RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIQUE

UNIVERSITÉ DR. YAHIA FARÈS DU MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE DE LA MATIÈRE



Thèse intitulée :

ÉTUDE NUMÉRIQUE ET ANALYTIQUE DU TRANSFERT THERMIQUE ET DE LA DISPERSION D'ESPÈCES PAR CONVECTION NATURELLE DANS DES COUCHES POREUSES

EST PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENSTION
DU DIPLÔME DE DOCTORAT EN GÉNIE MÉCANIQUE
Option : Mécanique Numérique

Par

REBHI Redha

Soutenue le 22/10/2016

DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

MAMOU Mahmoud	Professeur	NRC/Canada	Directeur de recherche
ABDELLAH-ELHADJ Abdellah	Professeur	U. Médéa	Président
KORICHI Abdelkader	Professeur	U. Médéa	Examinateur
BOUAZIZ Mohamed-Nadjib	Professeur	U. Médéa	Examinateur
NAIT BOUDA-Nora	Professeur	USTHB	Examinateur
ALLICHE Mounir	MC	U. Médéa	Membre invité

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

À mon père ***Abdelkader*** *et ma mère* ***Kheira***,

À la mémoire de mes grands-parents,

À mes frères et sœurs : ***Ilyes***, ***Mohamed***, ***Fatiha***, ***Karima***,

À toute la famille ***Rebhi***,

et À tous ceux qui me sont chers.

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu Créateur des univers, l'Omniscient, Qui m'a donné la force, le courage et l'endurance jusqu'à l'accomplissement de ce travail.

La présente thèse a été réalisée sous la supervision du Professeur-chercheur **Mamou Mahmoud**, directeur de recherche. Je désire tout d'abord remercier chaleureusement et vivement monsieur **Mamou Mahmoud** pour l'aide appréciable, conseils précieux et l'encadrement adéquat pour mener à terme cette thèse. Ma profonde gratitude et mes remerciements les plus chaleureux vont particulièrement à mon directeur de recherche pour la confiance qu'il m'a accordée et pour ses idées originales qui ont servi à enrichir cette thèse.

Mes remerciements vont également à **M. Alliche Mounir et M. Korichi Abdelkader** Professeurs dans le département de génie de la matière, Université de Médéa pour leurs encouragements et conseils précieux.

Je suis aussi très reconnaissant envers M. **Patrick Vasseur** Professeur à l'Ecole Polytechnique, Université de Montréal au Canada pour les multiples discussions qui m'ont éclairé sur les problèmes traités sur la thermo-diffusion et sur la convection en milieux poreux. Il m'a fait découvrir l'expérimentation physique et n'a cessé de me donner des conseils issus de sa longue expérience dans ce domaine.

Je désire remercier le professeur **Abdellah-Elhadj Abdellah** directeur du laboratoire de mécanique physique et modélisation mathématique (LMP2M) pour leur aide et leur disponibilité et le personnel du département de génie de la matière et, en particulier, celui de la section génie mécanique.

Je tiens également à adresser mes remerciements au Prof. **Abdellah-Elhadj Abdellah** pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse. Je remercie également les professeurs **Korichi Abdelkader, Bouaziz Mohamed-Nadjib, Nait-Bouda Nora** et **Alliche Mounir** pour avoir bien accepté d'examiner cette thèse et de participer à mon jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail de recherche, malgré leurs multiples occupations.

Mes remerciements vont également à M. **Hadidi Noureddine**, Mme. **Saadi Saida**, M. **Ouazaa Nabil**, M. **Benterki Abd-Essalem**, M. **Loucine Ayoub,** M. **Tahraoui Samir,** M. **Rahmani Mohamed** et M. **Amrouche Abd-Essalem** pour leurs aides appréciables et leur soutien permanent et sans relâche durant tout cette période de formation doctorale.

J'aimerais adresser un gros merci et exprimer mon extrême gratitude à toute ma famille pour leur patience et leur encouragement tout au long de ces années d'étude et de recherche.

Je remercie énormément mes parents **Abdelkader** et **Kheira** qui ont été présents avec moi depuis le début ainsi que mes frères et sœurs, **Ilyes**, **Mohamed**, **Fatiha** et **Karima**.

Rebhi Resha

RÉSUMÉ

Dans la présente thèse, on a étudié analytiquement et numériquement les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans des milieux poreux. La géométrie considérée est une cavité rectangulaire inclinée contenant un milieu poreux saturé par un fluide ou mélange de fluides. Dans cette investigation, les écoulements convectifs sont pilotés par des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleur et de masse) ou Dirichlet (température et concentration constantes imposées). Le milieu poreux est modélisé à l'aide du modèle de Dupuit-Darcy, qui comporte l'effet de la force de la trainée de forme. Le problème est régi par un ensemble d'équations différentielles non linéaires et fortement couplées appelées équations gouvernantes, en l'occurrence l'équation de la conservation de la masse (équation de continuité), l'équation de mouvement, l'équation de l'énergie et l'équation de la concentration. Ce problème est gouverné par différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Rayleigh thermique, R_T , le nombre de Prandtl modifie, P_r^*, le rapport de force de volume, N , le nombre de Lewis, Le , le rapport de forme de la cavité, A et la porosité normalisée, ε , de la matrice poreuse. On utilise deux approches distinctes et complémentaires : la première, c'est l'approche d'une solution analytique valide pour une cavité élancée $(A >> 1)$ développée sur la base du concept de l'écoulement parallèle lorsque la cavité est soumise à des conditions aux frontières de type Neumann ; la deuxième, c'est l'approche d'une méthode aux différences finies employées pour l'obtention des solutions numériques des équations gouvernantes générales.

Pour les valeurs des paramètres de contrôle considérées dans cette étude, on obtient un bon accord entre les résultats analytiques et numériques. Selon la valeur du rapport des forces de volume, *N*, deux types d'écoulement convectifs sont étudiés : la convection à simple diffusion (N=0) la cavité soumise à un gradient thermique vertical constant et la convection double diffusive (N≠0) les parois horizontales de la cavité sont soumises à des gradients de température et de concentration constants. Il faut mentionner que les résultats présentés ici ne concernent que le cas des flux opposés (N<0). Pour cette situation, on sait qu'en l'absence d'effet de la trainée de forme, le début du mouvement se produit à un nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous} , qui dépond seulement de N et Le . Par la suite, le cas où les forces de volume sont de même intensité mais de sens opposé $(N = -1)$ sont étudiées dans le cas d'une cavité verticale. Pour cette situation, les deux cas où la convection naturelle est induite par

double diffusion $(S_r = 0)$ et effet de Soret $(S_r = 1)$ sont étudiés. Des nouveaux phénomènes de bistabilité ont surgi lorsque le début de la convection souscritique se déplace à proximité ou au-delà du seuil de convection supercritique, soit à des flux de chaleur et de masse imposés ou à une température et concentration imposées. Pour étudier la stabilité de certaine configuration géométrique, on utilise une nouvelle technique générale basée sur la théorie de stabilité linéaire et sur la méthode des éléments finis. La théorie de la stabilité linéaire nous permet alors de prédire le seuil critique de déclenchement de la convection en fonction des paramètres de contrôle. Aussi la stabilité de l'état convectif, déjà prédit par le concept de l'écoulement parallèle, est investie dans le but de prédire l'existence de la bifurcation de Hopf, R_{TC}^{Hopf} , qui caractérise le point de transition de l'état de convection stable vers l'état de convection instable (oscillante).

Mot clés : convection naturelle, milieu poreux, effet de la trainée de forme, bistabilité, convection souscritique, convection supercritique, Hopf bifurcation, transfert de chaleur et de masse.

ABSTRACT

In this study, the heat and mass transfer by natural convection in porous media has been analytically and numerically studied. The investigation is conducted in a rectangular enclosure containing a porous medium saturated by a fluid. The convective flow is driven by either applying constant fluxes of heat and mass or constant temperature and concentration. The porous medium considered here is modeled according to the Dupuit-Darcy formulation, which includes the effect of the drag force. The problem is defined by a system of strongly coupled no linear differential equations, called governing equations, which include the masse conservation equation (continuity equation), the momentum equation, the energy equation and species equation. Governing parameters of the problem under study are the following: thermal Rayleigh number, R_T, modified Prandtl number, P_r^*, buoyancy ratio, N, Lewis number, Le, aspect ratio of the enclosure, A, and the normalized porosity, ε, of the porous matrix. Two distinct and complementary approaches are used: first, an analytical solution valid for shallow enclosures $(A >> 1)$ derived on the basis of the parallel flow approximation when the annulus is subjected to constant heat and mass fluxes; the second approach is a numerical solution based on finite differences method employed to solve the governing equations in porous medium. In the range of the governing parameters considered in this study, a good agreement is found between analytical and numerical results. Depending on the value of the buoyancy ratio, N, two types of convective flow have been studied: simple diffusion convection $(N = 0)$ where the cavity is subject to a vertical thermal gradient, and double diffusion convection $(N \neq 0)$ where the cavity horizontal walls are subject to constant fluxes of heat and mass. It is worth mentioning that the results presented here deal only with the case of opposing flows $(N < 0)$. For this situation, we know that, in the absence of form drag effects, the onset of motion occurs at a subcritical Rayleigh number R_{TC}^{sub} depending upon φ and *Le* only. Then we have studied the case where the buoyancy forces induced by the thermal and solutal effects are opposing each other and of equal intensity $(N = -1)$ in vertical enclosure. For this situation, the thermosolutal convective phenomenon double diffusive convection $(S_r = 0)$ and Soret induced convection $(S_r = 1)$ are studied. New bistability phenomena arose when the onset of subcritical convection was shifted close or beyond the threshold of supercritical convection, whether heating/cooling isothermally or with a constant heat flux. To study the stability problem, a new numerical technique based on

linear stability theory and finite elements method is studied. The linear stability theory is used to predict analytically the critical Rayleigh number for the onset of the convection. Also the linear stability of the convective motion, predicted by the parallel flow approximation, is numerically investigated in order to predict the occurrence of Hopf's bifurcation, R_{TC}^{Hopf}, which characterizes the transition point between steady convection state toward unsteady convection state.

Keyword: natural convection, porous medium, form drag effect, bistability, subcritical convection, supercritical convection, Hopf bifurcation, heat and mass transfer.

ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة التحليلية والعددية لإنتقال الحرارة والكتلة بواسطة الحمل الحراري الطبيعي في وسط مسامي. الشكل الهندسي المقترح هو تجويف مستطيل مائل يحتوي على وسط مسامي مشبع بسائل أو بخليط السوائل. في هذه الدراسة، يتم التحكم في تدفقات الحمل الحراري بواسطة الشروط الحدودية: نوع نيومان (تدفق ثابت للحرارة والتركيز) أو نوع ديريكلي (درجات الحرارة والتركيز ثابتة)، كما تم استخدام نموذج (Dupuit-Darcy) والذي يشمل تأثير قوة السحب. وتخضع هذه المشكلة إلى مجموعة من المعادلات التفاضلية غير الخطية وهي: معادلة الحفاظ على الكتلة، معادلة الحركة، معادلة الطاقة ومعادلة التركيز. كما أنها تخضع لعدة عوامل مختلفة مثل عدد رايلي R_T ، عدد براند المتغير P_r^*، نسبة قوى الحجم N، عدد لويس Le، نسبة أبعاد التجويف A والمسامية ε. كما قمنا باستخدام طريقتين مختلفين من اجل المقارنة: الطريقة الأولى وهي الحل التحليلي في تجويف يحتوي على نسبة أبعاد كبيرة $A >> 1$ تم تطوير هذا الحل استنادا على مفهوم التدفق الموازي عندما يخضع التجويف للشروط الحدودية نيومان، أما في الطريقة الثانية قمنا باستخدام أسلوب الفروق المتناهية للحصول على الحلول العددية للمعادلات العامة. من اجل قيم العوامل المقترحة في هذه الدراسة، حصلنا على اتفاق جيد بين النتائج العددية والتحليلية. اعتمادا على قيمة نسبة قوى الحجم، يتم دراسة نوعين من تدفق الحمل الحراري: النوع الأول وهو الحمل الحراري بسيط الانتشار $(N = 0)$ في هذه الحالة يخضع التجويف إلى تدفق حراري ثابت.أما النوع الثاني وهو الحمل الحراري والمادي مزدوج الانتشار $(N \neq 0)$ حيث تخضع جدران التجويف الأفقية إلى تدفق ثابت للحرارة والتركيز. وتجدر الإشارة إلى أن النتائج المقدمة هنا، هي من اجل $(N<0)$ فقط. في هذه الحالة، نحن نعلم انه في حالة غياب تأثير قوة السحب، بداية الحركة تحدث في عدد رايلي دون الحرجة R_{TC}^{sous} . فيما بعد الحالة التي تكون فيها قوى الحجم لها نفس الكثافة ولكن في الاتجاه المعاكس $(N = -1)$ تتم دراستها في حالة التجويف العمودي حيث يتم دراسة كل من الحمل الحراري الثنائي الانتشار $(S_r = 0)$ وتأثير Soret $(S_r=1)$. كما تم اكتشاف ظواهر جديدة bistabilité عندما يبدأ الحمل الحراري دون الحرجة يقترب أو يتجاوز عتبة الحمل الحراري فوق الحرجة سواء جدران التجويف تخضع للتدفقات الحرارة والتركيز أو إلى درجات الحرارة والتركيز. لدراسة الاستقرار في بعض النماذج الهندسية، قمنا باستخدام تقنية جديدة تعتمد على نظرية الاستقرار الخطية وطريقة العناصر المنتهية. نظرية الاستقرار الخطية تسمح لنا بالتنبؤ ببداية الحمل الحراري وفقا لمعايير الرقابة. كذلك الاستقرار في حالة الحمل الحراري، الحلول التحليلية يتم استثمارها من اجل التنبؤ بوجود التشعب هوبف R_{TC}^{Hopf} الذي يميز نقطة التحول من الحمل الحراري المستقر إلى الحمل الحراري غير مستقر (متذبذب).

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري الطبيعي، وسط مسامي، تأثير قوة السحب، الحمل الحراري دون الحرجة، الحمل الحراري فوق الحرجة، التشعب هوبف، انتقال الحرارة والكتلة.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE… i
REMERCIEMENTS… ii
RÉSUMÉ… iv
ABSTRACT… vi
ملخص… viii
TABLE DES MATIÈRES… ix
LISTE DES FIGURES… xii
LISTE DES TABLEAUX… xx
NOMENCLARURE… xxii
CHAPITRE I: INTROUDUCTION… 1
1.1 Généralité… 1
1.2 Modèles d'écoulement en milieu poreux… … … … … … … … … … … … … … … … 7
1.2.1 La loi de Darcy… 7
1.2.2 La loi de Dupuit-Darcy … 9
1.2.3 La loi de Darcy-Brinkman… 11
1.2.4 Modèle général… 11
1.3 Approximation de Boussinesq… 11
1.4 But de l'étude… 14
1.5 Contenu de la thèse… 15
1.6 Revue Bibliographique… 16
CHAPITRE II : MODÈLE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE… 29
2.1 Description du problème … 29
2.2 Hypothèses simplificatrices… 30
2.3 Formulation mathématique… 31
2.3.1 Équation de continuité… 32
2.3.2 Équation de mouvement : Loi de Dupuit-Darcy… … … … … … … … … … … … 32
2.3.3 Équation de conservation de l'énergie… … … … … … … … … … … … … … … 32
2.3.4 Équation de conservation de masse… … … … … … … … … … … … … … … … 32
2.4 Équation de fonction de courant … … … … … … … … … … … … … … … … … … 34
2.5 Conditions aux limites … 35

2.5.1 Conditions aux frontières hydrodynamiques … … … … … … … … … … … 35

2.5.2 Conditions aux frontières thermiques et massiques… … … … … … … … … 35

2.5.3 Conditions aux frontières thermiques adimensionnelles … … … … … … . 35

2.6 Transfert thermique et massique… … … … … … … … … … … … … … … … . 36

CHAPITRE V : SOLUTION ANALYTIQUE… … … … … … … … … … … . 37

3.1 Couche horizontale : Φ=0° et S_r=0… … … … … … … … … … … … … … … … 38

3.1.1 Solution pour un milieu poreux Darcy $\left(|u|/P_r^*\right)<<1$… … … … … … … … … 41

3.1.2 Solution pour un milieu poreux Dupuit $\left(|u|/P_r^*\right)>>1$… … … … … … … … 44

CHAPITRE IV : METHODE NUMÉRIQUE… … … … … … … … … … … 46

4.1 Discrétisation des conditions aux frontières thermiques … … … … … … … … 47

4.2 Discrétisation de l'équation d'énergie… … … … … … … … … … … … … … … 48

4.3 Discrétisation de l'équation de concentration… … … … … … … … … … … . . 50

4.4 Discrétisation de l'équation du mouvement… … … … … … … … … … … … … 51

4.4.1 Milieu poreux Darcy $\left(|u|/P_r^*\right)<<1$… … … … … … … … … … … … … … 51

4.4.2 Milieux poreux Dupuit-Darcy … … … … … … … … … … … … … … … … … 52

4.5 Discrétisation des champs de vitesse… … … … … … … … … … … … … … … . 53

4.6 Discrétisation des conditions aux frontières des vitesses… … … … … … … … . 53

4.7 Algorithme de calcul… . 54

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUTION… … . … … … … … … 56

5.1 Validation de code numérique… … … … … … … … … … … … … … … … … . 56

5.2 Résultats et discussion… … … … … … … … … … … … … … … … … … … . . 58

5.2.1 Convection simple diffusion : N=0… … … … … … … … … … … … … … … . 58

5.2.1.1 Couche horizontale : Φ=0°… … … … … … … … … … … … … … … . 58

5.2.1.2 Couche inclinée : -180°≤Φ≤180°… … … … … … … … … … … … . . 81

5.2.2 Convection induite par double diffusion et l'effet de Soret : N≠0… … … … . . 87

5.2.2.1 Couche horizontale : Φ=0°, S_r=0 et N≤0… … … … … … … … … . . 87

5.2.2.2 Couche verticale : Φ=90° et N=-1… … … … … … … … … … … . . 117

CHAPITRE VI : ANALYSE DE LA STABILTE LINÉAIRE DANS UNE COUCHE POREUSE… … … … … … … … … … … … … … … . . 137

6.1 Théorie de la stabilité linéaire de l'écoulement convectif… … … … … … … 138
6.2 Solution numérique: éléments finis… … … … … … … … … … … … … … . . 139
6.2.1 Formulation variationnelle … … … … … … … … … … … … … … … … … 139
6.3 Stabilité de l'état de repos… … … . … … … … … … … … … … … … … … . 143
6.3.1 Théorie de la stabilité linéaire… … . . … … … … … … … … … … … … . 143
6.3.2 La stabilité marginale : p=0… … … … … … … … … . … … … … … … . 143
6.3.3 La stabilité transitoire : $p\neq0$… … … … … … … … … … … … . … … … . 144
6.4 Résultats et discussion… … … … … … … … … … … … … … … … … … … . . 147
6.4.1 Couche horizontale : Φ=0°, $N\leq0$ et S_r=0… … … … … … … … … … … … 147
6.4.2 Couche verticale : Φ=90°, N=-1, S_r=0 et 1… … … … … … … … … … … . 158
CHAPITRE VII : CONCLUSIONS GÉNÉRALES… … … … … … … . … 168
7.1 Simple diffusion : N=0… 168
7.1.1 Couche horizontale : Φ=0°… … … … … … … … … … … … … … … … … 168
7.1.2 Couche inclinée … 169
7.2 Double diffusion : N<0, S_r=0… … … … … … … … … … … … … … … . . 169
7.2.1 Couche horizontale : Φ=0° … … … … … … … … … … … … … … … … . . 169
7.3 Double diffusion et l'effet de Soret : S_r=0 et S_r=1… … … … … … … … … . 171
7.3.1 Couche verticale : Φ=90° et N=-1… … … … … … … … … … … … … … 171
RÉFÉRENCES… . . 173
LISTE DES TRAVAUX RELEVANT DE LA THÈSE… … … … … … . 182

LISTE DES FIGURES

1.1 Exemples de milieux poreux… … … … … … … … … … … … … … … … … 4

1.2 Illustration de la taille intermédiaire du V.E.R entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d… … … … … … … … . 5

1.3 Dispositif de mesure de perméabilité sur matériau consolidé… … … … … . 7

2.1 Représentation schématique du modèle physique et du système de coordonnées… . . 29

3.1 Représentation schématique d'une cavité élancée… … … … … … … … . . 38

4.1 Maillage du domaine de calcul en (i, j)… … … … … … … … … … … … . 46

5.1 Les lignes de courant, Ψ, et isothermes, T, obtenues dans le régime de Dupuit-Darcy pour A=10, $R_T = 10^4$, $P_r^* = 1$: $\Psi_0 = 8.962$, Nu=4.484 et $Nu_m = 4.492$ … . . 60

5.2 L'effet du maillage sur les profils de la vitesse pour A=10, $R_T = 10^3$ et $P_r^* = 1$… . 61

5.3 Les profils de la fonction de courant, Ψ_0, et de la température, T, pour $A = 10$, $R_T = 10^4$ et $P_r^* = 1$… 62

5.4 L'effet du nombre de Rayleigh, R_T, sur : a)l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) le nombre de Nusselt local, Nu, pour $A = 10$ et $P_r^* = 1$… . 63

5.5 L'influence du rapport de forme de la cavité, A, sur : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, et b) les transferts de chaleur, $\left(Nu,\ Nu_m\right)$ pour $P_r^* = 10$ et $R_T = 10^2$ … … … … … … … … … … … … … . 65

5.6 L'effets du nombre de Rayleigh, R_T, et le coefficient de la trainée de forme, P_r^*, sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et b) le taux de transfert de chaleur, Nu … . 66

5.7 L'effet du nombre de Rayleigh, R_T, et le coefficient de la trainée de forme, P_r^*, sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et b) le nombre de Nusselt, Nu, pour $A = 10$, avec un écoulement monocellulaire .. …. … … … … … … … . 69

5.8 L'effet du nombre de Rayleigh, R_T, et le coefficient de la trainée de forme,

P_r^*, sur : a) l'intensité de l'écoulement et b) le nombre de Nusselt pour une cavité carrée A=1 avec un écoulement monocellulaire.… … … … … … . . . 71

5.9 L'effet du nombre de Rayleigh, R_T, et le coefficient de la trainée de forme, P_r^*, sur : a) l'intensité de l'écoulement et b) le nombre de Nusselt pour une cavité carrée $A = 1$ avec un écoulement de deux cellules … … … … … … . 72

5.10 Diagramme de bifurcation pour le flux de convection multicellulaires dans une cavité carrée $A = 1$… … … … … … … … … … … … … … … … … … . … … . 74

5.11 a) Temps des instantanés de la fonction de courant et de sa perturbation correspondante sur cinq périodes de temps pour $R_T = 950,\ P_r^* = 50,\ A = 10$ et $\tau = 0.041$, b) les linges de courant et isothermes moyennes dans un période de temps, $\Psi_0^\tau = 9.962$ et $Nu_m^\tau = 5.047$ … … … … … … … … … … … . . . … . 75

5.12 Évolution dans le temps : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et b) le nombre de Nusselt, Nu, pour $R_T = 950,\ P_r^* = 50$ et $A = 10$ …. … … … … … … … 76

5.13 a) Temps des instantanés de la fonction de courant et de sa perturbation correspondante sur cinq périodes de temps pour $R_T = 7000,\ P_r^* = 50,\ A = 1$ et $\tau = 0.00942$, b) les linges de courant et isothermes moyennes dans un temps de période, $\Psi_0^\tau = 16.402$ et $Nu_m^\tau = 7.705$… … … … … … … … … … … … 78

5.14 Évolution dans le temps : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et b) le nombre de Nusselt Nu_m pour $R_T = 7000,\ P_r^* = 50$ et $A = 1$… … … … … … … … … 79

5.15 Solutions multiples stables pour $A = 10,\ R_T = 100$ et $P_r^* = 10$: a) une cellule, $\Psi_{\min} = 0.000,\ \Psi_{\max} = 2.789,\ Nu_c = 2.814,\ Nu_m = 2.583$, b) deux cellules, $\Psi_{\min} = -2.825,\ \Psi_{\max} = 2.825,\ Nu_c = 1.697,\ Nu_m = 2.354$ et c) quatre cellules, $\Psi_{\min} = -2.400$, $\Psi_{\max} = 2.4000$, $Nu_c = 1.673$, $Nu_m = 1.941$ .. …. … 80

