Donc pour contrecarrer ces deux divergences ultraviolettes, cela nous incite à introduire deux constantes de renormalisations différentes reliées à deux contre termes différents. Et comme $\not{p}$ provient du terme cinétique et m_f du terme de masse du Lagrangien (1.78)

$$\mathcal{L}_f = \underbrace{\frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}_f\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi_f) - (\partial_\mu\overline{\Psi}_f)\gamma^\mu\Psi_f\right)}_{\text{terme cinétique}} - \underbrace{m_f\overline{\Psi}_f\Psi_f}_{\text{terme de masse}} \tag{2.117}$$

Alors, l'idée est d'introduire une constante de renormalisation Z_{Ψ_f} en relation avec les spineurs Ψ_f et $\overline{\Psi}_f$ et une autre constante de renormalisation Z_{m_f} en relation avec la masse fermionique m_f, selon la forme suivante :

$$\Psi_f = Z_{\Psi_f}^{1/2}\,\Psi_{f,r}, \qquad \overline{\Psi}_f = Z_{\Psi_f}^{1/2}\,\overline{\Psi}_{f,r} \quad \text{et} \quad m_f = Z_{m_f}\,m_{f,r} \tag{2.118}$$

tel que :

$$Z_{\Psi_f} = Z_{\Psi_f}^{(0)} + Z_{\Psi_f}^{(1)} + \cdots = 1 + Z_{\Psi_f}^{(1)} + \cdots \tag{2.119}$$
$$Z_{m_f} = Z_{m_f}^{(0)} + Z_{m_f}^{(1)} + \cdots = 1 + Z_{m_f}^{(1)} + \cdots \tag{2.120}$$

Ainsi, la Lagrangien $\mathcal{L}_f$ prend la forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f &= \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}_f\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi_f) - (\partial_\mu\overline{\Psi}_f)\gamma^\mu\Psi_f\right) - m_f\overline{\Psi}_f\Psi_f \\
&= \frac{i}{2}Z_{\Psi_f}\left(\overline{\Psi}_{f,r}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi_{f,r}) - (\partial_\mu\overline{\Psi}_{f,r})\gamma^\mu\Psi_{f,r}\right) - Z_{m_f}\,Z_{\Psi_f}\,m_{f,r}\overline{\Psi}_{f,r}\Psi_{f,r} \\
&= \underbrace{\frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}_{f,r}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi_{f,r}) - (\partial_\mu\overline{\Psi}_{f,r})\gamma^\mu\Psi_{f,r}\right) - m_{f,r}\overline{\Psi}_{f,r}\Psi_{f,r}}_{\mathcal{L}_{f,\,r}} \\
&\quad \underbrace{+\frac{i}{2}Z^{(1)}_{\Psi_f}\left(\overline{\Psi}_{f,r}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi_{f,r}) - (\partial_\mu\overline{\Psi}_{f,r})\gamma^\mu\Psi_{f,r}\right) - \left(Z^{(1)}_{m_f} + Z^{(1)}_{\Psi_f}\right)\,m_{f,r}\overline{\Psi}_{f,r}\Psi_{f,r}}_{\delta\mathcal{L}^{(1)}_{f,\,r}}
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Et par suite, notre nouvelle procédure de calcul à boucles des amplitudes de transition se base sur le Lagrangien $\mathcal{L}_{f,\,r}$ morphologiquement identique au Lagrangien initial $\mathcal{L}_f$, mais à présent exprimer en termes des champs renormalisés et des masses renormalisés, tout en observant les mêmes règles de Feynman que celle déduites du Lagrangien initial. Ensuite, on ajoute la contribution du contre terme $\delta\mathcal{L}^{(1)}_{f,\,r}$ qui se concrétise par l'ajout d'une nouvelle règle de Feynman supplémentaire aux précédentes[7].

Cette nouvelle règle de Feynman n'agit pas directement sur le propagateur fermionique, mais respect toutes les règles de Feynman initiales dans l'établissement de l'amplitude de transition et là où il y a une boucle d'énergie propre au sein d'un propagateur fermionique, on joute le même diagramme de Feynman renfermant cette boucle tout-en substituant cette boucle par un vertex de contre terme selon la règle :



$$: \; i\left\{Z^{(1)}_{\Psi_f}\not{p} - \left[Z^{(1)}_{\Psi_f} + Z^{(1)}_{m_f}\right]m_{f,\,r}\right\} = iZ^{(1)}_{\Psi_f}\left(\not{p} - m_{f,\,r}\right) - iZ^{(1)}_{m_f}\,m_{f,\,r}$$

Ceci implique que l'opérateur de masse donné par la relation (2.113) incluant les énergies propres fermioniques est substitué selon :

$$\begin{aligned}
&-i\widehat{\Sigma}^{(1)}(p) \longrightarrow -i\widehat{\Sigma}^{(1)}_{f,\,r}(p) = -i\widehat{\Sigma}^{(1)}(p) + iZ^{(1)}_{\Psi_f}\left(\not{p} - m_{f,\,r}\right) - iZ^{(1)}_{m_f}\,m_{f,\,r} \\
&\Rightarrow \boxed{\widehat{\Sigma}^{(1)}_r(p) = m_{f,\,r}\left(\widehat{\Sigma}^{(1)}_a(p) + Z^{(1)}_{m_f}\right) + \left(\not{p} - m_{f,\,r}\right)\left(\widehat{\Sigma}^{(1)}_b(p) - Z^{(1)}_{\Psi_f}\right)}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Où les constantes de renormalisation $Z^{(1)}_{m_f}$ et $Z^{(1)}_{\Psi_f}$ à l'ordre de la boucle seront ajustées selon des schémas de renormalisation donnés, en vue de compenser les divergences dans $\widehat{\Sigma}^{(1)}_a(p)$ et $\widehat{\Sigma}^{(1)}_b(p)$. Soit à l'ordre de la boucle :

$$Z_{m_f} = 1 + Z^{(1)}_{m_f} = 1 + \left(\frac{\alpha}{4\pi}\,Q_f^2\right)\left[-3\,\frac{1}{\varepsilon_{\text{uv}}} + y^{(1)}_{m_f}\right] \tag{2.123}$$

$$Z_{\Psi_f} = 1 + Z^{(1)}_{\Psi_f} = 1 + \left(\frac{\alpha}{4\pi}\,Q_f^2\right)\left[-\frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{\varepsilon_{\text{uv}}} + y^{(1)}_{\Psi_f}\right] \tag{2.124}$$

où les expressions finies de $y^{(1)}_{m_f}$ et $y^{(1)}_{\Psi_f}$ sont fixées via le choix d'un schéma de renormalisation.

7. Les règles de correspondances utilisées sont celles citées dans la section 1.3

Schéma de renormalisation sur la couche de masse du propagateur fermionique :

Dans ce schéma sur la couche de masse (OS), on exige deux conditions de renormalisation reliées aux propagateurs fermionique libre $S_{f,(lib)}$ et renormalisé $S_{f,(r)}$:

$$S_{f,(lib)} = \frac{i}{\not{p} - m_{f,r}} \quad \text{et} \quad S_{f,(r)} = \frac{i}{\not{p} - m_{f,r} - \widehat{\Sigma}_{f,r}(p)} \tag{2.125}$$

1. **<u>Première condition :</u>**
   Le pôle du propagateur fermionique renormalisé (soit : $\not{p} = m_{f,r} + \widehat{\Sigma}_{f,(r)}(p)$) doit être égal au pôle du propagateur fermionique libre (soit : $\not{p} = m_{f,r}$).
   Ce qui nous donne :
   $$\boxed{\left[\widehat{\Sigma}_{f,r}(p)\right]_{\not{p}=m_{f,r}} = 0} \tag{2.126}$$

2. **<u>Deuxième condition :</u>**
   Le résidu au pôle du propagateur fermionique renormalisé, doit être égal au résidu au pôle du propagateur fermionique libre :
   $$Res\left[S_{f,(r)}\right]_{\not{p}=m_{f,r}} = Res\left[S_{f,(lib)}\right]_{\not{p}=m_{f,r}} \Rightarrow \lim_{\not{p}\to m_{f,r}} \frac{\not{p} - m_{f,r}}{\not{p} - m_{f,r} - \widehat{\Sigma}_{f,r}(p)} = 1 \tag{2.127}$$

   En prenant alors, le développement de Taylor de $\widehat{\Sigma}_{f,r}(p)$ au voisinage de $m_{f,r}$, et en prenant en considération la première condition, il est possible d'écrire :
   $$\widehat{\Sigma}_{f,r}(p) = (\not{p} - m_{f,r}) \left[\frac{\partial \widehat{\Sigma}_{f,r}(p)}{\partial \not{p}}\right]_{\not{p}=m_{f,r}} \tag{2.128}$$

   D'où, la deuxième condition prend la forme :
   $$\boxed{\left[\frac{\partial \widehat{\Sigma}_{f,r}(p)}{\partial \not{p}}\right]_{\not{p}=m_{f,r}} = 0} \tag{2.129}$$

Ainsi, à l'ordre de la boucles, ces deux conditions appliquées à la relation (2.122) se traduisent sous la forme :

$$\left[\widehat{\Sigma}^{(1)}_{f,r}(p)\right]_{\not{p}=m_{f,r}} = \left[m_{f,r}\left(\widehat{\Sigma}^{(1)}_{a}(p) + Z^{(1),OS}_{m_f}\right)\right]_{\not{p}=m_{f,r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z^{(1),OS}_{m_f} = -\left[\widehat{\Sigma}^{(1)}_{a}(p)\right]_{\not{p}=m_{f,r}}} \tag{2.130}$$

et

$$\left[\frac{\partial}{\partial \not{p}}\left\{m_{f,r}\left(\widehat{\Sigma}^{(1)}_{a}(p) + Z^{(1),OS}_{m_f}\right) + (\not{p} - m_{f,r})\left(\widehat{\Sigma}^{(1)}_{b}(p) - Z^{(1),OS}_{\Psi_f}\right)\right\}\right]_{\not{p}=m_{f,r}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad Z^{(1),OS}_{\Psi_f} = m_{f,r}\left[\frac{\partial \widehat{\Sigma}^{(1)}_{a}(p)}{\partial \not{p}}\right]_{\not{p}=m_{f,r}} + \left[\widehat{\Sigma}^{(1)}_{b}(p)\right]_{\not{p}=m_{f,r}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z^{(1),OS}_{\Psi_f} = 2\, m_{f,r}\, \not{p}\left[\frac{\partial \widehat{\Sigma}^{(1)}_{a}(p)}{\partial p^2}\right]_{\not{p}=m_{f,r}} + \left[\widehat{\Sigma}^{(1)}_{b}(p)\right]_{\not{p}=m_{f,r}}} \tag{2.131}$$

où les expressions $\widehat{\Sigma}_a^{(1)}(p)$ et $\widehat{\Sigma}_b^{(1)}(p)$ sont obtenus via la relation (2.113).

Schéma de renormalisation de la soustraction minimale modifiée appliqué au propagateur fermionique :

Dans le schéma simple de renormalisation $\overline{MS}$, les constantes de renormalisations sont données par :

$$Z_{m_f}^{\overline{MS}} = 1 + Z_{m_f}^{(1),\overline{MS}} = 1 - 3\left(\frac{\alpha}{4\pi}\,Q_f^2\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{uv}}} + \ln 4\pi - \gamma\right] \tag{2.132}$$

$$Z_{\Psi_f}^{\overline{MS}} = 1 + Z_{\Psi_f}^{(1),\overline{MS}} = 1 - \frac{1}{\zeta}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\,Q_f^2\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{uv}}} + \ln 4\pi - \gamma\right] \tag{2.133}$$

2.3 Correction radiative et renormalisation à la boucle du vertex électromagnétique :

2.3.1 Vertex électromagnétique libre

Comme cela a été montré dans la section 1.3 du chapitre précédent, le lagrangien (1.82) représentant l'interaction entre un champ spinoriel fermionique et un champ vectoriel photonique nous permet d'obtenir la règle de Feynman pour le vertex électromagnétique libre.

Soit :

$$i\,e\,Q_f\,\gamma_\mu \tag{2.134}$$

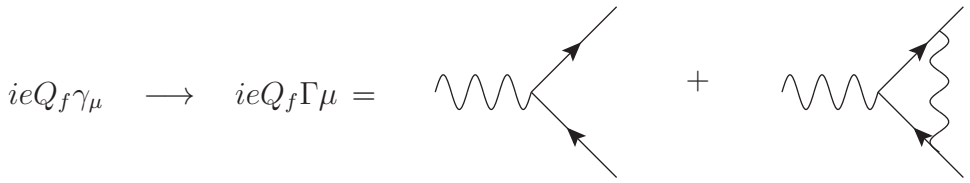
2.3.2 Vertex électromagnétique exact

Par ailleurs, la prise en compte des corrections radiatives à ce vertex libre (γ_μ), permet de définir le vertex exact (Γ_μ) selon le schéma la substitution :

$$i\,e\,Q_f\,\gamma_\mu \quad \longrightarrow \quad i\,e\,Q_f\,\Gamma_\mu = i\,e\,Q_f\,(\gamma_\mu + \Lambda_\mu) \tag{2.135}$$

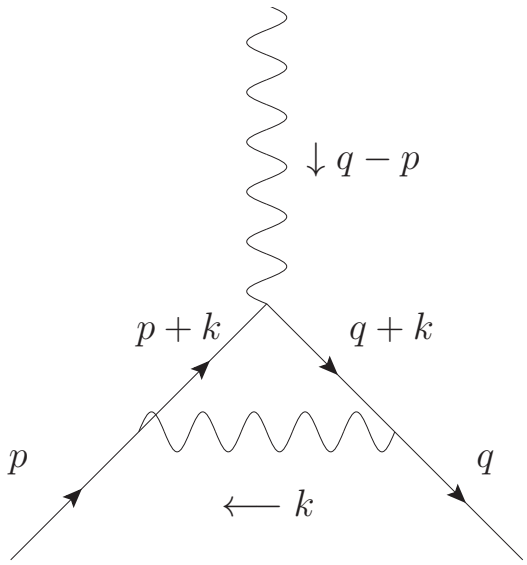
où Λ_μ est le vertex propre.

