Liste des Figures

1.1.1 Un graphe simple. 4
1.2.1 Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G 5
1.2.2 Une chaîne P_5 et un cycle C_5. 6
1.2.3 Un graphe et son complémentaire. 7
1.2.4 Le graphe biparti complet $K_{2,4}$. 8
1.2.5 Un graphe biparti. 8
1.2.6 Une étoile, une étoile subdivisée et une double étoile. 8
1.2.7 Un arbre 9
1.4.1 Un graphe tel que $\gamma(G) = 2$. 11
1.4.2 Un graphe tel que $\iota(G) = 2$. 12
1.4.3 Un graphe tel que $\gamma_t(G) = 4$. 12
1.4.4 Un graphe tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 2$. 13
1.4.5 Un graphe tel que $\gamma_c(G) = 6$. 13
1.5.1 Graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 4$. 15

2.1.1 La suppression d'un sommet. 20
2.1.2 La suppression d'une arête. 21
2.1.3 L'ajout d'une arête. 21
2.1.4 Contraction d'arêtes 22

3.3.1 La construction de la famille H 36

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle

Par

Amrane Nassima & **Zouaoui Khoula**

Thème

Etude des graphes critiques et stables par rapport à la domination couplée

Composition du Jury:

M.	N. IKHLEF ESCHOUF	Maître de conférences	UYF Médéa	Président
M.	A. BOUCHOU	Maître de conférences	UYF Médéa	Examinateur
M.	S. KHELIFI	Maître de conférences	UYF Médéa	Promoteur

Date de soutenance: 14 /06/2017

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier les graphes critiques et stables par rapport à la domination couplée. Un sous-ensemble S de V est dit dominant couplé (EDC) du graphe simple $G = (V, E)$ s'il est dominant et le sous-graphe induit par S contient un couplage parfait. Le nombre de domination couplée de G, noté $\gamma_{pr}(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant couplé de G.

Une présentation des résultats antérieurs obtenus dans ce domaine est effectuée en premier. Nous avons aussi entamé l'étude de la criticité et de la stabilité par rapport à une modification appelée identification de deux sommets. Nous sommes parvenus à établir quelques résultats et à montrer des propriétés de ces deux familles de graphes.

Abstract

The purpose of this thesis is to study critical and stable graphs with respect to paired domination. A subset S of V is said a paired dominating set (PDS) of a simple graph $G = (V, E)$ if it is a dominating set and the subgraph induced by S contains a perfect matching. The paired domination number of G, denoted by $\gamma_{pr}(G)$, is the minimum size of a paired dominating set set of G.

A presentation of the previous results obtained in this area is carried out first. We have also begun the study of criticality and stability with respect to a modification called identification of two vertices. We have succeeded in establishing some results and showing properties of these two families of graphs.

Remerciements

Le présent travail est pour nous une occasion d'exprimer encore une fois notre reconnaissance et notre gratitude envers **ALLAH** le tout puissant.

La réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'aide et la participation de plusieurs personnes avec lesquelles nous avons étroitement travaillé et qui nous ont fait part de leurs connaissances et leur savoir faire. Avant tout nous remercions:

- On remercie **ALLAH** le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.
- Nous voudrons sincèrement exprimer nos plus vifs remerciements à M. KHELIFI SOUFIANE notre promoteur de nous avoir introduit dans ce sujet, d'avoir accepté de nous encadrer, aussi que pour sa patience, ses conseils et son aide précieuse qui ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. On lui exprime toute notre reconnaissance.
- Mes remerciements vont à nos chers parents, pour leur soutien et leur confiance en nous, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à notre formation.
- Nos gratitudes à tous les membres de jury qui nous font l'honneur de juger notre travail.
- A tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatique sans exception pour leurs efforts fournis durant ces cinq agréables années.
- A l'ensemble des étudiants de notre promotion 2016 /2017.

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes soeurs*

A *mes amies*

A *ma chère binôme* ***Khoula*** *et sa famille*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

NASSIMA

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes frères et A mes soeurs*

A *mes amies*

A *ma chère binome* ***Nassima*** *et sa famille*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

KHOULA

Table des matières

Introduction **1**

1 Généralités **3**

1.1 Définitions et notations relatives à la théorie des graphes 3

1.1.1 Graphe 3

1.1.2 Voisinages et degrés 4

1.2 Quelques graphes particuliers 5

1.2.1 Sous-graphe et graphe partiel 5

1.2.2 Chaîne et cycle 6

1.2.3 Graphe connexe 7

1.2.4 Graphe complémentaire 7

1.2.5 Graphe biparti et biparti complet 7

1.2.6 Étoile, étoile subdivisée et double étoile 8

1.3 Minimalité et maximalité d'un ensemble 9

1.3.1 Quelques invariants d'un graphe 9

1.4 La domination dans les graphes 10

1.4.1 Quelques paramètres de domination 12

1.4.2 Applications de la domination 13

1.4.3 Problèmes étudies en domination 14

1.5 Aperçu sur la domination couplée 15

1.5.1 Minimalité d'un ensemble dominant couplé 16

1.5.2 Complexité algorithmique 16

1.5.3 Valeurs exactes et quelques bornes sur le nombre de domination couplée 17
1.5.4 Applications de la domination couplée 17

2 Résultats antérieurs sur les graphes critiques et stables par rapport à la domination couplée 19
2.1 Notions de criticité et de stabilité 19
2.2 Graphes γ_{pr}-arête-critiques 23
2.3 Graphes γ_{pr}-sommet-critiques 25

3 Graphes point-critiques et graphes point-stables 27
3.1 Identification de deux sommets adjacents 27
3.2 Graphes γ_{pr}-point-stables 29
3.3 Graphes γ_{pr}-point-critiques 31
3.3.1 Premiers résultats et propriétés 32
3.3.2 Arbres γ_{pr}-point-critiques 33

Conclusion 39

Bibliographie 40

Introduction

Chacun d'entre nous, a au moins une fois, vu ou utilisé un plan de métro, une carte de lignes ferroviaires, un plan électrique, un arbre généalogique ou un organigramme d'entreprise, ainsi, tout le monde sait plus ou moins intuitivement ce qu'est un graphe. Toutefois, entre cette notion vague où des points, représentant des individus, des objets, des lieux ou des situations, sont reliés par des flèches, il y a une longue élaboration des concepts.

Les auteurs s'accordent à considérer que la théorie des graphes est née 1736 avec les travaux d'Euler $(1707 - 1783)$ et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes comme celui des ponts de la ville russe de **konigsberg** dont les habitants se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir au point de départ.

La théorie des graphes est une branche très vaste de la recherche opérationnelle. Elle constitue un moyen puissant pour étudier les différentes propriétés de certaines situations ou relations, qui peuvent exister entre des objets ou des éléments dans la vie quotidienne.

Parmi les domaines de la théorie des graphes, on s'intéresse à la domination dans les graphes qui est considérée actuellement comme l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes, elle trouve son origine dans les problèmes de jeux d'échecs. Elle devient un domaine théorique à partir de 1958 grâce à Claude Berge et ne connaîtra sa véritable expansion qu'à partir de 1977 grâce aux travaux de Cockayne et Hedeniemi.

Un sous-ensemble S de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est un dominant si tout sommet de G est soit dans S soit adjacent à un sommet de S. Actuellement, il existe plus de 120 types de domination introduits dans la littérature.

Parmi les types de domination qui existent, nous nous intéressons dans ce mémoire à la domination couplée. Un sous-ensemble S de sommets de G est un dominant couplé s'il est dominant et le sous-graphe induit par S contient un couplage parfait. Le nombre de domination couplée de G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé.

Notre objectif dans ce travail est d'étudier les graphes critiques et stables par rapport à la domination couplée dans un graphe modifié par l'identification de deux sommets adjacents (ou la contraction d'une arête). Pour ce faire, nous avons divisé notre mémoire en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, consacré aux généralités, nous donnons les définitions essentielles de la théorie des graphes qui sont utilisées dans ce mémoire. Ensuite, nous faisons une présentation de la domination dans les graphes et ses paramètres. En effet, nous mettons en évidence l'un des aspects les plus importants de la domination dans les graphes et le grand nombre d'applications qu'elle possède. En dernier, nous donnons un aperçu sur la domination couplée et ses applications.

Nous commençons le second chapitre par une introduction sur les notions de criticité et stabilité. Nous donnons les différentes définitions liées à ces notions pour un paramètre de domination quelconque. Nous présentons ensuite les résultats les plus importants concernant les graphes critiques suite à l'ajout d'une arête et la suppression de sommets par rapport à la domination couplée.

Dans le troisième chapitre, nous présentons ce que nous avons pu concrétiser comme contributions dans le domaine des graphes critiques et stables par rapport à la domination couplée suite à la contraction des arêtes. Nous entamons, en premier lieu, l'étude des graphes stables pour lesquels nous montrons plusieurs propriétés. Nous abordons ensuite les graphes critiques par rapport à cette modification. Nous avons réussi à montrer quelques propriétés et commencé la caractérisation des arbres critiques par le biais d'une construction de cette famille.

En dernier, notre mémoire est clôturé par une conclusion générale.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre nous présentons les définitions de base nécessaires à notre travail. Nous y faisons un bref passage sur les notions usuelles de la théorie des graphes. Nous introduisons ensuite quelques concepts généraux de la domination dans les graphes, avant de présenter brièvement la domination couplée qui est l'objet principal de cette étude. Pour plus de détails, consulter les ouvrages de Berge ([2],[3]) et Chartrand et Lesniak ([5]).

1.1 Définitions et notations relatives à la théorie des graphes

1.1.1 Graphe

Un graphe G est un couple (V, E) , où V est l'ensemble des **sommets**, et E est un ensemble de paires d'éléments de V applées **arêtes.** Pour un graphe G, on notera $V(G)$ l'ensemble des sommets et $E(G)$ l'ensemble des arêtes.

Un graphe est dit **trivial** s'il ne possède qu'un seul sommet et aucune arête.

Si $e = uv$ est un arête d'un graphe, on dit que u et v sont **les extrémités** de e, que u et v sont **adjacents** et que e est **incidente** à u et v. Deux arêtes sont dites adjacentes si elles possèdent une extrémité commune.

Un graphe G est dit **simple** si tout couple de ses sommets est relié par au plus une arête et que toute arête de $E(G)$ a ses extrémités distinctes.

L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Un graphe est dit **fini** ou **infini** suivant son ordre. Les graphe considérés dans ce mémoire sont simples et finis.

La Figure 1.1.1 montre un graphe simple G avec $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4\}$.

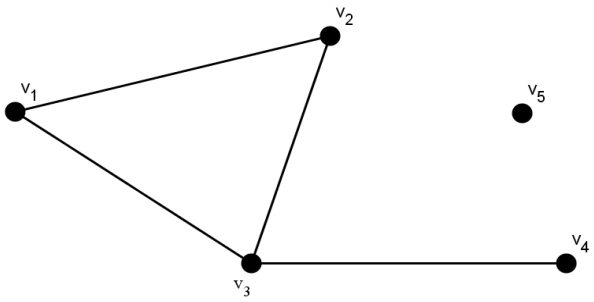


Figure 1.1.1 : Un graphe simple.