5.16 Les lignes de courant et isothermes pour $A = 10$: a) $R_T = 100,\ \Phi = 40°,\ P_r^* = 5,\ \Psi_0 = 2.442,\ Nu_c = 2.652,\ Nu_m = 2.580$, b) $R_T = 300,\ \Phi = 80°,\ P_r^* = 5,\ \Psi_0 = 2.812,\ Nu_c = 3.333,\ Nu_m = 3.253$, c) $R_T = 500,\ \Phi = 120°,\ P_r^* = 5,\ \Psi_0 = 1.636,\ Nu_c = 2.310,\ Nu_m = 2.270$, d) $R_T = 100,\ \Phi = 45°,\ P_r^* = \infty,\ \Psi_0 = 3.436,\ Nu_c = 4.106,\ Nu_m = 3.984$, e) $R_T = 100,\ \Phi = 45°,$

$P_r^* = 1$, $\Psi_0 = 1.605$, $Nu_c = 1.816$, $Nu_m = 1.774$ et f) $R_T = 100$, $\Phi = 45°$, $P_r^* = 10^{-2}$, $\Psi_0 = 0.216$, $Nu_c = 1.016$, $Nu_m = 1.014$ .. …. … … … … … … 83

5.17 Effets de l'angle d'inclinaison, Φ, et le paramètre de la trainée de forme, P_r^* pour $A = 10$, $R_T = 100$ sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et b) le nombre de Nusselt Nu…. … … … … … … … … … … … … … … … … … … . 85

5.18 Effets de l'angle d'inclinaison, Φ, et le paramètre de la trainée de forme, P_r^* pour $R_T = 100$ sur le constant de gradient de température C_T … … … … … … 86

5.19 Effet du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur l'angle d'inclinaison maximale, Φ_{cr}, pour $R_T = 100$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … 86

5.20 Lignes de courant (haut), isothermes (milieu) et isoconcentration (bas) pour : a) $R_T = 100$, $Le = 10$, $N = -0.24$, $P_r^* = \infty$, $\Psi_0 = 3.722$, $Nu_c = 3.706$, $Sh_c = 5.997$, b) $R_T = 30$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $P_r^* = 2$, $\Psi_0 = 0.644$, $Nu_c = 1.159$, $Sh_c = 3.132$ et c) $R_T = 30$, $Le = 5$, $N = -0.1$, $P_r^* = 1$, $\Psi_0 = 0.285$, $Nu_c = 1.033$, $Sh_c = 1.693$… … … … … … … … … … … … . . 88

5.21 Influence du nombre de Rayleigh sur : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) le transfert de chaleur, Nu, et c) le transfert de masse Sh pour $P_r^* = 10$, N=-0.1, Le=2, 5, 10, 15, 30 … … … … … … … … … . . … 92

5.22 Diagramme de bifurcation en fonction de R_T et P_r^* sur : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) le taux de transfert de chaleur Nu et c) le taux de transfert de masse, Sh, pour $N = -0.1$, $Le = 5$, $\varepsilon = 1$ et $A = 10$. —— analytique stable, ·-·-·-· analytique instable, ●◀◆▲■▼▶ numérique …. … 94

5.23 Diagramme de bifurcation sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le transfert de chaleur, Nu, et c) le transfert de masse, Sh, pour $P_r^* = \infty$ (Darcy), $N = -0.1$, $Le = 5$ et $\varepsilon = 1$ .. … … … … … … … … … … … … … … 97

5.24 Diagramme de bifurcation sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le transfert de chaleur, Nu, et c) le transfert de masse, Sh, pour, $P_r^* = 1$, N=-0.1, $Le = 5$ et $\varepsilon = 1$… … … … . … … … … … … … … … … … … … … . … 99

5.25 Diagramme de bifurcation sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le

transfert de chaleur, Nu, et c) le transfert de masse, Sh, pour $P_r^* = 2$, $N = -0.1$, $Le = 5$ et ε=1…… … … … … … … … … … … … … … … … … 101

5.26 Évolution dans le temps : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) des taux de transfert de chaleur, Nu, et de masse, Sh, et c) la structure de l'écoulement pour (zone II), $R_T = 18$, $N = -0.1$, $Le = 5$ et $\varepsilon = 1$.. 102

5.27 Évolution dans le temps : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) des taux de transfert de chaleur, Nu, et de masse, Sh, et c) la structure de l'écoulement pour (zone III), $R_T = 22$, $N = -0.1$, Le=5 et ε=1… 103

5.28 Lignes de courant (en haut), isothermes (au milieu) et isoconcentrations (en bas) pour $R_T = 24.5$, $P_r^* = 2$, $N = -0.1$ et $Le = 5$: a) $\Psi_0 = 0.394$, $Nu_c = 1.063$, $Nu_m = 1.044$, $Sh_c = 2.181$, $Sh_m = 1.861$ et b) $\Psi_0 = 0.016$, $Nu_c = 1.000$, $Nu_m = 1.000$, $Sh_c = 1.002$, $Sh_m = 1.002$… … … … … … … 105

5.29 Diagramme de bifurcation en termes de l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, en fonction de R_T pour N = - 0.1 et $Le = 5$: a) $P_r^* = 2$, b), $P_r^* = 1.85$, c) $P_r^* = 1.5$ et d) $P_r^* = 1.3$,e) diagramme de stabilité, ——— analytique stable ,— · · — · analytique instable …. … … … … . . … … … … … … … … . . … 107

5.30 L'effets du nombre de Rayleigh R_T et le rapport des forces de volume N sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le nombre de Nusselt, Nu, et c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $P_r^* = 2$ et Le=5 … . . … … … … . . … … … 108

5.31 Les résultats analytiques obtenus pour $Le = 5$: a) l'effet du nombre de Prandtl modifié, P_r^*, et le rapport de la flottabilité, N, sur les nombres de Rayleigh critiques, b) 'effet de rapport de la flottabilité, N, sur le nombres de Rayleigh critiques, R_{TC}, pour $P_r^* = 2$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … 110

5.32 Le nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous}, en fonction de nombre de Prandtl modifié, P_r^*, pour Le=10^3, 10^2, 20, 10, 5, 3 et $N = -0.1$ …… … … … . . 111

5.33 Diagramme de bifurcation en fonction de R_T et P_r^* sur : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) le taux de transfert de chaleur Nu et c) le taux de transfert de masse, Sh pour $N = -0.1$, $Le = 15$, $\varepsilon = 1$ et $A = 10$. ——— analytique stable, ·-·-·-·-analytique instable, ●▲■◀◆▼

numérique… 113

5.34 Diagramme de bifurcation en terme de Ψ_0 en fonction de R_T et P_r^* pour $A=1$, $N=-0.1$, $Le=5$ et $\varepsilon=1$: a) $P_r^*=\infty$ (Darcy) à 1, b) $P_r^*=2$. ---- numérique instable, ◆▼▶●■ numérique stable (conditions aux limites Neumann), c) lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T=48$ et $P_r^*=2$: $\Psi_0=0.433$, $Nu_m=1.040$, $Sh_m=1.779$, (solution supérieur), et d) lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T=48$ et $P_r^*=2$: $\Psi_0=0.047$, $Nu_m=1.000$, $Sh_m=1.013$, (solution inférieur) ..… … … … … … … … … … 115

5.35 Diagramme de bifurcation en terme de Ψ_0 en fonction de R_T et P_r^* pour $A=1$, $N=-0.1$, $Le=5$ et $\varepsilon=1$: a) $P_r^*=\infty$ (Darcy) à 1, b) $P_r^*=5$. ---- numérique instable, ◆▼●◀■ numérique stable (conditions aux limites Dirichlet), c) lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T=80$ et $P_r^*=5$: $\Psi_0=1.005$, $Nu_m=1.108$, $Sh_m=2.274$, (solution supérieur), et d) lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T=80$ et $P_r^*=5$: $\Psi_0=0.028$, $Nu_m=1.000$, $Sh_m=1.002$, (solution inférieur) …. … … … … … … … … … 117

5.36 Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et isoconcentrations (droit) pour $R_T=200$, $Le=2$, $\varepsilon=1$ et $A=10$: a) Darcy, $S_r=0$, $\Psi_0=3.13$, $Nu_c=3.05$, $Sh_c=4.35$, b) $P_r^*=0.1$, $S_r=0$, $\Psi_0=0.40$, $Nu_c=1.05$, $Sh_c=1.20$, c) Darcy, $S_r=1$, $\Psi_0=4.06$, $Nu_c=3.59$, $Sh_c=6.67$ et d) $P_r^*=0.1$, $S_r=1$, $\Psi_0=0.85$, $Nu_c=1.23$, $Sh_c=3.14$ … … … … … … … … . 122

5.37 Profils de la vitesse, *v*, de la température, *T*, et de la concentration, *S* dans le plane médian horizontal pour $R_T=200$, $Le=2$, $A=10$, $\varepsilon=1$ et $S_r=0$ ….. 123

5.38 Profils de la vitesse, v , de la température, *T*, et de la concentration, *S* dans le plan médian horizontal pour $R_T=200$, $Le=2$, $A=10$, $\varepsilon=1$ et $S_r=1$… . . 124

5.39 Effets du nombre de Rayleigh, R_T , et Prandtl modifié, P_r^*, sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le nombre de Nuesslt, Nu, et c) le nombre de Sherwood, Sh , pour $Le=10$, $S_r=0$ et différentes valeurs de P_r^* . … … … 127

5.40 Effets du nombre de Lewis, Le , et de Prandtl modifié, P_r^*, sur les nombres de Rayleigh critiques R_{TC}^{sous} et $R_{TC}^{\sup}$ pour : a) $S_r = 0$ et b) $S_r = 1$ … … … . … 129

5.41 Diagramme de bifurcation en termes de, Ψ_0, en fonction de R_T pour $P_r^* = 0.14,\ A = 10,\ Le = 2,\ \varepsilon = 0.1$ et $S_r = 0$. —— analytique stable, ·-·-·-· analytique instable, ● numérique unicellulaire stable, ⊸ numérique multicellulaire stables, ⊟ numérique multicellulaire instables …. … … … … 132

5.42 Évolution dans le temps : a) les taux de transfert de chaleur et de masse, b) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité et c) écoulement transitoire pour $R_T = 80,\ A = 10,\ P_r^* = 0.14,\ Le = 2,\ \varepsilon = 0.1$ et $S_r = 0$, (zone II) … . . 133

5.43 Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et isoconcentration (droit) pour $R_T = 150,\ P_r^* = 0.14,\ A = 10,\ Le = 2,\ \varepsilon = 0.1,\ S_r = 0$, (zone V) : a) $\Psi_{\min} = -0.0219$, $\Psi_{\max} = 0.0367$, $Nu_m = 1.0001$, $Sh_m = 1.0005$, b) $\overline{\Psi}_{min} = -0.0415$, $\overline{\Psi}_{\max} = 0.0836$, $\overline{Nu}_m = 1.0002$, $\overline{Sh}_m = 1.0022$ et c) $\Psi_{\min} = 0.0000$, $\Psi_{\max} = 0.4215$, $Nu_m = 1.0486$, $Sh_m = 1.1862$ … … … … … … … … … … . . 133

5.44 Diagramme de bifurcation en terme de, Ψ_0, en fonction de R_T pour $P_r^* = 0.1$, $A = 10$, $\varepsilon = 1$, $S_r = 1$ et $Le = 10$. —— analytique stable, ·-·-·-· analytique instable, ● numérique unicellulair stable ..… … … … … … … … … … … . . 134

5.45 Diagramme de bifurcation en terme de, Ψ_0, en fonction de R_T pour $P_r^* = 0.1$ $A = 10,\ \varepsilon = 1,\ S_r = 1$ et $Le = 2$. —— analytique stable, ·-·-·-· analytique instable, ● numérique unicellulair stable, ⊸ numérique multicellulaire stable.. … 135

6.1 Représentation schématique de l'élément de Hermite cubique… … … … … 141

6.2 Les profils de perturbation $\left(\Psi_p,\ T_p,\ S_p\right)$ au seuil de transition R_{TC}^{Hopf} prédit par l'analyse de la stabilité linéaire pour $R_S = -240,\ P_r^* = 10,\ Le = 10$ et $\varepsilon = 0.2$: $R_{TC}^{Hopf} = 1967.057,\ A_C = 1.246$, a) $p_i = 140.12$ et b) $p_i = -140.12$. Les résultats sont obtenus avec un maillage de 40 éléments dans la direction *y*. 149

6.3 Effets de *Le* et ε sur les paramètres critiques au début de la transition pour R_S=-240, $P_r^* = 10$ et *Le*=1, 2, 5, 10, 10^3 : a) R_{TC}^{Hopf} b) A_c et c) *fr*… … … . . . 151

6.4 Diagramme de bifurcation en termes, a) de l'intensité de l'écoulement et b)

des transferts de chaleur et de masse pour $P_r^* = 10$, R_S=-240, Le=10 et ε=0.2 , ——— analytique stationnaire, —·· – analytique instable, ● numérique stationnaire, —o– numérique oscillante… … … … … … … … … … … … . 152

6.5 a) Évolution dans le temps de la fonction de courant au centre de la cavité et des transferts de chaleur et de masse, b) les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations à t=0.21 pour $R_T = 2200$, $A = 20$, $P_r^* = 10$, $Le = 10$ et $\varepsilon = 0.2$, c)-d) les contours de perturbation des lignes de courant, températures et concentrations obtenus à différents instants du temps : (a) t=0.10, (b) t=0.30, (c) t=0.50, (d) t=0.70, (e) t=0.90, (f) t=0.11, (g) t=0.13, (h) t=0.15, (i) t=0.17, (k) t= 0.19, (j) t=0.21 et f) Les comportements de ligne de courant et les transferts de chaleur et de masse locaux suivent les tourbillons comme ils voyagent dans la direction x… … … … … … … … … … … … … … … … … … 155

6.6 Effet de la trainée de forme pour $R_S = -240$, $Le = 10$ et $\varepsilon = 0.2$ sur : a) les seuils de convection R_{TC} et b) la longueur d'onde critique, A_C, et la fréquence d'oscillation, f_r … . 157

6.7 Les profils de perturbation $\left(\Psi_p,\ T_p \text{ et } S_p\right)$ au début de convection surstable pour $Le = 2$, $\varepsilon = 0.1$ et $S_r = 0$, $R_{TC}^{sur} = 75.27$, $A_C = 2.41$ et $f_r = 5.11$… … . 160

6.8 Évolution dans le temps : a) l'intesité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0 , b) et c) les transferts de chaleur Nu et de masse Sh , d)-f) les structures d'écoulement à différents instants de temps pour $A = 10$, $R_T = 80$, $P_r^* = 0.14$, $Le = 2$ et $S_r = 0$. (1) t=0.42, (2) t=0.46, (3) t=0.49, (4) t=0.52, (5) t=0.56, (6) t=0.59, (7) t=0.63… 161

6.9 a)-c) Évolution dans le temps de la fonction de courant au centre de la cavité Ψ_0 et des transferts de chaleur Nu et de masse Sh, d) les lignes de courant, isothermes et isoconcentration à t=2 pour $R_T = 185$, $A = 20$, $P_r^* = 10$, $Le = 10$, $\varepsilon = 1$ et $S_r = 0$, e)-g) les contours de perturbation des lignes de courant, de température et de concentration sont obtenus à différents instants du temps : (1) t=0.725, (2) t=0.825, (3) t=950, (4) t=1.050, (5) t=1.125. … … 165

6.10 Les profils de perturbation $\left(\Psi_p,\ T_p \text{ et } S_p\right)$ au seuil de bifurcation de Hopf pour $Le = 10$, $\varepsilon = 1$ et S_r=0 : $R_{TC}^{Hopf} = 172.64$ et $A_C = 2.5$: a) $p_i = 16.34$ et

b) $p_i = -16.34$ … 165

6.11 a) Effets du nombre de Rayleigh, R_T, et de la porosité normalisée, ε, sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, pour $P_r^* = 10$, $Le = 10$, $A = 20$, S_r=1 et ε=0.2, 0.5 et 1, b) évolution temporelle de, Ψ_0, pour $R_T = 170$, $P_r^* = 10$, $Le = 10$, $A = 20$, S_r=1 et ε=0.2, 0.5 et 1 ..… … … … 167

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Les propriétés des fluides pour l'eau et l'air à T_0=15°C, P_0=1atm… … … … 14

5.1a Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum $\Psi_{\max}$ et du nombre de Nusselt moyen Nu_m avec les résultats donnés par Nawaf et Pob (2005) pour $A=1,\ R_T=10^3$ et $P_r^*=0.1$… … … … … … … … … … … … … 57

5.1b Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt Nu_m avec les résultats donnés par Prasad et Tuntomo (1987) pour $A=1,\ R_T=500$ et $P_r^*=10$…. … … … … 57

5.2 Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum $\Psi_{\max}$ et du nombre de Nusselt Nu avec les résultats donnés par Kalla (2004) et al. (1995) et Mahdjiba (1998) pour A=4 et $R_T=100$… … … … … … … … … … … … … 57

5.3 Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum $\Psi_{\max}$, les nombres de Nusselt Nu_m et de Sherwood Sh_m avec les résultats donnés par Kalla (2004), Benhadji (2001) et Mamou et al. (1999a) pour $A=8$, $R_T=10^2$, $N=-0.8$ et Le=1..… 58

5.4 Comparaison des données expérimentales Kladias et Prasad (1990a) avec les résultats numériques prédits dans les conditions aux limites de température constante …. … 59

5.5 Étude de la sensibilité du maillage et une comparaison entre la solution numérique et analytique pour A=10, $R_T=10^2$ et $P_r^*=10$ .. …. … … … … … 60

5.6 L'effet de la trainée de la forme sur le seuil de la bifurcation de Hopf dans les cavités carrées et rectangulaires ... … … … … … … … … … … … … … … … … 73

6.1 Points de Gauss … . 143

6.2 Comparaison des résultats de la convection thermique pure pour $N=0$, $Le=10$ et $\varepsilon=1$… . 148

6.3 Comparaison des résultats de la convection double diffusion pour $R_S=-100$, Le=10 et $\varepsilon=1$ …. … . 148

6.4 Effet du maillage sur le nombre de Rayleigh critique, R_{TC}^{Hopf}, la longueur d'onde, A_C, et la fréquence, f_r, pour $R_S=-240$, $P_r^*=10$, $Le=10$ et $\varepsilon=0.2$… 148

6.5 Effet du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur le seuil de bifurcation de Hopf dans une couche infinie pour $R_S = -240$, $Le = 10$ et $\varepsilon = 1$ … … … … 158

6.6 Effet du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur le seuil de bifurcation de Hopf dans une couche infinie pour $R_S = 0$ … … … … … … … … … … … 158

6.7 Le nombre de Rayleigh critique, R_{TC}^{sur}, et la fréquence d'oscillation, f_r, dans le début du déclanchement de convection oscillatoire dans une couche infinie pour $Le = 2$, $\varepsilon = 0.1$ et $S_r = 0$ … … … … … … … … … … . . … … … … 159

6.8 Effets du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur les valeurs critiques, R_{TC}^{Hopf}, A_C et f_r pour Le=10, ε=1, $S_r = 0$ et $S_r = 1$.... … … … … … … … … 162

NOMENCLATURE

A	rapport de forme de la cavité, $A = L'/H'$
C_T	gradient de température dans la direction x'
C_S	gradient de concentration dans la direction y'
D	coefficient de diffusion massique, m^2/s
Da	nombre de Darcy, K/ℓ^{*2}
g	accélération de la pesanteur, m/s^2
H'	hauteur de la cavité, m
j'	flux de masse constant par unité de surface, $kg/m^2.s$
k_p	conductivité thermique du milieu poreux saturé, $W/m.K$
K	perméabilité du milieu poreux, m^2
$\tilde{K}$	paramètre de matériel
ℓ^*	longueur caractéristique de la cavité, m
L'	largeur de la cavité, m
Le	nombre de Lewis, α_p / D
N	rapport des forces de volume, $N = \beta_S \Delta S^* / \beta_T \Delta T^*$
Nu	nombre de Nusselt, Eq. (2.30)
Nu_m	nombre de Nusselt moyen, Eq. (2.32)
N_x	nombre d'éléments dans la direction x
N_y	nombre d'éléments dans la direction y
P'	pression hydrodynamique, $kg/m.s$
P_r	nombre de Prandtl, ν/α_p
P_r^*	nombre de Prandtl modifié, $P_r\ H'/\tilde{K}$
q'	flux de chaleur constant par unité de surface, W/m^2
Re	nombre de Reynolds
$R^{\sup}$	constante supercritique
R_T	nombre de Rayleigh, $gK\beta_T \Delta T^* \ell^* / \alpha_p \nu$
R_{TC}^{sous}	nombre de Rayleigh souscritique
R_{TC}^{sur}	nombre de Rayleigh surstable

$R_{TC}^{\sup}$ nombre de Rayleigh supercritique

R_{TC}^{osc} nombre de Rayleigh oscillant

S concentration adimensionnelle, $\left(S'-S'_0\right)/\Delta S^*$

S_r paramètre constant, $S_r=0$ convection doublement diffusive, $S_r=1$ convection induite par effet de Soret

S' concentration de la composante la plus dense, kg/m^3

S'_0 concentration de référence à $x'=y'=0$

ΔS^* différence de concentration caractéristique $j'/\rho D$ pour la convection double diffusive et $\Delta S'=S'_0\left(1-S'_0\right)\Delta T'D'/D$ pour celle induite par effet de Soret

Sh nombre de Sherwood, Eq. (2.31)

Sh_m nombre de Sherwood moyen, Eq. (2.33)

t temps adimensionnelle, $t'U^*/\ell^*$

T température adimensionnelle, $\left(T'-T'_0\right)/\Delta T^*$

T' température de milieu, K

T'_0 température de référence à $x'=y'=0$

ΔT^* différence de température caractéristique, $q'H'/k_p$

U^* vitesse caractéristique, m/s

u vitesse adimensionnelle dans la direction de x', u'/U^*

v vitesse adimensionnelle dans la direction de y', v'/U^*

x, y coordonnée cartésiennes adimensionnelles à partir du centre de la cavité, x'/ℓ^*, y'/ℓ^*

Symboles Grecs

α_P diffusivité thermique du milieu poreux, m^2/s

β_S coefficient d'expansion solutale, m^3/kg

β_T coefficient d'expansion thermique, K^{-1}

Φ angle d'inclinaison de la cavité

ε porosité normalisée du milieu poreux, ϕ/σ

μ viscosité dynamique du fluide, $kg/m.s$

υ viscosité cinématique du fluide, m^2 / s

ρ masse volumique de fluide, kg / m^3

ρ_0 masse volumique de référence, kg / m^3

$(\rho C)_f$ capacité calorifique du fluide, $J / m^3.K$

$(\rho C)_p$ capacité calorifique du milieu poreux saturé, $J / m^3.K$

σ rapport des capacités calorifiques, $(\rho C)_p / (\rho C)_f$

Ψ fonction de courant adimensionnelle, Ψ' / α_p

Supercripts

sous valeur au seuil de la convection souscritique

sup valeur au seuil de la convection supercritique

sur valeur au seuil de la convection surstable

osc valeur exprimant la transition du régime oscillant vers le régime direct

Hopf valeur exprimant la transition du régime convectif stationnaire vers le régime oscillant

' variable dimensionnelle

CHAPITRE I
INTRODUCTION

1.1 Généralités

Le terme de convection est utilisé pour définir les mouvements dus à l'agitation thermique engendrant des différences de densités dans un fluide. Un fluide est le terme désignant un liquide ou un gaz : corps pur ou mélange dont les molécules ont assez de liberté pour se mouvoir les une par rapports aux autres. On parle de la convection naturelle lorsqu'il s'agit d'agitations induites dans le fluide par des forces (de volume ou surface) agissant à l'intérieure du volume étudié. Les mouvements générés sont dus aux variations locales de la masse volumique du fluide en fonction de la température et /ou de la concentration pour le cas de la convection naturelle d'origine thermique et/ou massique.

Dans un fluide soumis un gradient de température, il apparaît un gradient de concentration dû au transfert thermique, c'est l'effet Soret ou bien encore appelé effet Ludwig (plus généralement, le nom thermo-difussion désigne cet effet en milieu gazeux, alors que l'expression effet Soret ou effet Lodwig sera plus utilisée dans les liquides). Cet effet fut découvert simultanément par Ludwig en (1856) et (mieux exploité) par Soret en (1879) d'où le nom attribué au phénomène. Dans le champ de pesanteur, la convection au sein d'un fluide pur est due aux changements locaux de la masse volumique qui dépend non seulement de la température, mais également de sa composition. Généralement, les phénomènes de convection et de thermo-diffusion ne peuvent pas être dissociés. Ce couplage est appelé diffusion thermo-gravitationnelle. L'effet Soret est un phénomène particulier puisqu'il appartient à la famille des phénomènes thermodynamiques «croisés», c'est-à-dire que le flux créé par une force qui ne lui est pas conjuguée.

