Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement de Mathematiques et Informatique



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLOME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et applications

par

MAYOUF Soumia

Théorème général de principe du maximum des fonctions holomorphes pour des domaines non bornés

---

Soutenu le 23/06/2022 devant le jury composé de

Président :	Mr.AYADI Hocine	Université de Médéa.
Examinateur :	Mr.BOUADJILA Khaled	Université de Médéa.
Encadreur :	Mr.BAGUA Haoues	Université de Médéa.

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021 – 2022

REMERCIEMENT

Je remercie en premier lieu **ALLAH** pour la foi, la confiance et la volonté, il je a doté pour la réalisation de ce travail.

Ce travail est le fruit de la combinaison d'efforts de plusieurs personnes. Je remercie tout d'abord le tout puissant qui, par sa grâce m'a permis d'arriver au bout de mes efforts en me donnant la santé, la force, le courage et en me faisant entourer des merveilleuses personnes dont je tiens à remercier. Je remercie : mon directeur de mémoire :

Mr BAGUA Haouas pour son encadrement sans faille, son soutien moral, sa rigueur au travail, ses multiples conseils, ses orientations .

C'est avec humilité que je tiens à remercier les honorables membres du jury, pour leurs présence, pour leur lecture attentive de ce mémoire.

DÉDICACE

Je dédie ce travail :

A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé
de me supporter, me soutenir et m'encourager durent mes années d'études.
Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et
reconnaissance.

A mes frères(Ahmed, Hakim et Djamel),
mes soeurs(Naima , Souhila et Saida),

et les petits (Jouri, Mohammed, Ibrahim, Hajer, Abdenour) et ma belle Iness et sa mamam
A tous ceux qui m'ont aidé-de près ou de loin
et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont
chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci !

Soumia

RÉSUMÉ

Le principe du maximum est un résultat classique concernant les fonctions holomorphes affirmant que le module d'une fonction holomorphe atteint son maximum sur la frontière de son domaine. Cette résultat n'est pas valables pour les domaines non bornés (ex : la fonction e^z sur le demi plan droit). Les théorèmes de type Phragmén-Lindelof sont des généralisations de principe du maximum qui montrent la bornitude d'une fonction à l'intérieur d'un domaine non borné sont l'hypothèses de bornitude de la fonction sur la frontière et non de croissance trop rapide à l'intérieur.

ABSTRACT

The maximum principle is a classical result concerning holomorphic functions stating that the modulus of a holomorphic function attains its maximum on the boundary of its domain. This result is not valid for unbounded domains (ex : the function e^z on the right half-plane). Phragmen-Lindelof type theorems these are generalizations of the maximum principle in which we deduce the boundedness of a function inside an unbounded domain from the assumptions that the function is bounded on the boundary and not growing too fast inside.

NOTATIONS

$\mathbb{C}$ Corps des nombres complexes.

$\mathbb{R}$ Corps des nombres réels .

$f(z)$ La valeur de la fonction f en z.

$|z|$ Valeur absolue (ou Module) du complexe z.

$\Re z$ La partie réelle x de $z = x + iy$.

$\Im z$ La partie imaginaire y de $z = x + iy$.

$C(z, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ Cercle de centre z et de rayon $r > 0$.

$D(z, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ Disque ouvert de centre z et de rayon $r > 0$.

$\mathcal{C}(\Omega)$ L'ensemble de toutes les fonctions continues sur Ω.

$\mathcal{H}(\Omega)$ L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé i

Abstract ii

Notation iii

Introduction 1

1 Résultats préliminaires et matériels 3

1.1 Fonctions holomorphes 3

1.1.1 Points singuliers isolés. 5

2 Principe du maximum pour des domaines bornés 9

2.1 Principe du maximum pour des domaines bornés 9

2.1.1 Théorème de la valeur moyenne de Gauss 9

2.1.2 Théorème du module maximum (première forme) 12

2.1.3 Théorème du module maximum (deuxième forme) 13

2.1.4 Théorème du module minimum 14

2.2 Exemples illustratifs 15
2.3 Applications des principes du maximum et minimum 17
2.3.1 Théorème fondamental d'Algèbre 17

3 Principe du maximum pour des domaines non bornés **19**
3.1 Théorème des trois droites d'Hadamard 20
3.2 Théorème de Phragmen-Lindelöf 24

Conclusion **27**

Bibliographie **27**

INTRODUCTION

Une des formes faibles du principe du module maximum est la suivante : une fonction $f(z)$ holomorphe sur un domaine borné Ω est continue sur $\overline{\Omega}$, prend son module maximum sur $\partial\overline{\Omega}$ sauf si $f(z)$ est constante, le maximum n'est supposé que sur $\partial\Omega$.
En bref, si $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ où Ω est un domaine borné alors :

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)| .$$

Il est naturel de se demander s'il existe une extension raisonnable de ce théorème à des domaines non bornés .

Considérons d'abord l'exemple suivante : Soit $f(z) = \exp(\exp(-iz))$ sur la bande $\{z \in \mathbb{C}, |\Re z| \leq \frac{\pi}{2}\}$. Sur les bords, $f(z)$ devient $\exp(\mp \exp(y))$ parce que l'exposant $(\mp i \exp(y)$ est purement imaginaire $|f(z)| = 1$, mais sur l'axe imaginaire $f(z)$ devient $\exp(\exp(y))$, et donc $|f(z)|$ est non borné, en effet, ce comportement se produit sur chaque droite verticale de la bande ouverte. Ainsi dans ce cas, nous pouvons dire que le principe du maximum échoue spectaculairement, (En fait $|f(z)|$ dépasse 1 partout dans la bande ouverte, exactement contrairement au principe du maximum), cet exemple suggère la question suivante :
Supposons que nous ajoutions l'hypothèse que $|f(z)|$ est bornée dans Ω, peut-on conclure alors que : $\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$.