1.1.2 Voisinages et degrés

Le voisinage ouvert d'un sommet u d'un graphe $G = (V, E)$ est l'ensemble de tous les sommets adjacents à u. Cet ensemble est noté $N_G(u)$. **Le voisinage fermé** de u est l'ensemble $N_G[u] = N_G(u) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subset V$, le voisinage ouvert de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$, et le voisinage fermé est $N_G[S] = N_G(S) \cup S$.

Le voisinage privé d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Il est noté $pn[v, S]$ et donné par $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

Le degré d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul est dit sommet **isolé** et un sommet de un est dit **sommet pendant**. On note par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de G. Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé **sommet support**. L'ensemble des sommets supports de G est noté par $S(G)$. Un sommet support est dit fort s'il est adjacent à au moins deux sommets pendants,

et il est dit faible sinon. On designe par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ le **degré minimum** et **maximum** dans G, respectivement.

Dans la figure 1.1.1 , $d_G(v_5) = 0$, donc v_5 est un sommet isolé. Il est clair aussi que $\delta(G) = 0$, $\Delta(G) = 3$. Les voisinages ouvert et fermé de v_3 : $N_G(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$, $N_G[v_3] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. v_4 est un sommet pendant puisque $d_G(v_4) = 1$ et v_3 est un sommet support.

1.2 Quelques graphes particuliers

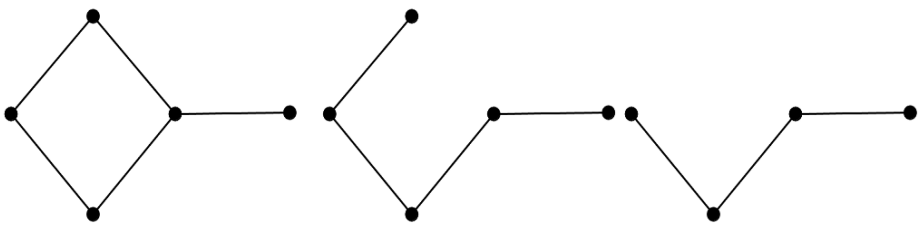
1.2.1 Sous-graphe et graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle **sous-graphe** de G, un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le **sous-graphe induit** par A, noté $G[A]$ ou simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A.

Etant donné un graphe G', on dit que G est **sans** G' si G' n'est pas un des sous-graphes induits de G.

Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G)$: $E(H) \subset E(G)$.

Voir la Figure 1.2.1 .



(a) – un graphe G. *(b) – un graphe partiel de G.* *(c) – un sous – graphe de G.*

Figure 1.2.1 : Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G

1.2.2 Chaîne et cycle

Une chaîne C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $[v_1, v_2, ..., v_k]$, telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la longueur de C et les sommets v_1 et v_k sont appelés extrémités de la chaîne C. Une chaîne que n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite **élémentaire**.

Une chaîne minimale induite par n sommets est notée par P_n.

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle **élémentaire** C_n induit par n sommet est un cycle dont les sommets sont distincts.

La Figure 1.2.2 représente une chaîne P_5 et un cycle C_5.

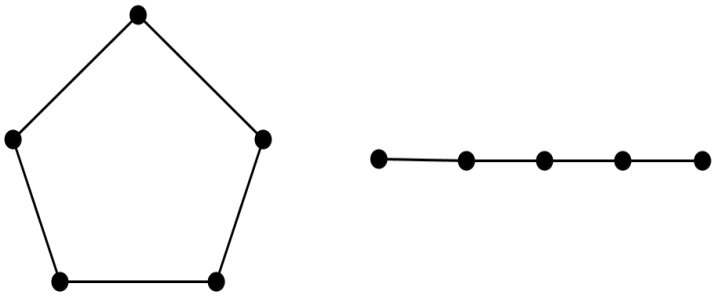


Figure 1.2.2 : Une chaîne P_5 et un cycle C_5.

Ayant défini les chaînes et les cycles, nous pouvons à présent donner d'autres définitions importantes.

On appelle **maille** d'un graphe G, notée par $g(G)$, la longueur du plus petit cycle dans G.

Soient u et v deux sommets d'un graphe G. On appelle distance entre u et v, notée $d(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne reliant u et v. **Le diamètre** de G, noté $diam(G)$, est égal à $max\{exc(v) : v \in V\}$. **L'excentricité** d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $exc(v) = max\{d(v, u) : u \in V\}$.

1.2.3 Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **connexe**, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets $u, v \in V$. Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe maximal connexe. Une arête e est appelée un **isthme** si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G.

1.2.4 Graphe complémentaire

Etant donné un graphe G d'ordre n, **le graphe complémentaire** de G, noté $\overline{G}$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est celui de G, et dont l'ensemble des arêtes est formé de toutes les arêtes de K_n qui n'appartiennent pas à G, voir la Figure 1.2.3 .

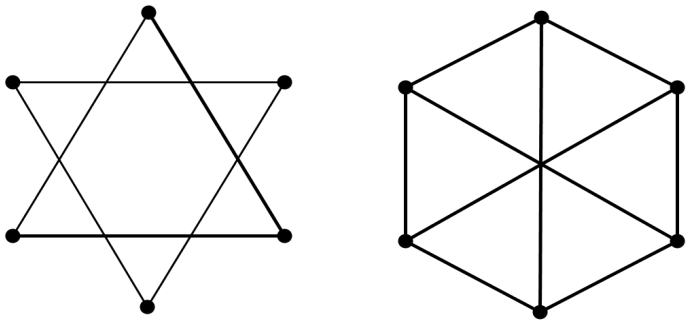


Figure 1.2.3 : Un graphe et son complémentaire.

1.2.5 Graphe biparti et biparti complet

Un graphe G est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes V_1 et V_2 de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. Un graphe est biparti si seulment s'il ne contient pas de cycles impair.

un graphe **biparti complet** est un graphe biparti tel que pour toute paire de sommets $v \in V_1$ et $u \in V_2$, $vu \in E$. Si $|V_1| = r$ et $|V_2| = s$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{r,s}$.

Des exemples de graphes biparti sont présentes dans les figures 1.2.4 et 1.2.5 .

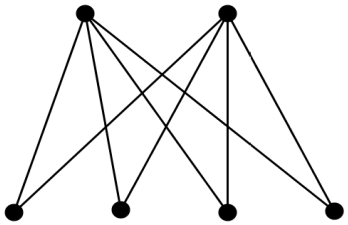


Figure 1.2.4 : Le graphe biparti complet $K_{2,4}$.

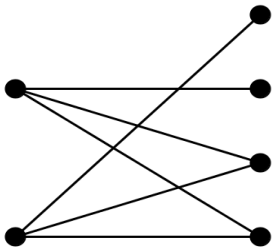


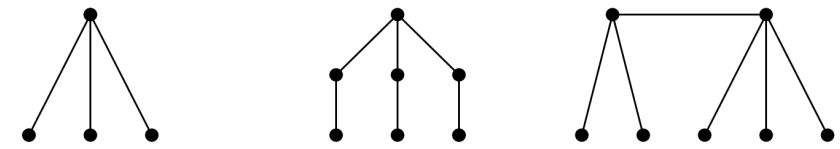
Figure 1.2.5 : Un graphe biparti.

1.2.6 Étoile, étoile subdivisée et double étoile

Une étoile est un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$. Elle est notée par $K_{1,s}$. Le sommet de V_1 est appelé **centre** ou **sommet central** de l'étoile.

Une étoile subdivisée $K^*_{1,s}$ est un graphe obtenu à partir d'une étoile $K_{1,s}$ en subdivisant chaque arête par exactement un sommet.

Une double étoile, notée $S_{r,s}$, est le graphe obtenu par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres. Des exemples de ces graphes sont donnés dans la Figure 1.2.6 .



(a) *Une étoile* $K_{1,3}$ (b) *Une étoile subdivisée* $K^*_{1,3}$ (c) *Une double étoile* $S_{2,3}$

Figure 1.2.6 : Une étoile, une étoile subdivisée et une double étoile.

Un arbre est un graphe connexe sans cycles, il contient exactement $(n-1)$ arête, (Voir la Figure 1.2.7). Un graphe sans cycles mais non-connexe est appelé forêt.

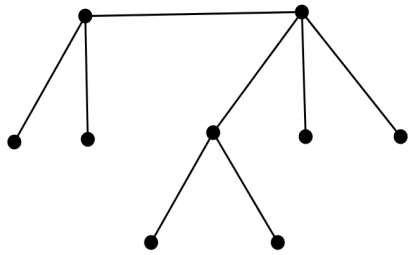


Figure 1.2.7 : Un arbre

1.3 Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soient $G = (V, E)$ un graphe et P une propriété. Un sous-ensemble A de V est dit **minimal** par rapport à la propriété P si aucun sous-ensemble propre de A ne vérifie cette propriété. Aussi, A est dit **maximal** par rapport à la propriété P, si aucun sous-ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie la propriété P.

Nous disons qu'un sous-ensemble B de V est **minimum** ou de **taille minimale** par rapport à la propriété P si aucun ensemble plus petit que B (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie cette propriété. Aussi, nous disons que B est **maximum** ou de **taille maximale** par rapport à la propriété P, si aucun ensemble plus grand que B (pas nécessairement le contenir) ne vérifie cette propriété.

1.3.1 Quelques invariants d'un graphe

Les graphes G et H sont dits **isomorphes** s'il existe une application bijective $f : V(G) \rightarrow V(H)$ telle que pour toute paire de sommets x, y de G, l'arête $xy \in E(G)$ si et seulement si l'arête $f(x)f(y) \in E(H)$.

Si deux graphes sont isomorphes, alors ils partagent de nombreuses propriétés qui sont appelées invariants comme le nombre de ses sommets et le nombre de ses arêtes. Dans

ce mémoire, nous utiliserons plusieurs invariants d'un graphe. En voici les définitions de quelques uns.

Un stable dans un graphe $G = (V, E)$, appelé aussi, **ensemble indépendant,** est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal minimum (respectivement, maximum) d'un stable maximal de G, noté $i(G)$ (respectivement, $\alpha(G)$), est appelé **le nombre de domination stable** (respectivement, **le nombre de domination stabilité**) de G.

Un couplage dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. On note par $\beta(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G. Le couplage M est dit **parfait** si tout sommet de V est incident à une arête de M. Dans un couplage M, deux sommets incidents à une arête du couplage seront dits **couplés**.

1.4 La domination dans les graphes

On commence par donner la définition d'un ensemble dominant dans un graphe.

Définition 1.4.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et D un sous-ensemble de V. D est dit dominant de G si tout sommet de $(V - D)$ est adjacent à au moins un sommet de D. Le nombre de domination de G, noté par $\gamma(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G. Et tout ensemble dominant de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G) - ensemble$.*

Remarque 1.4.1 *Un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.*

Il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V$, $\mid N[v] \cap D \mid \geq 1$;
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V - D$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$;
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

Dans le graphe G de la Figure 1.4.1 , les ensembles $D_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$, $D_2 = \{v_4, v_7\}$ et $D_3 = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ sont des ensembles dominants de G. Le nombre de domination de G est égal à 2 ($\gamma(G) = 2$), puisqui'il n'existe aucun ensemble dominant de G de cardinal 1. On déduit aussi que $D_2 = \{v_4, v_7\}$ est un $\gamma(G)$-ensemble.