Ceci peut être représenté diagrammatiquement à l'ordre de la boucle par les diagrammes suivants amputés de leurs pattes externes :



2.3.3 Calcul à la boucle de la correction au vertex électromagnétique libre

La correction à la boucle au vertex électromagnétique libre est donnée par le vertex propre Λ_μ qu'on peut exprimer en appliquant les règles de Feynman pour QED au diagramme suivant amputé des pattes externes :



On obtient alors la relation :

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^{(1)}(p,q) &= -i(ieQ_f)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\lambda^2+i\epsilon}\left[g^{\alpha\beta}-\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\frac{k^\alpha k^\beta}{k^2+i\epsilon}\right]\\ &\quad \gamma_\alpha\frac{\not k+\not q+m}{(k+q)^2-m_f^2+i\epsilon}\gamma_\mu\frac{\not k+\not p+m}{(k+p)^2-m_f^2+i\epsilon}\gamma_\beta\end{aligned} \tag{2.136}$$

qui diverge logarithmiquement à grandes valeurs de la quadri-impulsion k libre au sein de la boucle.

Par ailleurs, et pour raison de simplicité du calcul, on choisit dans ce qui suit de cette section de travailler en jauge de Feynman ($\zeta = 1$). Ainsi, en régularisant dimensionnellement cette intégrale, on obtient :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p,q) = iQ_f^2\,4\pi\alpha\,\mu^{4-D}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\gamma^\rho(\not k+\not q+m)\gamma_\mu(\not k+\not p+m)\gamma_\rho}{[k^2-\lambda^2+i\epsilon]\left[(k+q)^2-m_f^2+i\epsilon\right]\left[(k+p)^2-m_f^2+i\epsilon\right]} \tag{2.137}$$

1. • **<u>Évaluation du numérateur :</u>**
   En utilisant les relations

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma^\mu &= D\\ \gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho &= -2\gamma_\mu+(4-D)\gamma_\mu\\ \gamma_\rho\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma^\rho &= 4g_{\alpha\mu}-(4-D)\gamma_\alpha\gamma_\mu\\ \gamma_\rho\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma^\rho &= -2\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha+(4-D)\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\end{aligned}$$

   et de plus en supposant que les pattes fermioniques externes sont sur la couche de masse de sorte que l'application de l'équation de Dirac : $\not p u(p) = m_f u(p)$ et $\bar u(q)\not q = m_f\bar u(q)$ soit possible après déplacement de $\not p$ complétement à droite, et de $\not q$ complètement à gauche (où on les remplacera par m_f).

On obtient pour le numérateur l'expression :

$$\begin{aligned} Num &= \gamma^\rho(\not{k}+\not{q}+m)\gamma_\mu(\not{k}+\not{p}+m)\gamma_\rho \\ &= \left[(D-2)k^2+4(p+q).k+4p.q\right]\gamma_\mu \\ &\quad -4(p_\mu+q_\mu)\not{k}+2k_\mu\left[(2-D)\not{k}+2m\right] \end{aligned} \tag{2.138}$$

2. • **<u>Linéarisation du dénominateur via la paramétrisation de Feynman :</u>**
En utilisant la formule de paramétrisation de Feynman suivante :

$$\frac{1}{a\,b\,c} = 2\int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx\,\frac{1}{\left[a\,x\,y+b\,y(1-x)+c\,(1-y)\right]^3} \tag{2.139}$$

avec $a=(k+q)^2-m_f^2+i\epsilon$, $b=(k+p)^2-m_f^2+i\epsilon$ et $c=k^2+i\epsilon$ ainsi que $p^2=q^2=m_f^2$, on trouve :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(1)}(p,q) &= 2\,iQ_f^2\,4\pi\alpha\,\mu^{4-D}\int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx \\ &\quad \int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{Num}{\left[\left\{k+y\left[q\,x+p(1-x)\right]\right\}^2-y^2\left[q\,x+p(1-x)\right]^2+i\epsilon\right]^3} \end{aligned} \tag{2.140}$$

3. • **<u>Changement de variables et réarrangement de l'intégrale :</u>**
On effectue alors le changement de variable :

$$k = l - y\left[q\,x+p(1-x)\right] \tag{2.141}$$

et en utilisant les relations (2.25) pour éliminer les termes impairs en l au niveau du numérateur (2.138) et pour traiter les termes paires, on obtient :

$$Num = A_0\,l^2+B_0+y\,B_1(x)+y^2\,B_2(x) \tag{2.142}$$

avec

$$A_0 = \frac{(D-2)^2}{D}\gamma_\mu \tag{2.143}$$

$$B_0 = 4\,p.q\,\gamma_\mu \tag{2.144}$$

$$\tag{2.145}$$

$$B_1(x) = -4\left[m_f^2+p.q\right]\gamma_\mu+4(p_\mu+q_\mu)\left[\not{q}\,x+\not{p}(1-x)\right]-4m_f\left[q_\mu\,x+p_\mu(1-x)\right] \tag{2.146}$$

$$B_2(x) = (D-2)\left[q\,x+p(1-x)\right]^2\gamma_\mu+2(2-D)\left[q_\mu\,x+p_\mu(1-x)\right]\left[\not{q}\,x+\not{p}(1-x)\right] \tag{2.147}$$

Ainsi :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p,q) = 2\,iQ_f^2\,4\pi\alpha\,\mu^{4-D}\int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx\left\{A_0\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\frac{l^2}{[l^2-R^2(x,\,y)]^3}\right.$$
$$\left.+\Big[B_0+y\,B_1(x)+y^2\,B_2(x)\Big]\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\frac{1}{[l^2-R^2(x,\,y)]^3}\right\} \qquad (2.148)$$

avec :

$$R^2(x,\,y)=y^2\,[q\,x+p(1-x)]^2-i\epsilon=y^2\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)\Big]-i\epsilon \qquad (2.149)$$

4. • **Calcul de l'intégrale :**

L'utilisation des équations (2.27) et (2.37) nous permet d'effectuer l'intégrale sur l'espace quadri-impulsion et d'obtenir :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p,q) = 2iQ_f^2\,4\pi\alpha\,\mu^{4-D}\int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx\Big\{A_0I(1,3)+\Big[B_0+yB_1(x)+y^2B_2(x)\Big]\,I(0,3)\Big\}$$
$$= 2iQ_f^2\,4\pi\alpha\,\mu^{4-D}\Big[F_{(A_0)}+F_{(B_0)}+F_{(B_1)}+F_{(B_2)}\Big] \qquad (2.150)$$

avec

$$I(1,3) = \frac{D}{4}\frac{i}{(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\,y^{D-4}\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-2}\,\Gamma(2-\frac{D}{2}) \qquad (2.151)$$

$$I(0,3) = -\frac{i}{2(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\,y^{D-6}\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-3}\,\Gamma(3-\frac{D}{2}) \qquad (2.152)$$

On remarque aussi que l'intégrale sur la variable y est élémentaire et conduit à :

$$F_{(A_0)} \equiv \int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx\,A_0I(1,3)$$
$$= \gamma_\mu\,\frac{i}{4}\frac{D-2}{(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\,\Gamma(2-\frac{D}{2})\int_0^1 dx\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-2} \qquad (2.153)$$

Et, si de plus, on utilise le fait que d'une part les fermions externes sont sur la couche de masse [8], et que d'autre part, on a l'égalité :

$$\int_0^1 dx\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-3}\,[q_\mu x+p_\mu(1-x)]$$
$$=\int_0^1 dx\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-3}\,[q_\mu(1-x)+p_\mu x]$$
$$=\frac{1}{2}\,[q_\mu+p_\mu]\int_0^1 dx\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-3} \qquad (2.154)$$

alors, on trouve aussi [9]

$$F_{(B_0)} \equiv \int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx\,B_0\,I(0,3)$$

8. On remplace donc $\not{q}$ et $\not{p}$ par m_f.
9. On rappelle que : $2q.p=2m_f^2-(q-p)^2$

$$
\begin{aligned}
F_{(B_0)} &= -\frac{i}{2(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\,\Gamma(3-\frac{D}{2})\int_0^1 dx\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-3} \\
&\quad\times\frac{2\Big[2m_f^2-(q-p)^2\Big]}{D-4}\,\gamma_\mu \qquad (2.155)\\
F_{(B_1)} &\equiv \int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx\,y\,B_1(x)I(0,3) \\
&= -\frac{i}{2(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\,\Gamma(3-\frac{D}{2})\int_0^1 dx\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-3} \qquad (2.156)\\
&\quad\frac{2}{D-3}\,\Big\{-\Big[4m_f^2-(q-p)^2\Big]\,\gamma_\mu+m_f(p_\mu+q_\mu)\Big\} \\
F_{(B_2)} &\equiv \int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx\,y^2\,B_2(x)I(0,3) \\
&= -\frac{i}{2(4\,\pi)^{\frac{D}{2}}}\,\Gamma(3-\frac{D}{2})\int_0^1 dx\,\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\Big]^{\frac{D}{2}-3} \qquad (2.157)\\
&\quad\Big\{\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)\Big]\,\gamma_\mu-m_f\,[q_\mu+p_\mu]\Big\}
\end{aligned}
$$

5. • **Mise en évidence des divergences ultraviolettes et infrarouges :**

Revenons à une analyse plus approfondie de l'expression (2.34) de l'intégrale $I(r,m)$ avec $r,m\geq 0$ qui intervient au niveau du vertex propre, et qui pour les limites de hautes (UV) et de basses (IR) énergies (on dit aussi fréquences) prend les formes :

$$\int^{\infty}\rho^{(2r+D-1-2m)}d\rho \quad\xrightarrow{\text{si : } D\geq 2(m-r)}\quad \infty \quad \text{pour : } \rho\to+\infty \quad \text{(limite UV)} \qquad (2.158)$$

$$\frac{1}{R^{2m}}\int_0\rho^{(2r+D-1)}d\rho\simeq\frac{\rho^{(2r+D)}}{(R^2)^m} \quad\xrightarrow{\text{si : } R\to 0}\quad \infty \quad \text{pour : } \rho\to 0^+ \quad \text{(limite IR)} \qquad (2.159)$$

Où dans notre cas présent, on rappelle que : $R^2=y^2\Big[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)\Big]$. Ce qui veut dire que dans la limite IR une divergence peut apparaitre lors de l'intégration sur la variable y et éventuellement sur la variable x, et ceci pour des valeurs aboutissant à $R^2\to 0$.

Et somme, puisque la régularisation consiste à travailler avec des expressions convergentes, donc lors de la mise en évidence des divergences, on approchera la dimension quatre de l'espace impulsion par la région où notre expression est convergente.

(a) Pour la partie UV (domaine des hautes fréquences), la convergence simultanée des expressions $I(1,3)$ et $I(0,3)$ est assuré pour[10] $D<4$. Donc, pour ce cas, on approche la valeur $D=4$ par valeur inférieure à 4. Et par suite, on définit comme précédemment $\varepsilon_{\text{uv}}=\frac{4-D}{2}>0$ (avec $D\to 4^-$)

(b) Pour la partie IR (domaine des basses fréquences), la convergence est par contre assuré pour[11] $D>4$. Donc, pour ce deuxième cas, on approche la valeur $D=4$ par valeurs supérieures. On définit alors l'écart par rapport à la valeur $D=4$ par $\varepsilon_{\text{ir}}=\frac{D-4}{2}>0$ (avec $D\to 4^+$).

Ainsi, lorsque $D\to 4^-$ alors $I(1,3)$ peut manifester une divergence UV, $I(0,3)$ reste convergent jusqu'à $D=6$. Et, lorsque $D\to 4^+$ c'est $I(0,3)$ qui manifeste une divergence IR.