La réponse est en fait affirmative dans le cas d'une bande parallèle ; ceci est indiqué dans la présente mémoire intitulé " **Théorème général de principe du maximum des fonctions holomorphes pour des domaines non bornés**" .

Ce mémoire se compose de trois chapitres : Dans le premier chapitre, nous introduisons les propriétés des fonctions holomorphes et en particulier les fonctions entières d'une variable complexe.

Le deuxième chapitre est consacré à la preuve du principe du maximum pour des domaines bornés avec quelques exemples illustratifs.

Le dernier chapitre est une généralisation du principe du maximum pour des domaines non bornés (Le principe (méthode) de Phragmèn-Lindelof).

CHAPITRE 1

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ET MATÉRIELS

1.1 Fonctions holomorphes

Dans tout la suite soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1. ***(Limites)****[1, 7] Soit f est une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 exclu, la définition habituelle donne*

$$\lim_{z \to z_o} f = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, telque \quad 0 < |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon.$$

Définition 2. ***(Continuité)****[1, 7] On a*

$$f \text{ continue au point } z_0 \text{ si et seulement si } \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Définition 3. ***(Dérivation)****[1, 7] Soit f définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant z_0, on a*

$$f \text{ dérivable au point } z_0 \text{ si et seulement si } \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Définition 4. ***(Fonction holomorphe)***[1, 7] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que*

$$f \text{ holomorphe dans } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{C} \text{ si elle est dérivable en tout point de } \Omega.$$

Théorème 1. *[1, 7] Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ telle que $P = \Re f$ et $Q = \Im f$. Alors f est holomorphe sur Ω si et seulement si P et Q différentiable et*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Théorème 2. *[1, 7] Si f est holomorphe dans un ouvert Ω alors $P = \Re f$ et $Q = \Im f$ sont des fonctions harmoniques dans Ω (c'est-a-dire sont de classe C^2 et vérifient l'équation de Laplace $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans Ω.)*

Théorème 3. ***(Théorème de Cauchy)***[1, 7] *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω et Γ une courbe fermée simple orientée incluse dans Ω ainsi que son intérieur, alors $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Théorème 4. ***(Formule de Cauchy)*** *[1, 7] Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D contenant une courbe simple fermée Γ dont l'intérieur Δ est inclus dans D alors, pour tout point a de Δ, on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Théorème 5. *[1, 7] Si f est holomorphe dans un domaine D contenant une courbe fermée simple Γ dont l'intérieur Δ est inclus dans D, ses dérivées successives en un point a de Δ sont données par*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

.

Théorème 6. ***(Développement en série de Taylor)***[1, 7] *Toute fonction holomorphe dans un domaine D est développable en série entière autour de tout point z_0 de D, le développement étant convergent dans le plus grand disque centré en z_0 et inclus dans D. Les coefficients a_n du développement sont donnés par la formule*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du$$

Théorème 7. *(**Inégalités de Cauchy**)[1, 7] Soit f une fonction holomorphe dans un domaine contenant l'origine, $M(r)$ le maximum de $|f|$ sur le cercle $|z| = r$ inclus dans D, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $r^n|a_n| \leqslant M(r)$, où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Définition 5. *(**Fonction entière**)[1, 7, 3] Une fonction holomorphe dans tout le plan complexe est dite une fonction entière.*

Théorème 8. *(**Théorème de Cauchy-Hadamard**)[1, 7, 3] Le rayon de convergence R d'une série entière à coefficients complexes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donné par :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Proposition 1. *[1, 7, 3] L'ensemble des fonctions entières est identique à celui des séries entières dont le rayon de convergence est infini.*

Théorème 9. *(**Théorème de Liouville**)[1, 7, 3] Si f est une fonction définie et holomorphe sur tout le plan complexe, alors f est constante dès lors qu'elle est bornée.*

1.1.1 Points singuliers isolés.

[1, 7, 3, 11] Étudions les points en lesquels est violée l'holomorphie des fonctions. Commençons par les plus élémentaires de ces points.

Définition 6. *On dit qu'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier isolé d'une fonction f s'il existe un voisinage pointé de z_0 (i.e. un ensemble $\{0 < |z - z_0| < r\}$ si z_0 est fini ou un ensemble $\{R < |z| < \infty\}$ si $z_0 = \infty$) dans lequel f est holomorphe.*

On distingue trois types de points singuliers selon le comportement de f lorsque z tend vers un tel point.

Définition 7. *On dit qu'un point singulier z_0 d'une fonction f est*

1. *artificiel ou éliminable si $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = A < +\infty$;*
2. *un pôle si $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$;*
3. *essentiel si f ne possède ni une limite finie, ni une limite infinie lorsque $z \longrightarrow z_0$.*

Exemple 1. *Le point $z = 0$ est un point singulier éliminable pour la fonction $\frac{\sin z}{z}$ ceci découle du fait que pour $z \neq 0$ on a le développement suivant :*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...,$$

d'où il s'ensuit que $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Exemple 2. *Les fonctions $f(z) = \frac{1}{z^n}$, où $n > 0$ est un entier, présentent un pôle au point $z = 0$.*

Exemple 3. *Le point $z = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, car lorsque, par exemple, $z = x$ tend vers 0 suivant l'axe réel, les limites à droite et à gauche sont distinctes (la limite à droite est égale à l'infini, la limite à gauche, à 0) ; la fonction $e^{\frac{1}{z}} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}$, n'admet pas de limite lorsque $z = iy$ tend vers 0 suivant l'axe imaginaire.*