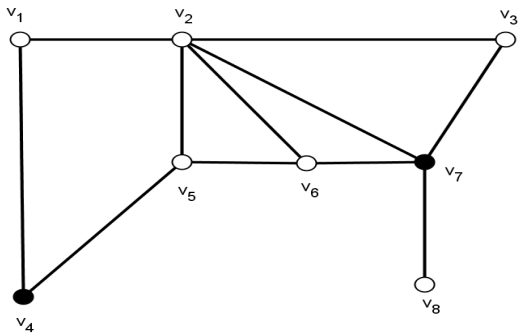


Figure 1.4.1 : Un graphe tel que $\gamma(G) = 2$.

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe était de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{eme} siecle en Inde. En 1862, De Jaenisch [9] posa le problème de déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5, le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum de reines à placer dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent.

La domination est devenue un domaine théorique en 1958 gràce à Claude Berge [2] qui a donné une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coeffcient de stabilité externe. L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [18] qui utilisa la notation $\delta(G)$ pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A l'exception de quelques resultats, la domination n'a connue sa veritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi ([8]) en 1977.

L'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination. On peut citer par exemple la domination

double, la domination couplée, la domination stable, la domination totale, la domination connexe...

1.4.1 Quelques paramètres de domination

Dans cette partie, nous donnons un aperçu sur certains paramètres de domination où des conditions supplémentaires sont imposées sur l'ensemble dominant, sur l'ensemble dominé ou même sur la façon de dominer.

La domination stable

Un ensemble dominant stable de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par D est stable. Le nombre de domination stable de G, noté $i(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant stable. (Voir Figure 1.4.2)

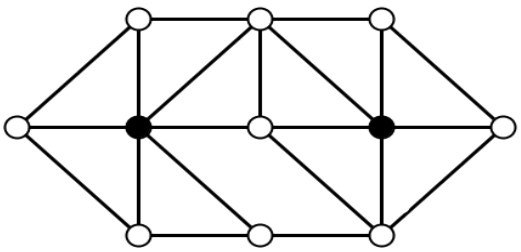


Figure 1.4.2 : Un graphe tel que $\iota(G) = 2$.

La domination totale Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés et $D \subseteq V$. D est un dominant total de G si tout sommet de V est adjacent à un sommet de D (c'est-à-dire $V = N(D)$). On note par $\gamma_t(G)$ le cardinal minimum d'un dominant total de G.

Dans la chaîne P_7 de la Figure 1.4.3, l'ensemble des sommets en noir est un EDT de G.

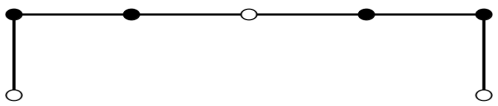


Figure 1.4.3 : Un graphe tel que $\gamma_t(G) = 4$.

La domination double D est un dominant double de G si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins deux sommets de D, et tout sommet de D doit avoir au moins un voisin dans D. Le nombre de domination double d'un graphe G est le cardinal minimum d'un dominant double. Il est noté $\gamma_{\times 2}(G)$. (Voir Figure 1.4.4)

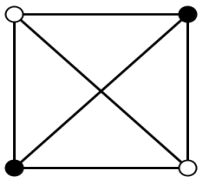


Figure 1.4.4 : Un graphe tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 2$.

La domination connexe Un sous-ensemble S de V est dit dominant connexe de G si S est un dominant et le sous-graphe induit par S est connexe. Le nombre de domination connexe, noté par $\gamma_c(G)$, est la taille minimale d'un ensemble dominant connexe de G. (Voir Figure 1.4.5)

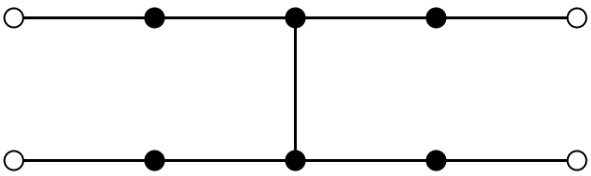


Figure 1.4.5 : Un graphe tel que $\gamma_c(G) = 6$.

De la même manière, des dizaines de types de domination et donc de paramètres de domination ont été définis faisant de la domination l'un des domaines les plus intéressants de la théorie des graphes aussi bien sur le plan théorique que pratique.

1.4.2 Applications de la domination

Un des aspects les plus importants de la domination dans les graphes est le grand nombre d'applications qu'elle possède. En effet, beaucoup de situations réelles peuvent être modélisées par les problèmes étudiés en domination. A titre d'exemple, nous citons deux applications :

Localisation des stations de radars

Ayant un certain nombre d'endroits stratégiques à maintenir en surveillance, le problème consiste à trouver un ensemble de sites dans lesquels des radars doivent être posés dans le but que tous les sites soient surveillés. Il serait plus rentable biensûr de déposer le moins possible de radars. Ce problème a été discuté par Berge dans [2].

Problème de communication dans un réseau

Nous avons un réseau de villes avec des lignes de transmission. Il s'agit de trouver comment installer des stations de transmission dans certaines villes de telle sorte que n'importe quelle ville puisse recevoir un message depuis au moins une station de transmission. Ce problème a été présenté de maniére détaillée par Liu dans [17].

1.4.3 Problèmes étudies en domination

La domination dans les graphes est considérée comme terrain fertile de recherche avec la grande variété d'axes de recherche qu'elle offre. Nous nous contentons ici de citer quelques uns d'entre :

- L'établissemment de bornes pour les paramètres de domination.
- L'élaboration de séquences de paramètre.
- L'étude algorithmique de la domination.
- La détarmination de relation du type Nordhauss-Gaddum.
- L'étude des graphes excellents.
- L'étude des graphes critiques et stables.

Notre étude prend comme objet les graphes critiques et stables, et ce par rapport à un type de domination très étudié qui est la domination couplée.

1.5 Aperçu sur la domination couplée

La domination couplée a été introduite par Haynes et Slater [12]. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble S de V est dit dominant couplé (EDC) de G s'il est dominant et le sous-graphe induit par S contient un couplage parfait M. Si deux sommets $x, y \in S$ et l'arête $xy \in M$, alors on dit que x et y sont couplés dans S. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant couplé de G. Et tout ensemble dominant de cardinal $\gamma_{pr}(G)$ est appelé $\gamma_{pr}(G)$-ensemble.

D'après la définition d'un ensemble dominant couplé, les remarques suivantes sont évidentes :

Remarque 1.5.1 *La domination couplée n'est définie que pour les graphes sans sommets isolés.*

Remarque 1.5.2 *Le nombre de dominaion couplée est toujours pair.*

Dans la Figure 1.5.1 , l'ensemble $S = \{c, d, h, i\}$ est un ensemble dominant couplé avec le couplage parfait $M = \{cd, hi\}$. Ne pouvant pas trouver un EDC de cardinal deux, nous déduisons que $\gamma_{pr}(G) = 4$ et que S est un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble.

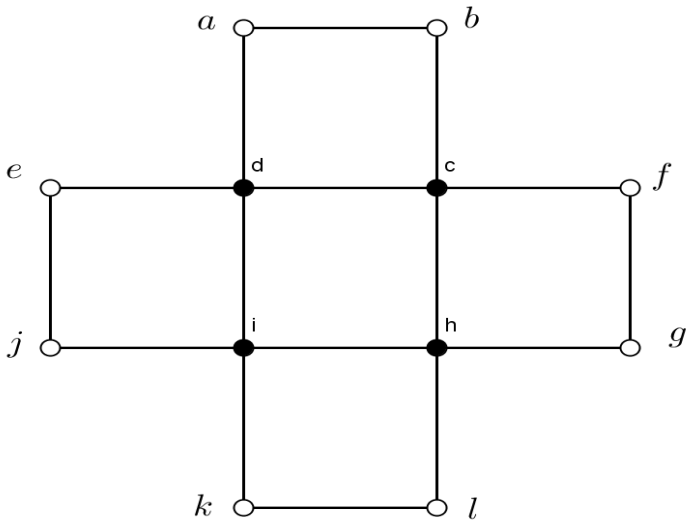


Figure 1.5.1 : Graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 4$.

1.5.1 Minimalité d'un ensemble dominant couplé

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble dominant couplé soit minimal dans un graphe G a été donnée par Chellali et al. [6]. Nous donnons ci-après le théorème qui se trouve dans [6].

Théorème 1.5.1 (Chellali et al. [6]) *Soient G un graphe sans sommets isolés et S un dominant couplé de G. Alors S est minimal si et seulement si toute paire de sommets x, y de S satisfait l'une des conditions suivantes:*

- $\langle S - \{x, y\}\rangle$ ne contient pas de couplage parfait,
- ou bien x est un sommet pendant dans $\langle S\rangle$ adjacent à y ou bien y est un sommet pendant dans $\langle S\rangle$ adjacent à x,
- il existe un sommet $u \in V - S$ tel que $N(u) \cap S \subseteq \{x, y\}$.

1.5.2 Complexité algorithmique

La question de la complexité de base concernant le problème de décision pour le nombre de domination couplée prend la forme suivante:

ENSEMBLE DOMINANT COUPLE
Instance: un graphe G et un nombre entier (pair) positif k
Question: Est-ce que G a un EDC de cardinalité au plus k ?

Haynes et Slater [12] ont été les premiers à montrer que le problème de la domination couplée est NP-complet pour les graphes en général.

Chen, Lu et Zeng [7] ont prouvé que ce problème reste NP-complet pour les graphes biparti, les graphes triangulés et les split graphes.

Théorème 1.5.2 *([7]) Le problème de la domination couplée est NP-complet pour les graphes biparti, les graphes triangulés et les graphes scindés.*

1.5.3 Valeurs exactes et quelques bornes sur le nombre de domination couplée

Pour les chaînes et les cycles le nombre de domination couplée a été déterminé d'une manière exacte, il est donné dans les remaques suivantes:

Remarque 1.5.3 *Pour une chaîne P_n, $\gamma_{pr}(P_n) = 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. Et de plus on a :*

- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n}{2}$ si $n \equiv 0(mod\ 4)$;
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+3}{2}$ si $n \equiv 1(mod\ 4)$;
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+2}{2}$ si $n \equiv 2(mod\ 4)$;
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+1}{2}$ si $n \equiv 3(mod\ 4)$;

Remarque 1.5.4 *Pour un cycle C_n, $\gamma_{pr}(C_n) = 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.*

Le théorème suivant regroupe quelques bornes établies sur la domination couplée :

Théorème 1.5.3 *[12] Soit G un graphe sans sommets isolés d'ordre n, alors:*

1. $2 \leq \gamma_{pr}(G) \leq n$;
2. $\gamma_{pr}(G) \geq \frac{n}{\Delta}$;
3. Si $n \geq 6$ et $\delta \geq 2$, alors $\gamma_{pr}(G) \leq \frac{2n}{3}$;
4. Si $\bar{G}$ est sans sommets isolés, alors
   - $\gamma_{pr}(G) + \gamma_{pr}(\overline{G}) \leq n + 3$ si n est impair et
   - $\gamma_{pr}(G) + \gamma_{pr}(\overline{G}) \leq n + 2$ si n est pair.