10. $D<2(m-r)$
11. $D>2(m-r)$

Par conséquent, l'expression du vertex propre $\Lambda_\mu^{(1)}(p,q)$ peut être décomposé en deux partie une $\Lambda_\mu^{(1)\,UV}(p,q)$ pouvant manifester une divergence UV en relation avec la fonction $I(1,3)$, et l'autre $\Lambda_\mu^{(1),\,IR}(p,q)$ pouvant manifester une divergence IR en relation avec la fonction $I(0,3)$. Soit alors :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p,q) = \Lambda_\mu^{(1),\,UV}(p,q) + \Lambda_\mu^{(1),\,IR}(p,q) \tag{2.160}$$

où :

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu^{(1),\,UV}(p,q) &= \gamma_\mu Q_f^2 \frac{\alpha}{4\pi}(1-\varepsilon_{\rm uv})(4\pi\mu^2)^{\varepsilon_{\rm uv}}\,\Gamma(\varepsilon_{\rm uv})\int_0^1 dx\,\left[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon\right]^{-\varepsilon_{\rm uv}} \\
&= \gamma_\mu Q_f^2 \frac{\alpha}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} - 1 - \gamma + \ln 4\pi - \underbrace{\int_0^1 dx\,\ln\left(\frac{m_f^2-(q-p)^2x(1-x)-i\epsilon}{\mu^2}\right)}_{I_1}\right] \\
&= \gamma_\mu Q_f^2 \frac{\alpha}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} - 1 - \gamma + \ln 4\pi - I_1\right]
\end{aligned} \tag{2.161}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu^{(1),\,IR}(p,q) &= Q_f^2\frac{\alpha}{4\pi}\left\{-\gamma_\mu + \left[2m_f^2-(q-p)^2\right]\gamma_\mu\left[\left(-\frac{1}{\varepsilon_{\rm ir}} - \gamma + \ln 4\pi\right)\right.\right. \\
&\quad \times \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{m_f^2-(q-p)^2x(1-x)+i\epsilon}}_{I_2} - \left.\underbrace{\int_0^1 dx\,\frac{\ln\left(\left[m_f^2-(q-p)^2x(1-x)\right]/\mu^2\right)}{m_f^2-(q-p)^2x(1-x)+i\epsilon}}_{I_3}\right] \\
&\quad + \left[2(q+p)^2\gamma_\mu - m_f(q_\mu+p_\mu)\right]\int_0^1 \frac{dx}{m_f^2-(q-p)^2x(1-x)+i\epsilon}\Bigg\} \\
&= Q_f^2\frac{\alpha}{4\pi}\left\{-\gamma_\mu + \left[2m_f^2-(q-p)^2\right]\gamma_\mu\left[\left(-\frac{1}{\varepsilon_{\rm ir}} - \gamma + \ln 4\pi\right)I_2 - I_3\right]\right. \\
&\quad + \left.\left[2(q+p)^2\gamma_\mu - m_f(q_\mu+p_\mu)\right]I_2\right\}
\end{aligned} \tag{2.162}$$

La divergence UV sera renormalisée dans ce qui suit, mais la divergence IR ne nécessite pas de renormalisation. Elle disparait lorsqu'on ajoute pour un processus donné la contribution à l'ordre α des photons réels de basses fréquences émis par Bremsstrahlung.

6. • **Facteurs de forme électrique et magnétique du fermion :**
En utilisant la décomposition de Gordon :

$$\bar u(q)\left[q_\mu+p_\mu\right]u(p) = 2m_f\bar u(q)\gamma_\mu u(p) - i\bar u(q)\sigma_{\mu\nu}(q^\nu-p^\nu)u(p) \tag{2.163}$$

au sein de l'expression du vertex propre $\Lambda_\mu^{(1)}(p,q)$, cette dernière prend la forme suivante :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p,q) = \gamma_\mu F_1(k^2) + \frac{i}{2\,m_f}\sigma_{\mu\nu}\,k^\nu F_2(k^2) \quad \text{où : } k^2 \equiv (q-p)^2, \text{ et } \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu] \tag{2.164}$$

On voit donc que la structure d'interaction du champ photonique avec le champ spinoriel change relativement à celle d'une particule de Dirac couplée à un champ électromagnétique. Le fermion acquiert apparemment une structure interne suite à sont interaction avec un champ photonique virtuel. On parle donc de facteur de forme. Ainsi, $F_1(k^2)$ et $F_2(k^2)$ sont respectivement les facteurs de forme électrique et magnétique du fermion,

et dont les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F_1(k^2) &= Q_f^2\,\frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} - \gamma + \ln 4\pi - 2 - I_1 + 2(3m_f^2 - k^2)I_2 \right. \\ &\quad \left. +(2m_f^2 - k^2)\left[\left(-\frac{1}{\varepsilon_{\rm ir}} - \gamma + \ln 4\pi\right) I_2 - I_3\right]\right\} \qquad (2.165) \\ F_2(k^2) &= Q_f^2\,\frac{\alpha}{2\pi} m_f^2 I_2 \qquad (2.166) \end{aligned}$$

On voit donc bien que la divergence UV qui doit être éliminer via le processus de renormalisation n'apparait qu'en relation avec la structure γ_μ. Ceci nous guide dans le choix du contre terme qu'il faut choisir dans ce cas.

2.3.4 Renormalisation à la boucle du vertex électromagnétique :

Comme la divergence UV est exclusivement contenue dans le facteur de forme électrique et que de plus elle est indépendante de transfert d'impulsion $(q-p)^2$, alors pour contrecarrer cette singularité, on introduit une nouvelle constante de renormalisation qui aurait pour action de compenser cette divergence et dont l'origine serait imputable au Lagrangien d'interaction électromagnétique ($\mathcal{L}_{int}$), (donnant lieu au vertex électromagnétique qu'on a corrigé à l'ordre de la boucle)

$$\mathcal{L}_{int} = A^\mu \overline{\Psi}_f (Q_f\, e\gamma_\mu)\Psi_f \qquad (2.167)$$

Et comme par ailleurs, on a déjà introduit les constantes de renormalisation pour les champs vectoriel A_μ et spinoriels Ψ et $\overline{\Psi}$. L'idée serait donc d'ajouter une constante de renormalisation pour la charge électrique. Soit alors :

$$A^\mu = Z_A^{1/2} A_r^\mu \qquad \Psi_f = Z_{\Psi_{f,r}}^{1/2}\Psi_f \qquad \overline{\Psi}_f = Z_{\Psi_f}^{1/2}\overline{\Psi}_{f,r} \qquad e = Z_e e_r \qquad (2.168)$$

Soit alors :

$$\mathcal{L}_{int} = Q_f\, Z_e\, Z_{\Psi_f}\, Z_A^{1/2}\, e_r\, A_r^\mu \overline{\Psi}_f \gamma_\mu \Psi_f \qquad (2.169)$$

tel que :

$$\begin{aligned} Z_A &= Z_A^{(0)} + Z_A^{(1)} + \cdots = 1 + Z_A^{(1)} + \cdots \qquad (2.170) \\ Z_{\Psi_f} &= Z_{\Psi_f}^{(0)} + Z_{\Psi_f}^{(1)} + \cdots = 1 + Z_{\Psi_f}^{(1)} + \cdots \qquad (2.171) \\ Z_e &= Z_e^{(0)} + Z_e^{(1)} + \cdots = 1 + Z_e^{(1)} + \cdots \qquad (2.172) \end{aligned}$$

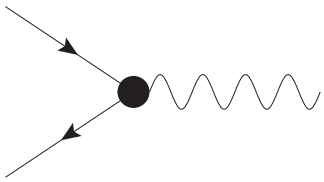
Et pour raison de simplicité de représentation, il est de coutume de définir une nouvelle constante de renormalisation, sous forme de la combinaison suivante :

$$Z_1 = Z_e\, Z_{\Psi_f}\, Z_A^{1/2} = Z_1^{(0)} + Z_1^{(1)} + \cdots = 1 + Z_1^{(1)} + \cdots \equiv 1 + \left(Z_e^{(1)} + Z_{\Psi_f}^{(1)} + Z_A^{(1)}\right) + \cdots \qquad (2.173)$$

Ainsi, à l'ordre de la boucle, le Lagrangien d'interaction prend la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= Q_f\, eA^\mu \overline{\Psi}_f \gamma_\mu \Psi_f \\ &= Q_f\, Z_1\, e_r\, A_r^\mu \overline{\Psi}_{f,r}\gamma_\mu \Psi_{f,r} = Q_f\,\left(1 + Z_1^{(1)}\right)\, e_r\, A_r^\mu \overline{\Psi}_{f,r}\gamma_\mu\Psi_{f,r} \\ &= \underbrace{Q_f\, e_r\, A_r^\mu \overline{\Psi}_{f,r}\gamma_\mu\Psi_{f,r}}_{\mathcal{L}_{int,\,r}} + \underbrace{Q_f\, Z_1^{(1)}\, e_r\, A_r^\mu \overline{\Psi}_{f,r}\gamma_\mu\Psi_{f,r}}_{\delta\mathcal{L}_{int}^{(1)}} \qquad (2.174) \end{aligned}$$

et par suite en utilisant dans le calcul du vertex propre à l'ordre de la boucle, le Lagrangien renormalisé ($\mathcal{L}_{int,r}$) au lieu du Lagrangien initial ($\mathcal{L}_{int}$), on obtient le même résultat (2.164). En ajoutant alors l'effet du Lagrangien de contre terme ($\delta\mathcal{L}^{(1)}_{int}$) à travers la règle de Feynman supplémentaire schématise comme suite.



$$ieQ_f Z_1^{(1)}\,\gamma^\mu$$

et intervenant en renfort, là où dans les diagrammes de Feynman du processus donné à l'ordre de la boucle, apparaisse un triangle au vertex électromagnétique. L'équation (2.164) prend alors la nouvelle forme suivante indemne de toute singularité :

$$\boxed{\Lambda^{(1)}_{\mu\,(r)}(p,q) = \gamma_\mu \underbrace{\left(F_1((q-p)^2) + Z_1^{(1)}\right)}_{F_{1,\,(r)}((q-p)^2)} + \frac{i}{2\,m_f}\sigma_{\mu\nu}\,k^\nu F_2(k^2)} \tag{2.175}$$

L'expression explicite de $Z_1^{(1)}$ compensant la divergence UV au sien de $F_1((q-p)^2)$ est alors déterminée suivant le schéma de renormalisation adopté.

Schéma de renormalisation sur la couche de masse appliqué au vertex électromagnétique :

Dans ce schéma OS, on exige l'annulation complète du vertex propre renormalisé lorsque les fermions impliqués dans le vertex sont sur la couche de masse ($\Rightarrow\ (q-p)^2 = 0$). Ce qui se traduit par la relation :

$$\left[F^{OS}_{1,\,(r)}((q-p)^2)\right]_{(q-p)^2=0} = \left[F_1((q-p)^2) + Z_1^{(1)\,OS}\right]_{(q-p)^2=0} \tag{2.176}$$

D'où [31] :

$$Z_1^{OS} = 1 + Z_1^{(1)\,OS} = 1 + Q_f^2\frac{\alpha}{4\pi}\left[-\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} + \frac{2}{\varepsilon_{\rm ir}} - 3\left[\ln 4\pi - \gamma\right] - 3\ln\left(\frac{\mu^2}{m_f^2}\right) - 4\right] \tag{2.177}$$

et le facteur de forme électrique renormalisé s'écrit :

$$\begin{aligned} F^{(OS)}_{1,\,(r)}((q-p)^2) \;=\; & Q_f^2\frac{\alpha}{4\pi}\left\{\left[2 + \left((q-p)^2 - 2m_f^2\right) I_2\right]\left(\frac{1}{\varepsilon_{\rm ir}} + \gamma - \ln 4\pi\right) - 6 - I_1\right. \\ & \left. -3\ln\left(\frac{\mu^2}{m_f^2}\right) - \left(2m_f^2 - (q-p)^2\right) I_3 + 2\left(3m_f^2 - (q-p)^2\right) I_2\right\} \end{aligned} \tag{2.178}$$

et qui à la limite de haut transfert d'impulsion $(q-p)^2 \gg m_f^2$ prend la forme :

$$\begin{aligned} F_{1,(r)}^{(OS)}((q-p)^2 \gg m_f^2) &= Q_f^2 \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ 2\left[1 + \ln\left(\frac{m_f^2}{(q-p)^2}\right)\right]\left(\frac{1}{\varepsilon_{\rm ir}} + \gamma - \ln 4\pi\right) - 4 + \frac{4\pi^2}{3} \right. \\ &\quad -3\ln\left(\frac{\mu^2}{m_f^2}\right) - 4\ln\left(\frac{m_f^2}{(q-p)^2}\right) - \ln\left(\frac{(q-p)^2}{\mu^2}\right) \\ &\quad \left. +2\ln\left(\frac{(q-p)^2}{\mu^2}\right)\ln\left(\frac{m_f^2}{(q-p)^2}\right) + \ln^2\left(\frac{m_f^2}{(q-p)^2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.179}$$

A la limite non-relativiste $(q-p)^2 \ll m_f^2$:

$$F_{1,(r)}^{(OS)}((q-p)^2 \ll m_f^2) = Q_f^2 \frac{\alpha}{6\pi}\frac{(q-p)^2}{m_f^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_{\rm ir}} + \gamma - \ln 4\pi\right) + Q_f^2 \frac{\alpha}{3\pi}\frac{(q-p)^2}{m_f^2}\left[\ln\frac{m_f}{\mu} - \frac{3}{8}\right] \tag{2.180}$$

et

$$F_2((q-p)^2 \ll m_f^2) = Q_f^2 \frac{\alpha}{2\pi} \tag{2.181}$$

Schéma de renormalisation de la soustraction minimale modifiée appliqué au vertex électromagnétique :