Remarque 1. *Il peut de toute évidence exister des points singuliers non isolés. Par exemple, la fonction $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$ présente des pôles en $z = \frac{1}{n}(n = \pm 1, \pm 2, ...)$, donc $z = 0$ est un point singulier non isolé qui est un point d'accumulation des pôles.*

Exemple 4. *La fonction*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + ... \tag{1.1}$$

présente des points singuliers de nature plus compliquée. D'après la formule de Cauchy-Hadamard, la série (2.1) converge dans le disque $\{z : |z| < 1\}$ et par suite la fonction f est holomorphe dans ce disque. Elle tend vers l'infini lorsque z tend vers 1 suivant l'axe réel, donc le point $z = 1$ est un point singulier de f. Or

$$f(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + ... = f(z) - z^2,$$

donc $f(z) = z^2 + f(z^2)$ tend aussi vers l'infini lorsque z tend vers -1 suivant un rayon du disque. De façon analogue, $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$, donc $f \to +\infty$ lorsque $z \to \pm i$ suivant un rayon du disque. D'une façon générale,

$$f(z) = z^2 + ... + z^{2^n} + f(z^{2^n}),$$

pour tout n naturel, donc $f \to +\infty$ lorsque z tend suivant un rayon vers tout point « dyadique » $z = e^{k.\frac{2\pi i}{2^n}}, (k = 0, 1, ..., 2^n - 1)$ du cercle. L'ensemble des points « dyadiques » étant partout dense sur le cercle $\{z : |z| = 1\}$, tout point de ce dernier est un point singulier de f. Donc f possède toute une ligne composée de points singuliers non isolés (une ligne singulière.)

Théorème 10. ***(Laurent.)***[1, 7] *Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine contenant la couronne $C_{z_0}(r, R)$ (centre z_o, rayons r et R, avec $0 < r < R$) et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R \tag{1.2}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \tag{1.3}$$

C_ρ désignant le cercle de centre z_0 et de rayon $\rho (r < \rho < R)$ parcouru dans le sens positif.

Définition 8. *La série (1.2) dont les coefficients sont définis par les formules (1.3) s'appelle série de Laurent de la fonction f dans la couronne $C_{z_0}(r, R)$. L'ensemble des puissances positives s'appelle partie régulière de cette série, celui des puissances négatives, partie principale .*

La nature d'un point singulier isolé $z = z_0$ est étroitement liée à celle de la série de Laurent de la fonction dans un voisinage pointé de z_0 (nous dirons plus brièvement série de Laurent au voisinage de a). Pour les points finis z_0 ce lien est exprimé par les trois théorèmes suivants.

Théorème 11. *Un point singulier isolé $z_0 \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est éliminable si et seulement si la série de Laurent de f au voisinage de z_0 ne contient pas la partie principale :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.4}$$

Remarque 2. *En prolongeant f par continuité au point z_0, i.e. en posant $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$, on obtient une fonction holomorphe en z_0 (c'est-à-dire $z \to z_0$ on élimine la singularité en z_0). Ceci justifie le terme de « point éliminable ». Nous conviendrons dans la suite que ces points sont réguliers et non pas singuliers pour la fonction étudiée.*

Théorème 12. *Un point singulier isolé $a \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est un pôle si et seulement si la partie principale de la série de f dans un voisinage pointé de z_0 ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls :*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad m > 0. \tag{1.5}$$

Théorème 13. *Un point singulier isolé z_0 d'une fonction f est essentiel si et seulement si la partie principale de la série de Laurent de f dans un voisinage pointé de z_0 contient une infinité de termes non nuls.*

Remarque 3. *Ce théorème est en fait déjà contenu dans les théorèmes 2.2 et 2.3 (si la partie principale contient une infinité de termes, le point z_0 ne peut être ni éliminable, ni un pôle, si z_0 est un point singulier essentiel, la partie principale ne peut ni pas exister, ni contenir un nombre fini de termes).*

CHAPITRE 2

PRINCIPE DU MAXIMUM POUR DES DOMAINES BORNÉS

2.1 Principe du maximum pour des domaines bornés

La première section présente une propriété remarquable des fonctions holomorphes de nature analytique c'est le principe du maximum.
Les principales références sur ce sujet sont [2], [5]

Avant d'énoncer les différentes formes du principe du maximum pour une fonction holomorphe, nous donnons un théorème simple mais utile.

2.1.1 Théorème de la valeur moyenne de Gauss

Théorème 14. *Supposons que f est holomorphe dans le disque fermé $|z - z_0| \leq r$, alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Remarque 4. *l'intégrale du second membre s'appelle la moyenne de f sur le cercle z_0 et de rayon r.*

Preuve. Par la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Écrivez cela en terme de paramétrisation

$z = z_0 + re^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ dz = ire^{i\theta} d\theta.$

Alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Si $f(z)$ est constante (disons $f(z) = c$), alors le théorème de Gauss donne la fait évidant que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = c.$$

Notre prochain théorème montre que pour les fonction non constante, il doit y avoir quelques points sur le cercle $|z| = r$ pour lequel $|f(z)| > |f(z_0)|$. □

Nous donnons maintenant différentes formulations du principe du maximum. Avant ça, on va donnée les trois lemmes suivants plus utiles.