Un des intérêts majeurs de l'étude de ce phénomène est lié à la séparation des bruts de pétrole soumis au gradient de température et à la convection dans les champs géologiques. Cet effet, connu depuis près de 150 ans n'a été que récemment étudié dans les fluides denses Prigogine et al. (1950a, 1950b), bien que la théorie cinétique des gaz ait résolu le problème, López et al. (1987). Le fait que celle-ci ne peut s'adapter aux fluides denses elle s'annonce plus compliquée. De nouveaux champs se sont très récemment ouverts dans le domaine des mélanges de polymères, de colloïdes Dhont (2003a, 2003b) et de fluides magnétiques Wiegand (2004). Les mesures de facteurs de thermo-diffusion se sont elles-mêmes considérablement améliorées par la mise en place de méthodes optiques, sous microgravité,

dans des colonnes thermo-gravitationnelles, par exemple. La mise en commun du développement des méthodes d'analyse Wiegand (2004), des progrès théoriques dans le domaine Podolny (2005) et l'efficacité des simulations numériques Zhang et al. (2005) permettent aujourd'hui d'essayer de comprendre par plusieurs biais les fondements physiques d'un tel comportement.

Les combustibles sont en effet souvent stockés sous forme liquide ou solide pour les moteurs à combustion interne ou pour les moteurs fusées. Il est aussi possible de séparer les isotopes d'un même élément. De plus, en couplant la convection naturelle au phénomène de thermo-diffusion, il est possible d'accroître notablement le degré de séparation. Dans le but d'optimisation des coûts de production lors de l'extraction des fluides des gisements par les producteurs pétroliers (extraction à des profondeurs de plus en plus importantes et donc nécessitant des moyens technologiques plus avancées), il est important de connaître de façon précise la distribution des différentes espèces à l'intérieur d'un gisement. Cette distribution s'est établie pendant de longues périodes de formation de gisement et a été principalement influencée par la gravité ainsi que par la distribution des pressions dans le réservoir. Des moyens importants ont été mis en œuvre afin d'obtenir des modèles thermodynamiques fiables, permettant de restituer de manière correcte la répartition des espèces dans le réservoir. Étant donné qu'il n'est pas possible de négliger l'importante extension verticale d'un gisement, il est très probable que cette répartition soit influencée par la convection naturelle (la gravité est l'une des premières composantes intégrées dans les modèles), mais aussi par le gradient géothermique (gradient de température naturel de la terre). Ce gradient pourrait être la cause de la migration d'espèces par l'effet Soret. Ce dernier consiste en l'établissement d'un gradient de concentration d'un composant chimique par la présence d'un gradient thermique, i.e. l'existence d'un gradient thermique est causée par une migration différenciée des espèces. Le gradient de température induit un effet de déplacement de matière, en plus de la loi de Fick, le vecteur flux de la matière du constituant de fraction massique C est donné par :

$$J_x = -\rho D \frac{\partial S}{\partial x} - \rho D_T S\left(1-S\right)\frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.1}$$

où S est la fraction massique du composant de référence, D est le coefficient de diffusion de Fick ou coefficient de diffusion isotherme et D_T le coefficient de thermo-diffusion, ce coefficient d'Onsager quantifie l'effet de gradient de température sur la composition locale. En particulier, il peut être positif ou négatif. Une fois l'état stationnaire atteint, le flux de masse s'annule, $J_x = 0$, ce qui implique :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{D_T}{D} S\left(1-S\right)\frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.2}$$

Dans cette relation, on définit l'expression du coefficient de Soret S_T, qui quantifie la séparation à l'état stationnaire, dans un mélange binaire comme :

$$S_T = \frac{D_T}{D} = -\frac{1}{S\left(1-S\right)}\frac{\nabla S}{\nabla T} \tag{1.3}$$

Ceci définit le coefficient de Soret, homogène à l'inverse d'une température. Pour adimensionner le système, il peut être utile d'introduire le facteur de diffusion thermique comme :

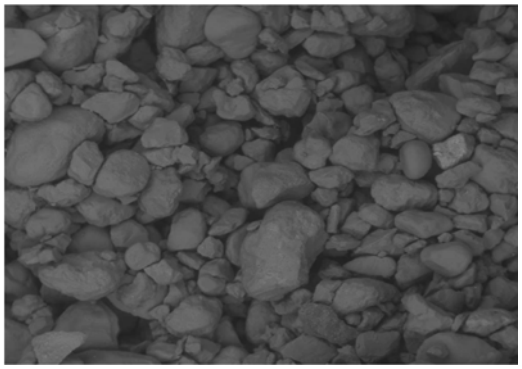
$$\alpha_T = TS_T \tag{1.4}$$

où T désignant la valeur moyenne de la température.

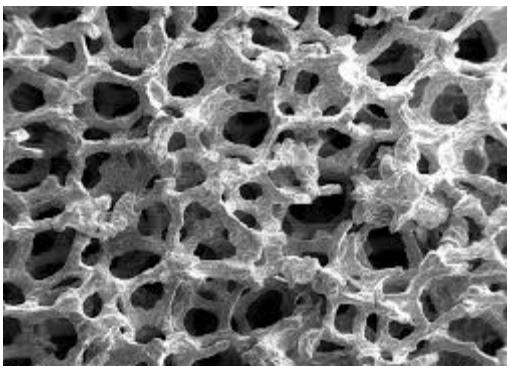
Au cours de ces dernières années, les chercheurs s'intéressent de plus en plus aux problèmes du transfert de chaleur induit par la convection naturelle au sein d'un milieu confiné (milieu fluide ou milieu poreux saturé par un fluide). La présence des gradients de température et de concentration dans les milieux confinés entrainent l'apparition d'un écoulement de convection naturelle avec transport de chaleur et de masse. En effet, les différences de température et de concentration créent des forces de volume soit thermique (différence de température) ou soit solutale (différence de concentration) qui engendrent une distribution non uniforme de la densité du milieu. Ce phénomène, sous l'effet de la gravité génère des mouvements convectifs. D'ailleurs, c'est pour cette raison que l'écoulement ainsi induit prend le qualificatif de thermosolutale ou doublement diffusif. Récemment, l'intérêt pour ces phénomènes de convection naturelle se focalise en particulier sur les milieux poreux.

Un milieu poreux saturé est un milieu continu, cohésif ou non, qui présente intérieurement une fraction de volume accessible à un fluide. Cette fraction de volume non solide, composée de cavernes, de crevasses, de pores…etc, constitue ce que l'on appelle la porosité du milieu poreux (Figure 1.1). La porosité est évidemment un élément descriptif essentiel du milieu, toutefois deux milieux poreux présentant la même porosité peuvent avoir des propriétés très différentes. On peut trouver dans un milieu poreux des pores ne débouchant pas (pores aveugles) ou occlus; un milieu poreux contenant à la fois des pores aveugles et des pores ouverts plus ou moins interconnectés, pourra grâce à ces pores ouverts laisser s'écouler le fluide. Dans la réalité complexe que constitue un milieu poreux, des paramètres comme le diamètre de capillaire ou de la porosité ne constituent que des valeurs

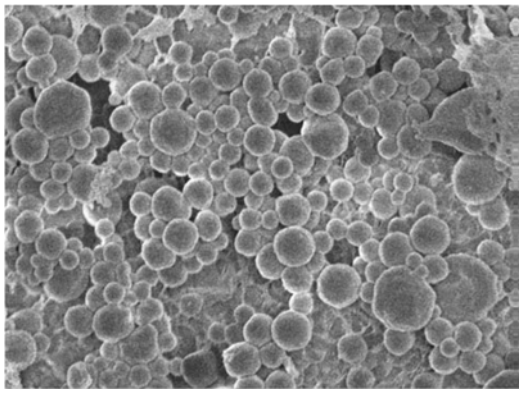
globales moyennes, incapables de traduire exactement la topologie complexe de l'écoulement réel à travers le milieu. Dans le cas où les espaces vides sont remplis par une même phase (liquide ou gazeuse), le milieu poreux est dit saturé par le fluide. Les milieux poreux jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels tels que le génie pétrolière, le génie chimique, le génie civil, la médicine…etc. Quelque exemples de milieux poreux sont illustrés dans la figure 1.1.



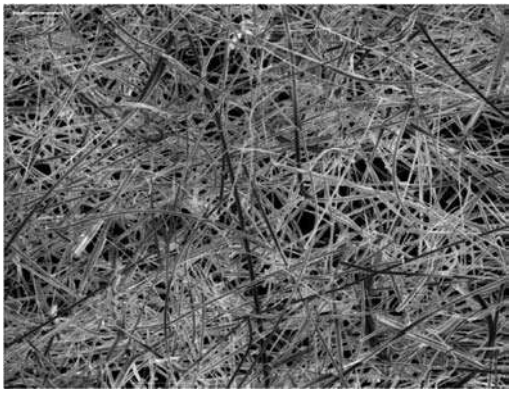
a) Sable



b) Mousse métallique



c) Morphologie des particules de polymère.



d) Laine de verre

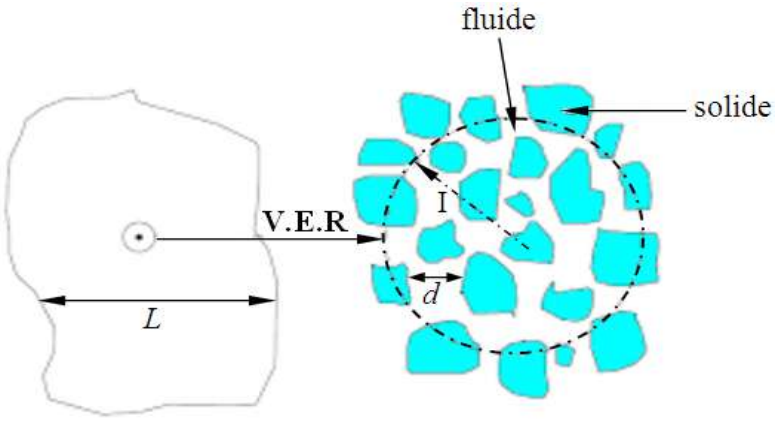
Figure 1.1 : Exemples de milieux poreux.

Lorsqu'on étudie les écoulements en milieu poreux, deux échelles s'imposent pour la description des phénomènes (Bories 1985). L'échelle des pores, ou échelle microscopique est associée au diamètre moyen des pores *d*. À l'intérieur de cette échelleles grandeurs locales peuvent très largement varier. À l'échelle du milieu poreux, ou échelle macroscopique, la variation des grandeurs physiques est définie en moyenne, sur un certain volume de milieu poreux, appelé volume élémentaire représentatif et noté V.E.R (Figure 1.2). Cette échelle

macroscopique est associée à une dimension géométrique L_a du milieu. Soit L la dimension caractéristique du V.E.R. Cette dimension L doit satisfaire à la double inégalité suivante :

$$d \leq L \leq L_a \tag{1.5}$$

Les paramètres caractérisant le milieu poreux sont donc obtenus par prise de moyenne sur le V.E.R. Cependant, dans ce qui suit nous présentons une définition macroscopique de ces paramètres qui apparaissent dans ces différents modèles empiriques.



Milieu poreux à l'échelle macroscopique L — Milieu poreux à l'échelle des pores d

Figure 1.2 : Illustration de la taille intermédiaire du V.E.R entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d.

Les phénomènes se développant dans un milieu poreux dépendent des propriétés du fluide et de la géométrie de la matrice solide. Cellui-ci est caractérisée par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques. Dans ce qui suit, on définie les différentes caractéristiques qui apparaissent au niveau des différents modèles empiriques de description macroscopique des écoulements en milieu poreux.

- **La porosité**

La porosité d'un milieu poreux, notée ε, est le rapport du volume des pores sur le volume total de la matrice poreuse

$$\varepsilon = \frac{\text{Volume des pore}}{\text{Volume total du mileiu poreux}} \tag{1.6}$$

- **La perméabilité**

La perméabilité est la propriété d'un matériau à transmettre un fluide sous pression, la perméabilité K dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. Plusieurs évaluations de la perméabilité K en fonction de ε et d'une dimension caractéristique de la matrice poreuse à l'échelle du pore ont été proposées. Les différentes expressions

donnant la perméabilité dépendent de la géométrie du milieu poreux. La valeur de la perméabilité est généralement déterminée expérimentalement. Plusieurs modèles empiriques ont été proposées. On rappelle notamment :

La relation de Kozeny-Carman (1927) pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^2}{36 C_0 (1-\varepsilon)^2} \tag{1.7}$$

où d est la longueur caractéristique des pores ou le diamètre des particules et C_0 est une constante qui dépend des formes des grains. Il est compris entre 3.6 et 5.

La relation d'Ergun (1952), semblable à l'équation ci-dessus en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse constitué de particules sphériques de diamètre d. La colonne est soumise à un gradient de pression.

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{150 (1-\varepsilon)^2} \tag{1.8}$$

Cette relation est semblable à celle de Kozeny-Carman pour la valeur de C_o=4.16. Quand on modélise la matrice poreuse comme un faisceau de tubes capillaires parallèles conduit à l'expression suivante de la perméabilité :

$$K = \varepsilon^2 \frac{d^2}{32} \tag{1.9}$$

où $\varepsilon = n \pi d^2 / 4$ et n est le nombre de capillaires par unité de surface perpendiculaire au sens de l'écoulement.

- **La tortuosité**

La description de la géométrie des pores fait intervenir la notion de connectivité, correspondant à la complexité d'un chemin continu à travers l'espace des pores. Il faut également tenir compte des «bras morts» qui sont nombreux dans les milieux peu poreux et très hétérogènes. Pour décrire ces différents aspects, on introduit le paramètre τ désignant la tortuosité, que l'on définit de la manière suivante

$$\tau = \left(\frac{L_e}{L}\right)^2 \tag{1.10}$$

où L_e est la longueur réelle des lignes de courant du fluide transvasant un échantillon de longueur L d'un milieu poreux, modélisé sous la forme d'un réseau de capillaires parallèles ou ondulés. Ce rapport joue un rôle important dans les problèmes de diffusion.

1.2 Modèles d'écoulement en milieu poreux

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, l'approche de la mécanique des milieux continus pour établir les modèles de conservation de la quantité du mouvement, de l'énergie et de la masse, ne peut-être en appliqués qu'après passage à une échelle macroscopique qui permet d'établir une équivalence entre le milieu réel dispersé et un milieu continu fictif. L'établissement des équations macroscopiques de conservation est formellement obtenu à partir des équations microscopiques. Le premier modèle a été proposé par Darcy (1856).

1.2.1 La loi de Darcy

La théorie des écoulements en milieu poreux est fondée sur les résultats d'expérience réalisée par Darcy (1856). L'expérience de Darcy consiste à mesurer un débit et un gradient de charge qui permettent de calculer une perméabilité grâce à la formule (1.14). Cette expérience a été développée au départ pour des sables ou des matériaux peu cohérents. L'échantillon est dans un tube de rayon R, et soumis à un gradient de charge du à la différence de hauteur d'eau dans les deux récervoirs amont et aval, dont les niveaux sont maintenus constants. Le sens d'écoulement est inverse au gradient de charge. Ce gradient de charge peut également être déterminé grâce à la mesure de la différence de hauteur d'eau (Δh) dans deux tubes piézométriques distants de L (Fig 1.3).

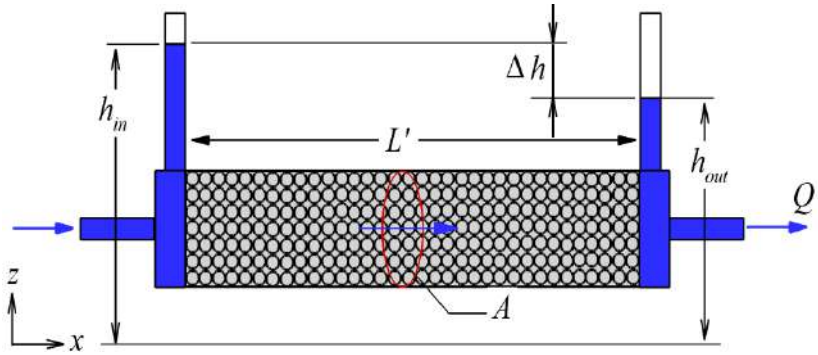


Figure 1.3 : Dispositif de mesure de perméabilité sur matériau consolidé.

Le liquide filtrant s'écoule depuis le niveau supérieur vers la base de la colonne à travers la couche poreuse et remonte dans les tubes manométriques à des niveaux décroissants dans le sens de l'écoulement. La hauteur piézométrique décroît linéairement en

fonction de la distance verticale parcourue ; la pente de la droite piézométrique mesure la perte de charge linéaire :

$$J = \frac{\overline{h}_2 - \overline{h}_1}{L} \tag{1.11}$$

Si le milieu poreux est assez fin, l'expérience montre que le débit de l'appareil est proportionnel à la pente de cette droite tant que celle-ci n'est pas trop forte ; avec la convention de signe habituelle, on a l'équation :

$$Q = -KA\,\frac{\Delta h}{L} \tag{1.12}$$

où K est une constante qui dépend à la fois du fluide et du milieu poreux.

Si, au lieu de raisonner en hauteur manométrique, on écrit la loi précédente en termes de pression on obtient ;

$$q = \frac{Q}{A} = -k\left(\frac{P_2 - P_1 + \rho g h}{h}\right) \tag{1.13}$$

La perméabilité peut être considérée comme significative de la surface utilisable pour l'écoulement, elle dépend de la géométrie du milieu poreux. La loi de Darcy, et donc la perméabilité est définie pour des conditions d'écoulement laminaire dans un milieu homogène, isotrope et continu; le fluide n'interagissant pas avec le milieu. On définit la conductivité hydraulique k ; ou coefficient de perméabilité, comme :

$$k = \frac{K}{\mu} \tag{1.14}$$

où k est la conductivité hydraulique est caractéristique des conditions d'écoulement dans un matériau donné pour un fluide donné.

L'expression scalaire précédente est alors remplacée par une relation vectorielle suivante:

$$\vec{V} = -\frac{K}{\nu}\left(\vec{\nabla} P \pm \vec{g}\right) \tag{1.15}$$

où K est la perméabilité et υ la viscosité cinématique du fluide.

Cette loi n'est valable que pour des écoulements à basses vitesses et pour des milieux ayant une porosité relativement petite. Si les écarts de température imposés ne sont pas trop importants, les vitesses du fluide sont suffisamment faibles pour que les écoulements puissent être considérés comme Darcyens. La valeur du nombre de Reynolds est utilisée comme

critère pour caractériser la transition d'un régime d'écoulement laminaire de type Darcy à un régime laminaire de type Dupuit. Pour cela on a défini un nombre de Reynolds de pore pour les écoulements en milieu poreux. En définissant *d* comme longueur caractéristique qui représente la dimension caractéristique des pores, le nombre de Reynolds s'écrit :

$$Re = V \frac{d}{u} \tag{1.16}$$

En termes de détermination de *d*, Collins (1961) a proposé l'expression $d = \sqrt{K / \varepsilon}$ alors que Ward (1964) a plutôt suggéré que $d = \sqrt{K}$ quelque soit la porosité.

Selon la valeur du nombre de Reynolds de pore, Bear (1972) distingue trois régimes d'écoulement. Dybbs et Edwards (1984), à l'aide de mesures de vitesse, distinguent plusieurs régimes d'écoulement que l'on peut classifier de la manière suivante :

Pour des nombres de Reynolds de pore inférieurs à 1, le régime d'écoulement est laminaire, les forces visqueuses sont prédominantes et la loi de Darcy est applicable.

Quand *Re* est compris entre 1 et 10, les couches limites aux niveaux des parois solides des pores se développent. En dehors de ces couches limites apparaît un régime d'écoulement inertiel. Les forces d'inertie deviennent alors importantes et il n'y a plus de proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration : la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire, persiste jusqu'à un nombrede Reynolds environ de 150.

Pour des nombres de Reynolds de pore compris entre 150 et 300, un régime d'écoulement laminaire instationnaire se développe. Ce régime est d'abord oscillatoire résultants de superposition de plusieurs modes de période et d'amplitude distinctes.

Au-delà de *Re* de l'ordre de 300, le régime d'écoulement devient chaotique, et présente les caractéristiques d'un écoulement turbulent.

1.2.2 La loi de Dupuit-Darcy

La formulation de Dupuit-Darcy (1863) a été vérifiée pour des écoulements du nombre de Reynolds (*Re*>1). Cette formulation introduit un terme de trainée de forme de la matrice poreuse, qui est un terme quadratique de la vitesse considérée faussement reconnu comme un terme d'inertie dans les études antérieures, le terme est très répondu parmi la communauté scientifique sous le nom de Forchheimer (1901) ou terme d'inertie.

La forme compacte générale de la loi de Dupuit-Darcy, y compris la force du corps pour les écoulements en milieux poreux isotrope, est donnée par :

$$\nabla P' = -\frac{\mu}{K} V' - \frac{\rho C_{DF}}{K^{1/2}} |V'| V' - \rho g \tag{1.17}$$

où P' est la pression, V' le vecteur de vitesse d'infiltration, μ la viscosité dynamique du fluide, ρ la densité du fluide K la perméabilité de la matrice poreux, g est l'accélération de la pesanteur et C_{DF} est un coefficient indépendant de l'écoulement et des propriétés des fluides, mais il dépend du régime et du comportement de l'écoulement à travers la géométrie de la matrice poreuse ainsi que de la forme et de la taille des grains du milieu poreux. En d'autre terme, le coefficient de C_{DF} est directement lié au coefficient de la trainée de forme (pression) d'un grain ou de la matière solide poreuse élémentaire qui délimite les pores au sein de la matrice poreuse solide. Du point de vue hydrodynamique ou aérodynamique, un écoulement visqueux autour d'un grain submergé induit une force de trainée, appelée trainée de profil dont le coefficient, $C_D = C_{DV} + C_{DF}$, est la somme de coefficient de la trainée visqueuse C_{DV} (lié à Darcy) et du coefficient de la trainée C_{DF} (lié à Dupuit). Pour tout nombre de Reynolds la trainée visqueuse est toujours présente, mais la trainée de forme ou la trainée de pression dépend du comportement de l'écoulement autour du grain si elle est attachée ou séparée. Si l'écoulement est attaché, à très faible nombre de Reynolds, la récupération du gradient de pression autour du grain se produit et la trainée de forme est proche de zéro et la trainée visqueuse est dominante. Cependant, pour un nombre de Reynolds relativement élevé et en raison de la forme non cariné du grain, l'écoulement se sépare et la trainée de forme devient significative et surmonte la trainée visqueuse. Dans une matrice poreuse, un grain est entouré par d'autres et la trainée de forme de « grain individu » prend en compte l'interférence hydrodynamique/aérodynamique mutuelle entre les grains. Ensuite, un grain est soumis à un écoulement amont très complexe et le coefficient de la force de la trainée de forme C_{DF} dépend fortement de la forme du grain et du nombre de Reynolds qui influence le comportement de l'écoulement. Globalement, le coefficient de la trainée de forme C_{DF} dépend de la taille et de la forme des grains de la matrice poreuse ainsi que du comportement de l'écoulement.

1.2.3 La loi de Darcy-Brinkaman

Brinkman (1947) a encore généralisé la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de dissipation visqueuse dans la loi de stokes.

$$\nabla P' = -\frac{\mu}{K} V' + \mu_e \nabla^2 V' + \rho g \tag{1.18}$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy-Brinkman, fortement utile pour le cas de haute porosité. Le premier terme à droite de l'équation ci-dessus contenant la viscosité μ est le terme de Darcy et le deuxième contenant la viscosité effective est appelé le terme de Brinkman. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_e. En effet cette grandeur est fonction non seulement de la porosité de milieu mais aussi de sa géométrie (tortuosité). Brinkman a assimilé la viscosité équivalente du milieu à celle du fluide ($\mu_e=\mu$). Cette approximation a été prouvée expérimentalement et elle est en accord avec les travaux de Neale et Nader (1974) et Beckermann et Viskanta (1988). Le modèle de Brinkman permet ainsi d'imposer la condition de non glissement au champ de vitesse de filtration, au niveau des parois imperméables.