Comme on l'a déjà cité, dans le schéma $\overline{MS}$, il suffit de compenser le terme en $\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}}$ ainsi que les constantes en relation avec la régularisation dimensionnelle. Soit alors :

$$Z_1^{\overline{MS}} = 1 + Z_1^{(1)\,\overline{MS}} = 1 + Q_f^2 \frac{\alpha}{4\pi}\left[-\frac{1}{\varepsilon_{\rm uv}} - \ln 4\pi + \gamma\right] \tag{2.182}$$

Et par suite, le facteur de forme électrique s'écrit dans ce schéma [31] :

$$\begin{aligned} F_{1,(r)}^{(\overline{MS})}((q-p)^2) &= Q_f^2 \frac{\alpha}{4\pi}\left\{\left((q-p)^2 - 2m_f^2\right) I_2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\rm ir}} + \gamma - \ln 4\pi\right) - 2 - I_1 \right. \\ &\quad \left. -\left(2m_f^2 - (q-p)^2\right) I_3 + 2\left(3m_f^2 - (q-p)^2\right) I_2\right\} \end{aligned} \tag{2.183}$$

et qui à la limite de haut transfert d'impulsion $(q-p)^2 \gg m_f^2$ prend la forme :

$$\begin{aligned} F_{1,(r)}^{(\overline{MS})}((q-p)^2 \gg m_f^2) &= Q_f^2 \frac{\alpha}{4\pi}\left\{2\ln\left(\frac{m_f^2}{(q-p)^2}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_{\rm ir}} + \gamma - \ln 4\pi\right) + \frac{4\pi^2}{3} \right. \\ &\quad -4\ln\left(\frac{m_f^2}{(q-p)^2}\right) - \ln\left(\frac{(q-p)^2}{\mu^2}\right) \\ &\quad \left. +2\ln\left(\frac{(q-p)^2}{\mu^2}\right)\ln\left(\frac{m_f^2}{(q-p)^2}\right) + \ln^2\left(\frac{m_f^2}{(q-p)^2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.184}$$

Enfin, il est possible de dire que dans ce chapitre, on a rassemblé les outils de QED à la boucle qui nous permettent de pouvoir traiter dans le chapitre suivant le décalage de Lamb dans le cadre de l'atome d'hydrogène.

Chapitre 3

Atome d'hydrogène et décalage de Lamb

Dans ce chapitre, on s'intéresse à mettre en évidence, la contribution à l'étude de l'atome d'hydrogène, des corrections radiatives renormalisées en électrodynamique quantique. On procède d'abord par un rappel succincte du modèle de l'atome d'hydrogène vu de manière non-relativiste à la Schrödinger, puis de manière relativiste à la Dirac. Dans ces deux cas le champ électromagnétique sera considéré comme un champ classique, du fait que la première quantification aboutissant à la mécanique quantique qu'elle soit relativiste ou pas, ne touche que les quadri-positions et les quadri-impulsions intervenant dans le système physique. On mettra alors l'accent sur les particularités qu'amène, dans le cadre de l'atome d'hydrogène, chacune de ces approches. Ensuite, on introduit la vision de QED reposant sur le recours à la quantification supplémentaire des champs fermionique et photonique, et à l'utilisation de la théorie des perturbations à la Dyson [8] pour exprimer les fonctions de green à tous les ordres d'interaction en terme du petit paramètre naturel sans dimension : $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ appelé constante de structure fine et relié à la constante de couplage électromagnétique e_0 via $\alpha = e_0^2/(4\pi)$. Les corrections radiatives établies dans le contexte de QED, et qui ont fait l'objet du chapitre précédent, nous permettrons, modulo une adaptation au cas des états liés QED à la limite nonrelativiste, d'expliquer en particulier la valeur numérique expérimentale du décalage de Lamb entre les niveaux d'énergies $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène, dont la valeur expérimetale la plus récente [11, 34] fournie à travers des procédés spectroscopiques précis est :

$$\nu^{(exp)}_{(2S_{1/2}-2P_{1/2})}(MHz) = 1057.8514(19)\, MHz \tag{3.1}$$

Soit :

$$L^{(exp)} \equiv \delta E^{(exp)}_{(2S_{1/2}-2P_{1/2})}(eV) = \frac{2\pi\, 10^{-9}}{1.5192674(1)}\, \nu^{(exp)}_{(2S_{1/2}-2P_{1/2})}(MHz) = 4.37492(2)\, 10^{-6}\, eV \tag{3.2}$$

Ce décalage de Lamb découvert en 1947 par Lamb et Retherford [14] a constitué, avec le moment magnétique anomal de l'électron, les deux tests décisifs qui ont permis d'accepter QED comme étant la théorie la plus précise gérant l'interaction électromagnétique.

3.1 L'atome d'hydrogène à la Schrödinger

L'atome d'hydrogène est un système lié formé de deux particules de spin 1/2, un électron de masse $m_e \simeq 511keV$, de charge $-e$, et un proton de masse $m_p \simeq 1836\, m_e$, de charge e in-

teragissant entre eux électromagnétiquement [1] via le potentiel Coulombien. L'énergie de liaison la plus forte étant $E_l = 13.6\,eV$. Par suite, le rapport $E_l/m_e \to 0$ montrant ainsi que l'atome d'hydrogène peut être considéré comme un système quantique non-relativiste [35]. Par conséquent, l'application du formalisme de Schrödinger à ce système devient justifiée. L'équation de Schrödinger appliquée à l'atome d'hydrogène prend la forme :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r}_p,\,\vec{r}_e) = \left[-\frac{\Delta_p}{2m_p} - \frac{\Delta_e}{2m_e} - \frac{\alpha}{|\vec{r}_p - \vec{r}_e|}\right]\psi(t,\vec{r}_p,\,\vec{r}_e) \tag{3.3}$$

La résolution usuelle de cette équation [36], permet d'aboutir à la formule suivante des énergies des états liés :

$$E_n = -\frac{1}{1+m_e/m_p}\frac{\mathcal{R}}{n^2}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{R} = \frac{1}{2}\,m_e\,\alpha^2 \quad \text{et} \quad n = 1,\,2,\,3,\,\cdots,\,\infty \tag{3.4}$$

où $\mathcal{R}$ est le constante de Rydberg, et n le nombre quantique principale. Et des fonctions d'ondes propres correspondantes sont données par :

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_e \tag{3.5}$$

où $l = 0,\,1,\,2,\cdots,\,n-1$ est le nombre quantique orbital [2], et $m = -l,\,-l+1,\cdots,\,l-1,\,l$ est le nombre quantique de projection du moment orbital.

On remarque donc que chaque niveau d'énergie E_n est g_n fois dégénéré avec :

$$g_n = \sum_0^{n-1}(2l+1) = n^2, \quad \text{pour un } n \text{ donné.} \tag{3.6}$$

où plutôt $g_n = 2n^2$, si on prend en compte la dégénérescence de spin. Il est aussi à noter

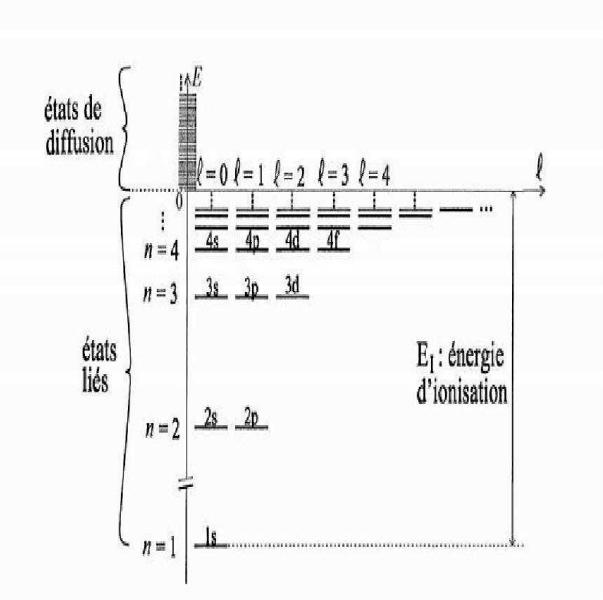


Figure 3.1 – Spectre des états liés de l'atome d'hydrogène à la Schrödinger

1. L'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton étant très petites, et par suite négligeable devant l'interaction électromagnétique

2. En notation spectroscopique ($n^{2s+1}l_j$) : S correspond à $l = 0$, P à $l = 1$, D à $l = 2$, etc.

que les séries de Lyman, Balmer, Paschen bien connues en physique atomique correspondent respectivement aux transitions des états excités vers l'état fondamental $n = 1$, l'état $n = 2$ et l'état $n = 3$.

Par ailleurs, ce formalisme de Schrödinger tel que présenté ci-haut ne permet pas d'expliquer le dédoublement observé expérimentalement de toutes les raies atomiques de l'hydrogène. Pour se faire, on ajoute à la main, dans le cadre de ce même formalisme, au niveau de l'Hamiltonien, l'interaction du moment magnétique $\vec{\mu}$ de l'électron originaire de son spin $\vec{S}$, avec le champ magnétique $\vec{B}$ que crée l'électron chargé électriquement lors de son mouvement orbital relié au moment cinétique orbital $\vec{L}$. Soit une énergie d'interaction :

$$E_{L-S} = -\vec{\mu}.\vec{B} = f(r)\vec{S}.\vec{L} \tag{3.7}$$

D'où, on peut déduire [37] que la différence d'énergie entre deux sous niveaux ($j = l + 1/2$ et $j = l - 1/2$) de même valeurs des nombres quantiques n et l, mais de spin opposés, est donnée par :

$$\Delta E_{spin-orbite} = -\frac{1}{1 + m_e/m_p}\,\frac{\mathcal{R}\,\alpha^2}{n^3}\left[\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4\,n}\right] \tag{3.8}$$

On remarque donc que le formalisme de Schrödinger renforcé par l'ajout de l'interaction spin-orbite peut expliquer le décalage entre les niveaux $2P_{1/2}$ et $2P_{3/2}$ suite à l'interaction spin orbite. Mais ce formalisme de Schrödinger même en incluant l'interaction spin orbite n'a aucune explication à avancer pour le décalage de Lamb observé entre les niveaux de même nombre quantique j et de l différents, soit : $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$.

En outre, il est bien connu que cette interaction spin-orbite introduite à la main peut être retrouvée systématiquement comme limite non-relativiste de l'équation de Dirac (voir équation : (1.15), ce qui donne plus de notoriété pour l'équation de Dirac relativement à l'équation de Schrödinger. Voyons donc ce que nous donne de plus le formalisme de Dirac.

3.2 L'atome d'hydrogène à la Dirac et structure fine

Intéressent nous donc, à présent, au traitement de l'atome d'hydrogène dans le contexte de l'équation de Dirac. On considère alors que l'électron obéit lors de son interaction Coulombienne avec le proton à l'équation de Dirac (1.13). La résolution de cette équation permet de trouver les énergies des états liés sous la forme [11, 16] :

$$E_{n\,j} - m_e = m_e\left[\frac{1}{1 + m_e/m_p} f(n,\,j) - 1\right] \tag{3.9}$$

avec :

$$f(n,\,j) = \left[1 + \frac{\alpha^2}{(n-\beta)^2}\right]^{-1/2} \quad \text{et} \quad \beta = j + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \tag{3.10}$$

En developpant $f(n,\,j)$ jusqu'à l'ordre α^4, on trouve [11, 38] :

$$f(n,\,j) = 1 - \frac{\alpha^2}{2\,n^2} - \frac{\alpha^4}{2\,n^3}\left[\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4\,n}\right] + \cdots \tag{3.11}$$

Ce qui donne :

$$E_{n\,j} - m_e = \underbrace{-\frac{1}{1+m_e/m_p}\frac{\mathcal{R}}{n^2}}_{E_n} \underbrace{-\frac{1}{1+m_e/m_p}\frac{\mathcal{R}\,\alpha^2}{n^3}\left[\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4\,n}\right]}_{\Delta E_{spin-orbite}} + \cdots \tag{3.12}$$

On remarque donc que le formalisme de Dirac redonne systématiquement, à l'ordre le plus bas, les résultats des états liés de l'atome d'hydrogène tel que vu par Schrodinger avec la correction spin-orbite. Néanmoins, l'expression générale (3.9) de la solution dans le cadre de l'atome d'hydrogène est fonction, seulement du nombre quantique principal n et du nombre quantique de moment cinétique total j. Et, n'est pas fonction du nombre quantique l de moment cinétique orbital. Alors, le formalisme de Dirac appliqué à l'atome d'hydrogène n'a pas la possibilité de différentier entre les états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ comme le veut le résultat expérimental du décalage de Lamb. Une autre piste est donc demandée. L'électrodynamique quantique nous fournit cet issue.

3.3 L'atome d'hydrogène à la QED et décalage de Lamb

Explorons à présent, la contribution de QED à élucider le mystère du décalage de Lamb des niveaux $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène.

En théorie quantique des champs, l'atome d'hydrogène est perçu comme un état lié stable d'interaction entre deux particules, l'électron et le proton qui sont en perpétuelle interaction électromagnétique. Ceci rend l'étude de ce genre de système compliquée nécessitant le recours à l'équation de Bethe-Salpeter [39] gérant le problème à deux corps quantiques relativistes, supplémenté par un traitement de prolongement analytique non perturbatif [40].