Lemma 1. ***(Principe des zéros isolés)*** *Supposons que $f(z)$ est holomorphe dans un domaine D, et que $\{z_n\}$ est une suite de points distincts convergeant vers un point z_0 dans D. Si $f(z_0) = 0$ pour chaque n, alors $f(z) \equiv 0$ tout au long de D.*

Lemma 2. ***(Principe d'identité)*** *Supposons que $\{z_n\}$ est une suite de points ayant un point limite dans un domaine D. Si $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans D, avec $f(z_n) = g(z_n)$ pour chaque n, alors $f(z) \equiv g(z)$ tout au long de D.*

Preuve. Soit z_0 le point limite de $\{z_n\}$. D'après le théorème qui dit : "Un point z_0 est un point limite d'un ensemble A si et seulement s'il existe une suite de points distincts dans A convergeant vers z_0." Il existe un sous-suite $\{z_{n_k}\}$ convergeant vers z_0.
En posant $h(z) = f(z) - g(z)$, on voit que $h(z_{n_k}) = 0$ pour tous les points de la suite $\{z_{n_k}\}$.
Une application du théorème d'unicité montre que $h(z) \equiv 0$ dans D et le résultat suit. □

Lemme 1. ***(lemme de croissance)*** *Supposant que* $P(z) = a_o + a_1 z + ... + a_n z^n,\ a_n \neq 0$. *Alors il existe un* r *suffisamment grand tel que*

$$\frac{|a_n|}{2}|z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3|a_n|}{2}|z|^n.$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| \geq r$.

Preuve. Pour $z \neq 0$, on a

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right).$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|z|^n \left(a_n - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right|\right) &\leq |P(z)| \\ &\leq |z|^n \left(a_n + \left|\frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right|\right).\end{aligned}$$

Pour $|z| > 1$ et $n > k$, on a $|z|^n > |z|^k$ et donc

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + ... + |a_0|}{|z|} := \frac{K}{|z|}.$$

Ainsi

$$|z|^n \left(|a_n| - \frac{K}{|z|}\right) \leq |z|^n \left(|a_n| + \frac{K}{|z|}\right). \quad (|z| \geq 1).$$

Le résultat suit maintenant lorsque $\frac{K}{|z|} < \frac{|a_n|}{2}$. i.e., lorsque

$$|z| \geq \max\{1, 2k/|a_n|\}.$$

□

2.1.2 Théorème du module maximum (première forme)

Théorème 15. *Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine D, alors $|f(z)|$ ne peut attendre un maximum dans D que si $f(z)$ est constante .*

Preuve. Supposons $|f(z)|$ atteint son maximum en un point z_0 de D, choisissez un disque $|z - z_0| \leq r$ contenu dans le théorème de la valeur moyenne de D. Gauss donne :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta, \tag{2.1}$$

pour que

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

par hypothèse

$$\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| \leq |f(z_0)|, \tag{2.2}$$

et donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| \, d\theta = |f(z_0)|. \tag{2.3}$$

En combinant (2.1) et (2.3) on a :

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

et donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(|f(z_0)| - \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|\right) d\theta = 0.$$

D'après (2.2) l'intégrale est positif et donc

$$\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| = |f(z_0)| \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ainsi $|f(z)| = |f(z_0)|$ pour chaque z sur $|z - z_0| = r$. Puisque r est arbitraire

$$|f(z)| = |f(z_0)|,$$

pour tout point à l'intérieur et sur $|z - z_0| = r$.

Rappelons qu'une fonction holomorphe de module constant dans un domaine est constante dans ce domaine, donc $f(z)$ est constante sur $|z - z_0| \leq r$. Du théorème d'identité, il s'ensuite

que $f(z)$ est constante dans tout le domaine. Par conséquent, $|f(z)|$ ne peut pas atteindre un maximum à un point de D sauf si $f(z)$ est constante, supposons que f est holomorphe sur un domaine D et continue sur le bord ∂D. D'après le théorème (15) $|f(z)|$ ne peut atteindre son maximum dans D que si $f(z)$ est constante. □

Supposons que f est holomorphe sur un domaine D et continue sur le bord ∂D. D'après le théorème 15, $|f(z)|$ ne peut atteindre son maximum dans D que si $f(z)$ est constante. Cela soulève les questions suivantes :

— Est-ce que $|f(z)|$ atteint son maximum sur ∂D ?

— Est-ce que $|f(z)| \leqslant M$ sur D quand $|f(z)| \leqslant M$ sur ∂D ?

En général, la réponse aux deux questions est négative.

2.1.3 Théorème du module maximum (deuxième forme)

Théorème 16. *Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine borné D et continue sur son adhérence $\overline{D}$, alors $|f(z)|$ atteint un maximum sur la frontière. De plus $|f(z)|$ n'atteint pas un maximum en un point intérieur que si $f(z)$ est constante.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que $\overline{D}$ est un ensemble compact car D est borné. Ainsi, d'après le théorème qui dit : "Si $f(z)$ est continue sur un ensemble compact E. Alors $|f(z)|$ atteint un maximum et un minimum sur E." Comme $|f(z)|$ est une fonction réelle continue sur $\overline{D}$, $|f(z)|$ atteint un maximum sur $\overline{D}$. Selon la première forme du théorème, le maximum ne peut atteindre un point intérieur. Le maximum doit donc atteint sur la frontière. □

Remarque 5. *Le domaine n'a pas besoin d'être simplement connecté. Par exemple, le module de toute fonction holomorphe dans l'anneau ouvert $\frac{1}{R} < |z| < R$ et continue sur l'anneau fermé $\frac{1}{R} \leq |z| \leq R$ doit atteindre son maximum sur la frontière. Le module de la fonction $f(z) = z$ atteint son maximum sur la frontière extérieure, alors que le module de $f(z) = 1/z$ atteint le maximum sur la frontière intérieure.*

Remarque 6. *Le théorème 16 n'est pas vrai si D n'est pas borné. On a les deux exemples suivantes :*

Exemple 5. *Soit $f(z) = e^z$ et $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, alors ∂D est l'axe imaginaire et $|f(iy)| = |e^{iy}| = 1$, c-à-d : $f(\partial D) = C(0,1)$(le cercle d'unité), mais $|f(z)| = e^x \longrightarrow \infty$ lorsque $z \longrightarrow \infty$, le long de l'axe réel positif. Ainsi, l'hypothèse que D soit borné est essentiel dans le théorème 16.*

Exemple 6. *Soit $f(z) = e^{iz^2} = e^{i(x^2-y^2)}e^{-2xy}$ de sorte que*

$$|f(z)| = e^{-2xy}$$

. Si $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0, \Im z < 0\}$. Alors, pour les points sur la frontière ∂D, soit $x = 0$ et $y = 0$ et donc $|f(z)| = 1$ sur ∂D.
Cependant, pour $y = -x$ $(x > 0)$ on a : $|f(z)| = e^{2x^2} \longrightarrow \infty$ lorsque $x \longrightarrow \infty$.