1.5.4 Applications de la domination couplée

Dans [12], Haynes et Slater ont introduit le concept de la domination couplée dans les graphes en tant que modèle d'attribution d'aide ou de soutien aux gardes pour des raisons de sécurité. En effet, supposons que vous avez un musée dans lequel les gardes doivent être placés dans

les lieux de l'établissement. Dans le graphe représentatif de cette situation, chacun de ces emplacements est représenté par un sommet. Si deux endroits peuvent être visibles l'un de l'autre, une arête est tracée entre les sommets représentant ces deux emplacements. Soit G le graphe ainsi construit S un ensemble de sommets qui représente l'emplacement des gardes. Idéalement, on voudrait utiliser le nombre minimal de gardes possibles de telle sorte que chaque emplacement du musée peut être observé visuellement par un gardien. Dans ce cas, l'ensemble S est un ensemble dominant dans le graphe G.

Supposons, cependant, qu'un garde observe un visiteur qui commet un vandalisme ou un vol. Il peut avoir besoin d'un autre garde en tant que témoin ou pour aider à appréhender un suspect. Ceci veut dire que chaque garde doit être en contact visuel avec un autre garde afin d'avoir rapidement de l'aide. Ceci est réalisé si l'ensemble des sommets représentant les emplacements des gardes est un ensemble dominant total dans le graphe associé. Par conséquent, chaque période de travail doit avoir au moins $\gamma_t(G)$ garde en service. Maintenant, en tant que responsable des ressources humaines, vous êtes conscient du fait que dans les professions liées à l'application de la loi, les gens travaillent le mieux quand ils travaillent avec un partenaire. Donc, vous aimeriez que chaque garde soit en vue de leur partenaire à tout moment. Cela nécessite l'affectation de chaque équipe de gardes par deux personnes. Dans le graphe G, $G[S]$ contiendrait un couplage parfait. En conclusion, afin de garantir que chaque emplacement dans l'établissement est en vue d'un garde, que chaque garde est en vue de son partenaire et que le nombre minimum de gardes possible est utilisé, vous devez avoir $\gamma_{pr}(G)$ gardes qui doivent être placés sur les sommets qui forment un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble.

L'exemple qu'on vient de citer figure dans l'article de Haynes et al. [12], mais la domination couplée peut représenter divers problèmes réels dans lesquels les sommets du graphe représentant la situation doivent être couplés.

Chapitre 2

Résultats antérieurs sur les graphes critiques et stables par rapport à la domination couplée

Dans ce chapitre, nous faisons un état de l'art du domaine des graphes critiques et des graphes stables par rapport à la domination couplée. Nous commençons tout d'abord par présenter les différentes opérations sur les graphes étudiées en domination et les notions de criticité et stabilité suivant l'opération exercée.

2.1 Notions de criticité et de stabilité

Quand un paramètre de domination est étudié, il est évident qu'on soit intéressés par les graphes qui soient critiques ou stables suite à des modifications du graphe en question. Permettant de mieux connaitre les paramètres de domination, l'étude des graphes critiques et stables est aussi d'une grande importance du point de vue pratique [13]. En effet, il est important pour la conception d'un réseau, de prendre en compte sa tolérance aux pannes, en d'autres termes, sa capacité à fournir un service, même s'il contient un ou plusieurs composants défectueux. Le comportement d'un réseau en présence d'un défaut peut être analysé en déterminant l'effet que la suppression d'une arête (défaillance d'une liaison) ou d'un sommet (défaillance d'un processeur) de son graphe représentatif G a sur le critère de

tolérance aux pannes. Par exemple, un $\gamma(G)$-ensemble représente un ensemble de processeurs de taille minimale pouvant communiquer directement avec tous les autres processeurs dans le systhème. S'il est nécessaire à l'ensemble des serveurs d'avoir cette propriété et que le nombre de processeurs désignés pour jouer le rôle de serveurs de fichiers soit limité, alors le nombre de domination $\gamma(G)$ est le critère de tolérance aux pannes dans ce cas. Dans cet exemple, il est important que $\gamma(G)$ ne doit pas augmenter quand le graphe est modifié en supprimant un sommet ou une arête.

D'autre part, cette tolérance peut être assurée en ajoutant des arêtes. Par conséquent, dans ce cas, nous devons examiner les effets sur $\gamma(G)$ lorsque G est modifié suite à la suppression d'un sommet, l'ajout ou la suppression d'une arête. Il existe d'autres types modifications peuvent être appliquées sur un graphe comme la subdivision d'une arête ou l'identification de deux sommets qui est l'objet de notre mémoire.

Commençons par définir les trois opérations les plus étudiées en domination dans un graphe $G = (V, E)$.

Définition 2.1.1 *Soit v un sommet de G. La suppression de v produit le graphe noté $G-v$, obtenu suite à l'effacement de v et de toutes les arêtes de G incidentes à v. Voir la figure* 2.1.1.

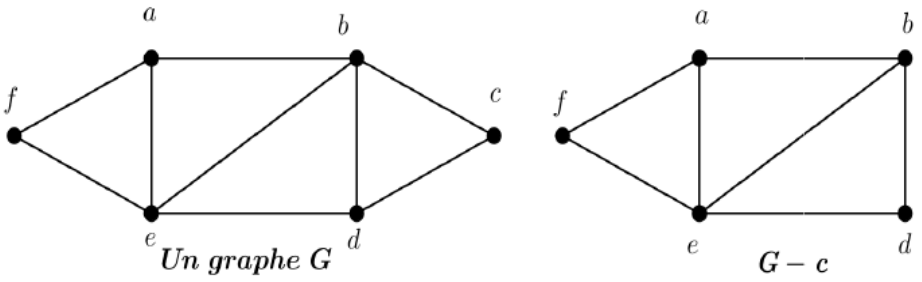


Figure 2.1.1 : La suppression d'un sommet.

Définition 2.1.2 *Soit e une arête quelconque de G. La suppression de l'arête e du graphe G produit le graphe noté $G-e$, obtenu suite à l'effacement de e (ses extrémités ne sont pas effacées). Voir la figure* 2.1.2.

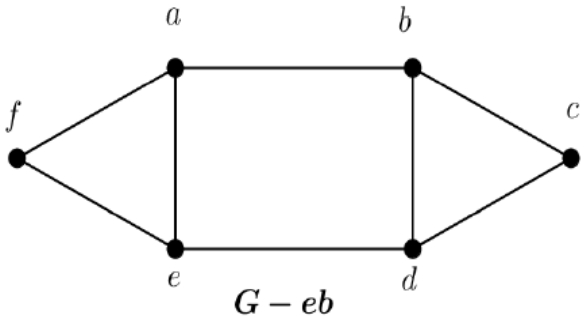


Figure 2.1.2 : La suppression d'une arête.

Définition 2.1.3 *Soit $xy = e$ une arête quelconque de G. L'ajout de l'arête e au graphe G produit le graphe noté $G + e$, résultant de l'ajout d'une arête entre x et y dans le graphe G. Voir la figure* 2.1.3

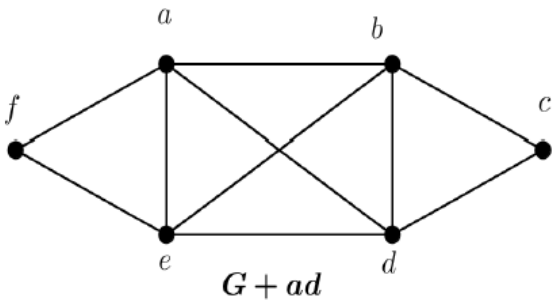


Figure 2.1.3 : L'ajout d'une arête.

Aussi, dans [4] Burton et Sumner ont introduit un autre type de modification dans un graphe. Il s'agit de la contraction d'une arête (ou l'identification de deux sommets adjacents).

Définition 2.1.4 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, pour un couple de sommets (u, v) de V^2, on note par G_{uv} le graphe obtenu à partir de G en identifiant les deux sommets adjacents u et v. Donc le graphe G_{uv} est obtenu à partir de G en supprimant les sommets u et v et en ajoutant le nouveau sommet $\overline{uv}$ qui est adjacent à tous les sommets adjacents à u ou v.*

Des exemples de contraction d'arêtes sont illustrés dans la Figure 2.1.4.

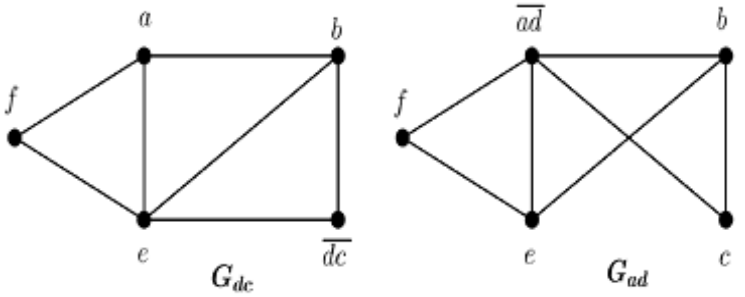


Figure 2.1.4 : Contraction d'arêtes

Nous arrivons maintenant à la définition des différents concepts liés aux graphes critiques et stables pour un paramètre de domination quelconque π. Notons que si à l'issue d'une modification quelconque d'un graphe G le paramètre n'est plus défini, nous considérons par convention que π est infini pour le graphe obtenu.

Pour un paramètre de domination π, un graphe G est dit :

π-sommet-critique	si $\pi(G-v) < \pi(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$
π^+-sommet-critique	si $\pi(G-v) > \pi(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$
π-sommet-stable	si $\pi(G-v) = \pi(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$
π-arête-critique	si $\pi(G+e) < \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
π^+-arête-critique	si $\pi(G+e) > \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
π-arête-stable	si $\pi(G+e) = \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
π-arête-supprimée-critique	si $\pi(G-e) < \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$
π^+-arête-supprimée-critique	si $\pi(G-e) > \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$
π-arête-supprimée-stable	si $\pi(G-e) = \pi(G)$ pour tout sommet $e \in E(G)$
π-point-critique	si $\pi(G_{uv}) < \pi(G)$ pour tout sommet $uv \in V(G)$
π^+-point-critique	si $\pi(G_{uv}) > \pi(G)$ pour tout sommet $uv \in V(G)$
π-point-stable	si $\pi(G_{uv}) = \pi(G)$ pour tout sommet $uv \in V(G)$

En domination, l'étude des graphes critiques et stables a été entamée pour le nombre de domination par Walikar et Acharya [19] et ensuite Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [1]. Ils ont abordé les graphes pour lesquels le nombre de domination est altéré quand une arête quelconque est supprimée. Pour plus de détails et de références, le lecteur est invité à consulter le chapitre 5 du livre [13].

Les chercheurs dans le domaine de la domination dans les graphes se sont ensuite fortement intéressés à ces notions pour les différents paramètres.