1.2.4 Modèle général

On généralise les trois dernières équations en introduisant un terme transitoire et le terme convectif $(V'\nabla V')$, ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon^2}\left(V'\nabla V'\right) = -\nabla P' + \rho g - \frac{\mu}{K} V' + \mu_e \nabla^2 V' - \frac{\rho C_{DF}}{K^{1/2}} |V'| V' \tag{1.19}$$

Cette équation est équivalente à l'équation de Navier-Stokes issue du bilan de quantité de mouvement en milieu fluide. Il faut également noter que la complexité d'un écoulement en milieu poreux peut être le résultat des effets de trainée et de viscosité, et d'une variation importante de la porosité au niveau des parois.

1.3 Approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq est la base pour la plupart de ce qui est connu à propos de la convection naturelle. L'application de cette approximation aux problèmes technologiques et environnementaux ne peut avoir un sens que lorsque les conditions dans lesquelles les équations de Boussinesq sont valides sont explicitement connues.

L'approximation que nous allons reprendre attribuée à Boussinesq (1903), a en fait été également proposée par Oberbeck (1879) pour la premier fois en 1879.

Cette approximation commence avec les formes habituelles des équations : la continuité, le mouvement et l'énergie, pour le fluide newtonien à des propriétés variables et zéro seconde viscosité, Batchelor(1967) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1.20}$$

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g k_i + \frac{\mu \partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} + \Gamma_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \tag{1.21}$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{K \partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \alpha T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \tag{1.22}$$

où $\Gamma_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$ et $\Phi = \frac{1}{2} \Gamma_{ij} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$

Afin de compléter la description du problème, il faut aussi connaitre des relations pour la détermination des propriétés des fluides. Étant donné que le seul mode réversible de travail pour un fluide newtonien est la compression. Ses propriétés sont des fonctions de deux variables thermodynamiques. Par conséquent, les équations nécessaires peuvent être écrites comme :

$$\begin{gathered} \rho = \rho(T,\ P), \quad C_P = C_p(T,\ P), \quad \mu = \mu(T,\ P) \\ \beta = \beta(T,\ P), \quad k = k(T,\ P) \end{gathered} \tag{1.23}$$

Habituellement, ces fonctions sont imparfaitement connues et doivent être déduites des données tabulaires. Finalement, nous allons exiger que la plupart de ces propriétés soient estimées de manière adéquate par des valeurs constantes. Il n'y a généralement pas de difficulté à assumer des développements de Taylor linéarisés, mais le cas particulier de l'eau à 4°C doit toujours être gardé à l'esprit. Il convient également de noter que l'approche générale de cette dérivation ne repose pas sur l'utilisation des variations des propriétés linéarisées.

Les approximations linéarisées aux équations (1.23) sont :

$$\left.\begin{aligned}
\rho &= \rho_0\left[1-\beta_T\left(T-T_0\right)+\beta_P\left(P-P_0\right)\right]\\
C_P &= C_{P0}\left[1-a_0\left(T-T_0\right)+b_0\left(P-P_0\right)\right]\\
\mu &= \mu_0\left[1-a_1\left(T-T_0\right)+b_1\left(P-P_0\right)\right]\\
\alpha &= \alpha_0\left[1-a_2\left(T-T_0\right)+b_2\left(P-P_0\right)\right]\\
k &= k\left[1-a_3\left(T-T_0\right)+b_3\left(P-P_0\right)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (1.24)$$

où

$$\begin{gathered}
\beta_T = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T},\quad \beta_P = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P},\quad a_0 = \frac{1}{C_p}\frac{\partial C_p}{\partial T},\quad b_0 = \frac{1}{C_p}\frac{\partial C_p}{\partial P},\quad a_1 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial T}\\
b_1 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial P},\quad a_2 = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial T},\quad b_2 = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial P},\quad a_3 = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial T},\quad b_3 = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial P}
\end{gathered} \qquad (1.25)$$

et où l'indice 0 indique l'état de référence $\left(T_0,\ P_0\right)$.

Comme exemples concrets de la méthode qu'on vient de présenter, cette dernière examine les cas de l'eau et de l'air à T_0 =15°C et P_0=1atm. Tableau 1.1présente les constantes requises, obtenues à partir de Batchelor (1967), sauf indication contraire. Pour l'eau, les conditions la plus exigeante sont exprimées par :

$$\left.\begin{aligned}
&\theta \le 1.25^\circ\mathrm{C}\\
&L \le 2.4\times10^5\ \mathrm{cm}\\
&L/\theta = 9.9\times10^4\ \mathrm{cm/^\circ C}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.26)$$

Dans le cas de l'air, on obtient des résultats similaires. Les conditions la plus exigeante sont exprimées par :

$$\left.\begin{aligned}
&\theta \le 28.6^\circ\mathrm{C}\\
&L \le 8.3\times10^4\ \mathrm{cm}\\
&L/\theta < 1020\ \mathrm{cm/^\circ C}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

Tableau 1.1 : Les propriétés des fluides pour l'eau et l'air à T_0=15°C, P_0=1atm.

	Eau	Air
$\rho_0 \left[g / cm^3 \right]$	1.00	1.2×10^{-3}
$C_{P0} \left[ergs / gm\ C \right]$	4.2×10^{7}	10^{7}
$\upsilon_0 \left[cm^2 / s \right]$	1.1×10^{-2}	0.145
Pr	8.1	0.72
$\beta_T \left[C^{-1} \right]$	1.5×10^{-4}	3.5×10^{-3}
$\beta_P \left[cm^2 / dyn \right]$	4.9×10^{-11}	10^{-6}
$a_0 \left[C^{-1} \right]$	-2.4×10^{-4}	4.5×10^{-5}
$b_0 \left[cm^2 / dyn \right]$	-2.5×10^{-10}	1.9×10^{-9}
$a_1 \left[C^{-1} \right]$	-2.7×10^{-2}	2.8×10^{-3}
$b_1 \left[cm^2 / dyn \right]$	-2.7×10^{-11}	0.0
$a_2 \left[C^{-1} \right]$	8.0×10^{-2}	-3.6×10^{-3}
$b_2 \left[cm^2 / dyn \right]$	0.0	0.0
$a_3 \left[C^{-1} \right]$	1.7×10^{-3}	2.4×10^{-3}
$b_3 \left[cm^2 / dyn \right]$	4.3×10^{-10}	0.0

La résolution d'un problème de convection naturelle en milieu poreux se ramène à prédire les champs de température, de concentration, et de vitesse ainsi que l'intensité de l'écoulement en fonction des divers paramètres du problème. Il est également important de prédire les taux de transfert thermique et massique correspondant.

1.4 But de l'étude

Le présent travail porte sur l'étude numérique et analytique du comportement de l'écoulement convectif induit par double diffusion et effet de Soret au sein d'une couche poreuse saturée par un fluide binaire. L'étude concerne une configuration géométrique inclinée soumise à des flux uniformes de chaleur q' et de masse j'. Pour mener à bien cette investigation, plusieurs méthodes numériques et analytiques seront utilisées pour résoudre le problème envisagé. Le code de calcul utilisé est basé sur la méthode des différences finies pour la résolution des équations gouvernantes. Pour traiter certains problèmes de stabilité, nous avons adopté la technique des éléments finis. Dans le cas où l'enceinte est élancée et exposée à des flux constants de chaleur et de masse, nous allons développer des solutions analytiques sur la base du concept de l'écoulement parallèle.

Le modèle de Dupuit-Darcy, tenant compte des effets de la trainée de forme pour des écoulements à faible ou grand Reynolds, et l'approximation de Boussinesq ont été utilisés pour modéliser la convection naturelle induite par double diffusion ou Soret au sein du milieu poreux. L'influence des paramètres de contrôle du problème tels que; le nombre de Rayleigh R_T , le nombre de Prandtl modifié P_r^*, le rapport de forme de la cavité A , le rapport des forces de volume N , la porosité normalisée ε et le nombre de Lewis Le , sur l'intensité de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse seront abordés pour une large gamme des paramètres de base. Le mode analytique pour les cavités (horizontale, inclinée et verticale) va permettre la prédiction des nombres de Rayleigh critiques (supercritique $R_{TC}^{\sup}$ et souscritique R_{TC}^{sous}) correspondant à la naissance de la convection. De plus, on a mis en évidence l'existence des solutions multiples, ce mode a été présenté en fonctions des paramètres de contrôle du problème. Les diagrammes de bifurcation représentant des solutions stables et instables ont été trouvés et tracés en fonction des nombres de Rayleigh et de Prandtl modifié. La théorie de la stabilité linéaire dans une couche infinie nous a alors permis de prédire le seuil critique de déclanchement de la convection en fonction des paramètres de contrôle. Aussi la stabilité de l'état convectif, déjà prédite par le concept de l'écoulement parallèle, a été investie dans le but de prédire l'existence de la bifurcation de Hopf, R_{TC}^{Hop} . L'écoulement après le point de bifurcation, peut être instationnaire oscillant (solution issue d'une bifurcation de Hopf).

1.5 Contenu de la thèse

La présente thèse est constituée de sept chapitres. Le premier chapitre est une introduction au présent travail et une recherche bibliographique des travaux antérieurs trouvés dans la littérature dans ce domaine d'investigation. Le deuxième chapitre de la thèse est consacré à la définition de la géométrie étudiée, et La formulation mathématique du problème où les équations de bases gouvernant le système et les conditions aux frontières associées seront présentées. Dans le troisième chapitre, nous avons développé une solution analytique basée sur la méthode du concept de l'écoulement parallèle dans le cas d'une couche poreuse élancée. Dans cette situation, les équations gouvernant du problème sont réduites à des équations différentielles ordinaires qui sont solvables analytiquement. Toutes les étapes de la démarche numérique (méthode des différences finies) ainsi que l'algorithme de calcul utilisé sont présentés dans le quatrième chapitre. Le cinquième chapitre porte sur les différents résultats obtenus dans ce travail et leurs discussions. Le sixième chapitre est

consacré à l'élaboration d'une nouvelle technique numérique générale, basé sur la méthode des éléments finies, pour l'étude du problème de stabilité. Finalement dans le septième chapitre, nous avons montré les principaux résultats trouvés le long de cette étude avec une conclusion générale et les perspectives futures.

1.6 Revue Bibliographique

La convection naturelle induite en milieu poreux a stimulé l'intérêt des chercheurs et des ingénieurs depuis l'apparition du travail du maître Darcy en (1856). Ce dernier a établit pour la première fois, une relation entre la vitesse d'écoulement d'infiltration et la chute de pression, ce qui a pris le nom de la loi de Darcy. Cette relation n'est valable que pour des faibles nombres de Reynolds ($Re=V_aK^{1/2}/\nu$ où V_a est la grandeur de la vitesse d'infiltration, K est la perméabilité de la matrice poreuse et v est la viscosité cinématique du fluide). L'étude de la convection dans les milieux poreux est devenue encore plus intéressante quand Dupuit (1863) a étendu la loi de Darcy pour tenir compte des écoulements à grand nombre de Reynolds ($Re>1$). Reconnu injustement par son approche exceptionnelle en incluant le terme de trainée de forme de la matrice poreuse, le terme quadratique de la vitesse considéré faussement comme un terme d'inertie dans les études antérieures, qui est très répondu parmi la communauté scientifique sous le nom terme d'inertie de Forchhrimer (1901). La métamorphose historique de la loi de Darcy à travers le dernier siècle a été illustrée dans un seul chapitre complet par Lage (1901). Cet auteur a exprimé la nécessité de changer l'histoire en donnant plus de crédits à Dupuit (1863), qui a publié ses conclusions 38 ans avant les travaux de Forchheimer (1901). Ainsi, Lage (1901) recommande de renommer la loi de Darcy-Forchheimer comme la loi de Dupuit-Darcy ou la loi de Forchheimer- Dupuit-Darcy.

Après l'apparition de la loi Dupuit-Darcy, un progrès significatif a été réalisé dans la conception de systèmes thermiques de haute performance. Quelques exemples d'applications de convection thermique dans les milieux poreux comprennent des systèmes tels que la dispersion des polluants dans les sols, l'isolation thermique des bâtiments, échangeurs de chaleur et réaction nucléaire. En utilisant la loi de Darcy pour modéliser l'écoulement convectif naturelle à faible nombre de Reynolds à travers un milieu poreux bien compacté, Horton et Rogers (1945) et Lapwood (1948) ont été les pionniers dans l'étude de la stabilité des écoulements de convection dans les couches poreuses horizontales soumises à un gradient thermique vertical. En maintenant les parois horizontales à des températures constantes mais différentes, les auteurs ont démontré analytiquement que l'apparition de la convection est

produite à un seuil de $R_{TC} = 4\pi^2$. Grâce à ces premières investigations, toute étude connexe doit se référer exclusivement à la convection de Horton-Rogers ou Lapwood ou Horton-Rogers-Lapwood comme initiée par Nield et Bejan (2005), mais pas à la convection de Bénard ou Rayleigh ou Rayleigh-Bénard qui concerne les écoulements de fluides clairs. Ces noms cités ont été utilisés par de nombreux auteurs qui ont étudié la convection dans des couches poreuses saturées par un fluide.

Un examen complet de la littérature a été effectué pour faire la lumière sur les écoulements de convection thermique dans des couches poreuses où l'effet de la trainée de forme a été significatif. Palm et al. (1972) ont utilisé la loi de Darcy pour mener une simulation numérique de la convection stable dans une enceinte poreuse chauffée par le bas. Les comparaisons avec les données expérimentales ont montré une déviation remarquable du taux de transfert de chaleur à partir de l'expérience, qui a été expliquée par la limitation de la loi de Darcy et son invalidité pour des nombres de Rayleigh où le nombre de Reynolds, basé sur la taille du milieu poreux, devient supérieur à l'unité. Lauriat et Prasad (1989) ont étudié l'importance relative de la trainée de forme et les forces visqueuses sur la convection naturelle dans un milieu poreux par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer pour une cavité verticale différentiellement chauffée. Les résultats montrent qu'il existe un régime de convection asymétrique lorsque la solution est indépendante de la perméabilité, le nombre de Darcy et le nombre de Forchheimer. Les résultats montrent aussi que le nombre de Nusselt augmente toujours avec le nombre de Rayleigh de fluide, le nombre de Darcy et le rapport de la conductivité, tandis que le nombre de Nusselt moyen diminue lorsque le nombre de Forchheimer augmente. Vafai et Kim (1995) ont discuté des limites de la loi de Brinkman-Forchheimer-Darcy pour les écoulements dans des milieux poreux où l'effet de la paroi était significatif. Les conditions aux limites de l'interface entre milieu poreux/milieu fluide ont été discutées en détail. La loi de Brinkman-Forchheimer-Darcy n'est pas parfaite, mais elle est couramment utilisée dans ce domaine. Ce qui explique le développement de la couche limite et la contrainte de cisaillement macroscopique, ainsi que la contrainte de la force d'inertie microscopique. Les résultats numériques sur la base de cette formulation ont été en accord avec la prédiction expérimentale. Les résultats montrent aussi que cette équation est également très efficace pour étudier le mouvement du fluide dans la région, qui en une partie est remplie d'un milieu poreux et dans l'autre partie est remplie d'un milieu fluide. Prasad et Tuntomo (1987) ont analysé l'effet de la trainée de forme sur l'écoulement conduit par la flottabilité et le transfert de chaleur dans une cavité poreuse verticale. Les équations régissantes sont formulées avec le terme de Darcy-Forchheimer pour un écoulement en

milieu poreux saturé. Une analyse dimensionnelle indique que dans le régime d'écoulement de la trainée de forme un nouveau paramètre sans dimension, le nombre de Forchheimer F_s, qui apparait caractérise la structure de la matrice poreuse. Les critères pour Darcy et les limites d'écoulement de la trainée de forme sont également obtenus, et ont montré que la couche limite de l'écoulement n'existe pas lorsque le terme $\left(Fs / P_r^*\right) \to \infty$. Par conséquent, l'applicabilité d'une solution de la couche limite dans le régime de la trainée de forme est très limitée. Nield et Joseph (1985) ont étudié l'effet de la traînée de forme sur les écoulements de convection dans une couche poreuse horizontale. L'effet d'inclinaison de la couche a été également examiné. Les auteurs ont remarqué que, dans une couche horizontale, la force de la trainée de forme n'a pas eu d'effet sur la stabilité marginale linéaire de Darcy. Cependant, dans le régime de convection, loin du seuil, l'effet de la trainée de forme devient plus important, surtout quand le nombre de Prandtl du fluide est très faible. Il a été également discuté que la trainée de forme a montré un effet stabilisateur sur la solution de convection, qui a retardé la transition vers un comportement oscillatoire. Kladias et Prasad (1990a) ont vérifié expérimentalement le modèle de l'écoulement de convection Brinkman-Dupuit-Darcy dans une enceinte poreuse dans un rapport d'aspect fini chauffée par le bas. La matrice poreuse est composée de billes bien emballées. Une variété de taille des billes, leur matériel et les fluides saturant ont été considérés pour couvrir un large éventail de paramètres régissant. Les résultats montrent que le taux de transfert de chaleur augmente avec le nombre de Rayleigh, le nombre de Prandtl et le nombre de Darcy du fluide, mais diminue avec la conductivité du fluide. Pour un faible nombre de Darcy, le taux de transfert de chaleur est devenu indépendant. Kladias et Prasad (1989) ont étudié l'effet du nombre de Prandtl du milieu poreux saturé par un fluide sur l'apparition des instabilités marginales. Les auteurs ont suggéré que la diminution du nombre de Prandtl a retardé l'apparition de la convection. Cette suggestion a été rapidement critiquée par Lage et al. (1992) en démontrant que le seuil de la convection dépend uniquement du nombre de Darcy. Il est vrai que le terme de la trainée de forme quadratique devient négligeable proche du seuil des instabilités stationnaires. Kladias et Prasad (1990b) ont étudié numériquement l'instabilité thermo-convective sur la transition de l'écoulement dans la convection non-Darcy dans une couche poreuse horizontale chauffée par le bas avec une température constante. L'effet de l'inertie, la trainée de forme et l'effet visqueux de Brinkman ont été examinés. L'étude a été concentrée sur une structure d'écoulement unicellulaire à partir de l'apparition de la convection stationnaire jusqu'à l'apparition de la convection oscillatoire et au-delà de seuil du déclanchement de la convection oscillatoire. Les modes de convection instables au-dessus du seuil ont été étudiés

en fonction des paramètres régissant (la porosité normalisée, la conductivité thermique de milieu poreux, le rapport de capacité thermique, le nombre de Darcy et le nombre de Prandtl). Dans le régime de convection oscillatoire, la diminution du nombre de Prandtl a montré un effet de stabilisation, donc le seuil de convection oscillatoire diminue avec la diminution du nombre de Prandtl. Dans le cas de convection oscillatoire, le taux de transfert de chaleur varie sensiblement avec le temps. Lage et Antoh (2000) ont réalisé une expérience dans le régime d'écoulement de Darcy et ont exploré la route vers le régime d'écoulement non linéaire où l'effet de la trainée de forme devient significatif. Les auteurs ont également pu faire la lumière sur l'histoire de la signification physique de l'extension de la loi de Darcy pour tenir compte du terme de la trainée de forme qui est proportionnelle à la vitesse d'infiltration au carré et ont mis l'accent sur la bonne terminologie à utiliser pour désigner la force de la trainée de forme de la matrice poreuse solide. L'extension de la vitesse cubique de la loi de Darcy a été jugée non pertinente du point de vue expérimental. Jue (2001) a effectué une analyse de la convection instable dans des cavités rectangulaires remplies d'un milieu poreux saturé. Les équations de Navier-Stocks modifiées, y compris les termes de Darcy et Dupuit ont été examinées et résolues numériquement. En raison de terme de la trainée de forme dans les équations régissant, qui dépendent de la perméabilité et de la porosité du milieu poreux, l'auteur a conclu que la force de l'écoulement de convection diminue quand la trainée de forme devient importante. Par conséquent, le taux de transfert de chaleur est réduit. Nawaf et Pop (2005) ont présenté une étude numérique sur la convection naturelle stable dans une cavité carrée contenant un milieu poreux. La paroi verticale à gauche de la cavité est chauffée avec une température constante, tandis que la paroi droite est refroidie avec une température constante et les deux parois horizontales sont adiabatiques. Le modèle non-Darcy (modèle Darcy-Dupuit) prend en considération l'effet de la trainée de forme. La méthode numérique des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations régissantes adimensionnelles. Les résultats présentés ont montré l'effet du paramètre de la trainée de forme sur le nombre de Nusselt et l'intensité de l'écoulement maximale pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Ces résultats montrent que l'augmentation du paramètre de l'effet de la trainée de forme conduit à un ralentissement de l'intensité de l'écoulement dans la cavité. Hadim (2006) a étudié numériquement la convection de non-Darcy dans une enceinte poreuse saturée avec un fluide non-Newtonien en utilisant la loi de puissance. La configuration est une enceinte chauffée par les parois latérales, tandis que les parois horizontales sont isolées. L'écoulement dans le milieu poreux est modélisé à l'aide du modèle Brinkman-Forchheimer-Darcy, qui tient compte des effets de la trainée de forme et visqueux. L'auteur a utilisé une

discrétisation en volumes finis pour résoudre les équations gouvernantes. Cette méthode assure la conservation de la masse et de l'énergie sur chaque volume de contrôle. Le terme non-linaire de Darcy et le terme de Forchheimer ou Dupuit dans l'équation de mouvement sont traités comme des termes linéaires. Les résultats montrent que l'augmentation du nombre de Darcy, augmente la vitesse de l'écoulement prés des murs et provoque un accroissement du nombre de Nusselt dans la cavité. Cependant l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique produit des effets similaires à un exposant de la loi de puissance *n* faible. Sidiropoulou et al. (2007) ont déterminé le coefficient de Forchheimer (ici dénommée Dupuit) pour un écoulement du milieu poreux Dupuit-Darcy. Les auteurs ont utilisé les données théoriques et expérimentales existantes pour évaluer le coefficient et ont démontré leur dépendance du nombre de Reynolds. Leur analyse a été réalisée sur la base de différentes matrices poreuses. Krishna et al. (2009) selon le problème de la convection naturelle avec la source de chaleur située avec la surface inférieure d'une cavité contenant un milieu poreux anisotrope est analysé numériquement par une approche généralisée non-Darcy. Les résultats ont été présentés en termes d'isothermes, des lignes de courant, de température maximale et du nombre de Nusselt moyen pour comprendre le comportement physiques des écoulements. Les auteurs montrent que les propriétés anisotropes ont une influence significative sur le comportement d'écoulement et sur le transfert de chaleur.

Le phénomène de la double diffusion a été découvert la première fois par Stommel et al. (1956) dans un contexte océanographique, et sa formulation théorique a été réalisée par Stern (1969). Il peut se produire dans les milieux liquides ou poreux, tels que les magmas, stellaires et planétaires, métaux liquides, océans, lacs et l'atmosphère, et aussi dans beaucoup d'applications technologiques en d'ingénierie telles que les étangs solaires, les réservoirs pour le stockage de gaz naturel et de déchet radioactif, le transport de polluant dans le soletc….

La plupart des travaux antérieurs sur la convection naturelle doublement diffusive dans les milieux poreux sont penchés sur le début du mouvement convectif dans des couches poreuses horizontales, soumises à des gradients de température et de concentration. Nield (1968), Rudraiah et al. (1982) ont dérivé, sur la base de la théorie de la stabilité linéaire, les critères de l'apparition de la convection par l'intermédiaire des modes stationnaires et oscillatoires pour différentes conditions aux limites thermiques et solutales. En outre, il est bien connu que le début du mouvement, dans une couche de fluide binaire peut se produire à une amplitude finie, c'est-à-dire souscritique. Ce type de bifurcation est possible à condition que les forces de volume soient opposées et que le nombre de Lewis soit supérieur à l'unité.