Ensuite les deux exemples montrent que le module d'une fonction holomorphe n'a pas besoin atteint son maximum sur le bord ∂D et le maximum du module sur la frontière ne peut pas être la valeur maximale à l'intérieur du domaine D sauf si D est borné.

2.1.4 Théorème du module minimum

Il est possible que le module d'une fonction holomorphe non constante atteigne un minimum dans un domaine, et non sur sa frontière. Pour le voir, considérons $f(z) = z^n$ sur $|z| \leqslant r$. Alors

$$0 = |f(0)| = \min_{|z|\leq r} |f(z)| < \min_{|z|=r} |f(z)| = r^n.$$

et donc le $\min\{|f(z)| : |z| \leqslant r\}$ est atteint au point intérieur 0. Le $\max\{|f(z)| : |z| \leqslant r\} = r^n$ est atteint au point frontière r, sur $|z| = r$. Cependant, nous avons la contrepartie suivante du théorème du module maximum.

Théorème 17. *Supposons que $f(z)$ est holomorphe dans un domaine D, et que $f(z) \neq 0$ dans D. Alors $|f(z)|$ ne peut pas atteindre un minimum dans D sauf si f(z) est constante. Si $f(z)$ est aussi continue sur $\overline{D}$ ($\overline{D}$ compact), alors $|f(z)|$ atteint un minimum sur la frontière.*

Preuve. Si $f(z) \neq 0$ dans D, alors $\dfrac{1}{f(z)}$ est holomorphe dans D. La fonction $|f(z)|$ atteint un minimum en un point z_0 de D si et seulement si $\dfrac{1}{|f(z)|}$ atteint un maximum à z_0.
Le résultat découle maintenant de l'application du théorème du module maximal à $\dfrac{1}{f(z)}$.

Sans surprise, le théorème fondamental d'algèbre peut également être prouvé du théorème du module minimum, car, au vu du lemme de croissance , lorsque r est assez grand le polynôme

$$|P(z)| > |P(z_0)| = |a_0| \qquad (|z| = r).$$

Pour préserver la validité du théorème du module minimum, l'hypothèse $P(z) \neq 0$, dans $|z| < r$ doit être faux .Autrement dit, $P(z)$ admet un zéro sur le disque $|z| < r$. □

2.2 Exemples illustratifs

Soient les deux exemples illustratifs suivants :

Exemple 7. *Supposons que nous souhaitions trouver le module maximal de* $f(z) = 3z - 2i$ *sur* $|z| \leq 3$.
Pour faire cela nous calculons :

$$|f(z)|^2 = |3z - 2i|^2 = 9\,|z|^2 + 12\Re(iz) + 4 = 9\,|z|^2 - 12\Im z + 4.$$

Par le théorème du module maximum deuxième forme, $\max_{|z|\leq 3} |f(z)|$ *se produit à la frontière* $|z| = 3$.
Donc sur $|z| = 3$,

$$|f(z)| = \sqrt{9(3)^2 - 12\Im z + 4} = \sqrt{85 - 12\Im z}.$$

La dernière expression atteint son maximum quand $\Im z$ *atteint son minimum sur* $|z| = 3$, *c'est-à-dire au point* $z = -3i$. *Ainsi,*

$$\max_{|z|\leq 3} |f(z)| = \sqrt{85 - 12(-3)} = \sqrt{121} = 11.$$

Alternativement, comme $|f(z)|$ *atteint son maximum sur* $|z| = 3$, *on considère* $z = 3e^{i\theta}$ *et calculons*

$$|f(z)| = \left|3(3e^{i\theta}) - 2i\right| = \sqrt{85 - 36\sin\theta},$$

cette expression est maximale lorsque $-\sin\theta$ *est maximale, c'est-à-dire lorsque* $\theta = -\pi/2$. *Ainsi, la valeur maximale de* $|f(z)|$ *sur* $|z| \leq 3$ *est 11.*

Remarque 7. *Plus généralement, on a :*
Si $0 \neq a \in \mathbb{C},\ 0 \neq b \in \mathbb{C}$ *et* $f(z) = az + b$ *sur* $|z| \leq R$, *alors*

$$\max_{|z|\leq R} |az + b| = \max_{|z|\leq 1} |aRz + b| = |a|\, R + |b|\,.$$

Et la valeur maximale est atteinte en z_0 *sur la frontière* $|z| = 1$, *où* $\arg z_0 = \arg b - \arg a$.
Cela découle évidemment de

$$az + b = |a|\, e^{i \arg a} z + |b|\, e^{i \arg b} = e^{i \arg b} \left[|a|\, z e^{-i(\arg b - \arg a)} + |b| \right].$$

De plus, il est facile de voir que

$$\max_{|z|\leq 1} |az^n + b| \leq |a| + |b|\,.$$

Exemple 8. *Si* $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 - 10}$ *pour* $|z| \leq 2$, *alors* f *est holomorphe à l'intérieur et sur* $|z| = 2$. *Alors* $|f(z)|$ *atteint sa valeur maximale sur* $|z| = 2$. *Pour* $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, *on a*

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{|z|^2}{\left|(2e^{i\theta})^3 - 10\right|} \\ &= \frac{4}{\sqrt{(8\cos 3\theta - 10)^2 + 8^2 \sin^2 3\theta}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{64 + 100 - 160\cos 3\theta}}. \end{aligned}$$

Cette expression est maximale lorsque $-\cos 3\theta$ *est minimum. Clairement, la valeur minimale est lorsque* $\cos 3\theta = 1$, *c-à-d, lorsque* $\theta = 0,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3,\ 2\pi$. *Ainsi, la valeur maximale de* $|f(z)|$ *est* 2.