Concernant la domination couplée, deux classes de graphes critiques et stables ont été abordées suivant le type de modification apportée, les graphes γ_{pr}-arête-critiques et les graphes γ_{pr}-sommet-critiques. Dans la suite, nous présentons les quelques résultats qui ont été obtenus par Edwards, dans son mémoire de master [10], qui a initié l'étude des graphes critiques et stables par rapport à la domination couplée. D'autres auteurs ont étudié ces classes de graphes comme Edwards, Gibson, Henning et Mynhardt [11], Henning et Mynhardt [14], et Huang, Shan et Kang [16].

2.2 Graphes γ_{pr}-arête-critiques

Les graphes critiques par rapport à la domination couplée ont été étudiés en premier lieu par Edwards dans le cadre de son mémoire de master [10], et ensuite par Edwards, Gibson, Henning et Mynhardt [11]. Avant de présenter l'essentiel de leurs résultats, nous avons besoin de quelques définitions:

Définition 2.2.1 *Le graphe G est γ_{pr}-arête-critique si pour tout $e \in E(\overline{G}) \neq \emptyset$, $\gamma_{pr}(G+e) < \gamma_{pr}(G)$. De plus, si G est un graphe γ_{pr}-arête-critique et $\gamma_{pr}(G) = k$, on dit que G est k-γ_{pr}-arête-critique.*

L'ajout d'une arête à un graphe G ne peut augmenter son nombre de domination couplée. Ainsi, le fait d'ajouter une arête à G peut diminuer son nombre de domination couplée comme ça peut le laisser inchangé. Edwards [10] a montré de plus, dans la proposition suivante que pour la domination couplée, ajouter une arête à un graphe peut diminuer son nombre de domination couplée d'au plus deux.

Proposition 2.2.1 (Edwards [10]) *Pour toute arête $uv \in E(\overline{G})$, $\gamma_{pr}(G) - 2 \leq \gamma_{pr}(G + uv) \leq \gamma_{pr}(G)$.*

Edwards [10] a montré que dans un graphe γ_{pr}-arête-critique, tous les sommets appartiennent à un EDC minimum de ce graphe.

Théorème 2.2.1 (Edwards [10]) *Dans un graphe γ_{pr}-arête-critique G, tout sommet appartient à un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble.*

Edwards [10] a porté une attention particulière aux graphes 4-γ_{pr}-arête-critiques. Elle a commencé par donner une caractérisation des graphes non-connexes 4-γ_{pr}-arête-critiques.

Proposition 2.2.2 (Edwards [10]) *Le graphe G est un graphe non-connexe 4-γ_{pr}-arête-critique si et seulement si G est l'union de graphes complets non-triviaux.*

Toujours dans [10], il est montré qu'un graphe 4-γ_{pr}-arête-critique ne peut comporter plus d'un sommet pendant.

Proposition 2.2.3 (Edwards [10]) *Un graphe 4-γ_{pr}-arête-critique contient au plus un sommet pendant.*

Ceci implique la non-existence d'arbres 4-γ_{pr}-arête-critiques.

Corollaire 2.2.1 (Edwards [10]) *Il n'existe aucun arbre 4-γ_{pr}-arête-critique.*

Edwards et al. [11] ont montré que si G est un graphe γ_{pr}-arête-critique, alors $\gamma_{pr}(G + e) = \gamma_{pr}(G) - 2$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$. Ils ont montré dans le même article que la famille des arbres γ_{pr}-arête-critiques se compose précisément d'étoiles subdivisées avec au moins trois feuilles.

Proposition 2.2.4 (Edwards et al. [11]) *Une arbre $T \neq K_2$ est γ_{pr}-arête-critique si et seulement si $T = K^*_{1,n}$ avec $n \geq 3$.*

Il est montré dans [11] que si G est un graphe connexe et $\gamma_{pr}(G) = k$, alors $diam(G) \leq 2k - 1$. Cette borne peut être améliorée pour les graphes k-γ_{pr}-arête-critiques.

Théorème 2.2.2 (Edwards et al. [11]) *Pour $k \geq 6$, si G est un graphe k-γ_{pr}-arête-critique connexe, alors $diam(G) \leq 2k - 6$.*

Pour $k \geq 10$, la borne du Théorème 2.2.2 peut être améliorée.

Théorème 2.2.3 (Edwards et al. [11]) *Si G est un k-γ_{pr}-arête-critique , alors $diam(G) \leq \frac{3k}{2} + 3$.*

Le résultat suivant montre qu'il existe un graphe k-γ_{pr}-arête-critique de diamètre 2 pour tout entier positif pair $k \geq 4$.

Proposition 2.2.5 (Edwards et al. [11]) *Pour tout entier positif pair $k \geq 4$, il existe un graphe k-γ_{pr}-arête-critique de diamètre 2.*

2.3 Graphes γ_{pr}-sommet-critiques

Nous passons à présent à la présentation des résultats obtenus par Edwards [10], Henning et Mynhardt [14] et Huang, Shan et Kang [16] dans la classe des graphes critiques par rapport à l'opération de suppression de sommets. Commençons par donner la définition d'un graphe γ_{pr}-sommet-critique.

Définition 2.3.1 *Un graphe G est dit γ_{pr}-sommet-critique, si pour tout sommet $v \in V(G) - S(G)$, $\gamma_{pr}(G - v) < \gamma_{pr}(G)$. Si G est γ_{pr}-sommet-critique et $\gamma_{pr}(G) = k$, alors on dit que G est k-γ_{pr}-sommet-critique.*

Par exemple, le cycle C_5 est 4-γ_{pr}-sommet-critique et le cycle C_9 est 6-γ_{pr}-sommet-critique.

Soit G un graphe γ_{pr}-sommet-critique. Comme $\gamma_{pr}(G - v) < \gamma_{pr}(G)$ pour tout $v \in V - S(G)$ et $\gamma_{pr}(G)$ est pair, on a immédiatement:

Proposition 2.3.1 (Edwards [10] et Henning et al. [14]) *Si G est un graphe γ_{pr}-sommet-critique, alors $\gamma_{pr}(G - v) = \gamma_{pr}(G) - 2$ pour tout $v \in V - S(G)$. De plus, un $\gamma_{pr}(G - v)$-ensemble ne contient pas de voisins de v.*

Edwards a montré aussi que dans un graphe γ_{pr}-sommet-critique, tous les sommets appartiennent à un γ_{pr}-ensemble de ce graphe.

Proposition 2.3.2 (Edwards [10]) *Si G est γ_{pr}-sommet-critique, alors pour tout sommet $v \in V(G)$ il existe un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble S tel que $v \in S$.*

Des bornes sur le diamètre des graphes γ_{pr}-sommet-critiques ont été étudiées dans [14].

Théorème 2.3.1 (Henning et al. [14]) *Pour tout entier pair $k \geq 4$, il existe un graphe connexe k-γ_{pr}-sommet-critique de diamètre $\frac{3}{2}(k-2)$.*

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème précédent.

Corollaire 2.3.1 (Henning et al. [14]) *Le diamètre maximum d'un graphe connexe k-γ_{pr}-sommet-critique est au moins $\frac{3}{2}(k-2)$.*

Aussi, pour k petit, nous avons le résultat suivant:

Théorème 2.3.2 (Henning et al. [14]) *Pour $k \leq 8$, le diamètre d'un graphe connexe k-γ_{pr}-sommet-critique est au plus $\frac{3}{2}(k-2)$.*

Toujours dans [14], Henning et al. on montré la non-existence d'arbres qui sont γ_{pr}-sommet-critiques.

Théorème 2.3.3 (Henning et al. [14]) *Aucun arbre n'est γ_{pr}-sommet-critique.*

Un autre article [16] dû à Huang, Shan et Kang a comme objet l'étude des graphes γ_{pr}-sommet-critiques. Ils ont étudié en particulier les graphes 4-γ_{pr}-sommet-critiques et 6-γ_{pr}-sommet-critiques. Rappelons qu'un graphe G est facteur-critique si $G-v$ a un couplage parfait pour chaque sommet $v \in V(G)$. Les résultats principaux de Huang et al. sont données dans les théorèmes suivants:

Théorème 2.3.4 (Huang et al. [16]) *Si G est un graphe 4-γ_{pr}-sommet-critique sans $K_{1,5}$ d'ordre pair, alors G a un couplage parfait.*

Théorème 2.3.5 (Huang et al. [16]) *Si G est un graphe 4-γ_{pr}-sommet-critique sans $K_{1,5}$ d'ordre impair, alors G est facteur-critique.*

Théorème 2.3.6 (Huang et al. [16]) *Si G est un graphe 6-γ_{pr}-sommet-critique sans $K_{1,4}$, alors G a un couplage parfait.*

Les classes de graphes critiques par rapport à l'ajout d'une arête ou la suppression d'un sommet sont les seules classes de graphes critiques et stables étudiées pour la domination couplée. Nous nous intéressons dans les paragraphes qui suivent à la dernière opération présentée, l'identification de deux sommets adjacents.

Chapitre 3

Graphes point-critiques et graphes point-stables

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté des résultats existants sur les graphes critiques et stables concernant l'ajout de n'importe quelle arête et la suppression de n'importe quel sommet par rapport à la domination couplée. Dans le présent chapitre, quelques cotributions que nous avons pu obtenir sur les graphes $\gamma_{pr}(G)$-point-stables et les graphes $\gamma_{pr}(G)$-point-critiques par rapport à la domination couplée sont présentées.

3.1 Identification de deux sommets adjacents

L'identification de deux sommets adjacents ou la contraction d'une arête est une opération qui consiste à remplacer ces deux sommets par un nouveau sommet dont le voisinage ouvert est l'union des voisinages ouverts des deux sommets remplacés sans ces deux sommets en question.

D'une façon formelle, l'identification de deux sommets adjacents u et v forme un nouveau sommet, désigné par $\overline{uv}$, dont le voisinage ouvert est $(N(u) \cup N(v)) - \{u, v\}$. Le graphe obtenu sera désigné par G_{uv}.

Puisque l'existence d'un ensemble dominant couplé dans un graphe G nécessite que G soit sans sommets isolés, alors les graphes considérés dans cette partie sont des graphes connexes d'ordre au moins trois.

Burton et al. [4] ont commencé l'étude de l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de domination. Pour la domination totale, Henning et al. [15] ont donné plusieurs propriétés des graphes point-critiques.

Concernant la domination couplée, Edwards, dans son mémoire de master [10], a étudié l'existence ou la non-existence des classes de graphes critiques et stables. Elle a montré, en particulier, l'existence des graphes γ_{pr}-point-critiques et γ_{pr}-point-stables. En effet, il est facile de voir que la contraction de n'importe quelle arête d'une chaîne P_5 diminue sont nombre de domination couplée. Il est facile de voir aussi que la chaîne P_4 est γ_{pr}-point-stable puisque la contraction de n'importe quelle arête laisse son nombre de domination couplée inchangé.