Brand et al. (1984) ont donné une équation d'amplitude pour un mélange binaire dans un milieu poreux au voisinage du point d'intersection entre les courbes de bifurcation stationnaire et instationnaire. Trevisan et Bejan (1985) ont utilisé une méthode numérique pour étudier la convection doublement diffusive dans une cavité carrée poreuse avec des parois verticales maintenues à des températures et des concentrations constantes et des parois horizontales adiabatiques et imperméables. Une analyse d'échelle a été utilisée pour traiter ce problème dans les cas limites des écoulements entraînés par les effets thermiques ou massiques et pour dégager les divers effets qui influencent les résultats globaux de transfert de chaleur et de masse. Il a été trouvé que l'écoulement du fluide était possible au-delà d'un certain nombre de Rayleigh critique quand ($Le \approx 1$). Cependant, le mouvement du fluide disparaît complètement pour Le=1 et N=-1. Poulikakos (1986) avait analysé la stabilité linéaire une couche poreuse horizontale en double diffusion. Les paramètres critiques du problème sont déterminés et les frontières définissant les régions des régimes de convection sont obtenues. Trevisan et Bejan (1986) ont étudié la solution analytique et numérique dans une cavité verticale exposée à des flux de chaleur et de masse uniforme. La solution analytique a été basée sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle. Les résultats montrent un bon accord avec les calculs numériques quand le rapport d'aspect devient assez grand. Une étude expérimentale de la convection de double diffusion dans un milieu poreux a été effectuée par Murray et Chen (1989). Une bonne concordance pour le nombre de Rayleigh thermique critique a été obtenue entre les expériences et la théorie de la stabilité linéaire. La stabilité non linéaire de la convection thermosolutale dans une couche poreuse horizontale, chauffée par le bas a été étudié par Radraiah et al (1992). Le nombre de Rayleigh critique, marquant le seuil de la convection à amplitude finie a été dérivé en utilisant une représentation tronquée d'une série de Fourrier. Les effets des nombres de Prandtl, de Lewis et de Darcy sur la convection ont été discutés par ces auteurs. Rosenperg et Spera (1992) ont étudié la convection thermosolutale au sein d'une cavité poreuse chauffée par le bas, pour une variété de conditions initiales et de conditions aux frontières. Il a été démontré numériquement que la dynamique des écoulements pour des nombres de Rayleigh et de Lewis fixes dépond fortement du rapport des forces de volume. Chen et Chen (1993a) ont étudié la double diffusion dans une couche poreuse horizontale saturée. Le modèle de Darcy avec le terme de Brinkman et de Forchheimer ont été utilisé. Une méthode numérique mixte Galerkin-différences finies a été adoptée pour prédire les limites de stabilités délimitant les différents régimes d'écoulements en fonction du nombre de Rayleigh thermique et solutal. La convection de double diffusion non linéaire dans une couche poreuse horizontale, dans lequel

des conditions horizontales périodiques sont prescrites, a été considérée par Chen et Chen (1993b). Les limites de stabilité divisant les régions de différents types d'écoulements ont été identifiées par ces auteurs en termes des nombres de Rayleigh thermique et solutal. Mamou et al. (1995a) ont étudié numériquement la convection naturelle double diffusive dans une cavité verticale poreuse saturée par un fluide. L'écoulement est conduit par des conditions des flux horizontaux uniformes de la chaleur et de masse. Les résultats montrent que pour une valeur donnée de *N*, les nombres de Lewis et de Rayleigh ont une influence sur le domaine où il existe des états multiples stables. Mamou et al. (1995b) ont observé une bonne concordance entre la solution analytique, dérivée sur la base de l'approximation de l'écoulement parallèle, et les solutions numériques des équations de base. Goyeau et al. (1996) ont considéré la convection thermosolutale coopérante $\left(N \geq 1\right)$ dans un milieu poreux de Brinkman. Les résultats de la simulation numérique se sont avérés en accord avec celles obtenus par une analyse d'échelle en régime de couche limite. Récemment, le seuil et le développement de la convection de double diffusion dans une couche poreuse dans laquelle l'agent déstabilisant est celui ayant une diffusivité plus élevée, a été étudié par Nguyen et al. (1997). On a démontré, en se basant sur les théories de la stabilité linéaire et non linéaire, que la convection peut exister à des nombres de Rayleigh au dessous de la valeur supercritique. Ce résultat, indiquant le développement possible des écoulements stationnaires souscritique, a été confirmé par les solutions numériques des équations de base. Karimi-Fard et al. (1997) ont étudié numériquement par la méthode de volumes finis, l'effet des termes de Dupuit-Brinkman sur l'écoulement convectif dans une cavité poreuse carrée. Leur étude a montré que la variation du nombre de Darcy et le nombre de Lewis peut affecter l'écoulement au sein de l'enceinte poreuse. L'instabilité de la convection diffusive dans une couche poreuse verticale soumis à des flux constants de chaleur et de concentration sur les parois verticales a été étudiée par Mamou et al. (1998a). Sur la base de la théorie de la stabilité linéaire, les états d'instabilité marginaux des modes stationnaires et oscillatoires ont été déterminés en termes du nombre de Lewis, de la porosité normalisée du milieu poreux et du rapport d'aspect de l'enceinte. En outre, une solution analytique valide pour une cavité verticale est dérivée sur la base de l'approximation d'écoulement parallèle. Le modèle non linéaire obtenu indique que le début de la convection d'amplitude finie se produit à un certain nombre de Rayleigh souscritique, qui est en fonction du nombre de Lewis. Le même problème a été reconsidéré par Mamou et al. (1998b) qui ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale induite dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. Ils se sont intéressés,

particulièrement, au cas où les forces de volume thermique et solutale sont opposées et de même intensité. Les nombres de Rayleigh critiques caractérisant l'apparition des mouvements convectifs sont calculés analytiquement en fonction des nombres de Lewis et de Darcy. Il a été trouvé que le nombre de Rayleigh thermique critique augmente lorsque le nombre de Darcy augmente ou lorsque le nombre de Lewis tend vers l'unité. De plus, il a été montré que l'augmentation du nombre de Darcy induit une diminution de l'intensité de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse. Par contre, l'augmentation du nombre de Rayleigh cause l'augmentation monotone de l'intensité de l'écoulement. Les résultats du milieu fluide ont été également obtenus à partir de la présente solution pour des nombres de Darcy suffisamment élevés. La convection en double diffusion dans une enceinte poreuse inclinée a été étudiée par Mamou et al. (1998c). Les critères pour l'apparition de la convection de l'état de repos ont été dérivées numériquement. L'existence de la convection souscritique a été également démontrée. Le même problème a été reconsidéré par Karimi-Fard et al. (1999) pour une cavité avec des parois opposées soumises à une température et une concentration différente mais uniforme. La confirmation numérique de l'apparition de mouvement prédit par la théorie de la stabilité linéaire a été obtenue pour une cavité carrée. En outre, les simulations numériques montrent l'existence de solutions multiples. Bennacer et al. (2001) ont considéré une cavité verticale soumise à des températures et des concentrations constantes sur les parois verticales. Les forces de volume induisant l'écoulement sont supposées coopérants. L'analyse d'échelle a été utilisée dans les cas limites thermique pure $(N << 1)$ et solutal pure $(N >> 1)$ en régime de couche limite. Ils ont démontré que les propriétés anisotropiques du milieu poreux affectent considérablement les taux de transfert de chaleur et de masse dans la cavité. Mohamad et Bennacer (2002) ont étudié la structure de l'écoulement qui se compose principalement d'un écoulement thermiquement induit de recirculation superposé à un faible écoulement secondaire et se développant en spirales suivant la direction transversale. Cependant, quand le rapport des forces de volume $N \approx -1$, l'écoulement bifurque suivant deux branches induites thermiquement. Par contre, quand N augmente, l'écoulement se stabilise et diminue en intensité. Les auteurs ont conclu qu'un modèle bidimensionnel est suffisant pour prédire correctement le taux de transfert de la chaleur et de la masse, au moins pour la gamme des paramètres étudiés. Bennacer et al. (2002) ont étudié numériquement et analytiquement le transfert combiné de chaleur et de masse dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux. Le modèle de Darcy-Brinkman a été utilisé. Dans le cas d'écoulement d'origine thermique, l'analyse d'échelle est appliquée pour prédire analytiquement l'évolution du transfert de chaleur et de masse en fonction de

l'anisotropie thermique. Ces résultats montrent l'existence d'un maximum de transfert de masse pour un rapport d'anisotropique critique. Cette situation critique dépend de plusieurs paramètres dont le nombre de Lewis. Bara et Khalil (2002) ont étudié les effets des paramètres anisotropes sur l'existence des solutions oscillantes instables et des solutions multiples en fonction du rapport des forces de volume. L'étude de solution analytique a été considérée comme une vérification des résultats numériques. L'analyse de la stabilité de la convection thermosolutale dans une couche poreuse verticale soumise à des limites thermique et solutal différentes a été effectuée par Mamou (2002). Les équations de gouvernance linéaires ont été résolues numériquement en utilisant une méthode des éléments finis. Il a été rapporté que l'augmentation de la porosité du milieu poreux retarde l'apparition des écoulements oscillatoires. Mamou (2003) a analysé la stabilité des écoulements convectifs dans une cavité poreuse horizontale soumise à des gradients verticaux thermiques et solutales, en considérant l'effet du paramètre d'accélération et de la porosité normalisée du milieu poreux sur les seuils de la surstabilité et Hopf bifurcation (transition de l'écoulement stationnaire d'amplitude finie à l'écoulement oscillant). Le seuil de la transition est déterminé en utilisant une analyse de la stabilité linéaire de l'état convectif stable perturbé. Bourich et al. (2004a) ont étudié numériquement la convection double diffusive dans une cavité poreuse carrée. Les auteurs ont démontré que pour un certain nombre de rapport de forme, les solutions multiples disparaissent. Par contre une solution monocellulaire se maintient quand $(N>1)$ ou $(N<1)$. Mahidjiba et al. (2006a) ont utilisé le modèle de Darcy pour étudier numériquement le début de la convection dans une couche poreuse horizontale saturée par de l'eau froide. Les parois horizontales de la cavité sont soumises à des températures et des concentrations constantes, tandis que les parois verticales sont adiabatiques et imperméables. Les équations gouvernantes prennent en considération la variation de la masse volumique. Les résultats ont été obtenus pour différentes valeurs du rapport d'aspect, de la porosité, du nombre de Lewis et du rapport des forces de volume. Pour une cavité finie, ils ont montré que le régime d'écoulement stable est atteint lorsqu'on trouve un nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition du mode oscillatoire au mode de convection directe. Cependant, pour une couche infinie les résultats indiquent l'absence d'un régime d'écoulement stable. Alloui et al. (2009) ont étudié la convection naturelle dans une cavité carrée contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois verticales de l'enceinte sont adiabatiques et imperméables. Par contre, les parois horizontales sont soumises à des flux de chaleur constants avec la paroi inférieure chauffée et la paroi supérieure refroidie. Le modèle de Darcy a été utilisé. Les paramètres gouvernants du problème sont le nombre de Rayleigh,

le nombre de Lewis, le rapport des forces de volume, la longueur de la partie chauffée, le rapport d'aspect de la cavité, la porosité de milieu poreux et la position relative de la partie chauffée avec la ligne médiane verticale de la cavité. Les deux écoulements de convection monocellulaire et bicellulaire sont étudiés. Aussi l'existence possible d'un écoulement tri-cellulaire est démontrée.

Il semble que les premiers à avoir étudié l'apparition de convection induite par l'effet de Soret, dans une cavité verticale soumise à un gradient de température horizontale pour la condition des forces de volume thermique et solutal et des mêmes intensités mais de sens opposé, sont Marcoux et al. (1998). Ils ont prédit le nombre de Rayleigh supercritique dans l'apparition de la convection à l'état de repos sur la base de la théorie de la stabilité linéaire en termes de rapport d'aspect de la cavité. La stabilité de petites perturbations de l'état de repos a été étudiée numériquement par Joly et al. (2000,2001) dans le cas de convection induite par Soret, en se basant sur la théorie de la stabilité linéaire. Ces derniers ont trouvé que la dépendance du nombre de Rayleigh supercritique du nombre de Lewis est différente de celle du problème de la double diffusion. Le nombre de Rayleigh critique dans l'apparition de la convection souscritique est également obtenu analytiquement. Pour la convection d'amplitude finie, les expressions explicites ont été dérivées pour prédire l'influence des paramètres régissant sur le nombre de Nusselt et de Sherwood. Brand et Steinberg (1983a, 1983b) ont remarqué qu'en prenant en compte l'effet Soret, il est possible d'avoir une instabilité oscillatoire pour une cellule chauffée par le haut. Ils présentent une équation d'amplitude pour l'instabilité oscillatoire dans une cellule poreuse saturée par un fluide binaire. L'influence de la porosité est prise en compte dans de nombreuses contributions récentes pour un problème similaire mais pour des conditions aux limites différentes de celles utilisées dans le présent travail. Bahloul et al. (2003) ont étudié la stabilité de l'écoulement dans une couche horizontale dans le cas de la double diffusion avec ou sans effet Soret. Ils ont considéré des conditions aux limites avec des flux de chaleur uniformes appliqués sur les parois horizontales et des parois verticales imperméables et isolées. Ils ont trouvé une solution analytique valable pour ces deux cas. Leur travail comprend un modèle analytique pour la convection d'amplitude finie et des résultats numériques permettant la détermination de la première bifurcation de Hopf. Pour la convection d'amplitude finie, une comparaison est faite pour illustrer la différence entre la double diffusion et la convection induite par effet Soret. Bourich et al. (2002) ont présenté une étude analytique et numérique de la convection induite par effet Soret dans une couche poreuse horizontale chauffée par le bas par un flux constant et uniforme. En utilisant l'hypothèse d'écoulement parallèle, ils ont déterminé les

seuils de bifurcation stationnaire et souscritique en fonction des paramètres régissant le problème. Ce problème a été étudié aussi par Bourich et al. (2004b) en considérant non seulement une cavité poreuse, mais aussi fluide. Le passage entre la formulation en milieu poreux saturé par un fluide binaire et un fluide binaire a été obtenu en utilisant le modèle de Brinkman-Hazen-Darcy dans sa forme transitoire. Les nombres de Rayleigh critiques pour le d'eclenchement de la convection stationnaire et oscillatoire ont été déterminés explicitement comme des fonctions des paramètres régissant le problème pour une couche infinie. A l'apparition de l'instabilité ils ont constaté que le nombre d'onde est égal à zéro alors que pour nos conditions aux limites le nombre d'onde est égal à zéro seulement dans une gamme particulière des valeurs du facteur de séparation. Ils ont également montré la dépendance des paramètres critiques en fonction de la porosité normalisée. El Hajjar (2008) ont étudié la naissance de la convection thermo-solutale dans une couche poreuse infinie avec l'effet Soret. Les parois horizontales imperméables à la matière sont maintenues à des températures constantes mais différentes. L'investigation a été faite sur les effets des paramètres de contrôle tels que le nombre de Lewis, le facteur de séparation, et la porosité normalisée sur la convection. Cette étude a permis de mettre en évidence deux zones d'écoulements : une stationnaire et l'autre oscillante. Pour une cellule chauffée par le bas, la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire lorsque le facteur de séparation est supérieur à la valeur critique. Lorsque ce dernier est inférieur à la valeur critique, la solution perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf. Dans le cas d'une cellule chauffée par le haut, la solution d'équilibre est stable lorsque le facteur de séparation est supérieur à la valeur critique ; alors qu'elle perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire lorsque le facteur de séparation est inférieur à la valeur critique. Alloui et al. (2010) ont étudié analytiquement et numériquement les effets combinés de Soret et thermosolutale sur la convection naturelle dans une cavité rectangulaire verticale remplie d'un mélange binaire. Des conditions aux frontières de type Neumann pour la température et le soluté ont été appliquées aux parois verticales de la cavité, tandis que les deux parois horizontales sont supposées imperméables et isolées. En fonction des paramètres fondamentaux du problème, ils trouvent un bon accord entre l'étude analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle et l'étude numérique basée sur la méthode de volume de contrôle. Récemment, Er-Raki et al. (2011) ont étudié l'effet de Soret sur le début de mouvement dans une cavité peu profonde chauffée et salée par les parois verticales. Ils ont pris en considération la situation particulière où le rapport de force de volume est lié au paramètre de Soret de manière que l'état de repos est une solution du problème. Il a été constaté que seulement la convection souscritique est

possible pour cette situation. La même configuration d'écoulement a été étudiée par Alloui et Vasseur (2013a) pour le cas de la convection induite par double diffusion et l'effet de Soret. Il a été montré que les régimes d'écoulement induits dans ces deux situations sont qualitativement similaires. Sur le plan quantitatif, les différences deviennent de plus en plus importantes quand la valeur du nombre de Lewis est rendue petite. Au dessus du nombre de Rayleigh souscritique la convection unicellulaire existe en termes des nombres de Lewis et Darcy.

Dans cette thèse, nous considérons les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle induite par double diffusion et l'effet de Soret dans des couches poreuses inclinée. Les parois actives de la cavité sont soit soumises à des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleurs et de concentration), soit de type Dirichlet (température et concentration constantes imposées). Le modèle de Dupuit-Darcy, tenant compte des effets de la trainée de forme pour des écoulements à haut nombre de Reynolds, a été utilisé pour établir les équations gouvernantes du système. En d'autres mots, la loi de Darcy, qui caractérise le milieu poreux, est étendue en incluant la loi de Dupuit. La motivation de ce travail est de compléter les études antérieurs sur la convection doublement diffusive en milieu de Darcy a faible nombre de Reynolds, nous avons considéré des écoulements convectifs pour n'importe quelle valeur de Reynolds en utilisant le modèle de Dupuit-Darcy qui tient compte des effets de la trainée de forme. Le but principal de cette étude est d'examiner l'effet de la trainée de forme sur les écoulements sous-critiques et au voisinage des états critiques de déclenchement de la convection, ce qui nous a conduits à des résultats originaux et a découvrir des nouveaux phénomènes de convection. Nous avons trouvé que le paramètre de la trainée de forme a un effet significatif sur le transfert de chaleur par convection. En outre, bien que l'effet de la trainée de forme n'ait aucune influence sur les seuils de l'apparition du mouvement stationnaire, il a un effet important sur l'apparition de la bifurcation de Hopf. Comme la trainée de forme joue le rôle d'un paramètre de stabilisation sur l'écoulement convectif, elle a un effet considérable sur l'apparition de la convection souscritique. Selon la valeur du rapport des forces de volume, N, deux cas d'écoulement convectifs sont étudiés : en premier lieu, le cas de convection opposée $N<0$ (les forces de la flottabilité thermiques et solutals sont opposées l'une à l'autre) est considéré. Et en dernier lieu, le cas où les forces de volume ont la même intensité mais dans des sens opposés $N=-1$ a été étudié dans le cas d'une cavité verticale. Pour les deux cas, il est bien connu que, pour un ensemble donné des paramètres de contrôle et en absence d'effet du paramètre de la trainée de forme, le début du mouvement peut être souscritique, c'est-à-dire se produisant à une

convection d'amplitude finie bien en dessous du seuil de convection stationnaire. L'effet du paramètre de la trainée de forme sur la convection souscritique ne semble pas être étudié systématiquement dans le passé. Un nouveau phénomène de bistabilité est démontré dans la présente étude, pour lequel deux solutions d'état stable coexistent près du début de convection stationnaire.

CHAPITRE II

MODÈLE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

2.1 Description du problème

On se propose d'étudier le phénomène de la convection double-diffusive dans un espace confiné. La configuration géométrique bidimensionnelle de notre écoulement est représentée sur la Fig 2.1. Nous considérons le cas d'une cavité rectangulaire de dimensions géométriques suivantes : longueur *L'*, hauteur *H'* et largeur *W'*, inclinée d'un angle Φ par rapport au plan horizontal, contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois actives de la cavité sont soumises à des flux de chaleur, *q'*, et de masse, *j'*, uniformes. Les autres parois sont considérées comme adiabatiques et imperméables.

Dans la présente étude, la cavité est placée dans un champ de pesanteur uniforme constant $\vec{g}$. L'interaction entre la gravité et les gradients de température et de soluté donnent naissance à des mouvements convectifs naturels. Ces derniers sont dus essentiellement à la distribution non uniforme de la densité du fluide engendrée par les facteurs cités ci-dessus. La problématique de cette étude est la détermination des nombres de Rayleigh critiques marquant différents seuils de convection. En régime de convection à amplitude finie, on déterminera les transferts de chaleur et de masse induits par les mouvements de convection naturelle. Dans cette étude, quelques hypothèses simplificatrices seront adoptées afin d'alléger la complexité du problème.

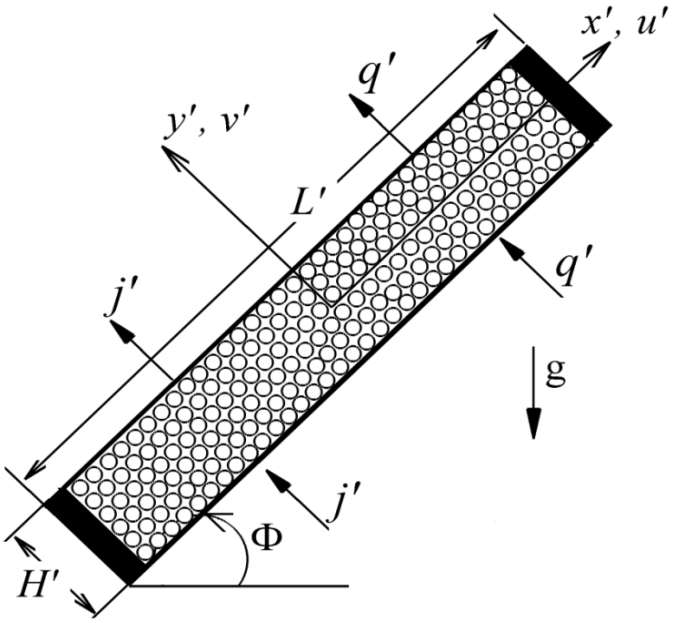


Figure 2.1 : Représentation schématique du modèle physique et du système de coordonnées.

2.2 Hypothèses simplificatrices

Lors de notre étude plusieurs approximations ont été adoptées afin de simplifier la formulation du modèle mathématique :

- La largeur de l'enceinte, *W'*, est supposée suffisamment grande par rapport aux autres dimensions (*W'/L'* et *W'/H'*>> 1) de façon à ce que les effets tridimensionnel deviennent négligeables. Ceci nous amène alors à un problème bidimensionnel comme le montre la Fig 2.1.

- la solution est un fluide newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est supposé laminaire et transitoire.
- La matrice poreuse est isotrope, perméable et homogène.
- Il n'y a ni réaction chimique ni source de chaleur ou de masse.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- L'effet de Dufour de diffusion de chaleur est négligé.
- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température de référence. Cependant, la densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température. Celle-ci est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta_T \left(T' - T'_0 \right) - \beta_S \left(S' - S'_0 \right) \right] \tag{2.1}$$

où : *T'* et *S'* représentent respectivement, la température et la concentration de fluide en un point du système, T_0', S_0' et ρ_0 représentent la température, la concentration et la masse volumique de référence, β_T et β_S sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et solutal du fluide. Ils sont définis par :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T'}\right)_{P',S'} \qquad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial S'}\right)_{P',T'} \tag{2.2}$$

Pour la plupart des fluides, β_T est positif sauf l'eau qui représente une densité maximale au voisinage de 4°C, par contre β_S peut être négatif ou positif en fonction de la contribution des composantes de diffusion à la densité du fluide. La relation (2.1) est d'une bonne approximation tant que la condition $\left(\Delta\rho / \rho\right) \leq 0.1$ est vérifiée par l'approximation de Boussinesq decrite dans Gray et Giorgini(1976).

2.3 Formulation mathématique

En tenant compte de toutes les hypothèses considérées, le système d'équations différentielles aux dérivées partielles décrivant ce problème est composé de l'équation de continuité, des équations de la conservation de la quantité de mouvement et des équations de la conservation de l'énergie et de la matière dans un milieu poreux.

Pour tenir compte des effets de la trainée de forme en grands nombre de *Re*, le terme non linéaire de Dupuit est pris en considération. Le modèle ainsi formé est connu sous le nom du modèle de Dupuit-Darcy ou de loi de Darcy étendue.

Le modèle de Dupuit-Darcy, tenant compte des effets de la trainée de forme, est pris en considération. Pour que la validation de la loi de Dupuit-Darcy soit effective, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\varepsilon' < 0.8 \qquad Da = \frac{K}{H'^2} \le 10^{-6} \qquad 0 < Re = \frac{V_a \sqrt{K}}{\upsilon} < \infty \tag{2.3}$$

où : V_a est la vitesse moyenne des particules de fluide à travers la matrice solide, K la perméabilité du milieu poreux, υ la viscosité cinématique du fluide et $\sqrt{K}$ est la longueur représentative du diamètre des pores.

Pour que les résultats obtenus soient valides, il faut que la porosité du milieu poreux soit inférieure à 0.8. Dans le cas contraire, les forces visqueuses (connues sous le nom de termes de Brinkman) doivent être prises en considération.

Pour l'étude de la convection naturelle dans des milieux poreux, nous supposons que la matrice poreuse est solide, perméable, homogène, isotrope et saturée par le fluide. Les équations relatives aux flux de chaleur et de la matière en présence des gradients thermique et solutal sont données par De Groot et Mazur (1969) :

$$\vec{q}' = -k \nabla T' \tag{2.4}$$

$$\vec{J}'(1 - S_r) = -\rho D \nabla S' - S_r \rho D' S'_0 (1 - S'_0) \nabla T' \tag{2.5}$$

où S_r est un nombre réel qui vaut $(S_r = 0)$ pour la double diffusion ou $(S_r = 1)$ pour la convection induite par l'effet de Soret, k et D sont respectivement la conductivité thermique et la diffusivité massique de la concentration dans la matrice poreuse saturée et D' est le coefficient d'effet de Soret.