Exemple 9. *Considérons* $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z}$ *sur* $\overline{D} = \{1 \leq |z| \leq 2\}$.
On souhaite trouver des points où $|f(z)|$ *a des valeurs maximales et minimales. Pour ce faire, nous posons* $z = re^{i\theta}$. *Alors sur* $|z| = r$,

$$|f(z)| = \frac{e^{r^2 \cos 2\pi}}{r}.$$

Et le maximum se produit lorsque $\cos 2\theta = 1$ *et le minimum se produit lorsque* $\cos 2\theta = -1$.

Ainsi

$$\max_{|z|=r}|f(z)| = \frac{e^{r^2}}{r} \quad \textit{et} \quad \min_{|z|=r}|f(z)| = \frac{e^{-r^2}}{r}.$$

Notez que le maximum se produit lorsque $\theta = 0,\ \pi$ *tandis que le minimum se produit lorsque* $\theta = \pi/2,\ \ 3\pi/2$, *en particulier,*

$$\max_{z\in\overline{D}}|f(z)| = \frac{e^4}{2} \quad \textit{et} \quad \min_{z\in\overline{D}}|f(z)| = \frac{1}{2e^4}.$$

2.3 Applications des principes du maximum et minimum

Le principe du module maximum est utilisé pour prouver de nombreux théorèmes importants dans l'analyse complexe : **le théorème fondamental de l'Algèbre**, le lemme de Schwarz, le théorème de Borel-Caratheodory, le théorème des trois droites d'Hadamard.

2.3.1 Théorème fondamental d'Algèbre

Théorème 18. *Chaque polynôme non constante a au moins un zéro .*

Preuve. 1. **Première méthode :** Comme l'application du théorème du module maximum, nous reprochons le théorème fondamental d'Algèbre.

Supposant $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n,\ a_n \neq 0$, n'a pas de zéros et alors $1/P(z)$ est une fonction entière non constante sans zéros.

Au vu du lemme de croissance $1/P(z) \longrightarrow 0$, quand $z \longrightarrow \infty$, lorsque r est assez grand,

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| < \left|\frac{1}{P(0)}\right| = \left|\frac{1}{a_0}\right| \quad (|z| = r).$$

Ainsi la fonction continue $1/P(z)$ n'atteint pas de maximum sur la frontière de l'ensemble compact $|z| \leq r$. D'où $|1/P(z)|$ doit atteindre un maximum en un point intérieur, contredisant le théorème du module maximum. Par conséquent, $P(z)$ y'a un zéro dans le disque $|z| \leq r$, et la preuve est complète.

2. **Deuxième méthode** Sans surprise, le théorème fondamental de l'algèbre peut également être prouvé à partir du théorème du module minimum, car, compte tenu du

Lemme 1, lorsque r est suffisamment grand, le polynôme

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \quad (a_n \neq 0),$$

satisfait l'inégalité

$$|P(z)| > |P(0)| = |0| \quad (|z| = r).$$

Pour préserver la validité du théorème du module minimum, l'hypothèse $P(z) \neq 0$ dans $|z| < r$ doit être fausse. C'est-à-dire que $P(z)$ doit avoir un zéro sur le disque $|z| < r$.

□

CHAPITRE 3

PRINCIPE DU MAXIMUM POUR DES DOMAINES NON BORNÉS

Principe du maximum pour des domaines non bornés

Les principales références sur ce sujet sont [4, 5, 11, 9].

Pour un domaine borné Ω, le principe du maximum implique que si f est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors

$$\sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|.$$

Pour un domaine Ω non borné, ceci n'est plus vrai. Par exemple, considérons

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < \pi/2\}.$$

Et

$$f(z) = \exp(\exp(z)).$$

Pour x réel, on a

$$f(x \pm i\pi/2) = \exp(\pm i \exp(x)).$$

Et donc $|f(x \pm i\pi/2)| = 1$.

Autrement dit, pour tout $z \in \partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = \pm\pi/2\}$, on a $|f(z)| = 1$.

En revanche, $f(x) \to +\infty$ très rapidement quand $x \to +\infty$ le long de l'axe positif réel qui est inclus dans Ω. Ainsi, il n'y a aucun espoir de pouvoir contrôler le comportement de f à l'intérieur par le comportement de f sur la frontière.

Cependant, si au préalable, on impose un contrôle de f à l'intérieur, alors on peut espérer obtenir des théorèmes de la forme suivante : si f est holomorphe sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ et bornée sur $\partial\Omega$ et si

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \quad (z \in \Omega),$$

où g est une fonction réelle qui tend "assez lentement" vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$ dans Ω. Alors f est en fait bornée dans Ω.

L. Phragmen et E. Lindelöf ont développé une méthode qui permet de démontrer de tels résultats. il ya deux situations concrêtes où la méthode de Phragmen-Lindelöf s'applique.