Edwards [10] a montré de plus que la contraction d'une arête d'un graphe G ne peut augmenter son nombre de domination couplée. Ce résultat est donné dans la proposition suivante:

Proposition 3.1.1 *[10] Pour tout graphe G sans sommet isolé et pour toute arête $uv \in E(G)$ tel que $\langle\{u,v\}\rangle$ n'est pas une composante de G, $\gamma_{pr}(G_{uv}) \leq \gamma_{pr}(G)$*

Dans le même contexte, il est légitime d'essayer de trouver une borne inférieure pour le nombre de domination couplée du graphe obtenu suite à la contraction d'une arête quelconque. Dans la proposition suivante, nous montrons que ce nombre ne peut pas être inférieur au nombre de domination couplée du graphe de départ moins deux.

Théorème 3.1.1 *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et u, v deux sommets adjacents de G. Alors $\gamma_{pr}(G_{uv}) \geq \gamma_{pr}(G) - 2$.*

Preuve. Soit S un $\gamma_{pr}(G_{uv})$-ensemble. On considère deux cas concernant le sommet $\overline{uv}$.

Cas 1: $\overline{uv} \in S$ tel que $\overline{uv}$ est couplé avec w dans S. Si w possède un voisin x qui n'appartient pas à S, alors l'ensemble $S_1 = (S - \{\overline{uv}\}) \cup \{u, v, x\}$ est un EDC de G dans lequel u est couplé avec v et w est couplé avec x dans S. Dans ce cas, $\gamma_{pr}(G) \leq |S| + 2 = \gamma_{pr}(G_{uv}) + 2$, et donc $\gamma_{pr}(G_{uv}) \geq \gamma_{pr}(G) - 2$. Maintenant si tous les voisins de w sont dans S,

alors l'ensemble $S_2 = (S - \{\overline{uv}, w\}) \cup \{u, v\}$ est un EDC de G dans lequel u et v sont couplés. Dans ce cas, $\gamma_{pr}(G) \leq |S| - 2 + 2 = \gamma_{pr}(G_{uv})$, et donc $\gamma_{pr}(G_{uv}) \geq \gamma_{pr}(G) \geq \gamma_{pr}(G) - 2$.

Cas 2: $\overline{uv} \notin S$. Il est clair que $S \cup \{u, v\}$ est un EDC de G, d'où $\gamma_{pr}(G) \leq \mid S \mid +2 = \gamma_{pr}(G_{uv}) + 2$, d'où $\gamma_{pr}(G_{uv}) \geq \gamma_{pr}(G) - 2$.

Il resulte des cas précédents que $\gamma_{pr}(G_{uv}) \geq \gamma_{pr}(G) - 2$. ■

3.2 Graphes γ_{pr}-point-stables

Dans cette partie, nous entamons l'études des graphes stables par rapport à la domination couplée pour l'opération de contraction d'une arête. Nous commençons par donner la définition d'un graphe γ_{pr}-point-stable.

Définition 3.2.1 *Un graphe $G = (E, V)$ est dit γ_{pr}-point-stable si pour toute arête $uv \in E(G)$, $\gamma_{pr}(G_{uv}) = \gamma_{pr}(G)$.*

Définition 3.2.2 *Une arête $e = uv$ de G est dite **stable** si $\gamma_{pr}(G_{uv}) = \gamma_{pr}(G)$, et elle dite **critique** si $\gamma_{pr}(G_{uv}) < \gamma_{pr}(G)$.*

D'après le Théorème 3.1.1, il est équivalent de dire qu'une arête uv est critique si $\gamma_{pr}(G_{uv}) = \gamma_{pr}(G) - 2$.

Nous définissons aussi les deux ensembles suivants dans un graphe G

$A_{pr}(G)$: l'ensemble des sommets qui appartiennent à tout $\gamma_{pr}(G)$-ensemble.

$N_{pr}(G)$: l'ensemble des sommets qui n'appartiennent à aucun $\gamma_{pr}(G)$-ensemble.

De plus, nous appelons un sommet qui appartient à $N_{pr}(G)$ un sommet **libre** dans G.

Les deux premières remarques que nous faisons concernent les arêtes pendantes.

Remarque 3.2.1 *Soit G un graphe et v un support fort de G. Alors toutes les arêtes pendantes incidentes à v sont stables.*

On peut en déduire que si un support v est l'extrémité d'une arête pendante critique, alors v est un support faible.

Corollaire 3.2.1 *Si $e = uv$ est une arête pendante critique d'un graphe G incidente à un support v, alors v est un support faible.*

Remarque 3.2.2 *Soit G un graphe et v un support adjacent à un sommet pendant u libre dans G. Alors l'arête uv est stable.*

Preuve. Supposons que l'arête uv n'est pas stable, c'est-à-dire que $\gamma_{pr}(G_{uv}) = \gamma_{pr}(G) - 2$. Aussi le fait que uv est critique implique que v est un support faible. Soit D un $\gamma_{pr}(G_{uv})$-ensemble. Il est clair que $\overline{uv} \notin D$, car sinon l'ensemble $(D - \overline{uv}) \cup \{v\}$ serait un EDC de G de cardinal $\gamma_{pr}(G) - 2$. Donc l'ensemble $D' = D \cup \{v, u\}$ est un EDC de G de cardinal $\gamma_{pr}(G_{uv}) + 2$, c'est donc un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble qui contient u, une contradiction avec le fait que u est libre dans G. ■

Dans ce qui suit nous étudions la stabilité de quelques classes simples de graphes. Dans [12], Haynes et Slater on montré que le nombre de domination couplée peut être calculé d'une manière exacte pour les chaînes et les cycles.

Proposition 3.2.1 *[12]* $\gamma_{pr}(P_n) = \gamma_{pr}(C_n) = 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.

Ainsi, nous pouvons établir la stabilité des chaînes et des cycles.

Proposition 3.2.2 *Une chaîne P_n d'ordre $n \geq 3$ est γ_{pr}-point-stable si et seulement si* $n \equiv 0, 2, 3\,[4]$.

Preuve. Soit $G = P_n$ une chaîne d'ordre $n \geq 3$, et soit $uv \in E(G)$. On pose $G' = G_{uv}$. Le graphe G' n'est autre que la chaîne P_{n-1}, et d'après la Proposition 3.2.1, on peut facilement voir que $\gamma_{pr}(G) = \gamma_{pr}(G')$ si $n \equiv 0, 2, 3\,[4]$. D'autre part, si $n \equiv 1\,[4]$, alors d'après la Proposition 3.2.1 $\gamma_{pr}(G') < \gamma_{pr}(G)$. ■

De la même manière, on peut prouver qu'un C_n d'ordre $n \geq 3$ est γ_{pr}-point-stable si et seulement si $n \equiv 0, 2, 3\,[4]$.

D'autre part, puisque pour un graphe G sans sommets isolés, $\gamma_{pr}(G) \geq 2$ ([12]), on peut donner la propriété suivante pour les graphes ayant un nombre de domination couplée égal à 2.

Proposition 3.2.3 *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\gamma_{pr}(G) = 2$, alors G est γ_{pr}-point-stable.*

Preuve. *Puisque G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, la contraction de n'importe quelle arête produit un graphe sans sommets isolés. Aussi, d'après la Proposition 3.1.1, pour toute arête $e = uv$ de $G, \gamma_{pr}(G_{uv}) \leq \gamma_{pr}(G)$. Par conséquent, pour toute arête $e = uv$ de $G, \gamma_{pr}(G_{uv}) = \gamma_{pr}(G)$.* ■

Comme conséquence directe de la Proposition 3.2.3, on peut affirmer la stabilité des étoiles, des graphes complets, des roues, des double étoiles, etc...

A titre d'exemple, nous pouvons conclure que:

- Les étoiles $K_{1,r}$ avec $r \geq 2$ sont γ_{pr}-point-stables.
- Les graphes complets K_n avec $n \geq 3$ sont γ_{pr}-point-stables.
- Les double étoiles $S_{r,s}$ avec $r \geq 1$ et $s \geq 1$ sont γ_{pr}-point-stables.
- Les roues W_n telles que $n \geq 3$ sont γ_{pr}-point-stables.

3.3 Graphes γ_{pr}-point-critiques

Nous nous intéressons dans cette partie aux graphes dont le nombre de domination couplée diminue suite à l'identification de n'importe quelle paire de sommets adjacents. Commençons par donner la définition d'un tel graphe.

Définition 3.3.1 *Un graphe $G = (E, V)$ est dit γ_{pr}-point-critique si pour toute arête $uv \in E(G)$, $\gamma_{pr}(G_{uv}) < \gamma_{pr}(G)$.*

D'après le Théorème 3.1.1, la définition précédente reviendrait à dire qu'un graphe G est γ_{pr}-point-critique si pour toute arête $uv \in E(G)$, $\gamma_{pr}(G_{uv}) = \gamma_{pr}(G) - 2$.

3.3.1 Premiers résultats et propriétés

Nous avons souligné lors de la présentation de la domination couplée que les sommets supports doivent impérativement appartenir à tout EDC minimum du graphe étudié, d'où l'intérêt de la criticité et la stabilité des arêtes pendantes.

Remarque 3.3.1 *Tous les supports d'un graphe γ_{pr}-point-critique sont faibles.*

Une autre propriété importante concerne la contraction d'une arête pendante.

Remarque 3.3.2 *Soit G un graphe γ_{pr}-point-critique, x un sommet pendant de G et v son support. Alors $\overline{vx}$ est libre dans G_{vx}.*

Preuve. Puisque G est γ_{pr}-point-critique, $\gamma_{pr}(G_{vx}) = \gamma_{pr}(G) - 2$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un $\gamma_{pr}(G_{vx})$-ensemble D qui contient $\overline{vx}$. Dans ce cas, il est clair que l'ensemble $(D - \overline{vx}) \cup \{v\}$ est EDC de G, et donc $\gamma_{pr}(G) \leq \gamma_{pr}(G_{vx})$, une contradiction avec le fait que G est γ_{pr}-point-critique. ■

Sachant calculer d'une manière exacte le nombre de domination couplée d'une chaîne et d'un cycle, on peut facilement faire les remarques suivantes:

Remarque 3.3.3 *Une chaîne P_n d'ordre $n \geq 3$ est γ_{pr}-point-critique si et seulement si $n \equiv 1 \bmod(4)$.*

Remarque 3.3.4 *Un cycle C_n est γ_{pr}-point-critique si et seulement si $n \equiv 1 \bmod(4)$.*

D'après la remarque 3.3.3, la chaîne P_5 est γ_{pr}-point-critique. Cette propriété peut être généralisée pour toute la famille des étoiles subdivisées.

Remarque 3.3.5 *Une étoile subdivisée $K^*_{1.r}$ tel que $r \geq 2$ est γ_{pr}-point-critique.*

Théorème 3.3.1 *Si G est un graphe γ_{pr}-point-critique, alors $N_{pr}(G) = \phi$.*

Preuve. Considérons la contraposée. Soit v un sommet libre de G. Supposons que G est γ_{pr}-point-critique et soit u un voisin non libre de v. On a donc $\gamma_{pr}(G_{uv}) = \gamma_{pr}(G) - 2$. Soit D un $\gamma_{pr}(G_{uv})$-ensemble. Si $\overline{uv} \notin D$, alors $D \cup \{u, v\}$ est un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble qui

contient v, une contradiction. Si $\overline{uv} \in D$, on suppose alors que $\overline{uv}$ est couplé dans D avec x. Le sommet x doit posséder un voisin z qui n'appartient pas à D, car sinon l'ensemble $(D - \{\overline{uv}, x\}) \cup \{u, v\}$ serait un EDC de G de cardinal $\gamma_{pr}(G) - 2$. Dans ce cas, l'ensemble $(D - \{\overline{uv}\}) \cup \{z, u, v\}$ est un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble qui contient v, une contradiction. ■

Il est évident que la réciproque n'est pas vraie. Il suffit de considérer la chaîne P_6 qui n'est pas γ_{pr}-point-critique malgré qu'elle ne comporte aucun sommet libre.