Néanmoins, pour le cas de l'atome d'hydrogène qui est un atome léger, le fait que l'ordre de grandeur de l'énergie des états liés qui est de l'ordre de la constante de Rydberg $\mathcal{R}$, est beaucoup plus petit que celui de l'énergie de masse de l'électron m_e, alors cela nous permet de bénéficier de conditions simplificatrices reliées à la qualité non-relativiste de notre système d'atome d'hydrogène. On s'intéressera donc à la limite non relativiste des solutions QED. Et il est donc question de déterminer qu'elles sont les corrections apportées à la limite non-relativiste par la QED appliquée à l'atome d'hydrogène et ceci relativement à ce que donne le formalisme de Schrödinger dans ce contexte.

L'exécution de ce calcul de précision peut être scinder en deux parties, du fait des remarques suivantes [33].

$\rightarrow$ Lorsque dans le schéma d'interactions multiples (n sommets d'interactions - voir Figure (3.2)) entre l'électron et le proton, les photons virtuels ont des énergies très basses relativement à la constante de Rydberg caractérisant l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène ($\omega \ll \mathcal{R}$), alors dans les diagrammes à boucles les états électroniques réels et intermédiaires sont pratiquement sur leurs couches de masse. Ceci veut dire que les propagateurs correspondants $\left(\left[i/(\not{p} - m_e)\right]^n\right)$ ont une forte contribution à l'amplitude du processus d'interaction. Une contribution qui compenserait le facteur $(\alpha)^n$ due aux différents vertex électromagnétiques intervenants. Par suite, dans cette région de basses fréquences des photons virtuels, il n'est pas possible de négliger l'action des interactions multiples. Ce qui nécessite un traitement particulier de cette région à basses fréquences où les corrections radiatives prennent en considération et le champ électromagnétique interne $A_\mu^{(int)}$ propre à l'électron et le champ électromagnétique Coulombien $A_\mu^{(ext)}$ externe due à l'interaction avec le proton (voir Figure (**??**)).

$\rightarrow$ Par ailleurs, dans la région de hautes fréquences des photons virtuels relativement à

la constante de Rydberg ($\omega \gg \mathcal{R}$), les électrons intermédiaires sont hors de couche de masse et par suite l'effet des propagateurs correspondants est négligeable relativement à l'action du facteur ($(\alpha)^n \to 0$). Ces diagrammes à interactions multiples peuvent donc être négligés. Dans cette région de hautes fréquences, il est donc tout à fait raisonnable de se contenter des simples diagrammes de Feynman qui font intervenir juste une seule interaction avec le potentiel Coulombien du proton. Par conséquent, le calcul dans cette région de hautes fréquences sera mené différemment que celui dans la région de basses fréquences. Les corrections radiatives dans ce secteur mettent en jeu que le champ électromagnétique interne $A_\mu^{(int)}$ propre à l'électron. L'action du champ électromagnétique Coulombien $A_\mu^{(ext)}$ externe due au proton ne constitue qu'une perturbation externe qu'on traitera à l'aide du formalisme des perturbations ordinaire de la mécanique quantique (voir Figure (**??**)).

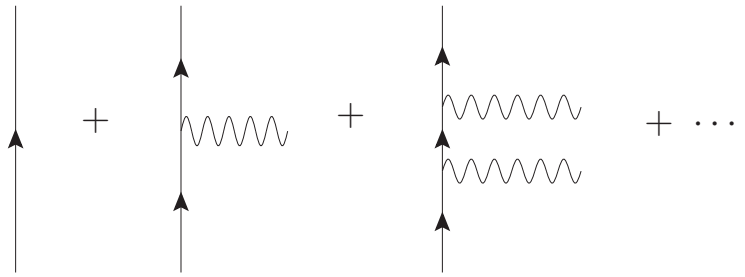


Figure 3.2 – Interactions électromagnétiques multiples d'un électron avec une source statique externe.

Ainsi dans la région à hautes fréquences des photons virtuels, on peut voir l'atome d'hydrogène dans le cadre de QED, comme étant un électron qui crée un champ électromagnétique quantique agissant sur lui même, et par suite influençant via les corrections radiatives renormalisées (qu'on a développé dans le chapitre précédent), sa charge, sa masse, ainsi que les champs électromagnétique et spinoriel électronique eux même. Ce système global subit l'action d'une perturbation due au champ électromagnétique Coulombien classique du proton au sein de l'atome d'hydrogène [41, 42, 43]. Les diagrammes de Feynman présentés dans la Figure (3.3) schématisent cette situation, d'un électron vu à la boucle interagissant avec une source Coulombienne perturbative statique (le proton). Les corrections radiatives utilisées dans cette région sont celles des états électronique libres.

→ La jonction entre les résultats des calculs effectués différemment dans les deux régions d'énergies à savoir la région de basses fréquences ($\omega \ll \mathcal{R}$) et la région de hautes fréquences ($\omega \gg \mathcal{R}$) sera assuré avec un recouvrement naturel des résultats si d'une part on choisit de couper l'intervalle d'énergie à la valeur $\mathcal{K}$ assujettie à être dans l'intervalle entre $\mathcal{R}$ et m_e.

$$\mathcal{R} \ll \mathcal{K} \ll m_e \tag{3.13}$$

et d'autre part on départage les domaines de basses et de hautes fréquences comme suite :

$$\boxed{\text{Domaine des basses fréquences :} \quad \Rightarrow \omega \leq \mathcal{K} \quad \longrightarrow \delta E^<}$$

$$\boxed{\text{Domaine des hautes fréquences :} \quad \Rightarrow \omega \geq \mathcal{K} \quad \longrightarrow \delta E^>}$$

Le décalage des niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène due à la contribution de QED sera donc donné par :

$$\delta E = \delta E^> + \delta E^< \tag{3.14}$$

Et on mènera donc, dans ce qui suit, le calcul [33, 19, 44] de manière différente dans le domaine au dessous et dans le domaine au dessus de cette échelle $\mathcal{K}$ de coupure.

3.3.1 La contribution des hautes fréquences au décalage des niveaux atomiques

Dans ce domaine de hautes fréquences $\omega \geq \mathcal{K}$, il est possible de modéliser notre problème comme étant celui d'une entité formée de l'électron enveloppé par toutes les corrections radiatives QED à une boucle interagissant avec un champ électromagnétique Coulombien $A_{\mu}^{(ext)}$ produit par le proton. Ce modèle est représenté par l'ensemble des diagrammes de Feynman de la Figure (3.3).

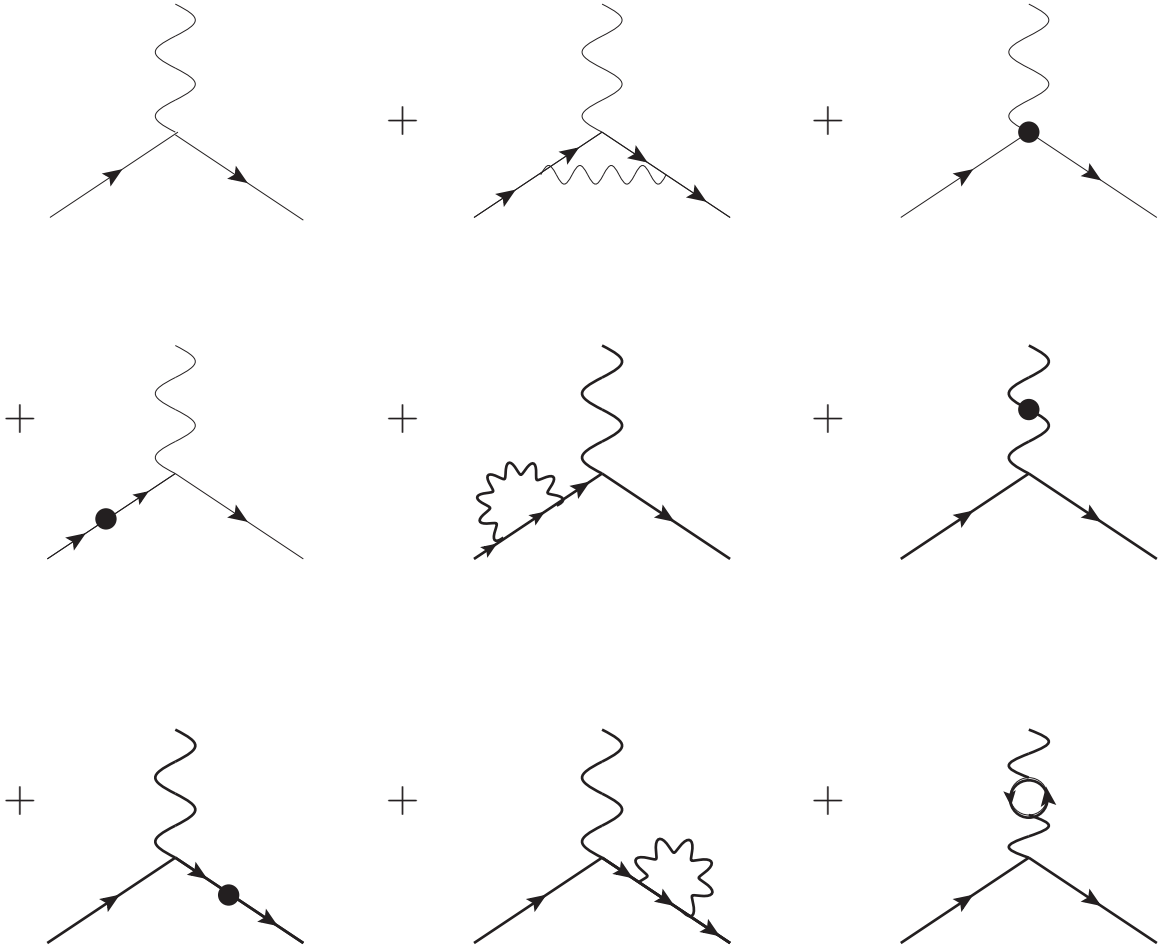


Figure 3.3 – L'atome d'hydrogène à la QED dans le domaine des hautes fréquences des photons virtuels

L'énergie d'interaction d'un électron sur couche de masse avec un champ électromagnétique statique $A_{\mu}^{(ext)}$ est donné par [3]

$$W = -Q_e e_0 \int d^3x \, j_{\mu}^{(e)}(x) A_{(ext)}^{\mu}(x) \tag{3.15}$$

$$= -Q_e e_0 \int d^3x \, \overline{\Psi}_{p_1}^{(e)} \left(\gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu}^{(r)}(p_1, p_2) + \frac{i\Pi_{\mu\nu}^{(r)}}{4\pi} \, iD_{F,lib}^{\nu\sigma} \gamma_{\sigma} \right) \Psi_{p_2}^{(e)} A_{(ext)}^{\mu}(x) \tag{3.16}$$

3. La densité Hamiltonienne d'interaction est égale à moins la densité Lagrangienne d'interaction.

On introduit dans cette relation, l'expression (2.175) ainsi que les expressions des corrections radiatives (2.84) et (2.180 et 2.181) respectivement de la contribution sur la couche de masse à la limite non-relativiste du propagateur photonique et du vertex électromagnétique renormalisés. En utilisant le relation (2.180) on prend le soin d'écarter le terme contenant la divergence infrarouge, car on est dans le domaine des hautes énergies où on a soustrait la partie basses énergies. On obtient alors :

$$W \simeq -Q_e e_0 \int d^3x\, \overline{\Psi}^{(e)}_{p_1} \quad \left\{ \gamma_\mu \left[1 + Q_e^2 \frac{\alpha}{3\pi} \frac{(p_2-p_1)^2}{m_e^2} \left(\ln \frac{m_e}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \right] + Q_e^2 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{i}{2m_e} \sigma_{\mu\nu} (p_2-p_1)^\nu \right\} \Psi^{(e)}_{p_2} A^\mu_{(ext)} \tag{3.17}$$

Et comme :

$$A^\mu_{(ext)} = \left(A^0_{(ext)}, \vec{A}_{(ext)} \right) = \left(A^0_{(ext)}, \vec{0} \right) = \left(\frac{e_0}{|\vec{x}|}, \vec{0} \right) \tag{3.18}$$

Et en posant $q = (p_2 - p_1)$, et en remarquant que $\sigma_{00} = 0$, on obtient :

$$W \simeq -Q_e e_0 \int d^3x\, \overline{\Psi}^{(e)}_{p_1} \left\{ \gamma_0 \left[1 + Q_e^2 \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m_e^2} \left(ln \frac{m_e}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \right] + Q_e^2 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{i}{2m_e} \sigma_{0k}\, q^k \right\} \Psi^{(e)}_{p_2} A^0_{(ext)} \tag{3.19}$$

Notons de plus que :

$$\begin{aligned}
Q_e &= -1 && (3.20)\\
\overline{\Psi} &= \Psi^\dagger \gamma^0 && (3.21)\\
q^k &= i\partial^k = i\partial/\partial x_k && (3.22)\\
\vec{E} &= -\vec{\nabla} A^0 && (3.23)\\
q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 &\rightarrow i(\nabla_\mu) i(\nabla^\mu) = -(\partial^2/\partial t^2 - \Delta) && (3.24)\\
\gamma^0 \sigma_{0k}\, \partial A^0/\partial x_k &= -\gamma^0 \sigma_{0k} \partial A^0/\partial x^k = \gamma^0 (i/2)(\gamma_0\gamma_k - \gamma_k\gamma_0) E^k & \\
&= \frac{i}{2}(\gamma_0^2\gamma_k - \gamma_0\gamma_k\gamma_0) E^k = \frac{i}{2}(\gamma_k + \gamma_k) E^k = i\gamma_k E^k = -i\vec{\gamma}.\vec{E} && (3.25)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le décalage en énergie des niveaux atomiques due aux hautes fréquences :

$$\delta E^> = \frac{e_0\, \alpha}{3\pi m_e^2} \left(ln \frac{m_e}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \int d^3x\, \Psi^{\dagger\,(e)}_{p_1} \left\{ \Delta A^0_{(ext)} \right\} \Psi^{(e)}_{p_2} - \frac{i e_0\, \alpha}{4\pi m_e} \int d^3x\, \Psi^{\dagger\,(e)}_{p_1} \left\{ \vec{\gamma}.\vec{\nabla} A^0_{(ext)} \right\} \Psi^{(e)}_{p_2} \tag{3.26}$$

Dans cette expression, on remarque la présence du terme logarithmique $ln\frac{m_e}{\mu}$ en fonction de la masse de l'électron m_e et de la dimension énergétique μ introduite suite à la procédure de régularisation dimensionnelle adoptée au chapitre précédent. Ceci signifie que notre démarche d'élimination des basses fréquences qui s'est contentée d'éliminer le terme divergent et les constantes introduites via la régularisation dimensionnelle n'est pas suffisante pour tout prendre en considération. un terme résiduelle $(ln\frac{m_e}{\mu})$ est donc resté.