Pour une cavité remplie par un fluide binaire, les équations de base régissant l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse sont données respectivement par :

2.3.1 Équation de continuité

L'équation de continuité exprimant le principe de conservation de masse d'un fluide en mouvement est donnée par :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}=0 \tag{2.6}$$

2.3.2 Équation de mouvement : Loi de Dupuit-Darcy

La formulation locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit comme suit :

$$-\frac{K}{\mu}\left[\frac{\partial P'}{\partial x'}+\rho_0 g\left[\beta_T\left(T'-T'_0\right)+\beta_S\left(S'-S'_0\right)\right]\cos\Phi\right]=\left(1+\frac{\tilde{K}}{\mu}\rho\left|\overrightarrow{V'}\right|\right)u' \tag{2.7}$$

$$\frac{K}{\mu}\left[-\frac{\partial P'}{\partial y'}+\rho_0 g\left[\beta_T\left(T'-T'_0\right)+\beta_S\left(S'-S'_0\right)\right]\sin\Phi\right]=\left(1+\frac{\tilde{K}}{\mu}\rho\left|\overrightarrow{V'}\right|\right)v' \tag{2.8}$$

2.3.3 Équation de conservation de l'énergie

La première loi de thermodynamique permet d'établir des relations entre les différentes formes d'énergie mises en jeu dans les milieux poreux. L'équation de l'énergie, dans laquelle les termes de dissipation visqueuse sont négligés, s'écrit comme suit :

$$\left(\rho C\right)_P\frac{\partial T'}{\partial t'}+\left(\rho C\right)_f\left(u'\frac{\partial T'}{\partial x'}+v'\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)=k_P\nabla^2 T' \tag{2.9}$$

2.3.4 Équation de conservation de masse

Le principe de conservation de la masse mène à l'équation de concentration suivante :

$$\phi\frac{\partial S'}{\partial t'}+\left(u'\frac{\partial S'}{\partial x'}+v'\frac{\partial S'}{\partial y'}\right)=D\nabla'^2 S'+S_r D'S'\left(1-S\right)\nabla'^2 T' \tag{2.10}$$

où $\overrightarrow{V'}$ est le vecteur de vitesse dont les composantes sont *u'* et *v'* dans les directions *x'* et *y'*, respectivement, μ est la viscosité dynamique, k_P est la conductivité thermique du milieu poreux, ϕ est la porosité du milieu poreux et *P'* est la pression hydrodynamique. Les paramètres $(\rho C)_p$ et $(\rho C)_f$ sont la capacité calorifique thermique du milieu poreux saturé et la capacité calorifique thermique du fluide respectivement.

Il est à noter qu'à partir des équations (2.7) et (2.8) la loi de Darcy peut être obtenue quand $\widetilde{K} = 0$. Pour illustrer comment le terme non linéaire supplémentaire entre en jeu lorsque la porosité ε est élevée, on peut citer Ergun's (1952) pour les relations K et $\widetilde{K}$.

$$K = \frac{d^2\varepsilon^2}{150(1-\varepsilon)^2}, \qquad \widetilde{K} = \frac{1.75d}{150(1-\varepsilon)} \tag{2.11}$$

où d, est la longueur caractéristique des pores ou le diamètre des particules.

De tout évidence, pour les milieux poreux avec une porosité élevée ($\varepsilon \sim 1$) le diamètre des pores est assez grand et on peut aboutir à une situation avec des grandes valeurs de $\widetilde{K}$. Dans ce cas le terme non linéaire représentant les effets de la trainée de forme devient important.

La hauteur H' entre les deux parois horizontales actives de la cavité a été choisie comme longueur de référence pour adimensionnaliser les équations gouvernantes (2.6)-(2.10). La vitesse est adimensionnalisée par rapport à la diffusivité thermique. Par ailleurs la température et la concentration sont adimensionnalisées par rapport à l'écart de température et de concentration entre les deux parois horizontales de la cavité.

Les variables adimensionnelles sont données par :

$$\begin{gathered}(x, y) = \left(\frac{x'}{\ell^*}, \frac{y'}{\ell^*}\right), \quad (u, v) = \left(\frac{u'}{U^*}, \frac{v'}{U^*}\right), \quad t = t'/t^*, \quad P = P'/P^* \\ \Psi = \Psi'/k_p, \quad T = \frac{(T' - T'_0)}{\Delta T^*}, \quad S = \frac{(S' - S'_0)}{\Delta S^*}, \quad \varepsilon = \phi/\sigma\end{gathered} \tag{2.12}$$

où ℓ^*, P^*, t^*, U^* sont respectivement la longueur, la pression, le temps et la vitesse caractéristiques. Ces grandeurs sont définies comme suit :

$$P^* = \frac{Pr}{Da}\rho_0 U^{*2}, \quad t^* = \sigma\frac{\ell^*}{U^*}, \quad U^* = \frac{\alpha_p}{\ell^*} \tag{2.13}$$

où α_P et σ désignent la diffusivité thermique du milieu poreux saturé et le rapport des chaleurs massiques respectivement. Ils sont définis par :

$$\alpha_P = \frac{k_P}{(\rho C)_f}, \quad \sigma = \frac{(\rho C)_P}{(\rho C)_f} \tag{2.14}$$

où $\Delta S^* = j'/\rho D$ pour la convection double diffusive (S_r=0) et $\Delta S^* = S'_0(1 - S'_0)\Delta T' D'/D$ pour la convection induite par l'effet de soret (S_r=1).

Dans notre cas la longueur caractéristique ℓ^* est définie comme :

$$\ell^* = H' \tag{2.15}$$

En introduisant les variables sans dimensions (2.12) dans les équations (2.6)-(2.10), nous obtenons les équations gouvernantes adimensionnelles suivantes décrivant respectivement, la conservation du mouvement, de l'énergie et de masse.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.16}$$

$$-\frac{Da}{P_r}\frac{\partial P}{\partial x} = u + \frac{\tilde{K}}{P_r \ell^*}\left|\vec{V}\right| u - R_T\left(T + NS\right)\cos\Phi \tag{2.17}$$

$$-\frac{Da}{P_r}\frac{\partial P}{\partial y} = v + \frac{\tilde{K}}{P_r \ell^*}\left|\vec{V}\right| v - R_T\left(T + NS\right)\sin\Phi \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \tag{2.19}$$

$$\varepsilon\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} = Le^{-1}\left(\nabla^2 S - S_r \nabla^2 T\right) \tag{2.20}$$

À partir de ces équations, cinq groupements adimensionnels émergent dans les équations ci-dessus, à savoir le nombre de Rayleigh thermique R_T, le rapport des forces de volume N, le nombre de Prandtl P_r, le nombre de Darcy Da, le nombre de Lewis Le et le nombre de Prandtl modifié, P_r^*, qui sont définis par :

$$\begin{gathered} R_T = \frac{gK\beta_T \Delta T^* \ell^*}{\alpha_P \nu}, \quad N = \frac{\beta_S \Delta S^*}{\beta_T \Delta T^*}, \quad P_r = \frac{\nu}{\alpha_P} \\ Da = \frac{K}{H'^2}, \quad Le = \frac{\alpha_P}{D}, \quad P_r^* = P_r \frac{H'}{\tilde{K}} \end{gathered} \tag{2.21}$$

2.4 Équation de fonction de courant

Etant donné que l'écoulement est considéré bidimensionnel, il existe alors une fonction de courant $\Psi(x, y)$ définie par :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2.22}$$

Après l'élimination de la pression dans les équations (2.17) et (2.18), les équations de mouvement, se réduisent à :

$$\left(1+\frac{V_a}{p_r^*}\right)\nabla^2\Psi+\frac{1}{P_r^*}V_a^{-1}\left[v^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+u^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-2uv\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}\right]=-R_T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T+NS\right)\cos\Phi-\frac{\partial}{\partial y}\left(T+NS\right)\sin\Phi\right] \tag{2.23}$$

avec : $V_a=\sqrt{u^2+v^2}$.

Ci-après, $(1/P_r^*)$ dans l'équation (2.23) est considéré comme le coefficient de la trainée de forme qui augmente avec la diminution de P_r^*.

2.5 Conditions aux limites

2.5.1 Conditions aux frontières hydrodynamiques

Ces conditions expriment l'imperméabilité des parois de la cavité, elles sont données par :

$$\left.\begin{aligned} u'=0,\quad \Psi'=0,\quad \text{à}\quad x'=\pm\frac{L'}{2}\\ v'=0,\quad \Psi'=0,\quad \text{à}\quad y'=\pm\frac{H'}{2}\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Dans un milieu poreux de Darcy, le glissement des particules fluides sur les parois est permis.

2.5.2 Conditions aux frontières thermiques et massiques

Les conditions aux frontières sur les parois adiabatiques et imperméables de la cavité sont exprimées par :

$$x'=\pm\frac{L'}{2},\quad \frac{\partial T'}{\partial x'}=\frac{\partial S'}{\partial x'}=0 \tag{2.25}$$

Par ailleurs, les conditions thermiques sur les parois actives sont :

$$y'=\pm\frac{H'}{2},\quad -k_P\frac{\partial T'}{\partial y'}=q',\quad -\rho D\frac{\partial S'}{\partial y'}-S_r\rho D'S'\left(1-S'\right)\frac{\partial T'}{\partial y'}=\left(1-S_r\right)j' \tag{2.26}$$

2.5.3 Conditions aux frontières thermiques adimensionnelles

$$\left.\begin{aligned} u=0,\quad \Psi=0\quad \text{à}\quad x=\pm\frac{A}{2}\\ v=0,\quad \Psi=0\quad \text{à}\quad y=\pm\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \qquad \text{à} \qquad x = \pm\frac{A}{2} \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \left(S_r - 1\right) + S_r \frac{\partial T}{\partial y} \qquad \text{à} \qquad y = \pm\frac{1}{2} \tag{2.29}$$

2.6 Transfert thermique et massique

Dans la présente étude, nous nous intéressons particulièrement aux calculs du taux de transfert de chaleur et de masse à une position x donnée, qui sont exprimés en termes des nombres de Nusselt et Sherwood définis par :

$$Nu_x = \frac{q'}{k_P \dfrac{\Delta T'}{H'}} = \frac{1}{T(x,-1/2) - T(x,1/2)} \tag{2.30}$$

$$Sh_x = \frac{j'}{D \dfrac{\Delta S'}{H'}} = \frac{1}{S(x,-1/2) - S(x,1/2)} \tag{2.31}$$

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood sur les parois actives sont exprimées par :

$$Nu_m = \frac{1}{A}\int_{-A/2}^{A/2} Nu_x \, dx \tag{2.32}$$

$$Sh_m = \frac{1}{A}\int_{-A/2}^{A/2} Sh_x \, dx \tag{2.33}$$

CHAPITRE III
SOLUTION ANALYTIQUE

Les équations aux dérivées partielles non linaires en milieu poreux (2.19), (2.20) et (2.23) régissant le problème de la convection double diffusive, sont fortement couplées. Une solution analytique pour ces équations est en général impossible, sauf pour certains cas et hypothèses pour lesquels les équations se simplifient considérablement. Dans le cas d'une couche poreuse de grand rapport d'aspect (A>>1) avec des parois actives exposées à des flux de chaleur et de masse constants, il est possible de trouver une solution analytique approximative. Cette dernière, obtenue en utilisant le concept de l'écoulement parallèle, permet de prédire analytiquement certains phénomènes physiques impliqués dans la convection naturelle doublement diffusive.

Le concept de l'écoulement parallèle a été utilisé avec succès dans le passé par plusieurs auteurs pour l'étude concernant la convection naturelle dans des cavités élancées (A>>1). Parmi ces auteurs, on peut citer : Cormack et al. (1974), Sen et al. (1987), Vasseur et al. (1989), Alavyoon (1993), Mamou et al. (1995b). Ce concept suppose que lorsque la cavité présente un grand rapport de forme (A>>1), l'écoulement engendré devient relativement parallèle le long des longues parois de la cavité, ce qui permet bien sûr de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire à ces parois.

Lorsque la cavité présente un grand rapport de forme $L'>>H'$ Fig (3.1), les lignes de courant au centre de la cavité, deviennent relativement parallèles à l'axe des x. Autrement dit, la fonction de courant Ψ devient une fonction de l'ordonnée y, seulement. On peut alors écrire :

$$\Psi(x,y) \approx \Psi(y) \tag{3.1}$$

En injectant cette approximation (3.1) dans les équations de conservation de la quantité de mouvement (2.19) et (2.20), nous pouvons montrer que les profils de la température et de la concentration sont donnés par la somme de deux termes; un définissant une variation longitudinale linéaire et l'autre donnant la distribution transversale :

$$\left.\begin{aligned} T(x,y) &\approx C_T x + \theta_T(y) \\ S(x,y) &\approx C_S x + \theta_S(y) \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

où C_T et C_S sont des constantes exprimant les gradients de température et de concentration selon la direction *x*.

Dans le cas des flux de chaleur et de masse imposés, les bilans d'énergie et de matière dans le volume de contrôle (Fig 3.1) s'écrivent selon Trevisan et Bejan (1986) sous les formes suivantes :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} dy = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} T dy \tag{3.3}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial S}{\partial x} dy = Le \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} S dy + S_r \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial y} dy \tag{3.4}$$

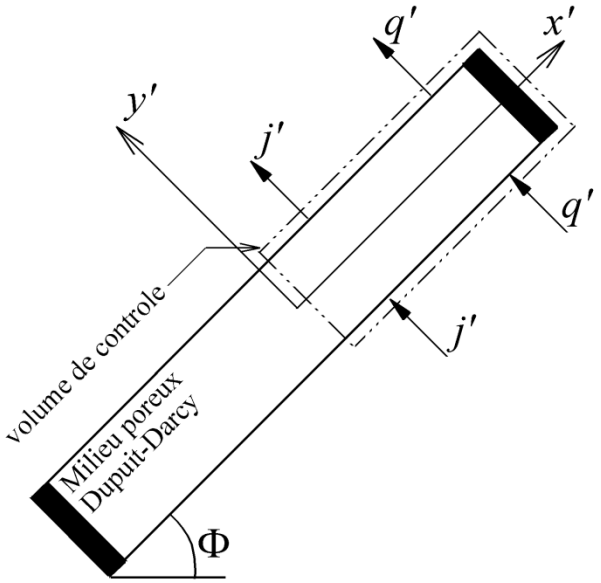


Figure 3.1 : Représentation schématique' d'une cavité élancée

3.1 Couche horizontale : Φ=0° et S_r=0

La substitution de ces approximations dans les équations (2.19), (2.20) et (2.23) et en supposant que les flux de chaleur et de masse à l'état permanent, on obtient les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{P_r^*}\left|\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y}\right|\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y}\right) = -R_T(C_T + NC_S) \tag{3.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_T}{\mathrm{d}y^2} = C_T \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y} \tag{3.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_S}{\mathrm{d}y^2} = C_S \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y} \tag{3.7}$$

En fonction de la composante de vitesse horizontale, *u*, l'équation (3.5) se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(u + \frac{1}{P_r^*}|u|u\right) = -R_T(C_T + NC_S) \tag{3.8}$$

En intégrant par rapport à *y*=0, et en supposant que *u*=0 à *y*=0, nous obtenons :

$$u + \frac{1}{P_r^*}|u|u = -R_T\left(C_T + NC_s\right)y \tag{3.9}$$

Il est bien connu que, dans une cavité horizontale, la circulation de flux convectif peut être soit dans le sens horaire ou anti-horaire. Ainsi, pour un écoulement dans le sens horaire, $u > 0$, pour $-1/2 \le y \le 0$ et dans le cas de sens anti-horaire, $u < 0$, pour $0 \le y \le 1/2$.

Pour résoudre ce problème, on considère seulement un cas et l'autre cas pourra se déterminer avec une transformation antisymétrique. En général, nous pouvons écrire :

$$|u| = nu \tag{3.10}$$

où : *n*=1 pour $-1/2 \le y \le 0$ et *n*=-1 pour $0 \le y \le 1/2$.

Pour cette hypothèse, la solution de l'équation (3.9), est donnée par :

$$u\left(y\right) = n\frac{P_r^*}{2}\left[-1+\sqrt{1-2\Omega n y}\right] \tag{3.11}$$

où : $\Omega = 2R_T\left(C_T + NC_S\right)/P_r^*$

Après l'intégration de l'équation (3.11), le profil de la fonction de courant s'écrit :

$$\Psi(y) = \frac{P_r^*}{6\Omega}\left[\left(1+\Omega\right)^{3/2} - \left(1-2n\Omega y\right)^{3/2} - \frac{3\Omega}{2}\left(1+2ny\right)\right] \tag{3.12}$$

La résolution des équations (3.6) et (3.7) est alors donnée par :

$$\theta\left(y\right) = P_r^*\Gamma_C\Gamma_L\left[n\frac{\left(1-2n\Omega y\right)^{5/2}-1}{30\Omega^2} - \frac{n}{4}y^2 + \left(\frac{\left(1+\Omega\right)^{3/2}}{6\Omega} - \frac{1}{4}\right)y\right] - y \tag{3.13}$$

où θ représente le profil de la température, θ_T avec $\Gamma_C = C_T$ et $\Gamma_L = 1$ ou le profil de la concentration, θ_S avec $\Gamma_C = C_S$ et $\Gamma_L = Le$.

Les termes des gradients de température, C_T , et de concentration, C_S , sont obtenus en substituant les profils Ψ, T et S dans les relations (3.3) et (3.4), après une manipulation algébrique nous obtenons l'expression suivante :

$$\Gamma_L^2\left[\frac{(1+\Omega)^4}{240\Omega^3}-\frac{(1+\Omega)^{7/2}}{210\Omega^3}+\frac{(1+\Omega)^{3/2}}{48\Omega}-\frac{\left(15\Omega^2-12\Omega+8\right)(1+\Omega)^{3/2}}{1680\Omega^3}-\frac{(1+\Omega)^{3/2}}{45\Omega^3}+\frac{83}{5040\Omega^3}+\frac{(1+\Omega)^{3/2}(-2+3\Omega)+4}{120\Omega^2}-\frac{(1+\Omega)^3(-2+3\Omega)}{180\Omega^3}-\frac{1}{48}\right]+\Gamma_L\frac{(1+\Omega)^{3/2}(-2+3\Omega)+2}{30\Omega^2P_r^*\Gamma_C}-\frac{\Gamma_L}{8P_r^*\Gamma_C}-\frac{1}{P_r^*}=0 \tag{3.14}$$

L'équation (3.14) a été résolu numériquement pour C_T et C_S en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

En substituant l'équation (3.13) dans les équations (2.30) et (2.31), les taux des transferts de chaleur et de masse sont donnés par :

$$Nu^{-1}=P_r^*C_T\left[\frac{(1+\Omega)^{5/2}-1}{15\Omega^2}-\frac{(1+\Omega)^{3/2}}{6\Omega}+\frac{1}{8}\right]+1 \tag{3.15}$$

$$Sh^{-1}=LeP_r^*C_S\left[\frac{(1+\Omega)^{5/2}-1}{15\Omega^2}-\frac{(1+\Omega)^{3/2}}{6\Omega}+\frac{1}{8}\right]+1 \tag{3.16}$$

Pour un écoulement parallèle, Nu=Nu_c et Sh=Sh_c où Nu_c et Sh_c sont respectivement les nombres de Nusselt et de Sherwood au centre de la couche poreuse (x=0).

En combinant l'équation de $\Omega=2R_T\left(C_T+NC_S\right)/P_r^*$ avec les termes des gradients de température et de concentration C_T et C_S en (3.14), nous obtenons l'équation ci-dessous :

$$\Omega=\frac{2R_T}{P_r^{*2}}\text{ƛ}\left(\frac{1}{\hbar}+\frac{N}{Le\,\Upsilon}\right) \tag{3.17}$$

où:

$$\text{ƛ}=\Omega\left[168(-2+3\Omega)(1+\Omega)^{3/2}-\left(630\Omega^2+336\right)\right] \tag{3.17a}$$

$$\Im=-21(1+\Omega)^4+24(1+\Omega)^{7/2}+28(-2+3\Omega)(1+\Omega)^3+(1+\Omega)^{3/2}\left[112-105\Omega^2+3\left(15\Omega^2-12\Omega+8\right)-42\Omega(-2+3\Omega)\right]-168\Omega-83+105\Omega^3+\frac{5040\Omega^3}{P_r^{*2}\Gamma_L^2} \tag{3.17b}$$

et $\mathfrak{z}$ représente, $\hbar$ avec $\Gamma_L = 1$ ou, Υ avec $\Gamma_L = Le$.

Le type de bifurcation souscritique dont le seuil de la convection est donné par le nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous}, est déterminé à partir de l'équation (3.18).

$$R_{TC}^{sous} = \frac{df\left(\Omega\right)}{dR_T} \tag{3.18}$$

Après la dérivation et la simplification de l'équation (3.18) nous pouvons déduire l'expression du nombre de Rayleigh souscritique R_{TC}^{sous} comme suit :

$$R_{TC}^{sous} = \frac{P_r^{*2} Le \hbar^2 \Upsilon^2}{2\left(Le\Upsilon^2\lambda + N\hbar^2\gamma\right)} \tag{3.19}$$

où

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{d\mathfrak{\lambda}\left(\Omega\right)}{dR_T}\hbar - \mathfrak{\lambda}\frac{d\hbar\left(\Omega\right)}{dR_T} \\ \gamma &= \frac{d\mathfrak{\lambda}\left(\Omega\right)}{dR_T}\Upsilon - \mathfrak{\lambda}\frac{d\Upsilon\left(\Omega\right)}{dR_T} \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Les cas limites des régimes de Darcy pur et Dupuit pur sont explorés.

3.1.1 Solution pour un milieu poreux Darcy ($|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{P_r^*}$) $\ll 1$

Lorsque l'effet de la trainée de forme est très faible, la loi de Dupuit-Darcy se réduit à la loi de Darcy classique. Cette situation correspond au cas où le coefficient de la trainée de forme est très faible ($P_r^* \to \infty$). Pour cette condition, nous pouvons déduire que ($\Omega \to 0$). En substituant l'équation de l'approximation de la fonction de courant (3.1) dans l'équation de mouvement (2.23), on obtient l'équation de la fonction du courant simplifiée suivante :

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = -R_T\left(C_T + NC_S\right) \tag{3.21}$$

Après intégration des équations (3.6), (3.7) et (3.21) et en satisfaisant les conditions aux frontières (2.27)-(2.29), les profils de la vitesse, de la fonction de courant, de la température et de la concentration se réduisent aux expressions suivantes :

$$u\left(y\right) = -R_T\left(C_T + NC_S\right)y \tag{3.22}$$

$$\Psi\left(y\right) = \Psi_0\left(1 - 4y^2\right) \tag{3.23}$$

$$\theta(y) = \frac{\Psi_0 \Gamma_C \Gamma_L}{3}\left(3y - 4y^3\right) - y \tag{3.24}$$

La fonction de courant au centre de la cavité, Ψ_0, caractérisant l'intensité de l'écoulement, peut s'écrire sous la forme :

$$\Psi_0 = \frac{R_T}{8}\left(C_T + NC_S\right) \tag{3.25}$$

Les taux de transfert de chaleur et de masse, représentés par le nombre de Nusselt et de Sherwood sont exprimés respectivement à partir de :

$$Nu = 6\frac{\Psi_0^2 + 2b}{\Psi_0^2 + 12b} \tag{3.26}$$

$$Sh = 6\frac{\Psi_0^2 Le^2 + 2b}{\Psi_0^2 Le^2 + 12b} \tag{3.27}$$

avec : b=15/16.

Les gradients de la température et de la concentration sont obtenus à partir des équations (3.3) et (3.4) comme suit :

$$\Gamma_C = \frac{4b\Gamma_L\Psi_0}{3\left(2b+\Psi_0^2\Gamma_L^2\right)} \tag{3.28}$$

et Γ_C représente, C_T avec $\Gamma_L = 1$ ou C_S avec $\Gamma_L = Le$.