Cette propriété de la chaîne P_6 nous mène à discuter la relation entre les graphes γ_{pr}-point-critiques et les graphes γ_{pr}-excellents. Un graphe G est dit γ_{pr}-excellent si tout sommet appartient à un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble, autrement dit si $N_{pr}(G) = \phi$. Le corollaire suivant nous permet de donner la relation entre les graphes γ_{pr}-point-critiques et les graphes γ_{pr}-excellents.

Corollaire 3.3.1 *Tout graphe γ_{pr}-point-critique est γ_{pr}-excellent.*

Il est bien clair que la réciproque n'est pas vraie ici aussi, il suffit de prendre la chaîne P_6 qui est γ_{pr}-excellente mais n'est pas γ_{pr}-point-critique.

3.3.2 Arbres γ_{pr}-point-critiques

Notre objectif ici est de donner quelques propriétés des arbres γ_{pr}-point-critiques et d'emprunter les premiers pas pour la caractérisation de la famille de tous les arbres γ_{pr}-point-critiques.

On commence par montrer quelques résultats qui nous seront utiles.

Proposition 3.3.1 *Si T est un arbre γ_{pr}-point-critique et v un support de T ayant x comme sommet pendant, alors il existe un $\gamma_{pr}(T)$-ensemble D contenant une chaîne P_4 induite ayant x comme extrémité.*

Preuve. Soit D' un $\gamma_{pr}(T_{vx})$-ensemble. D'après la Remarque 3.3.2, $\overline{vx} \notin D'$, mais alors il existe un voisin de $\overline{vx}$, disons u qui appartient à D' et qui est couplé avec un sommet w. Dans ce cas, l'ensemble $D = D' \cup \{v, x\}$ est un EDC de T, et comme $|D| = |D'| + 2$, l'ensemble D est un $\gamma_{pr}(T)$-ensemble dont le sous-graphe induit contient la chaîne x-v-u-w.
■

Remarque 3.3.6 *Soit G un graphe qui contient deux supports adjacents u et v. alors il n'existe aucun $\gamma_{pr}(G)$-ensemble dans lequel u et v sont couplés chacun avec un sommet pendant.*

Preuve. Supposons qu'il existe un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble S dans lequel u et v sont couplés avec leurs sommets pendants u' et v' respectivement. Mais alors l'ensemble $S' = S - \{u', v'\}$ serait un EDC de G de cardinal $\gamma_{pr}(G) - 2$, une contradiction. ■

Proposition 3.3.2 *Soit T un arbre qui contient deux supports adjacents u et v. Alors au moins l'un des sommets pendants de u et v est libre.*

Preuve. Puisque les sommets pendants d'un support jouent le même rôle dans ce contexte, on considère que u et v sont des supports faibles ayant u' et v' comme sommets pendants respectivement. Supposons que u' et v' ne sont pas libres. Puisqu'il n'existe aucun $\gamma_{pr}(T)$-ensemble contenant u' et v' (d'après la remarque 3.3.6), soient S et S' des $\gamma_{pr}(T)$-ensembles contenant u' et v' respectivement. Notons aussi par T_1 et T_2 les arbres obtenus de T suite à la suppression de l'arête uv tel que $u \in V(T_1)$ et $v \in V(T_2)$. Puisque $u, v \in S \cap S'$ et u et v ne sont couplés ni dans S ni dans S', on a $|S \cap V(T_1)| = |S' \cap V(T_1)|$ et $|S \cap V(T_2)| = |S' \cap V(T_2)|$. On peut facilement voir aussi que $S \cap V(T_1)$ et $S' \cap V(T_2)$ sont des EDC de T_1 et T_2 respectivement. Aussi, $S' \cap V(T_1)$ et $S \cap V(T_2)$ sont des EDC de T_1 et T_2 respectivement. Donc l'ensemble $(S \cap V(T_1)) \cup (S' \cap V(T_2))$ est un EDC de T de cardinal $|S \cap V(T_1)| + |S \cap V(T_2)| = \gamma_{pr}(T)$, d'où l'existence d'un $\gamma_{pr}(T)$-ensemble contenant u' et v', une contradiction. ■

Ceci veut dire que l'existence de deux supports adjacents dans un arbre T entraîne l'existence de sommets libres dans T, d'où sa non-criticité d'après le théorème 3.3.1.

Corollaire 3.3.2 *Si T est un arbre γ_{pr}-point-critique, alors T ne contient pas de supports adjacents.*

Nous arrivons maintenant à l'étude de l'effet de deux opérations qui seront proposées pour la caractérisation de la famille des arbres γ_{pr}-point-critique sur le nombre de domination couplée.

Remarque 3.3.7 *Soient T un arbre de diamètre au moins 2 et y un sommet de $L(T)$, alors il existe un $\gamma_{pr}(T)$-ensemble qui ne contient pas y.*

Proposition 3.3.3 *Soit T l'arbre obtenu d'un arbre non trivial T', en attachant une étoile subdivisée $K^*_{1,K}$ avec $k \geq 1$ de centre a une arête à un sommet support b de T'. Alors $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{pr}(T') + 2k$.*

Preuve. Il est clair que tout dominant couplé de T' peut être étendu en un EDC de T en ajoutant tous les sommets de $K^*_{1,k}$ sauf le sommet a, d'où $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2k$.

D'autre part, soit D un $\gamma_{pr}(T)$- ensemble qui ne contient pas le sommet pendant b' de b (un tel $\gamma_{pr}(T)$-ensemble existe d'après la Remarque 3.3.7). On considère deux cas suivant l'appartenance de a à l'ensemble D.

Cas 1: $a \notin D$. Puisque tous les supports de $K^*_{1,k}$ appartiennent à D et sont couplés avec leurs sommets pendants, il est clair que l'ensemble $D \cap V(T')$ est un EDC de T', et donc $\gamma_{pr}(T') \leq \gamma_{pr}(T) - 2k$.

Cas 2: $a \in D$. Si a est couplé dans D avec b, alors on remplace, dans D, a par b' et $D \cap V(T')$ serait un EDC de T', et donc $\gamma_{pr}(T') \leq \gamma_{pr}(T) - 2k$. Maintenant si a n'est pas couplé dans D avec b,alors $D \cap V(T')$ est un EDC de T', et donc $\gamma_{pr}(T') \leq \gamma_{pr}(T) - 2k$.

Par conséquent, on a $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{pr}(T') + 2k$. ■

Proposition 3.3.4 *Si T est un arbre obtenu d'un arbre T' en attachant une chaîne P_4 à un sommet u' de T', alors $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{pr}(T') + 2$.*

Preuve. *Supposons que T est obtenu à partir de T' en lui ajoutant la chaîne u-w-x-y et l'arête uu'. Tout $\gamma_{pr}(T')$- ensemble peut être devenir à un EDC de T en lui ajoutant l'ensemble $\{w, x\}$ et donc $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2$. Soit D un $\gamma_{pr}(T)$- ensemble qui ne contient pas y* (un tel $\gamma_{pr}(T)$-ensemble existe d'après la Remarque 3.3.7*) Donc x est couplé avec w dans D et nous pouvons supposer que $u \notin D$, sinon on peut le remplacer par un sommet de $N(u')$* qui n'appartient pas à D (ce sommet existe par la minimalité de D). *Il est évident que $D' = D \cap T'$ est un EDC de T'*, d'où $\gamma_{pr}(T') \leq |D'| = \gamma_{pr}(T) - 2$. *On a donc $\gamma_{pr}(T) - 2 \leq \gamma_{pr}(T') \leq |D'| = \gamma_{pr}(T) - 2$. Par conséquent, $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{pr}(T') + 2$.* ■

Pour entamer la caractérisation des arbres γ_{pr}-point-critiques , nous définissons la famille H de tous les arbres T qui peuvent être obtenus par une séquence d'arbres $T_1, T_2, .., T_j$ avec

$j \geq 1$ tel que $T_1 = K^*_{1,k}$ avec $k \geq 2$ de centre a, $T = T_j$ et si $j \geq 2$, T_{j+1} est obtenu à partir de T_j par une des opérations suivantes :

- **Opération** O_1 **:** attacher une étoile subdivisée $K^*_{1,k}$ avec $k \geq 1$ par son centre a à un sommet support b de T'_j.
- **Opération** O_2 **:** attacher une chaîne P_4 par l'une de ses extrémités à un sommet pendant w de T'_j.

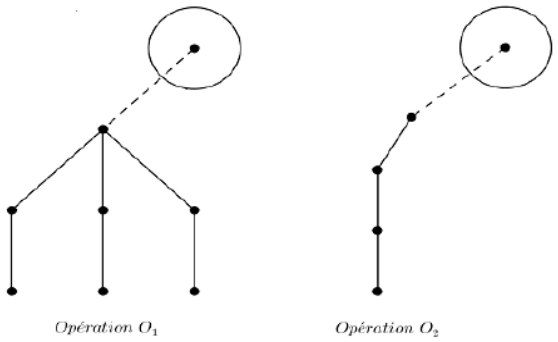


Figure 3.3.1 : La construction de la famille H

Théorème 3.3.2 *Si $T \in H$, alors T est un arbre γ_{pr}-point-critique.*

Preuve. Soit $T \in H$, alors T peut être obtenu par une séquence d'arbres $T_1, T_2, ..., T_j$ avec $j \geq 1$, telle que T_1 est une étoile subdivisée $K^*_{1,k}$ avec $k \geq 2, T = T_j$, et si $j \geq 2$, alors T_{j+1} est obtenu de T_j par l'une des deux opérations O_1et O_2. Utilisons une induction sur j. Si $j = 1$, alors T est une étoile subdivisée $K^*_{1,K}$ $(k \geq 2)$ et donc T est γ_{pr}-point-critique.

Supposons que $j \geq 2$, et que le résultat est vrai pour tous les arbres $T\prime$ qui peuvent être construits par une séquence de longueur au plus $j - 1$. Soit T un arbre de H construit à partir de $T' = T_{j-1}$, en utilisant O_1 ou O_2. Par hypothèse, T' est γ_{pr}-point-critique. Considérons alors les deux cas suivants:

- **Cas 1:** T est obtenu de T' par l'Opération O_1. Notons par $s_1, s_2, ...s_k$ les supports de $K^*_{1,k}$ et $l_1, l_2, ...l_k$ ses sommets pendants. On montre que toute arête $e = uv$ de $E(T)$ est critique.