Un traitement plus rigoureux et qu'on n'expose pas ici, faisant intervenir la régularisation des divergences infrarouges par l'introduction d'une masse fictive non-nulle λ pour le photon et par l'évaluation complète de la contribution des photons moues (de basses fréquences inférieures ou égales à l'énergie de coupure $\mathcal{K}$) permet de montrer que pour prendre correctement l'élimination

des basses fréquences il suffit de faire la substitution [19] :

$$ln\frac{m_e}{\mu} \to ln\frac{m_e}{2\mathcal{K}} + \frac{5}{6} \tag{3.27}$$

D'où le décalage $\delta E^{>}$ prend la forme :

$$\delta E^{>} = \frac{e_0\,\alpha}{3\pi m_e^2}\left(ln\frac{m_e}{2\mathcal{K}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5}\right)\overbrace{\int d^3x\,\Psi_{p_1}^{\dagger\,(e)}\left\{\Delta A^0_{(ext)}\right\}\Psi_{p_2}^{(e)}}^{I_1} - \frac{ie_0\,\alpha}{4\pi m_e}\overbrace{\int d^3x\,\Psi_{p_1}^{\dagger\,(e)}\left\{\vec{\gamma}.\vec{\nabla}A^0_{(ext)}\right\}\Psi_{p_2}^{(e)}}^{I_2} \tag{3.28}$$

On remarque qu'à l'approximation non-relativiste qu'on est en train de considérer ici,[4] l'intégrale I_1 est non nulle, par contre l'intégrale I_2 est nulle du faite que les matrices $\vec{\gamma}$ ont des éléments diagonaux nuls. Donc pour l'évaluation de I_2, on prend la limite non relativiste du spineur relativiste de Dirac. Soit donc :

$$\Psi^{(e)} = \begin{pmatrix} \phi^{(e)} \\ \chi^{(e)} \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

avec [16] :

$$\chi^{(e)} = -\frac{i}{2m_e}\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\phi^{(e)} \quad \text{et} \quad \Psi^{\dagger\,(e)}\,\vec{\gamma}\,\Psi^{(e)} = \phi^{*\,(e)}\vec{\sigma}\chi^{(e)} - \chi^{*\,(e)}\vec{\sigma}\phi^{(e)} \tag{3.30}$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int d^3x\left[\phi^{*\,(e)}(\vec{\sigma}.\vec{\nabla}A^0_{(ext)})\chi^{(e)} - \chi^{*\,(e)}(\vec{\sigma}.\vec{\nabla}A^0_{(ext)})\phi^{(e)}\right] \\ &= -\frac{i}{2m}\int d^3x\left[\phi^{*\,(e)}(\vec{\sigma}.\vec{\nabla}A^0_{(ext)})(\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\phi^{(e)}) + (\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\phi^{*\,(e)})(\vec{\sigma}.\vec{\nabla}A^0_{(ext)})\phi^{(e)}\right] \end{aligned} \tag{3.31}$$

L'utilisation de la relation :

$$\vec{\sigma}.\vec{a}\,\vec{\sigma}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b} + i\vec{\sigma}.(\vec{a}\times\vec{b}) \tag{3.32}$$

et de l'intégration par partie nous permet de trouver :

$$I_2 = \frac{i}{2m_e}\int d^3x\left[\phi^{*\,(e)}\,\Delta A^0_{(ext)}\,\phi^{(e)} - 2i\phi^{*\,(e)}\,\vec{\sigma}.\left(\vec{\nabla}A^0_{(ext)}\times\vec{\nabla}\phi^{(e)}\right)\right] \tag{3.33}$$

Et puisque $A^0_{(ext)}$ est le potentiel Coulombien alors :

$$\vec{\nabla}A^0_{(ext)} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{dA^0_{(ext)}}{dr} \tag{3.34}$$

et par suite :

$$2i\phi^{*\,(e)}\,\vec{\sigma}.\left(\vec{\nabla}A^0_{(ext)}\times\vec{\nabla}\phi^{(e)}\right) = -4\frac{1}{r}\frac{dA^0_{(ext)}}{dr}\phi^{*\,(e)}\,\underbrace{\frac{1}{2}\vec{\sigma}}_{\vec{S}}.\underbrace{\left(\vec{r}\times\frac{1}{i}\vec{\nabla}\right)}_{\vec{L}}\phi^{(e)} \tag{3.35}$$

4. Le quadri-spineur $\Psi^{(e)}$ dans l'approximation non-relativiste s'écrit :

$$\Psi^{(e)} = \begin{pmatrix} \phi^{(e)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où maintenant le décalage $\delta E^{>}$ due aux hautes fréquences prend la forme :

$$\boxed{\delta E^{>} = \frac{e_0\,\alpha}{3\pi m_e^2}\left(ln\frac{m_e}{2\mathcal{K}} + \frac{19}{30}\right)\int d\vec{r}\,\phi_{p_1}^{*(e)}\left\{\Delta A^0_{(ext)}\right\}\phi_{p_2}^{(e)} + \frac{e_0\,\alpha}{2\pi m_e^2}\int d\vec{r}\,\phi_{p_1}^{*(e)}\left\{\frac{1}{r}\frac{dA^0_{(ext)}}{dr}\,\vec{S}.\vec{L}\right\}\phi_{p_2}^{(e)}} \tag{3.36}$$

où $\phi^{(e)}$ est simplement la fonction d'onde électronique à la Schrödinger.

$$\phi^{(e)}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\psi_{sm_s} \tag{3.37}$$

3.3.2 La contribution des basses fréquences au décalage des niveaux atomiques

Dans ce domaine de petites fréquences des photons virtuels $\omega \leq \mathcal{K}$, les états électroniques réel et virtuels sont très proche de la couche de masse, par suite l'amplitude du processus est rehaussée. On doit donc tenir compte de façon exacte du champ extérieur. Pour ce faire, on utilise la méthode basée sur la condition d'unitarité [33]. Et, on prend aussi en compte le fait que dans cette région il y a émission de photons réels moues de freinages participant à lever la divergence infrarouge fictive produit par les photons virtuels.

Notons de plus que, vu que les états atomiques peuvent se désintégrer, alors les niveaux d'énergies correspondant développent une petite composante complexe en relation avec cette largeur de raie. Les états atomiques sont donc quasi-stationnaires. A la limite relativiste cette émission de photons réels lors du passage de l'état $|\nu\rangle$ d'énergie E_ν à l'état $|\nu'\rangle$ d'énergie inférieure $E_{\nu'} < E_\nu$ est dipolaire, et on peut écrire [33] :

$$Im[\delta E_\nu^{<}] = -\frac{2}{3}\int_0^\infty d\omega \sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2(E_\nu - E_{\nu'}^3)\delta(E_\nu - E_{\nu'} - \omega) \tag{3.38}$$

où $\vec{d} = Q_e e_0 \vec{r}$ est le moment dipolaire électrique. Et comme il est possible d'écrire la distribution delta sous la forme :

$$\delta(E_\nu - E_{\nu'} - \omega) = -\frac{1}{\pi}Im\left[\frac{1}{E_\nu - E_{\nu'} - \omega + i\epsilon}\right] \tag{3.39}$$

alors, on obtient :

$$Im[\delta E_\nu^{<}] = \frac{2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_\nu - E_{\nu'})^2\int_0^\infty \frac{(E_\nu - E_{\nu'})d\omega}{E_\nu - E_{\nu'} - \omega + i\epsilon} \tag{3.40}$$

et comme dans notre région d'intérêt les fréquences ω sont bornées supérieurement ($\omega \leq \mathcal{K}$) alors l'intégrale précédente doit être restreinte à cet intervalle. Ainsi :

$$\begin{aligned} Im[\delta E_\nu^{<}] &= \frac{2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_\nu - E_{\nu'})^3\int_0^{\mathcal{K}} Im\left[\frac{d\omega}{E_\nu - E_{\nu'} - \omega + i\epsilon}\right] && (3.41)\\ &= Im\left[\frac{2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_\nu - E_{\nu'})^3\int_0^{\mathcal{K}}\frac{d\omega}{E_\nu - E_{\nu'} - \omega + i\epsilon}\right] && (3.42)\\ &= Im\left[-\frac{2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_\nu - E_{\nu'})^3\ln\left(\frac{E_\nu - E_{\nu'} - \mathcal{K}}{E_\nu - E_{\nu'} + i\epsilon}\right)\right] && (3.43)\end{aligned}$$

Comme, on est entrain de considérer que $E_\nu - E_{\nu'} \ll \mathcal{K}$, alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta E_\nu^< &= -\frac{2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_\nu - E_{\nu'})^3 \ln\left(\frac{\mathcal{K}}{E_{\nu'} - E_\nu - i\epsilon}\right) && (3.44)\\
&= \frac{2}{3\pi}\ln\mathcal{K}\left\{\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3\right\} + \frac{2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3 \ln\left(\frac{E_{\nu'} - E_\nu + i\epsilon}{(E_{\nu'} - E_\nu)^2}\right)\\
&= \frac{2}{3\pi}\ln\mathcal{K}\left\{\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3\right\} + \frac{2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3\left(\ln\frac{1}{|E_{\nu'} - E_\nu|} + i\epsilon\right)\\
&= \frac{2}{3\pi}\ln\mathcal{K}\left\{\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3\right\} + \frac{2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3\,\ln\frac{1}{|E_{\nu'} - E_\nu|} && (3.45)
\end{aligned}$$

L'évaluation de cette somme ne peut pas être faite analytiquement. Par ailleurs, il est utile de procéder d'abord à la reformulation du terme entre accolades.

Alors, en utilisant les relations :

$$\frac{d\hat{\vec{r}}}{dt} = \frac{1}{i}[\hat{\vec{r}}, H] = \frac{\hat{\vec{p}}}{m_e} \quad \text{et} \quad \frac{d\hat{\vec{p}}}{dt} = \frac{1}{i}[\hat{\vec{p}}, H] = -\frac{e_0}{4\pi}\vec{\nabla}A^0_{(ext)} \quad \text{avec} \quad H = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m_e} + \frac{e_0}{4\pi}A^0_{(ext)}(\vec{r}) \quad (3.46)$$

et par suite :

$$\langle\nu'|\hat{\vec{r}}\,\hat{H} - \hat{H}\,\hat{\vec{r}}|\nu\rangle = \vec{r}_{\nu'\nu}(E_{\nu'} - E_\nu) = \frac{i\,\vec{p}_{\nu'\nu}}{m_e} \quad (3.47)$$

$$\langle\nu'|\hat{\vec{p}}\,\hat{H} - \hat{H}\,\hat{\vec{p}}|\nu\rangle = \vec{p}_{\nu'\nu}(E_{\nu'} - E_\nu) = -i\,\frac{e_0}{4\pi}\left(\vec{\nabla}A^0_{(ext)}\right)_{\nu'\nu} \quad (3.48)$$