En combinant l'équation de la fonction de courant au centre de la cavité (3.25) avec les termes des gradients de la température et de la concentration C_T et C_S en (3.28), nous obtenons l'équation ci-dessous :

$$\Psi_0 = \frac{R_T}{8}\left[\frac{4b\Psi_0}{3(2b+\Psi_0^2)} + N\frac{4bLe\Psi_0}{3(2b+\Psi_0^2 Le^2)}\right] \tag{3.29}$$

Après arrangement, nous obtenons alors une équation polynomiale de cinquième ordre en terme de la fonction de courant, Ψ_0:

$$\left[Le^4\Psi_0^4 - 2bLe^2 d_1\Psi_0^2 - b^2 d_2\right] \tag{3.30}$$

où :

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{R_T}{12}Le\left(Le+N\right) - \left(Le^2+1\right) \\ d_2 &= \frac{R_T}{3}Le^2\left(1+NLe\right) - 4Le^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

L'équation (3.30) montre qu'on a cinq solutions possibles :

$$\left.\begin{aligned}\Psi_0 &= 0 \\ \Psi_0 &= \pm\frac{\sqrt{b}}{Le}\left[d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2}\right]^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Le résultat de l'équation (3.32) indique que, dans le cas d'une cavité horizontale, le problème admet cinq solutions différentes. La première solution correspond à l'état de repos du fluide c'est-à-dire Ψ_0. Les quatre autres sont des solutions convectives. Les signes (±) à l'extérieur du crochet indiquent que le sens de rotation de l'écoulement peut être horaire ou trigonométrique, tandis que le signe (±) à l'intérieur de crochet indique qu'il existe deux solutions convectives possibles. Le signe (+) dans notre solution indique que l'écoulement est stable et le signe (-) correspond à une solution instable. Du point de vue mathématique, une solution convective existe seulement si les expressions dans les racines sont simultanément positives. Selon les signes des groupements $d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2}$ et $d_1^2 + d_2$ dans l'équation (3.31), on constate qu'il existe deux types de bifurcations. Le premier type est une bifurcation supercritique dont le seuil de convection se produit avec une amplitude nulle $\Psi_0=0$ est donnée par le nombre de Rayleigh supercritique, $R_{TC}^{\sup}$. Ce seuil est obtenuà partir les conditions suivantes : $d_2 = 0$ et $d_1 < 0$.

À partir de l'équation (3.31), on obtient la valeur de Rayleigh supercritique suivante :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R^{sup}}{\left(1 + NLe\right)} \tag{3.33}$$

avec : $R^{\sup} = 12$.

Comme on le sait dans la littérature Nield (1968), $R^{\sup}$ a été le premier à discuter de l'apparition de la convection thermique de Darcy.

Le second type est une bifurcation souscritique à amplitude finie, c'est-à-dire ($\Psi_0 \neq 0$). Dans le cas où les forces de volume sont coopérantes, ($N>0$), nous avons uniquement de la convection supercritique. Ceci est dû au fait que les forces de volume agissent dans le même sens et qu'elles tendent à déstabiliser les forces de convection. Dans le cas contraire, ($N<0$), les forces de convection sont opposées et le seuil de la convection est déterminé à partir des équations (3.32) et des conditions suivantes : $d_1^2 + d_2 = 0$ et $d_1 > 0$,

$$R_{TC}^{sous} = \frac{R^{sup}\left(Le+1\right)}{Le\left(Le+N\right)^2}\left[\left(Le-N\right)\left(Le-1\right)+2\sqrt{NLe\left(Le-1\right)\left(1-Le\right)}\right] \tag{3.34}$$

Dans le cas de simple diffusion, N=0, le gradient de température est obtenu à partir de l'équation (3.28) comme suit :

$$C_T = \pm\frac{1}{R_T}\left[10\left(R_T-12\right)\right]^{1/2} \tag{3.35}$$

Dans la limite d'un grand nombre de Rayleigh, on obtient les expressions asymptotiques suivantes :

$$\left.\begin{aligned} C_T &= \pm\sqrt{10}R_T^{-1/2} \\ \Psi_0 &= \sqrt{\frac{5}{32}}R_T^{1/2} \\ Nu &= 6 \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

Dansle régime de Darcy, la solution ci-dessus est similaire à celle rapportée par Vasseur et al. (1987).

3.1.2 Solution pour un milieu poreux Dupuit ($|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{P_r^*}) \gg \mathbf{1}$

Le régime convectif de Dupuit se réfère à la situation où les effets de la trainée de forme dominent ($\Omega\rightarrow\infty$). Ce résultat est obtenu quand $|u| \gg 1$ avec une valeur arbitraire de, P_r^*, de tell sorte que $(|u|P_r^*) \gg 1$. L'équation de mouvement (2.23) dans le cas d'une couche poreuse de Dupuit se réduit à :

$$\frac{1}{P_r^*}\frac{d}{dy}\left(\frac{d\Psi}{dy}\left|\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|\right) = -R_T\left(C_T + NC_S\right) \tag{3.37}$$

À partir de la solution de Dupuit-Darcy, en supposant que (Ω >>1), les profils de la vitesse, da la fonction de courant, de la température et de la concentration se réduisent aux expressions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} u(y) &= n\frac{P_r^*}{2}\sqrt{-2n\Omega y} \\ \Psi\left(y\right) &= \frac{P_r^*}{6\Omega}\left[\Omega^{3/2}-\left(-2n\Omega y\right)^{3/2}\right] \\ \theta\left(y\right) &= P_r^*\Gamma_C\Gamma_L\left[n\frac{\left(-2n\Omega y\right)^{5/2}}{30\Omega^2}+\frac{\Omega^{1/2}}{6}y\right]-y \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

Les expressions des gradients de température et de concentration C_T et C_S se réduisent à :

$$-\frac{P_r^{*2}}{80}\left[\Gamma_L^2\Omega-\frac{8}{P_r^*\Gamma_C}\Omega^{1/2}\right]-1=0 \tag{3.39}$$

Les nombres de Nusselt et de Sherwood, d'après les équations (3.15) et (3.16), ont pour expressions :

$$Nu=5\frac{\Omega P_r^{*2}+80}{\Omega P_r^{*2}+400} \tag{3.40}$$

$$Sh=5\frac{P_r^{*2}Le^2\Omega+80}{\left(5Le^2-4Le\right)P_r^{*2}\Omega+400} \tag{3.41}$$

Dans le cas de simple diffusion, N=0, lorsque le nombre de Rayleigh R_T devient très grand $\left(R_T\to\infty;\ \Omega\to\infty\right)$, les nombres de Nusselt et de Sherwood tendent asymptotiquement vers :

$$Nu=Sh=5 \tag{3.42}$$

Pour cette situation, les expressions asymptotiques pour le gradient thermique et l'intensité de l'écoulement sont obtenus comme suit :

$$\left.\begin{aligned}C_T&=2^{5/3}\left(R_TP_r^*\right)^{-1/3}\\ \Psi_0&=\frac{2^{1/3}}{3}\left(R_TP_r^*\right)^{1/3}\end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

CHAPITRE IV

METHODE NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous utilisons une méthode numérique pour la résolution du système d'équations différentielles non-linéaires telles que présentées dans la solution analytique. La méthode proposée est basée sur la technique des différences finies. Cette méthode est la plus ancienne des méthodes numériques. Elle a été introduite au 18eme siècle par Euler. Elle s'avère la plus adaptée et la plus facile à utiliser pour les problèmes à géométrie simple. Cette méthode consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini (voir Fig. 4.1).

Dans un repère cartésien, chaque nœud est désigné par le couple d'indices (i, j) désignant les lignes d'intersection du maillage. Les nœuds voisins sont implicitement définis en augmentant ou en abaissant l'un des indices par un incrément unitaire.

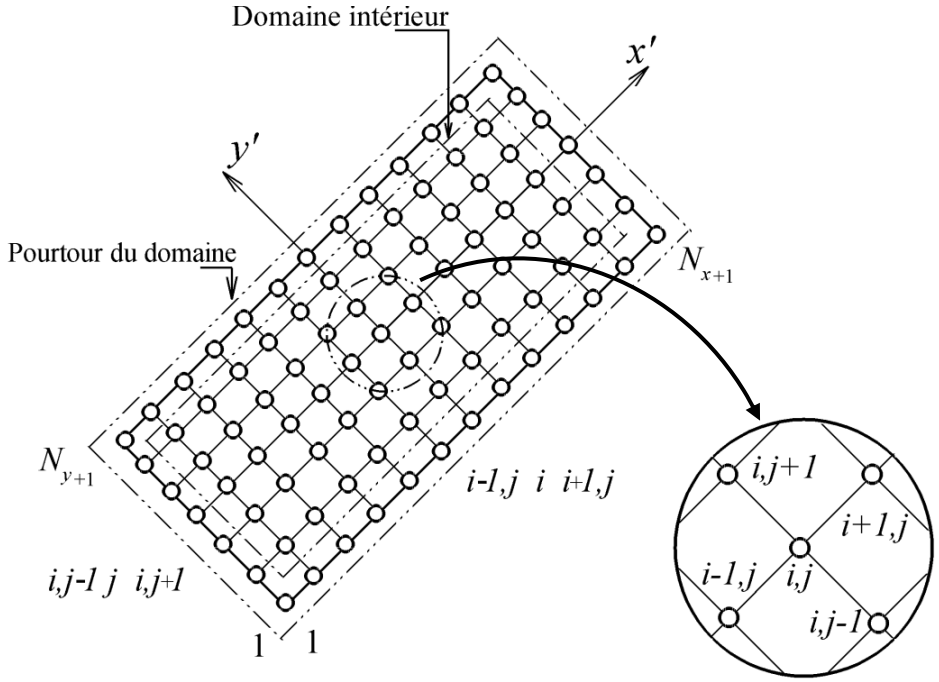


Figure 4.1 : Maillage du domaine de calcul en (i, j).

Les équations de l'énergie (2.19) et de la concentration (2.20) sont discrétisées avec un schéma centré du deuxième ordre et en utilisant la forme conservatrice pour les termes convectifs. Pour chaque pas de temps, la méthode implicite aux directions alternées (ADI) donne lieu à deux systèmes matriciels tri-diagonaux à résoudre; l'un résultant de la discrétisation implicite en x et l'autre de la discrétisation implicite en y. La méthode (ADI) divise le pas de temps en deux parties égales. Dans le premier demi-pas de temps, le système

est implicitement en x mais explicitement en y et dans le deuxième demi-pas de temps, le système est implicitement en y et explicitement en x. Pour chaque étape de temps, la solution est obtenue en balayant le domaine de calcul dans la direction des x puis dans celle des y. Connaissant les champs de la température et de la concentration à l'instant $(n+1)\Delta t$, l'étape suivante consiste à déterminer le champ de la fonction de courant à partir de l'équation (2.23), une fois discrétisée avec un schéma centré classique et résolue avec la méthode de sur-relaxation successive (SOR) par points proposée par Frankel (1950), qui est une méthode explicite donnant directement la valeur de Ψ à l'instant $(n+1)\Delta t$, au nœud considéré, moyennant un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait.

4.1 Discrétisation des conditions aux frontières thermiques

Les conditions aux frontières (2.28) et (2.29) sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré à droite et à gauche du deuxième ordre selon la paroi considérée :

Selon les parois adiabatiques et imperméables : $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial S}{\partial x} = 0$

$$T_{1,j} = \frac{4T_{2,j} - T_{3,j}}{3}, \qquad S_{1,j} = \frac{4S_{2,j} - S_{3,j}}{3} \qquad \text{à} \qquad x = -\frac{A}{2} \tag{4.1}$$

$$T_{Nx+1,j} = \frac{4T_{Nx,j} - T_{Nx-1,j}}{3}, \qquad S_{Nx+1,j} = \frac{4S_{Nx,j} - S_{Nx-1,j}}{3} \qquad \text{à} \qquad x = \frac{A}{2} \tag{4.2}$$

Selon les parois actives : $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -1$**,** $\qquad \dfrac{\partial S}{\partial y} = (S_r - 1) + S_r \dfrac{\partial T}{\partial y}$

$$T_{i,1} = \frac{4T_{i,2} - T_{i,3} + 2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y = -\frac{1}{2} \tag{4.3}$$

$$T_{i,Ny+1} = \frac{4T_{i,Ny} - T_{i,Ny-1} - 2\Delta y}{3} \qquad \text{à} \qquad y = \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

$$S_{i,1} = \frac{4S_{i,2} - S_{i,3} - 2\Delta y\,(S_r - 1) - S_r\,(4T_{i,2} - T_{i,3} - 3T_{i,1})}{3} \qquad \text{à} \qquad y = -\frac{1}{2} \tag{4.5}$$

$$S_{i,Ny+1} = \frac{4S_{i,Ny} - S_{i,Ny-1} + 2\Delta y\,(S_r - 1) - S_r\,(4T_{i,Ny} - 3T_{i,Ny+1} - T_{i,Ny-1})}{3} \qquad \text{à} \qquad y = \frac{1}{2} \tag{4.6}$$

4.2 Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation d'énergie étant parabolique par rapport au temps et elliptique par rapport aux coordonnées spatiales, la méthode implicite aux directions alternées ADI est choisie comme outil de résolution. Compte tenu de l'équation de l'énergie (2.19), cette dernière se réécrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial(uT)}{\partial x}+\frac{\partial(vT)}{\partial y}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{4.7}$$

Schéma implicite en *x* et explicite en *y*

C'est un schéma aux différences centrées au temps (n+1/2) pour les dérivées en x et au temps n pour les dérivées en y, chaque terme de l'équation (4.7) est discrétisé comme suit :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j}=\frac{T_{i+1,j}^{n+1/2}-2T_{i,j}^{n+1/2}+T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2},\qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j}=\frac{T_{i,j+1}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \tag{4.8}$$

$$\left.\frac{\partial(uT)}{\partial x}\right|_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}^{n}T_{i+1,j}^{n+1/2}-u_{i-1,j}^{n}T_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x},\qquad \left.\frac{\partial(vT)}{\partial y}\right|_{i,j}=\frac{v_{i,j+1}^{n}T_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n}T_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} \tag{4.9}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial T}\right|_{i,j}=2\frac{T_{i,j}^{n+1/2}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{4.10}$$

En substituant les équations (4.8)-(4.10) dans l'équation (4.7), on obtient un système matriciel tridiagonal de la forme :

$$A_i T_{i+1,j}^{n+1/2}+B_i T_{i,j}^{n+1/2}+C_i T_{i-1,j}^{n+1/2}=D_i \tag{4.11}$$

avec :

$$A_i=\left[\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x}-\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right],\qquad B_i=2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right],\qquad C_i=-\left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right]$$

$$D_i=\left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j+1}^{n}+2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j}^{n}+\left[\frac{v_{j,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j-1}^{n}$$

En remplaçant les conditions aux limites (4.1)-(4.4) dans l'équation (4.11) on obtient la forme discrète implicite en x sous la forme suivante :

Pour : i=2 $$\left[A_2-\tfrac{1}{3}C_2\right]T_{3,j}^{n+1/2}+\left[B_2-\tfrac{4}{3}C_2\right]T_{2,j}^{n+1/2}=D_2 \tag{4.11a}$$

Pour : $i=N_x$ $$\left[\frac{4}{3}A_{Nx} - B_{Nx}\right]T_{Nx,j}^{n+1/2} + \left[C_{Nx} - \frac{1}{3}A_{Nx}\right]T_{Nx-1,j}^{n+1/2} = D_{Nx} \qquad (4.11b)$$

Schéma implicite en *y* et explicite en *x*

C'est un schéma aux différences centrées au temps (n+1/2) pour les dérivées en x et au temps (n+1) pour les dérivées en y. La discrétisation des dérivées partielles est donnée par :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \qquad (4.12)$$

$$\left.\frac{\partial(uT)}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n} T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n} T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial(vT)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^{n} T_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n} T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \qquad (4.13)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j} = 2\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \qquad (4.14)$$

En substituant les équations (4.12)-(4.14) dans l'équation (4.7), on obtient un système matriciel tridiagonal de la forme :

$$A_i' T_{i,j+1}^{n+1} + B_i' T_{i,j}^{n+1} + C_i' T_{i,j-1}^{n+1} = D_i' \qquad (4.15)$$

$$A_i' = \left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right], \qquad B_i' = 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right], \qquad C_i = -\left[\frac{v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L}\right]$$

$$D_i' = \left[-\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right] T_{i+1,j}^{n+1/2} + 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right] T_{i,j}^{n+1/2} + \left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L}\right] T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

En remplaçant les conditions aux limites (4.1)-(4.4) dans l'équation (4.15) on obtient la forme discrète implicite en y sous la forme suivante :

Pour : $j=2$ $$\left[A_2' - \frac{1}{3}C_2'\right]T_{i,3}^{n+1} + \left[B_2' - \frac{4}{3}C_2'\right]T_{i,2}^{n+1} = D_2' - \frac{2}{3}C_2'\Delta y \qquad (4.15a)$$

Pour : $j=N_y$ $$\left[\frac{4}{3}A_{Ny}' - B_{Ny}'\right]T_{i,Ny}^{n+1} + \left[C_{Ny}' - \frac{1}{3}A_{Ny}'\right]T_{i,Ny-1}^{n+1} = D_{Ny}' - \frac{2}{3}A_{Ny}'\Delta y \qquad (4.15b)$$

4.3 Discrétisation de l'équation de concentration

De même pour l'équation de concentration (2.20), nous exposons dans ce qui suit sa discrétisation en suivant exactement les mêmes démarches que le paragraphe précédent.

L'équation de concentration (2.20) se réécrit de la façon suivante :

$$\varepsilon\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(uS)}{\partial x}+\frac{\partial(vS)}{\partial y}=Le^{-1}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}-S_r\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\right] \tag{4.16}$$

Schéma implicite en *x* et explicite en *y*

Similairement aux démarches précédentes, l'équation algébrique correspondant à la discrétisation de l'équation de concentration donne :

$$A_i S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+B_i S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+C_i S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}=D_i \tag{4.17}$$

avec :

$$A_i=\left[\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x}-\frac{1}{\Delta x^2 Le}\right],\qquad B_i=2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x^2 Le}\right],\qquad C_i=-\left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{1}{\Delta x^2 Le}\right]$$

$$D_i=\left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]S_{i,j+1}^{n}+2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]S_{i,j}^{n}+\left[\frac{v_{j,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]S_{i,j-1}^{n}-$$

$$S_r Le^{-1}\left[\frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{i+1,j}^{n}+T_{i-1,j}^{n}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(T_{i,j+1}^{n}+T_{i,j-1}^{n}\right)-\frac{2\left(\Delta y^2-\Delta x^2\right)}{\Delta x^2\Delta y^2}T_{i,j}^{n}\right]$$

En remplaçant les conditions aux limites (4.1)-(4.6) dans l'équation (4.17) on obtient la forme discrète implicite en *x* sous la forme suivant :

Pour : i=2 $$\left[A_2-\tfrac{1}{3}C_2\right]S_{3,j}^{n+1/2}+\left[B_2-\tfrac{4}{3}C_2\right]S_{2,j}^{n+1/2}=D_2 \tag{4.17a}$$

Pour : $i=N_x$ $$\left[\tfrac{4}{3}A_{Nx}-B_{Nx}\right]S_{Nx,j}^{n+1/2}+\left[C_{Nx}-\tfrac{1}{3}A_{Nx}\right]S_{Nx-1,j}^{n+1/2}=D_{Nx} \tag{4.17b}$$

Schéma implicite en *y* et explicite en *x*

$$A_i' S_{i,j+1}^{n+1}+B_i' S_{i,j}^{n+1}+C_i' S_{i,j-1}^{n+1}=D_i' \tag{4.18}$$

$$A_i'=\left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right],\qquad B_i'=2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right],\qquad C_i=-\left[\frac{v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}-\frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]$$

$$D_i^{'} = \left[-\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^{2} Le} \right] S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 2\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^{2} Le} \right] S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^{2} Le} \right] S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} -$$
$$S_r Le^{-1} \left[\frac{1}{\Delta x^{2}} \left(T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{\Delta y^{2}} \left(T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i,j-1}^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{2\left(\Delta y^{2} - \Delta x^{2} \right)}{\Delta x^{2} \Delta y^{2}} T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

En remplaçant les conditions aux limites (4.1)-(4.6) dans l'équation (4.18) on obtient la forme discrète implicite en *x* sous la forme suivante :

Pour : j=2 $$\left[A_2' - \tfrac{1}{3}C_2'\right] S_{i,3}^{n+1} + \left[B_2' - \tfrac{4}{3}C_2'\right] S_{i,2}^{n+1} = D_2' - \tfrac{2}{3}C_2'\Delta y \qquad (4.18a)$$

Pour: $j=N_y$ $$\left[\tfrac{4}{3}A_{Ny}' - B_{Ny}'\right] S_{i,Ny}^{n+1} + \left[C_{Ny}' - \tfrac{1}{3}A_{Ny}'\right] S_{i,Ny-1}^{n+1} = D_{Ny}' - \tfrac{2}{3}A_{Ny}'\Delta y \qquad (4.18b)$$

4.4 Discrétisation de l'équation du mouvement

4.4.1 Milieu poreux Darcy ($|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{r}}^{*}) \ll 1$

L'équation de mouvement du milieu poreux basée sur le modèle de Darcy peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\nabla^2 \Psi = R_T \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T + NS\right)\cos\Phi - \frac{\partial}{\partial y}\left(T + NS\right)\sin\Phi \right] \qquad (4.19)$$

Chaque terme de l'équation de mouvement (4.19) est discrétisé selon un schéma centré classique.

$$\left.\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^{2}}\right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^{2}}, \qquad \left.\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^{2}}\right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^{2}} \qquad (4.20)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \qquad (4.21)$$

En remplaçant les expressions (4.20) et (4.21) dans l'équation (4.19) on obtient l'expression générale de la fonction suivante

$$\Psi_{i,j}^{(n+1),(k+1)} = \left(1-\omega\right)\Psi_{i,j}^{(n+1),k} + \omega\left\{a_1\left(\Psi_{i+1,j}^{(n+1),k} + \Psi_{i-1,j}^{(n+1),(k+1)}\right) + a_2\left(\Psi_{i,j+1}^{(n+1),k} + \Psi_{i,j-1}^{(n+1),(k+1)}\right) + \right.$$
$$\left. a_3\left[\left(T_{i+1,j}^{(n+1)} - T_{i-1,j}^{(n+1)}\right) + N\left(S_{i+1,j}^{(n+1)} - S_{i-1,j}^{(n+1)}\right)\right] + a_4\left[\left(T_{i,j+1}^{(n+1)} - T_{i,j-1}^{(n+1)}\right) + N\left(S_{i,j+1}^{(n+1)} - S_{i,j-1}^{(n+1)}\right)\right]\right\} \qquad (4.22)$$

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des constantes définies par :

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Delta y^{\,2}}{2\left(\Delta x^{\,2}+\Delta y^{\,2}\right)}, \qquad a_3 = R_T\cos\Phi\,\frac{\Delta x\,\Delta y^{\,2}}{4\left(\Delta x^{\,2}+\Delta y^{\,2}\right)} \\ a_2 &= \frac{\Delta x^{\,2}}{2\left(\Delta x^{\,2}+\Delta y^{\,2}\right)}, \qquad a_4 = -R_T\sin\Phi\,\frac{\Delta x^{\,2}\Delta y}{4\left(\Delta x^{\,2}+\Delta y^{\,2}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

Le paramètre ω est le facteur de sur-relaxation, compris entre 1 et 2, pour accélérer la convergence. Sa valeur optimale, ω_{opt}dépend de la forme du domaine, du maillage et du type des conditions aux limites.

Pour un domaine rectangulaire avec un maillage uniforme, ω_{opt} est donnée par :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\zeta^2}\left[1-\sqrt{1-\zeta^2}\right] \tag{4.24}$$

où :

$$\zeta = \left[\frac{\cos\left(\pi / N_{x+1}\right)+\left(\Delta x^{\,2}/\Delta y^{\,2}\right)\cos\left(\pi / N_{y+1}\right)}{1+\left(\Delta x^{\,2}/\Delta y^{\,2}\right)}\right]$$

où N_{x+1} et N_{y+1} désignent les nombres des nœuds suivant les directions horizontales et verticales, respectivement.

4.4.2 Milieux poreux Dupuit-Darcy

L'équation de mouvement pour le cas général est réécrite sous la forme suivante :

$$\left(1+\frac{V_a}{P_r^*}\right)\nabla^2\Psi+\frac{1}{P_r^* V_a}\left[v^{\,2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^{\,2}}+u^{\,2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^{\,2}}-2uv\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}\right]=R_T\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(T+NS\right)\cos\Phi-\frac{\partial}{\partial x}\left(T+NS\right)\sin\Phi\right) \tag{4.25}$$

avec : $V_a=\sqrt{\left(\partial\Psi/\partial x\right)^2+\left(\partial\Psi/\partial y\right)^2}$

Avant la discrétisation de l'équation (4.25), on suppose que les variables V_a, u et v sont déjà connues.