- $e \in E(T') - \{bx\}$ où x est le sommet pendant de b. Puisque b est toujours un support de T_{uv}, ce dernier peut être considéré comme étant obtenu par l'arbre T'_{uv} en appliquant l'opération O_1. Par conséquent d'après la Proposition 3.3.3, $\gamma_{pr}(T_{uv}) = \gamma_{pr}(T'_{uv})+2k$, sachant que T' est γ_{pr}-point-critique, on obtient $\gamma_{pr}(T_{uv}) = \gamma_{pr}(T'_{uv}) + 2k < \gamma_{pr}(T') + 2k = \gamma_{pr}(T)$. D'où $\gamma_{pr}(T_{uv}) < \gamma_{pr}(T)$.
- $e = ab$. Soit D un $\gamma_{pr}(T)$-ensemble tel que b est couplé avec x et s_1 avec l_1, un tel $\gamma_{pr}(T)$-ensemble existe puisque T' est γ_{pr}-point-critique et donc x n'est pas libre dans T'. L'ensemble $D' = (D - \{b, x, l_1\}) \cup \{\overline{ab}\}$ est un EDC de T_{ab}, et donc $\gamma_{pr}(T_{ab}) \leq |D| - 2 = \gamma_{pr}(T) - 2 < \gamma_{pr}(T)$.
- $e = bx$. Dans ce cas, $\overline{bx}$ n'est pas un support de T_{bx}. Soit D un $\gamma_{pr}(T)$-ensemble tel que a est couplé avec s_1 (un tel ensemble existe d'après la Remarque 3.3.7). On peut affirmer que $\overline{bx} \notin D$, car sinon l'ensemble $D_1 = (D - D \cap V(T'_{bx})) \cup B$, où B est un $\gamma_{pr}(T'_{bx})$-ensemble, serait un EDC de T de cardinal inférieure à $\gamma_{pr}(T_{bx})$, puisque $|B| < |D \cap T'_{bx}|$ d'après la Remarque 3.3.2. On peut supposer qu'il existe au moins un voisin c de $\overline{bx}$ dans T'_{bx} qui appartient à D. Supposons le contraire, c'est à dire qu'il ne peut exister aucun voisin de $\overline{bx}$ dans D. Dans ce cas l'ensemble $D \cap V(T'_{bx})$ est un EDC de $T'_{bx} - \overline{bx}$ de cardinal inférieur à tout EDC de $T'_{bx} - \overline{bx}$ contenant un voisin de $\overline{bx}$, mais alors l'ensemble $(D \cap V(T'_{bx})) \cup \{b, x\}$ serait un EDC de T' tel que $\gamma_{pr}(T') \leq D \cap V(T'_{bx})+2 < \gamma_{pr}(T'_{bx})+2$, une contradiction avec le fait que T' est γ_{pr}-point-critique. Par conséquent, l'ensemble $D \cap V(T'_{bx})$ est un EDC de T'_{bx} de cardinal $\gamma_{pr}(T_{bx}) - 2k$, d'où $\gamma_{pr}(T'_{bx}) \leq \gamma_{pr}(T_{bx}) - 2k$, et sachant que $\gamma_{pr}(T_{bx}) - 2k \leq \gamma_{pr}(T'_{bx})$, on a $\gamma_{pr}(T'_{bx}) = \gamma_{pr}(T_{bx}) - 2k$. Aussi, puisque T' est γ_{pr}-point-critique, $\gamma_{pr}(T'_{bx}) = \gamma_{pr}(T') - 2$, d'où $\gamma_{pr}(T') - 2 = \gamma_{pr}(T_{bx}) - 2k$ et donc $\gamma_{pr}(T_{bx}) = \gamma_{pr}(T') - 2k - 2 = \gamma_{pr}(T) - 2$.
- e est une arête de l'étoile subdivisée. Puisque la contraction de n'importe quelle arête de l'étoile subdivisée rend le sommet a un support, alors l'effet de la contraction est le même. Considérons, sans perte de généralité, que $e = as_1$. Puisque x n'est pas libre dans T', soit D_1 un $\gamma_{pr}(T')$-ensemble tel que $x \in D_1$. D'après la proposition 3.3.3, l'ensemble $D = D_1 \cup S(K^*_{1,k}) \cup L(K^*_{1,k})$ est un $\gamma_{pr}(T)$-ensemble.

Dans ce cas, l'ensemble $D' = (D - \{x, s_1, l_1\}) \cup \{\overline{as_1}\}$ est un EDC de T_{as_1} de cardinal $\gamma_{pr}(T) - 2$. Donc $\gamma_{pr}(T_{as_1}) \leq \gamma_{pr}(T) - 2 < \gamma_{pr}(T)$.

Par conséquent, pour toute arête $e = uv$ de T, $\gamma_{pr}(T) < \gamma_{pr}(T)$.

- **Cas 2:** T est obtenu de T' par l'Opération O_2. Supposons que l'arbre T est obtenu de T' en attachant un chaîne x-y-z-d par l'arête wx. On montre que toute arête $e = uv$ de $E(T)$ est critique.

  - $e \in E(T') - \{sw\}$, où s est le support de w dans T'. Puisque s est toujours un support de T'_{uv}, ce dernier peut être considéré comme étant obtenu par l'arbre T'_{uv} en utilisant l'opération O_2. Par conséquent, d'après la Proposition 3.3.4, $\gamma_{pr}(T_{uv}) = \gamma_{pr}(T'_{uv})+2$, sachant que T' est γ_{pr}-point-critique, on obtient $\gamma_{pr}(T_{uv}) = \gamma_{pr}(T'_{uv})+ 2 < \gamma_{pr}(T') + 2 = \gamma_{pr}(T)$. Et donc $\gamma_{pr}(T_{uv}) < \gamma_{pr}(T)$.
  - $e \in E(T) - (E(T') - \{sw\})$. Puisque la chaîne w-x-y-z-d est pendante dans T, alors la contraction de n'importe quelle arête parmi sw, wx, xy, yz, et zd produit une chaîne pendante de quatre sommets et donne le même effet sur le nombre de domination couplée. Ainsi, sans perte de généralité, on considère la contraction de l'arête $e = sw$. Puisque T' est γ_{pr}-point-critique, d'après la Remarque 3.3.2, $\overline{sw}$ est libre dans T'_{sw}. Soit D_1 un $\gamma_{pr}(T'_{sw})$-ensemble, et $D_2 = D_1 \cup \{s, w\}$. Il est clair que D_2 est un EDC de T', et c'est $\gamma_{pr}(T')$-ensemble puisque T' est γ_{pr}-point-critique. Aussi, d'après la Proposition 3.3.4, l'ensemble $D = D_1 \cup \{y, z\}$ est un $\gamma_{pr}(T)$-ensemble. On peut facilement voir que l'ensemble $D' = D - \{s, w\}$ est EDC de T_{sw}, et donc $\gamma_{pr}(T_{sw}) = \gamma_{pr}(T) - 2$.

    Ainsi, pour toute arête $e = uv$ de T, $\gamma_{pr}(T) < \gamma_{pr}(T)$.

D'après les deux cas précédents, on conclut que l'arbre T est γ_{pr}-point-critique. ■

N'ayant pas eu le temps d'essayer de montrer la réciproque du Théorème 3.3.2, et pensant que H est la famille de tous les arbres γ_{pr}-point-critiques, nous nous contentons de donner la conjecture suivante:

Conjecture 3.3.1 *Un arbre T est γ_{pr}-point-critique si et seulement si $T \in H$.*

Conclusion

Pour de nombreuses applications comme la conception des réseaux, la criticité et la stabilité d'un graphe par rapport à un paramètre de domination est un problème important. Aussi, du point de vue théorique, l'étude de ces concepts s'est révélée d'un grand intérêt puisqu'elle permet de mieux connaître les propriétés structurelles des graphes considérés.

Dans ce mémoire, Nous nous sommes intéressés aux types de criticité et de stabilité les plus présents dans la littérature, et ce par rapport à un type de domination assez étudié ces dernières années qui est la domination couplée. Une revue des résultats les plus importants obtenus dans ce domaine a été notre premier objectif. Ensuite, nous avons tenté d'apporter quelques modestes contributions.

En premier lieu, nous avons entamé l'étude des graphes stables toujours par rapport à la domination couplée, mais cette fois en considérant la contraction d'une arête ou identification de deux sommets adjacents. Nous avons pu prouver plusieurs propriétés et montre la stabilité de quelques classes simples de graphes.

Nous avons ensuite considéré les graphes dont le nombre de domination couplée diminue suite à la contraction de n'importe quelle arête. Là aussi, nous avons pu montrer plusieurs propriétés. Nous avons étudié l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de domination couplée. Nous avons ensuite tenté de caractériser la famille des arbres critiques pour laquelle nous avons pu montrer une condition nécessaire suite à une constraction qu'on a proposée. La condition suffisante, n'étant pas montrée est laissée comme perspective.

Bibliographie

[1] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen et C. L. Suffel, "Domination alteration sets in graphs". Discrete Math, 47, 1983, 153-161.

[2] C. Berge, "Theory of graphs and its applications". Methuen, London, 1985, 1962.

[3] C. Berge, "Graphs and Hypergraphs". North Holland, Amsterdam, 1973.

[4] T. Burton et D. P. Sumner , "Domination dot-critical graphs". Discrete Math, 306, 2006, 11-18.

[5] G. Chartrand et L. Lesniak, "Graphs & Digraphs". Third Edition, Chapman et Hall, London, 1996.

[6] M. Chellali et T. W. Haynes , "On paired and double domination in graphs". Utilitas Mathematica, 67, 2005, 161-171.

[7] L. Chen, C. Lu, Z. Zeng et Labeling ,"algorithms for paired-domination problems in block and interval graphs". J. Combin. Optim. 19, 2010. No. 4, 457-470.

[8] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, "Towards a theory of domination in graphs", Networks 7, 1977, 247-261.

[9] C. F. de Jaenisch, "Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs". Petrograde, 1862.

[10] M. Edwards, "Criticality Concepts for paired Domination in graphs". Bachelor of Science, University of Victoria. 2004.

[11] M. Edwards, R. C. Gibson, M. A. Henning et C. M. Mynhardt, "Diametèr of paired domination edge - critical graphs". Australas. J. Combin. 40, 2008. 279-291.

[12] T. W. Haynes et P. J. Slater, "Paired-domination in graphs", Networks 32, 1998, 199-06.

[13] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, "Fundamentals of Domination in Graphs", Marcel Dekker. New York, 1998.

[14] M. A. Henning et C. M. Mynhardt, "The diamètre of paired domination vertex critical graphs", Czechoslovak Math. J. 58, 133, 2008. No. 4, 887–897.

[15] M. A. Henning et Nader Jafari Rad, "Total domination dot-critical graphs", Discrete Math, 159, 2011, 104-111.

[16] S. Huang, E. Shan et L. Kang, "Perfect matchings in paired domination vertex critical graphs". J. Combin. Optim. 23, 2012. No. 4, 507-518.

[17] C. L. Liu, "Introduction to combinatorial mathematics", McGraw-Hill, New York, 1968.

[18] O. Ore, "Theory of graphs". Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R. I, 1962.

[19] H. B. Walikar et B. D. Acharya , "Domination critical graphs", Nat. Acad. Sci. Lett, 2, 1979, 70-72.