On obtient pour l'expression entre accolades :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3 &= -\frac{e_0^2}{m_e^2}\sum_{\nu'}|\vec{p}_{\nu\nu'}|^2(E_{\nu'} - E_\nu) && (3.49)\\
&= -\frac{e_0^2}{m_e^2}\sum_{\nu'}\frac{1}{2}\left[|\vec{p}_{\nu\nu'}|^2(E_{\nu'} - E_\nu) - (E_\nu - E_{\nu'})|\vec{p}_{\nu\nu'}|^2\right] && (3.50)\\
&= -\frac{e_0^2}{2m_e^2}\sum_{\nu'}\left[\vec{p}_{\nu\nu'}.\overbrace{\vec{p}_{\nu'\nu}(E_{\nu'} - E_\nu)} - \overbrace{(E_\nu - E_{\nu'})\vec{p}_{\nu\nu'}}.\vec{p}_{\nu'\nu}\right] && (3.51)\\
&= \frac{ie_0^3}{8\pi m_e^2}\sum_{\nu'}\left[\vec{p}_{\nu\nu'}.\left(\vec{\nabla}A^0\right)_{\nu'\nu} - \left(\vec{\nabla}A^0_{(ext)}\right)_{\nu\nu'}.\vec{p}_{\nu'\nu}\right] && (3.52)\\
&= \frac{ie_0^3}{8\pi m_e^2}\langle\nu|\left(\vec{p}.\vec{\nabla}A^0_{(ext)} - \vec{\nabla}A^0.\vec{p}\right)|\nu\rangle && (3.53)\\
&= \frac{e_0^3}{8\pi m_e^2}\langle\nu|\left(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}A^0_{(ext)} - \vec{\nabla}A^0.\vec{\nabla}\right)|\nu\rangle = \frac{e_0^3}{8\pi m_e^2}\langle\nu|\left(\Delta A^0\right)|\nu\rangle && (3.54)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3 = \frac{e_0\alpha}{2m_e^2}\langle\nu|\left(\Delta A^0\right)|\nu\rangle = \frac{e_0\alpha}{2m_e^2}\int d\vec{r}\phi^{*\,(e)}\Delta A^0_{(ext)}\phi^{(e)} \quad (3.55)$$

Ainsi, la contribution des basses fréquences au décalage des niveaux atomique de l'atome d'hydrogène est :

$$\boxed{\delta E_\nu^< = \frac{e_0\alpha}{3\pi m_e^2}\ln\mathcal{K}\left\{\int d\vec{r}\phi^{*\,(e)}\Delta A^0_{(ext)}\phi^{(e)}\right\} + \frac{2e_0^2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{r}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'} - E_\nu)^3\,\ln\frac{1}{|E_{\nu'} - E_\nu|}} \quad (3.56)$$

3.3.3 Le décalage total des niveaux atomiques

Pour obtenir le décalage total des niveaux atomiques de l'atome d'hydrogène , on somme le résultat (3.36) due aux hautes fréquences avec le résultat (3.56) due au basses fréquences. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\delta E_\nu &= \delta E_\nu^{>} + \delta E_\nu^{<} && (3.57)\\
&= \frac{e_0\,\alpha}{3\pi m_e^2}\left(\frac{19}{30}\right)\int d\vec{r}\,\phi_\nu^{*(e)}\left\{\Delta A^0_{(ext)}\right\}\phi_\nu^{(e)} + \frac{e_0\,\alpha}{2\pi m_e^2}\int d\vec{r}\,\phi_\nu^{*(e)}\left\{\frac{1}{r}\frac{dA^0_{(ext)}}{dr}\,\vec{S}.\vec{L}\right\}\phi_\nu^{(e)}\\
&+ \frac{2}{3\pi}\,ln\frac{m_e}{2}\left\{\sum_{\nu'}|\vec{d}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'}-E_\nu)^3\right\} + \frac{2e_0^2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{r}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'}-E_\nu)^3\,\ln\frac{1}{|E_{\nu'}-E_\nu|} && (3.58)\\
\delta E_\nu &= \underbrace{\frac{e_0\,\alpha}{3\pi m_e^2}\left(\frac{19}{30}\right)\int d\vec{r}\,\phi_\nu^{*(e)}\left\{\Delta A^0_{(ext)}\right\}\phi_\nu^{(e)}}_{\delta E_\nu^{(1)}} + \underbrace{\frac{e_0\,\alpha}{2\pi m_e^2}\int d\vec{r}\,\phi_\nu^{*(e)}\left\{\frac{1}{r}\frac{dA^0_{(ext)}}{dr}\,\vec{S}.\vec{L}\right\}\phi_\nu^{(e)}}_{\delta E_\nu^{(2)}}\\
&+ \underbrace{\frac{2e_0^2}{3\pi}\sum_{\nu'}|\vec{r}_{\nu\nu'}|^2\,(E_{\nu'}-E_\nu)^3\,\ln\frac{m_e}{2|E_{\nu'}-E_\nu|}}_{\delta E_\nu^{(3)}} && (3.59)
\end{aligned}$$

Cette expression est bien comme il se doit indépendante de l'énergie de coupure $\mathcal{K}$. De plus tous les éléments de matrices qui y interviennent se rapport aux fonctions d'ondes non-relativistes de l'électron dans l'atome d'hydrogène vu à la Schrödinger. Ainsi, on a les relations de correspondances suivantes :

$$\begin{aligned}
|\nu\rangle &\longrightarrow |nlm\rangle|sm_s\rangle \longrightarrow |jm_j\rangle && (3.60)\\
\phi_\nu^{(e)} &\longrightarrow \langle\vec{r}|nlm\rangle\chi_{sm_s} && (3.61)\\
E_\nu &\longrightarrow E_n = -\frac{\mathcal{R}}{n^2} && (3.62)
\end{aligned}$$

En outre, le potentiel Coulombien satisfait aux relations :

$$\Delta A^0_{(ext)} = e_0\delta^3(\vec{r}) \;\Rightarrow\; e_0\langle nlm|\Delta A^0_{(ext)}|nlm\rangle = e_0^2|\phi_{nlm}(0)|^2 = \frac{m_e^3\,\alpha^4}{\pi\,n^3}\,\delta_{l0} \qquad (3.63)$$

$$\frac{1}{r}\frac{dA^0_{(ext)}}{dr} = -\frac{e_0}{r^3} \quad \text{et} \quad \left\langle\nu\left|\frac{1}{r^3}\right|\nu\right\rangle = \frac{2\alpha^3 m_e^3}{l(l+1)(2l+1)n^3} \qquad (3.64)$$

et le couplage spin-orbite à la relation (on utilise : $s=\frac{1}{2}$) :

$$\begin{aligned}
\langle\vec{S}.\vec{L}\rangle = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2-\vec{L}^2-\vec{S}^2\right) &= \frac{1}{2}\left[j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\right](1-\delta_{l0})\\
&= \frac{1}{2}(1-\delta_{l0})\begin{cases} l & \text{pour : } j=l+\frac{1}{2}\\ -1-l & \text{pour : } j=l-\frac{1}{2}\end{cases} && (3.65)
\end{aligned}$$

On utilise de plus le logarithme de Bethe (L_{nl}) défini par l'expression :

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2m_e\alpha^4}\sum_{n'l'm'}|\langle n'l'm'|\widehat{\vec{r}}|nlm\rangle|^2(E_{n'}-E_n)^3\left[\ln\frac{m_e}{2|E_{n'}-E_n|}+2\ln\alpha\right] \qquad (3.66)$$

est qui s'évalue numériquement.

Ainsi, on obtient :

$$\delta E_{\nu}^{(1)} = \frac{19}{30}\frac{4m_e\alpha^5}{3\pi}\frac{1}{n^3}\,\delta_{l0} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}\delta E_{\nu}^{(2)} &= -\frac{e_0^2\alpha^4 m_e}{2\pi}\frac{1}{n^3}(1-\delta_{l0})\begin{cases}\dfrac{1}{(l+1)(2l+1)} & \text{pour } j = l+\frac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{l(2l+1)} & \text{pour } j = l-\frac{1}{2}\end{cases} \qquad (3.68)\\ &= \pm\frac{m_e\alpha^5}{2\pi}\frac{1}{n^3}(1-\delta_{l0})\frac{2}{(2j+1)(2l+1)} \qquad \text{pour } j = l\pm\frac{1}{2} \qquad (3.69)\end{aligned}$$

$$\delta E_{\nu}^{(3)} = \frac{4m_e\alpha^5}{3\pi}\frac{1}{n^3}\,L_{nl} - (2\ln\alpha)\frac{4m_e\alpha^5}{3\pi}\frac{1}{n^3}\,\delta_{l0} \tag{3.70}$$

Finalement, on trouve que l'expression du décalage des niveaux atomiques de l'atome d'hydrogène est donné par :

$$\boxed{\delta E_{\nu} \equiv \delta E_{njl} = \frac{4m_e\alpha^5}{3\pi n^3}\left\{L_{nl} + \left[\frac{19}{30} - 2ln\alpha\right]\delta_{l0} \pm \frac{3}{4}\frac{1}{(2j+1)(2l+1)}(1-\delta_{l0})\right\}} \tag{3.71}$$

pour les états avec $j = l \pm 1/2$.

Et en prenant en considération de fait qu'il faut utiliser plutôt la masse réduite à la place de la masse de l'électron, l'expression (3.71) prend la forme :

$$\boxed{\delta E_{\nu} \equiv \delta E_{njl} = \frac{1}{1+m_e/m_p}\frac{4m_e\alpha^5}{3\pi n^3}\left\{L_{nl} + \left[\frac{19}{30} - 2ln\alpha\right]\delta_{l0} \pm \frac{3}{4}\frac{1}{(2j+1)(2l+1)}(1-\delta_{l0})\right\}} \tag{3.72}$$

3.3.4 Décalage de Lamb entre les niveaux atomiques des états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$

Décalage due à QED du niveau atomique $2S_{1/2}$ de l'hydrogène

Pour l'état $2S_{1/2}$, on a $n = 2$, $j = 1/2$ et $l = 0$ par conséquent le décalage du niveau énergétique correspondant est :

$$\delta E_{2S_{1/2}} = \left(\frac{1}{8}\right)\frac{1}{1+m_e/m_p}\frac{4m_e\alpha^5}{3\pi}\left\{L_{20} + \left[\frac{19}{30} - 2ln\alpha\right]\right\} \tag{3.73}$$

En remplaçant les valeurs numériques [45, 11] :

$$\begin{cases}\alpha = 1/137.035999139(31) = 7.2973525664(17)\,10^{-3},\\ m_e = 0.5109989461(31)MeV,\\ m_p = 938.2720813(58)MeV,\\ L_{20} = -2.8117698932(5)\end{cases} \tag{3.74}$$

on trouve :

$$\delta E_{2S_{1/2}} = +4.29591(1)\,10^{-6}eV \tag{3.75}$$

Décalage due à QED du niveau atomique $2P_{1/2}$ de l'hydrogène

Pour l'état $2P_{1/2}$, on a $n = 2$, $l = 1$, et $j = 1/2 = l - 1/2$, par suite :

$$\delta E_{2P_{1/2}} = \left(\frac{1}{8}\right) \frac{1}{1 + m_e/m_p} \frac{4m_e\alpha^5}{3\pi} \left\{L_{21} - \frac{1}{8}\right\} \tag{3.76}$$

En prenant alors les valeurs numériques précédentes ainsi que [11] :

$$L_{21} = +0.0300167089(3) \tag{3.77}$$

on trouve :

$$\delta E_{2P_{1/2}} = -0.05325(3)\, 10^{-6} eV \tag{3.78}$$

Décalage de Lamb $\delta E^{(Lamb)}_{2S_{1/2}-2P_{1/2}}$ de l'atome d'hydrogène

L'intervalle énergétique entre des niveaux atomiques des états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène corrigée à la QED, constitue le décalage de Lamb entre les états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène. On trouve pour ce décalage :

$$\delta E^{(Lamb)}_{2S_{1/2}-2P_{1/2}} = \delta E_{2S_{1/2}} - \delta E_{2P_{1/2}} = 4.34916(3)\, 10^{-6} eV \tag{3.79}$$

Ce qui nous permet d'obtenir la fréquence du rayonnement spectroscopique correspondant :

$$\boxed{\nu^{(Lamb_QED-1boucle)}_{(2S_{1/2}-2P_{1/2})} = 1051.623(1) MHz} \tag{3.80}$$

La valeur théorique la plus précise de ce décalage prenant en compte, en plus de ce qu'on a considéré dans ce mémoire, l'effet du recul du proton et de la finitude de son rayon ainsi que les corrections radiatives d'ordres supérieures à la boucle est donnée par Kinoshita [11, 15] :

$$\boxed{\nu^{(Lamb_QED-Kinoshita)}_{2S_{1/2}-2P_{1/2}} = 1057.855(14) MHz} \tag{3.81}$$

Ces deux valeurs théoriques sont à rapprocher avec la valeur expérimentale la plus récente :

$$\boxed{\nu^{(exp)}_{(2S_{1/2}-2P_{1/2})}(MHz) = 1057.8514(19)\, MHz} \tag{3.82}$$

On remarque donc que notre résultat établi à l'ordre de la boucle est à 0.6 % proche de la valeur expérimentale. Par contre, la valeur théorique donnée par Kinoshita, au pris de lourds calculs de précision à l'ordre de deux boucles dépassant le cadre de ce mémoire, permet d'approcher encore plus la valeur expérimentale avec un écart de seulement 3 par million. Ceci justifie de la justesse du formalisme de QED pour gérer l'interaction électromagnétique.

La figure (3.4) représente le schéma des niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène explicitant le décalage de Lamb entre les niveaux $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$. On y trouve aussi, la manifestation de la structure hyperfine due à l'interaction entre le spin de l'électron et le spin du proton. Cette structure hyperfine se caractérise par un dédoublement de chaque niveau d'énergie en relation avec le spin total F comme le montre la figure.