Dans le premier cas, nous supposerons f bornée sur Ω et le théorème améliorera la borne ; dans le deuxième cas, nous imposerons à f une hypothèse de croissance assez faible mais qui excluera malgré tout le cas de la fonction $f(z) = exp(exp(z))$ (qui a donné précédement le contre-exemple au principe du maximum sur un domaine non borné).

3.1 Théorème des trois droites d'Hadamard

Théorème 19. *Soient deux réels a, b tels que $a < b$ et soit Ω la bande définie par*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z) < b\}.$$

On suppose que f est une fonction holomorphe sur Ω, continue et bornée sur $\overline{\Omega}$. Notons

$$M(x) = \sup\{|f(x + iy)| : -\infty < y < +\infty\}.$$

Pour tout $a \leq x \leq b$. *Alors on* a

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}, \quad (a \leq x \leq b). \tag{3.1}$$

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, introduisons la fonction f_ε définie dans $\overline{\Omega}$ par

$$f_\varepsilon(z) = \exp\left(\varepsilon z^2 + \lambda z\right) f(z), \quad (z \in \overline{\Omega}).$$

La fonction f_ε est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.
De plus, pour $z = x + iy \in \overline{\Omega}$, on a

$$\left|\exp\left(\varepsilon z^2 + \lambda z\right)\right| = \exp\left(\varepsilon\left(x^2 - y^2\right) + \lambda x\right) = \exp\left(\varepsilon x^2 + \lambda x\right) \exp\left(-\varepsilon y^2\right). \tag{3.2}$$

Comme la fonction $x \longmapsto \exp\left(\varepsilon x^2 + \lambda x\right)$ est continue sur le compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et que f est bornée sur $\overline{\Omega}$, il existe une constante $K = K(\varepsilon, \lambda)$ telle que

$$|f_\varepsilon(z)| \leq K \exp\left(-\varepsilon y^2\right).$$

Pour tout $z = x + iy \in \overline{\Omega}$.
En particulier,

$$\lim_{|y| \to +\infty} f_\varepsilon(z) = 0, \tag{3.3}$$

uniformément par rapport à $a \leq x \leq b$.
D'autre part, en utilisant (3.2), on a

$$|f_\varepsilon(a + iy)| \leq M(a) \exp\left(\varepsilon a^2 + \lambda a\right) \exp\left(-\varepsilon y^2\right) \leq M(a) \exp\left(\varepsilon a^2 + \lambda a\right), \tag{3.4}$$

et

$$|f_\varepsilon(b + iy)| \leq M(b) \exp\left(\varepsilon b^2 + \lambda b\right) \exp\left(-\varepsilon y^2\right) \leq M(b) \exp\left(\varepsilon b^2 + \lambda b\right), \tag{3.5}$$

en utilisant 3.3, il existe $y_0 > 0$ tel que

$$|y| \geq |y_0| \Rightarrow |f_\varepsilon(x + iy)| \leq M, \quad (a \leq x \leq b), \tag{3.6}$$

où

$$M = \max\left(M(a)\exp\left(\varepsilon a^2 + \lambda a\right), M(b)\exp\left(\varepsilon b^2 + \lambda b\right)\right).$$

Considérons R le rectangle dans Ω de sommets $a + iy_0,\ a - iy_0,\ b + iy_0$ et $b - iy_0$. D'après (3.4), (3.5) et (3.6), on a

$$|f_\varepsilon(z)| \leq M,$$

pour tout $z \in \partial R$ et le principe du maximum implique alors que

$$|f_\varepsilon(z)| \leq M,$$

pour tout $z \in R$.En utilisant une nouvelle fois (3.6), on en déduit finalement que

$$|f_\varepsilon(z)| \leq M,$$

pour tout $z \in \overline{\Omega}$. Fixons $z \in \Omega$ et faisons tendre $\varepsilon \to 0$. On obtient

$$|f(z)\exp(\lambda z)| \leq \max(M(a)\exp(\lambda(a), M(b)\exp(\lambda b)).$$

D'où

$$M(x) \leq \max(M(a)\exp(-\lambda(x-a)), M(b)\exp(-\lambda(x-b))).$$

Il reste à minimiser le membre de droite en λ. Ce second membre est minimum lorsque

$$M(a)\exp(-\lambda(x-a)) = M(b)\exp(-\lambda(x-b)),$$

ce qui arrive si

$$\frac{M(a)}{M(b)} = \exp(\lambda(b-a)),$$

soit

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\log\left(\frac{M(a)}{M(b)}\right).$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} M(a)\exp(-\lambda(x-a)) &= M(a)\exp\left(\frac{x-a}{b-a}\log\left(\frac{M(a)}{M(b)}\right)\right) \\ &= M(a)\left(\frac{M(b)}{M(a)}\right)^{\frac{x-a}{b-a}} \\ &= M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}M(a)^{\frac{b-x}{b-a}}. \end{aligned}$$

Et donc

$$M(x) \leq M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}M(a)^{\frac{b-x}{b-a}}.$$

Ce qui donne (3.1) et achève la preuve. □

Remarque 8. *Remarquons que (3.1) implique*

$$M(x) \leq \max(M(a), M(b)).$$

De sorte que $|f|$ ne dépasse pas dans Ω la borne supérieur de f sur la frontière de Ω. Autrement dit, si on suppose que f est une fonction holomorphe sur une bande, continue et bornée sur la bande fermé, alors f vérifie le principe du maximum.

Corollaire 1. *Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z) < b\}$ continue et bornée sur $\overline{\Omega}$. Alors la fonction, $t \longrightarrow \log M(t)$ est une fonction convexe sur $[a, b]$.*

Preuve. Soient $x, y \in [a, b],\ x < y$ et $0 \leq \lambda \leq 1$.