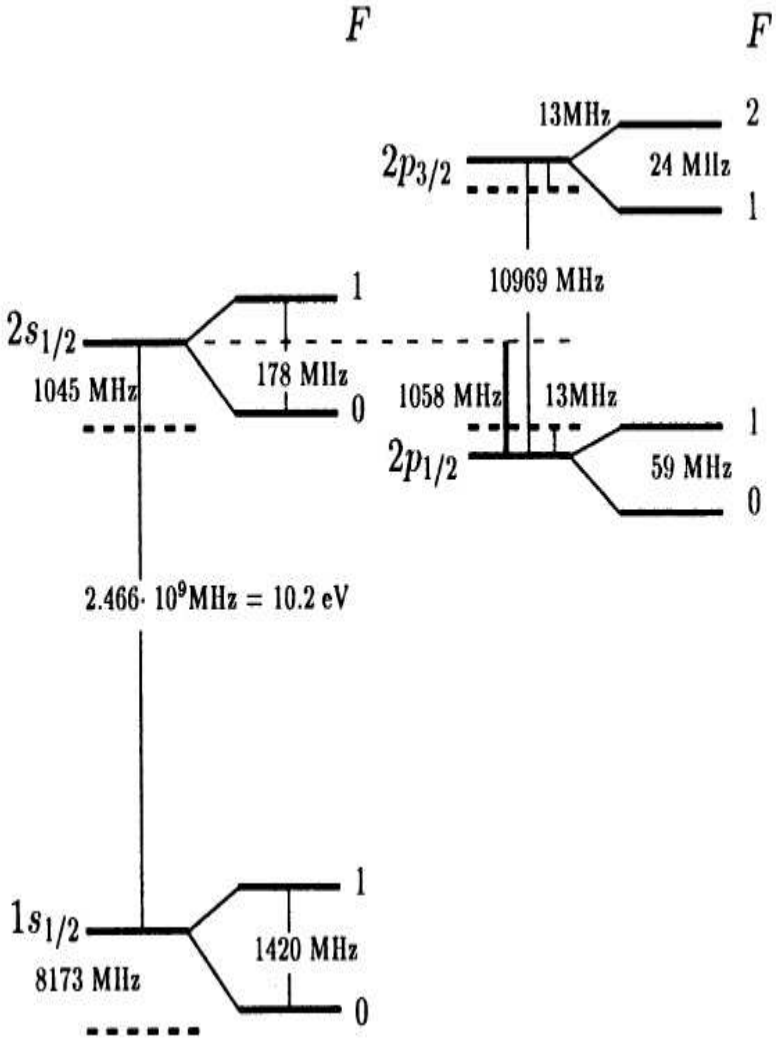


Figure 3.4 – Niveaux d'énergies les plus bas de l'atome d'hydrogène incluant la structure fine, la structure hyperfine et le décalage de Lamb[19] .

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à clarifier l'explication que donne l'électrodynamique quantique (QED) au décalage de Lamb observé entre les niveaux des énergies des états atomiques $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène. Ce décalage ne trouve pas d'interprétation dans le formalisme de Dirac et encore moins dans la théorie de Schrödinger.

On s'est d'abord penché sur la construction du lagrangien de QED en suivant un certains nombres de prescriptions incluant l'invariance de Lorentz, l'invariance de jauge, l'hermiticité et la renormalisabilité. Puis, on a établi les règles de Feynman correspondantes.

Ensuite, on a explicité les calculs des corrections radiatives à l'ordre de la boucle aux propagateurs photonique et fermionique ainsi qu'au vertex électromagnétique. Ce qui nous a permis de mettre en évidence l'apparition des divergences ultraviolettes et infrarouges. Puis, on a expliqué la procédure de la renormalisation des divergences ultraviolettes à travers la méthode des contre-termes, une fois selon le schéma sur la couche de masse, et une autre fois selon le schéma de soustraction minimale modifiée. Les divergences infrarouges sont par ailleurs traitées via la prise en compte de l'émission des photons réels moues de freinage. Ceci, nous a permis de rassembler des résultats utiles pour le calcul du déplacement des niveaux atomique de l'atome d'hydrogène.

Après, on a étudié le déplacement des niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène selon la vision de l'électrodynamique quantique. On s'est ainsi trouvé devant une situation où il fallait adopter deux procédures différentes de calcul. L'une valable pour les hautes fréquences des photons virtuels, où on a pleinement exploité les résultats précédents des corrections radiatives de QED. Et l'autre valable pour le domaine des basses fréquences des photons virtuels, où on a fait recours à l'approximation non-relativiste du rayonnement électromagnétique dipolaire et à la prescription d'unitarité. En clôture des étapes de calcul qu'on a suivi, le résultat numérique final qu'on a pu obtenir pour le décalage de Lamb entre les niveaux des énergies des états atomiques $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène est à 0.6 % en accord avec la valeur du résultat expérimental le plus récent.

Ceci nous permet de conclure qu'à échelle du rayon de Compton de l'électron qui est de l'ordre du picomètre, le monde physique gouverné par l'interaction électromagnétique obéit à l'électrodynamique quantique et non pas à la théorie de Dirac.

Enfin, en quête de précision supplémentaire, ce travail peut être étendu, à travers un effort supplémentaire, à l'ordre de deux boucles ce qui automatiquement implique la nécessite de la gestion du recouvrement des boucles et de la détermination des contre-termes correspondant à cette ordre. De même, on peut aussi prendre en considération l'effet de la finitude du rayon du proton, ainsi qu'une prise en charge plus complète du recul du proton allant au delà de la simple introduction de la masse réduite qu'on a utilisée dans notre calcul.

Pour terminer, il est à noter que l'autre observable qui a été, en plus du décalage de Lamb, décisive pour rehausser QED au rang de la théorie gouvernant l'interaction électromagnétique est le moment magnétique anomal de l'électron qui se calcule aussi via les corrections radiatives QED et qui est hors du cadre de notre mémoire.

Annexe A

Outils mathématiques pour QED

La fonction gamma d'Euler : $\Gamma(z)$

La fonction $\Gamma(z)$ est défini à travers la relation :

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \tag{A.1}$$

où z est un nombre complexe. C'est une fonction dont les seules singularités sont des pôles simples pour les entiers négatifs ($z = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$)

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \xrightarrow{z \to 0} \frac{\Gamma(1)}{z} \to \infty \tag{A.2}$$

et dont les résidus correspondant sont $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

La représentation intégrale de cette fonction est :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt \quad (\text{convergente pour } : Re(z) > 0) \tag{A.3}$$

Il est possible de prolonger analytiquement cette représentation intégrale dans la région $Re(z) < 0$ avec $Im(z) \neq 0$ amputée des pôles au niveau des entiers négatifs.

Pour z un entier positif, la fonction $\Gamma(z)$ se confond avec la fonction factorielle :

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{A.4}$$

Nous utilisons fréquemment les relations :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{A.5}$$

et [1]

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Gamma(\epsilon) A^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(A) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{A.6}$$

où γ est la constante d'Euler,

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right] = 0.577215 \cdots \tag{A.7}$$

1. On utilise ici : $A^\epsilon = e^{\ln(A^\epsilon)} = e^{\epsilon \ln(A)} = 1 + \epsilon \ln(A) + \cdots$

Bibliographie

[1] P.A.M. Dirac. « The Quantum Theory of the Emission and Absoption of Radiation ». *Proc. Roy. Soc. A114 (1927) 243*, (1927).

[2] R.P. Feynman. « Space-time Approch to Quantum Electrodynamics ». *Phys.Rev. 76 (1949) 769*, (1949).

[3] R.P. Feynman. « Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction ». *Phys.Rev. 80 (1950) 440*, (1950).

[4] J. Schwinger. « Quantum Electrodynamics, I - A Covariant formulation ». *Phys.Rev. 74 (1948) 1439*, (1948).

[5] J. Schwinger. « Quantum Electrodynamics, II - Vacuum polarization and self-energy ». *Phys.Rev. 75 (1949) 651*, (1949).

[6] J. Schwinger. « Quantum Electrodynamics, III - The electromagnetic properties of the electron - Radiative corrections to scattering ». *Phys.Rev. 76 (1949) 790*, (1949).

[7] J. Schwinger. « On Gauge Invariance and Vacuum Polarization ». *Phys.Rev. 82 (1951) 664*, (1951).

[8] F.J. Dyson. « The S Matrix in Quantum Electrodynamics ». *Phy.Rev 75 (1949) 486*, (1949).

[9] G.C. Wick. « The Evaluation of the Collision Matrix ». *Phys.Rev. 80 (1950) 268*, (1950).

[10] W. Pauli. « Lectures on Continuous Groups and Reflections in Quantum Mechanics ». *UCRL-8213 (Univ. of California*, (1958).

[11] T Kinoshita (Editor). « Quantum Electrodynamics ». *Advanced Series on Directions in High Energy Physics : Volume 7, World Scientific*, (1990).

[12] K. Aoki, Z.H.R. Kawabe, M. Konuma, and T. Muta. « Electroweak Theory ». *Suppl.Prog.Theo.Phys. 73*, (1982).

[13] T. Muta. « Fondations of Quantum Chromodynamics ». *World Scientific Publising Company*, (1998).

[14] W.E. Lamb and R.C. Retherford. « Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method ». *Phys.Rev. 72 (1947)241*, (1947).

[15] M.I. Eides, H. Grotch, and V.A. Shelyuto. « Theory of Light Hydrogenlike Atoms ». *Phys.Rept.342 (2001)63 [ArXiv : hep-ph/0002158]*, (2001).

[16] W. Greiner. « Relativistic Quantum Mechanics ». *Springer-Verlag*, (2000).

[17] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. « Introduction to Quantum Field Theory ». *Addison-Wesley Publishing Company*, (1995).

[18] J.D. Jackson. « Classical Electrodynamics ». *Jhon Wiley & sons*, (1962).

[19] W. Greiner and J. Reinhardt. « Quantum Electrodynamics ». *Springer-Verlag*, (2003).

[20] S. Benzahia and F. Henniche. « Génération de masses et découverte du Higgs au LHC ». *Mémoire de Master, Université Yahia Fares de Médéa*, (2015).

[21] H. Goldstein, C. Poole, and J.Safko. « Classical Mechanics ». *Addison-Wesley Publising Company*, (2000).

[22] I.I. Bigi and A.I. Sanda. « CP Violation ». *Cambridge University Press*, (2000).

[23] G.C. Branco, L. Lavoura, and J.P. Silva. « CP Violation ». *Clarendon Press, Oxford*, (1999).

[24] W. Heisenberg and W. Pauli. *Z. Phys. 56*, (1929).

[25] W. Greiner and J. Reinhardt. « Field Quantization ». *Springer-Verlag, Berlin*, (1996).

[26] L.H. Ryder. « Quantum Field Theory ». *Cambridge University Press*, (1996).

[27] S.N. Gupta. « Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics ». *Proc. Roy. Soc. 63A, (1950)367*, (1950).

[28] K. Bleuler. « Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen ». *Helv. Phys. Acta 23,(1950) 567*, (1950).

[29] T. Zee. « Quantum Field Theory in a Nutshell ». *Princeton University Press*, (2010).

[30] C. Blair. « Quantum Field Theory - Useful Formulae and Feynman Rules ». *(http ://www.maths.tcd.ie/ cblair/notes/list.pdf)*, (2010).

[31] P. Aurenche and J.P. Guillet. « Notes de cours sur les Corrections Radiatives en QED et QCD ». *LAPTH-Annecy-le-Vieux, France*, (2013).

[32] F. Boudjema. « Renormalisation of Electroweak Theory ». *LAPTH-Annecy-le-Vieux, France*, (2004).

[33] L. Landau, E. Lifchitz, and L. Pitayevski. « Théorie Quantique Relativste ». *Editions Mir, Moscow*, (1973).

[34] A. E. Kramida. « A critical compilation of experimental data on spectral lines and energy levels of hydrogen, deuterium, and tritium ». *At. Data Nucl. Data Tables 96, 586 (2010)*, (2010).

[35] D. Griffiths. « Introduction to Elementary Particles ». *John Wiley & Sons*, (1987).

[36] N. Zettili. « Quantum Mechanics Concepts and Applications ». *John Wiley & Sons*, (2001).

[37] E. Chpolski. « Physique Atomique ». *Edition Mir, Moscow*, (1978).

[38] N. Guang-jiong. « Reduced Dirac Equation And Lamb Shift As An Off-mass-shell Effect In Quantum Electrodynamics ». *arXiv :quant-ph/0511197*, (2010).

[39] E.E. Salpeter and H.A. Bethe. « A Relativistic Equation for Bound-State Problems ». *Phys.Rev. 84, 1232 (1951)*, (1951).

[40] S. Weinberg. « The Quantum Theory of Fields » Volume I - Fondations ». *Cambridge University Press*, (1995).

[41] H.A. Bethe. « The Electromagnetic Shift of Energy Levels ». *Phys. Rev. 72, 339*, (1947).

[42] N.M. Kroll and W.E. Lamb. « On the Self-Energy of a Bound Electron ». *Phys. Rev. 75, 388*, (1949).

[43] J.B. French and V.F. Weisskopf. « The Electromagnetic Shift of Energy Levels ». *Phys. Rev. 75, 1240*, (1951).

[44] F. Nendzig. « The Quantum Theory of the Hydrogen Atom ». *http ://www.fnendzig.de /physics/HydrogenAtom_Nendzig.pdf*, (2014).

[45] C. Patrignani et al. (Particle Data Group). « The Review of Particle Physics ». *Chin. Phys. C, 40, 100001*, (2016).