En appliquant le théorème précédent à x et y, on obtient que

$$M((1-\lambda)x + \lambda y)^{y-x} \leq M(x)^{(1-\lambda)(y-x)}M(y)^{\lambda(y-x)}.$$

Soit en passant un logarithme

$$(y-x)\log M((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)(y-x)\log M(x) + \lambda(y-x)\log M(y),$$

et en simplifiant par $y - x$, on a

$$\log M((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\log M(x) + \lambda \log M(y),$$

ce qui donne exactement l'inégalité de convexité de $\log M(t)$. □

3.2 Théorème de Phragmen-Lindelöf

Théorème 20. *Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < \pi/2\}$, et soit f une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose qu'il existe des constantes $\alpha < 1$ et $A < \infty$ telles que*

$$|f(z)| \leq \exp(A \exp(\alpha|x|)), \quad z = x + iy \in \Omega, \tag{3.7}$$

et

$$|f(z)| \leq 1, \quad z \in \partial\Omega. \tag{3.8}$$

Alors $|f(z)| \leq 1$, pour tout $z \in \Omega$.

Remarque 9. *Le théorème se généralise facilement à une bande de la forme*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a < \Im(z) < b\}.$$

Preuve. Soient $\beta > 0$ tel que $\alpha < \beta < 1$ et $\varepsilon > 0$. Définissons

$$h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon(\exp(\beta z) + \exp(-\beta z))), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Pour $z = x + iy \in \overline{\Omega}$, on a

$$\Re(\exp(\beta z) + \exp(-\beta z)) = (\exp(\beta x) + \exp(-\beta x)) \cos(\beta y) \geq \delta(\exp(\beta x) + \exp(-\beta x))$$

où $\delta = \cos(\beta\pi/2) > 0$, (puisque $|\beta| < 1$).

Donc

$$|h_\varepsilon(z)| = \exp(-\varepsilon\Re(\exp(\beta x) + \exp(-\beta x))) \leq \exp(-\varepsilon\delta(\exp(\beta x) + \exp(-\beta x))) \leq 1,$$

pour tout $z \in \overline{\Omega}$.

En utilisant (3.7) et (3.8), on en déduit que

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1, \quad z \in \partial\Omega, \tag{3.9}$$

et

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \exp[(A\exp(\alpha|x|) - \varepsilon\delta(\exp(\beta x) + \exp(-\beta x))], \quad z \in \overline{\Omega}. \tag{3.10}$$

Comme $\varepsilon\delta > 0$ et $\beta > \alpha$, le membre de droite dans (3.10) tend vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$.

Ainsi il existe $x_0 > 0$ tel que

$$\exp[A\exp(\alpha|x|) - \varepsilon\delta(\exp(\beta x) + \exp(-\beta x))] \leq 1.$$

Pour tout $|x| \geq x_0$. Ainsi avec (3.10), on obtient que

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1. \tag{3.11}$$

Pour tout $z \in \overline{\Omega}$, $|\Re(z)| \geq x_0$.

Soit R le rectangle de sommet $x_0 + i\pi/2, x_0 - i\pi/2$, $-x_0 + i\pi/2$ et $-x_0 - i\pi/2$.

En utilisant (3.9) et (3.11), on voit que

$$|f(z)h_\varepsilon| \leq 1,$$

pour tout $z \in \partial R$ et le principe du maximum implique que

$$|f(z)h_\varepsilon| \leq 1,$$

pour tout $z \in R$.

Finalement en utilisant une nouvelle fois (3.11), on obtient que

$$|f(z)h_\varepsilon| \leq 1.$$

Pour tout $z \in \overline{\Omega}$.

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on a $h_\varepsilon(z) \to 1$ pour tout z et on en déduit que

$$|f(z)| \leq 1,$$

pour tout $z \in \Omega$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Remarque 10. *Remarquons que la condition* $\alpha < 1$ *dans le théorème (20) est optimale. En effet, comme on l'a vu au début de la section, la fonction* $\exp(\exp(z))$ *fournit un contre-exemple au résultat avec* $\alpha = 1$.

CONCLUSION

Les théorèmes dits du tupe **Phragmén-Lidenlöf** permettent de conclure que f est bornée en imposant quelques restrictions supplémentaires sur f.
Les théorèmes du tupe **Phragmén-Lidenlöf** semblent être très spécialisés en première vue, néanmoins ils ont des applications concrètes extrêmement intéressantes.
Dans la littérature, il existe de nombreux exemples du principe de **Phragmén-Lidenlöf** appliqué à des domaines non bornées de types différents, et une version de ce principe peut également être appliquée de manière similaire aux fonctions sous-harmoniques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.Genet,G.Pupion,analyse Moderne 2,fonctions d'une variable complexe intégration calcul différentiel équations aux dérivées partielles

[2] Herb Silverman, Complex Variables with Applications.2006 Birkhäuser Boston.

[3] A.S.B,Holland,Introduction to the Theory of Entire Functions, Acadrmic Press New York and London 1973.

[4] I Chalendar, E Fricain, Complements en analyse Cours et Exercices. (Master (Mathématiques Pures) 2010-2011)

[5] Joseph Bak , Donald J. Newman, Complex Analysis.2006 Birkhäuser Boston.

[6] A.I.Markushevich,Theory of Functions of a Complex Variable, VolumeII

[7] R.Murray ,L.Seymour ,Complex Variables with an introduction to CONFORMAL MAPPING and its applications

[8] L.A.Rubel (1996), Entire and Meromorphic Functions, Series : Universitext VIII, Springer-Verlag, Berlin.

[9] W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1974.

[10] S.Saks,A.Zygmund, Analytic functions. Masson, 1970.

[11] Srishti. Chatterji, Cours d'analyse. 2, Analyse complexe. Lausanne ; Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.