On applique une discrétisation centrée de chaque terme de l'équation et on applique une discrétisation croisée pour le terme suivant :

$$\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}\right|_{i,j}=\frac{1}{4\Delta x\,\Delta y}\left[\Psi_{i+1,j+1}^{n+1}-\Psi_{i-1,j+1}^{n+1}-\Psi_{i-1,j-1}^{n+1}+\Psi_{i+1,j-1}^{n+1}\right] \tag{4.26}$$

Après la discrétisation, l'équation générale de la fonction de courant devient :

$$\Psi_{i,j}^{(n+1),(k+1)} = \Psi_{i,j}^{(n+1),k} + \omega\left\{a_x\left(\Psi_{i+1,j}^{(n+1),k} + \Psi_{i-1,j}^{(n+1),(k+1)}\right) + a_y\left(\Psi_{i,j+1}^{(n+1),k} + \Psi_{i,j-1}^{(n+1),(k+1)}\right) + a_{xy}\right.$$
$$\left(\Psi_{i+1,j+1}^{(n+1),k} - \Psi_{i-1,j+1}^{(n+1),k} - \Psi_{i-1,j-1}^{(n+1),(k+1)} + \Psi_{i+1,j+1}^{(n+1),k}\right) + a_{TSx}\left[\left(T_{i+1,j}^{(n+1)} - T_{i-1,j}^{(n+1)}\right) + N\left(S_{i+1,j}^{(n+1)} - S_{i-1,j}^{(n+1)}\right)\right] +$$
$$\left. a_{TSy}\left[\left(T_{i,j+1}^{(n+1)} - T_{i,j-1}^{(n+1)}\right) + N\left(S_{i,j+1}^{(n+1)} - S_{i,j-1}^{(n+1)}\right)\right]\right\} \tag{4.27}$$

avec :

$$a_p = \frac{\left[2\left(P_r^* + V_a\right)\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)V_a + 2\left(v^2\Delta y^2 + u^2\Delta x^2\right)\right]}{P_r^* V_a \Delta x^2 \Delta y^2}, \qquad a_x = \left[\frac{\left(P_r^* + V_a\right)V_a + v^2}{P_r^* V_a \Delta x^2}\right] / a_p$$
$$a_y = \left[\frac{\left(P_r^* + V_a\right)V_a + u^2}{P_r^* V_a \Delta y^2}\right] / a_p, \qquad a_{xy} = -\left[\frac{uv}{2P_r^* V_a \Delta x\, \Delta y}\right] / a_p$$
$$a_{TSx} = \frac{R_T \cos\Phi}{2\Delta x a_p}, \qquad a_{TSy} = -\frac{R_T \sin\Phi}{2\Delta y a_p} \tag{4.28}$$

4.5 Discrétisation des champs de vitesse

Les composantes du champ de vitesse sont obtenues à partir de la fonction de courant selon les relations (2.22). La discrétisation de ces équations par un schéma de différence finies centré du premier ordre donne :

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \tag{4.29}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \tag{4.30}$$

4.6 Discrétisation des conditions aux frontières des vitesses

Les conditions aux frontières des vitesses sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré à droite et à gauche du troisième ordre :

$$\left.\begin{array}{llll} u_{1,j} = 0, \quad , & v_{i,1} = -\dfrac{18\Psi_{2,j} - 9\Psi_{3,j} + 2\Psi_{4,j}}{6\Delta x} & \text{à} & x = -\dfrac{A}{2} \\ u_{Nx+1,j} = 0, & v_{i,Ny+1} = \dfrac{18\Psi_{Nx,j} - 9\Psi_{Nx-1,j} + 2\Psi_{Nx-2,j}}{6\Delta x} & \text{à} & x = \dfrac{A}{2} \end{array}\right\} \tag{4.31}$$

$$\left.\begin{array}{llll} v_{i,1} = 0, & u_{1,j} = \dfrac{18\Psi_{i,2} - 9\Psi_{i,3} + 2\Psi_{i,4}}{6\Delta y} & \text{à} & y = -\dfrac{1}{2} \\ v_{i,Ny+1} = 0, & u_{Ny+1,j} = -\dfrac{18\Psi_{i,Ny} - 9\Psi_{i,Ny-1} + 2\Psi_{i,Ny-2}}{6\Delta y} & \text{à} & y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad (4.32)$$

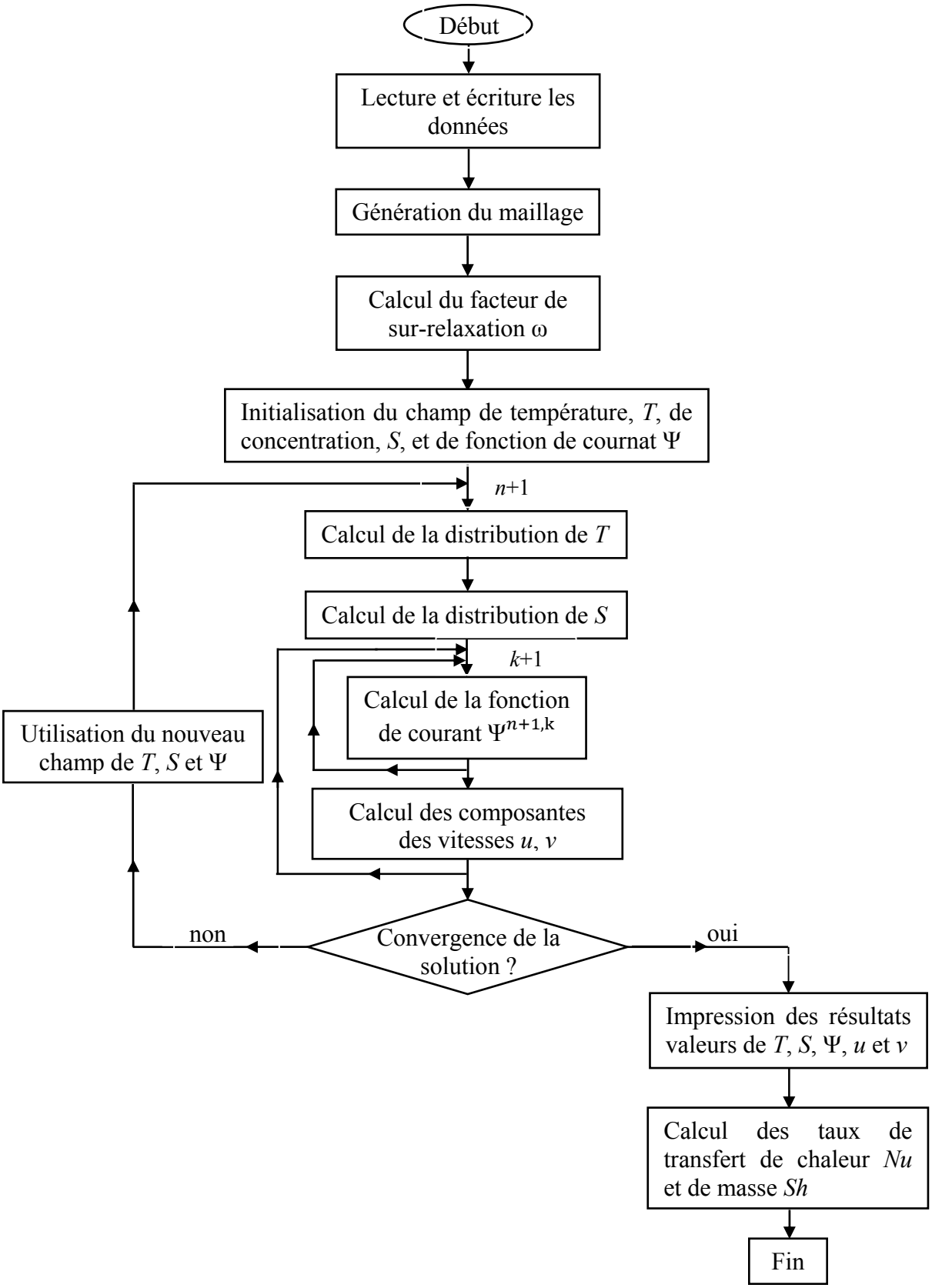
4.7 Algorithme de calcul

Les principales étapes de notre algorithme de calcul sont :

1. Génération du maillage.
2. Initialisation et lecture des données.
3. Calcul du facteur de sur-relaxation.
4. Introduction des conditions initiales sur la température, *T*, sur la concentration, *S*, et sur la fonction de courant, Ψ.
5. Evaluation du champ de vitesse initiale $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
6. Début de la boucle dans le temps.
   6.1. Résolution de l'équation de l'énergie (4.11) et (4.15) par la méthode ADI et calcul du champ de température $T_{i,j}$.
   6.2. Résolution de l'équation de concentration (4.17) et (4.18) par la méthode ADI et calcul le champ de concentration $S_{i,j}$.
   6.3. Résolution de l'équation de mouvement (4.22) et (4.27) par la méthode SOR et calcul du champ de la fonction du courant $\Psi_{i,j}$.
   6.4. Détermination du champ de vitesse $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
   6.5. Refaire l'étape (6.1) jusqu'à l'obtention de la convergence de la solution vers une solution permanent ou oscillante.
7. Impression des résultats.
8. Fin du programme.

Le critère de convergence lors de la résolution des équations (4.22) et (4.27) est donné par :

$$\frac{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^{k}\right|}{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k}\right|} \leq 10^{-6} \quad (4.33)$$


Début
Lecture et écriture les données
Génération du maillage
Calcul du facteur de sur-relaxation ω
Initialisation du champ de température, T, de concentration, S, et de fonction de cournat Ψ
n+1
Calcul de la distribution de T
Calcul de la distribution de S
k+1
Calcul de la fonction de courant Ψ^{n+1,k}
Utilisation du nouveau champ de T, S et Ψ
Calcul des composantes des vitesses u, v
non
Convergence de la solution ?
oui
Impression des résultats valeurs de T, S, Ψ, u et v
Calcul des taux de transfert de chaleur Nu et de masse Sh
Fin

CHAPITRE V
RÉSULTATS ET DISCUTION

Ce chapitre s'intéresse à la présentation des résultats analytiques et numériques dans les cas d'une cavité en configuration horizontale, inclinée et verticale. En premier lieu, on étudie le cas d'une cavité poreuse soumise à des flux de chaleur constants q' selon les parois horizontales (le rapport de la force de volume $N = 0$). Puis, on étudie le cas d'une cavité soumise à des flux de chaleur q' et de masse j' (le rapport de la force de volume $N \neq 0$). Le cas de la convection opposée $N < 0$ est considéré. Et en dernier lieu, le cas où les forces de volume ont la même intensité mais dans des sens opposés $N = -1$ a été étudié dans le cas d'une cavité verticale. Ce problème est gouverné par les nombres sans dimensions suivants: le rapport de la force de volume, N, le nombre de Prandtl modifié, P_r^*, la porosité normalisée, ε, le nombre de Rayleigh, R_T, le rapport d'aspect, A, de la cavité, l'angle d'inclinaison, Φ, et le nombre de Lewis, Le.

5.1 Validation de code numérique

A fin de vérifier l'exactitude du programme développé dans le présent travail, on a comparé les modèles analytiques avec les calculs numériques en se basant sur la détermination des trois paramètres souvent traités dans l'étude des écoulements convectifs, à savoir les nombres de Nusselt, Nu, et de Sherwood, Sh, caractérisant respectivement les taux de transfert de chaleur et de masse au sein de la cavité, et l'intensité de l'écoulement exprimée par la fonction de courant, Ψ. D'abord, nous présentons quelques comparaisons en convection naturelle dans le cas d'une cavité horizontale, dont les parois horizontales de la cavité sont adiabatiques et imperméables et les parois verticales sont chauffées à une température constante comme illustré dans les tableaux (5.1a) et (5.1b). On considère aussi le cas d'une cavité horizontale, dont les parois horizontales de la cavité sont soumises à des flux de chaleur constants et les parois verticales sont adiabatiques et imperméables comme illustré dans le tableau (5.2). Dans le cas de la convection induite par double diffusion, on a étudié le cas d'une cavité horizontale chauffée et salée par le bas avec des flux de chaleur et de masse constants. Les résultats sont donnés dans le tableau (5.3).

Le programme élaboré pour résoudre les équations de base a été validé en se référant aux différentes études numériques disponibles dans la littérature. Les tableaux. (5.1a) et (5.1b) comparent nos résultats avec ceux de Nawaf et Pop (2005), et Prasad et Tuntomo

(1987). Ces études ont été réalisées pour le cas d'une cavité verticale chauffée par les cotés à une température constante où A=1, $R_T = 10^3$, $P_r^* = 10^{-1}$ et A=1, $R_T = 500$, $P_r^* = 10$. Le tableau (5.2) compare nos résultats avec ceux de Kalla (2004) et Mahdjiba (1998) pour le cas d'une cavité horizontale chauffée par le bas à des flux de chaleur constants, ayant un rapport d'aspect $A = 4$ et $R_T = 10^2$. Dans le tableau (5.3) on compare nos résultats avec ceux données par Mamou et al. (1999a), Kalla. (2004) et Benhadji (2001) pour le cas d'une cavité chauffée et salée par le bas. Notre simulation a été réalisée pour $A = 8$, $R_T = 10^2$, $N = -8$ et $Le = 10$. La comparaison des champs de la fonction de courant, ainsi que les taux de transfert de chaleur et de masse sont en excellente concordance. Des erreurs variant entre 0.0% et 3.05% ont été observées.

Tableau 5.1a : Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum Ψ_{max} et le nombre de Nusselt moyen Nu_m avec les résultats donnés par Nawaf et Pop (2005) pour $A = 1$, $R_T = 10^3$ et $P_r^* = 0.1$.

	Nawaf et Pop (2005)	Présent étude	Error (%)
Ψ_{max}	1.6520	1.7040	3.05
Nu_m	1.2940	1.3083	1.09

Tableau 5.1b : Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt Nu_m avec les résultats donnés par Prasad et Tuntomo (1987) pour $A = 1$, $R_T = 500$ et $P_r^* = 10$.

	Prasad et Tuntomo (1987)	Présent étude	Error (%)
Nu_m	3.8700	3.7942	1.95

Tableau 5.2 : Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum Ψ_{max} et de nombre de Nusselt, Nu , avec les résultats donnés par Kalla (2004) et Mahdjiba (1998) pour $A = 4$ et $R_T = 100$.

	Kalla (2004)	Mahdjiba (1998)	Présent étude
Ψ_{max}	3.745(0.02%)	3.730(0.37%)	3.744
Nu	3.750(0.02%)	3.661(2.40%)	3.751

Tableau 5.3 : Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum Ψ_{max}, des nombres moyens de Nusselt, Nu_m, et de Sherwood, Sh_m, avec les résultats donnés par Kalla (2004), Benhadji (2001) et Mamou et al. (1999a) pour $A = 8$, $R_T = 100$, $N = -0.8$ et $Le = 10$.

	Mamou et al. (1999a)	Kalla (2004)	Benhadji (2001)	Présent étude
Ψ_{max}	3.689(0.10%)	3.675(0.27%)	3.695(0.27%)	3.681
Nu_m	3.635(0.38%)	3.649(0.77%)	3.653(0.88%)	3.621
Sh_m	6.739(0.64%)	6.742(0.40%)	6.747(0.47%)	6.715

5.2 Résultats et discussion

Afin de s'assurer l'exactitude du programme numérique développé dans le présent travail, on a comparé les calculs analytiques et numériques en se basant sur la détermination des trois paramètres souvent traités dans des études des écoulements convectifs naturels; il s'agit du nombre de Nusselt, *Nu*, le nombre de Sherwood, *Sh*, caractérisant les taux du transfert de chaleur et de masse au sein de la cavité et l'intensité de l'écoulement exprimée par la fonction de courant, Ψ_0, au centre de la cavité. Ces résultats sont présentés pour les trois régimes d'écoulement, mentionnés ci-dessus.

$\left(|u| / P_r^*\right) << 1$ Milieu poreux de Darcy pur.

$\left(|u| / P_r^*\right) >> 1$ Milieu poreux de Dupuit pur.

$\left(|u| / P_r^*\right) \neq 0$ Milieu poreux de Dupuit-Darcy.

5.2.1 Convection simple diffusion : *N*=0

5.2.1.1 Couche horizontale : Φ=0°

Dans ce travail, les études numériques et analytiques ont été réalisées pour évaluer l'effet de la trainée de forme en convection naturelle Dupuit-Darcy dans une cavité poreuse horizontale rectangulaire saturée par un fluide, soumise à un gradient thermique vertical. L'effet de la trainée de forme sur le seuil de la bifurcation de Hopf (caractérisant le point de transition entre la solution permanente et oscillante de la convection) a été aussi étudié. Pour une cavité carrée, l'analyse de la transition de l'écoulement est réalisée en considérant la convection mono-cellulaire ou multi-cellulaire.

Les résultats sont présentés en termes de l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et le nombre de Nusselt, Nu, en fonction des nombres de Rayleigh, R_T, de Prandtl modifié, P_r^* et du rapport d'aspect de la cavité, A. En outre, les profils de la vitesse, u, de la fonction de courant, Ψ, et de la température au centre de la cavité sont présentés pour une comparaison.

D'autres validations ont été réalisées en comparant les résultats numériques avec les données expérimentales obtenues par Kladias et Prasad (1990a). Pour une couche poreuse d'un rapport d'aspect A=5 chauffée par le bas à une température constante, une comparaison a été effectuée entre les prédictions numériques actuels et les résultats expérimentaux pour le cas du nombre de Darcy faible, où le régime Dupuit-Darcy était valide. Deux points des données définis N°. 1 et 9, respectivement, ont été considérés, où la cavité est remplie avec des billes de verre à 3mm de diamètre saturées d'eau (GW) et du glycerol (GIG), respectivement. Les résultats, en termes du nombre de Nusselt moyen Nu_m, sont présentés dans le tableau 5.4. Dans le tableau, les paramètres, ε, Pr_f, et Ra_f sont définis dans Kladias et Prasad (1990a), comme la porosité de la matrice poreuse, le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh de fluide, respectivement. Pour les deux points de données, les solutions numériques sont obtenues selon le rapport d'aspect de A=1 (une cellule de convection) et A=5 (cinq cellules de convection). Pour le point des données N°.1 avec A=1, la forme de l'écoulement est constituée par une cellule symétrique instable (oscillante). Toutefois, pour A=5, la forme de l'écoulement est constituée par cinq cellules de convection asymétriques. En raison de l'instabilité des différents comportements, les résultats montrent une très légère différence entre les deux cas A=1 et 5. Pour le point de données N°. 9, la solution est stable et symétrique et les deux cas (A=1 et 5) donnent la même valeur du nombre de Nusselt moyen Nu_m. Pour les deux points de données, nos résultats sont en bonne comparaison avec l'expérience.

Tableau 5.4 : Comparaison des données expérimentales Kladias et Prasad (1990a) avec les résultats numériques prédits dans les conditions aux limites de température constante.

					Nu_m		
Fluide/ Solide	ε	$Da\times10^6$	Pr_f / P_r^*	$Ra_f\times10^{-7}$ / R_T	Kladias et Prasad (1990a)	Solution numérique A=1/5	Error(%)
WG (N°. 1)	0.375	1.16	5.5/5443.4	55.5/565.2	6.4094	6.3424^{τ}/6.4048^{τ}	1.04/0.07
GlG (N°. 9)	0.400	1.53	112.86/64868	13.7/110.7	2.7368	2.8148/2.8146	2.85/2.84

Aussi, pour un grand rapport d'aspect de la cavité, A>>1 (c'est-à-dire A=10), une validation est effectuée pour le régime de Dupuit-Darcy en comparant les résultats numériques avec les solutions analytiques. Il est intéressant de mentionner que toutes les solutions parallèles numériques présentées dans ce cas sont obtenus en utilisant la convection unicellulaire comme condition initiale. La figure 5.1 illustre les lignes de courant et isothermes obtenues pour $A = 10$, $R_T = 10^4$ et $P_r^* = 1$, avec un maillage de 400×200. La figure illustre clairement les caractéristiques et la validité de l'écoulement parallèle, à savoir les parallélismes des lignes de courant, Ψ, avec les parois horizontale et la stratification linéaire horizontale de la température, T. La solution numérique démontre clairement l'existence de l'écoulement convectif parallèle dans le régime de Dupuit-Darcy.

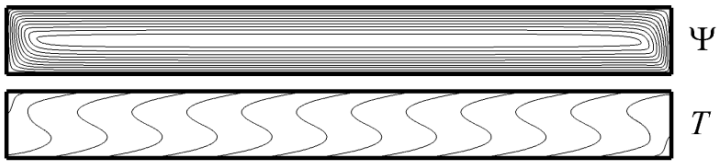


Figure 5.1 : Les lignes de courant, Ψ, et isothermes, T, obtenues dans le régime de Dupuit-Darcy pour A=10, $R_T = 10^4$, $P_r^* = 1$, $\Psi_0 = 8.962$, $Nu = 4.484$ et $Nu_m = 4.492$.

Le tableau 5.5 présente la sensibilité du maillage de la solution numérique et la compare avec la solution analytique pour A=10, $R_T = 10^2$ et $P_r^* = 10$. Les résultats sont donnés en termes de, Ψ_0, Nu et Nu_m. Le tableau montre que les valeurs numériques de Ψ_0 et Nu (évalués au centre de la couche poreuse) tendent vers les résultats analytiquement prédits.

Tableau 5.5 : Étude de la sensibilité du maillage et une comparaison entre la solution numérique et analytique pour A=10, $R_T = 10^2$ et $P_r^* = 10$.

	Solution numérique				Solution analytique
$N_x \times N_y$	51×51	101×101	201×201	401×401	
Nu	2.6111	2.7520	2.8014	2.8115	2.8133
Nu_m	2.5224	2.6615	2.7097	2.7196	2.8133
Ψ_0	2.7025	2.7355	2.7464	2.7485	2.7488

Pour des grandes valeurs du nombre de Rayleigh, selon la loi de Dupuit-Darcy, un taux de cisaillement fort est attendu à la ligne centrale de la couche poreuse. Comme illustré sur la figure 5.2, pour prédire avec précision la solution numérique, un maillage à haute densité est

nécessaire. La figure montre les profils de la vitesse obtenus pour différents maillages avec A=10, $R_T = 10^3$ et $P_r^* = 1$. La meilleure approche pour obtenir une solution précise avec un maillage raisonnable est d'utiliser une distribution de maillage non uniforme avec des nœuds concentrés où le gradient de vitesse d'écoulement tend vers zéro.

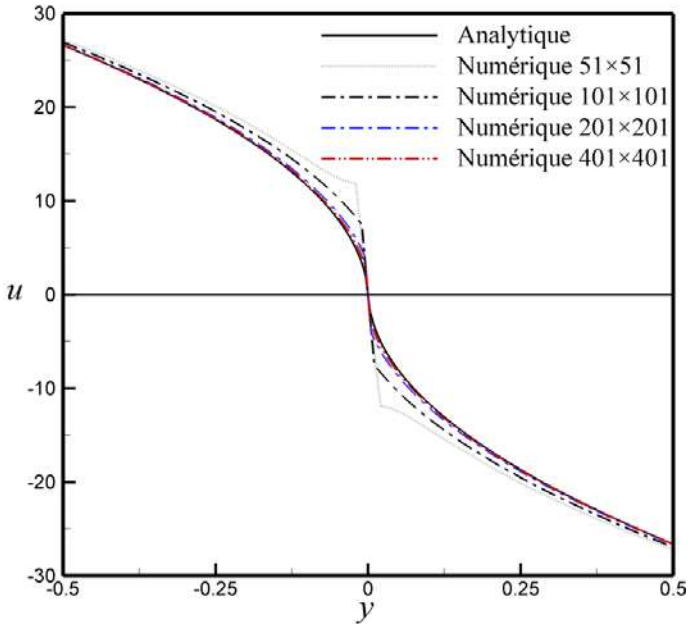


Figure 5.2 : L'effet du maillage sur les profils de la vitesse pour A=10, $R_T = 10^3$ et $P_r^* = 1$.

D'autres comparaisons entre la solution analytique (générale et asymptotique) et numérique pour les profils de la fonction de courant et de la température au milieu de la larguer de la couche poreuse (x=0) sont présentées dans la figure 5.3. Les résultats ont été obtenus pour A=10, $R_T = 10^4$ et $P_r^* = 1$. Ce cas correspond à la situation où la convection de Dupuit est dominante (l'effet de la trainée de forme important).D'après la comparaison on peut constater que les approches analytiques et numériques sont en très bon accord.

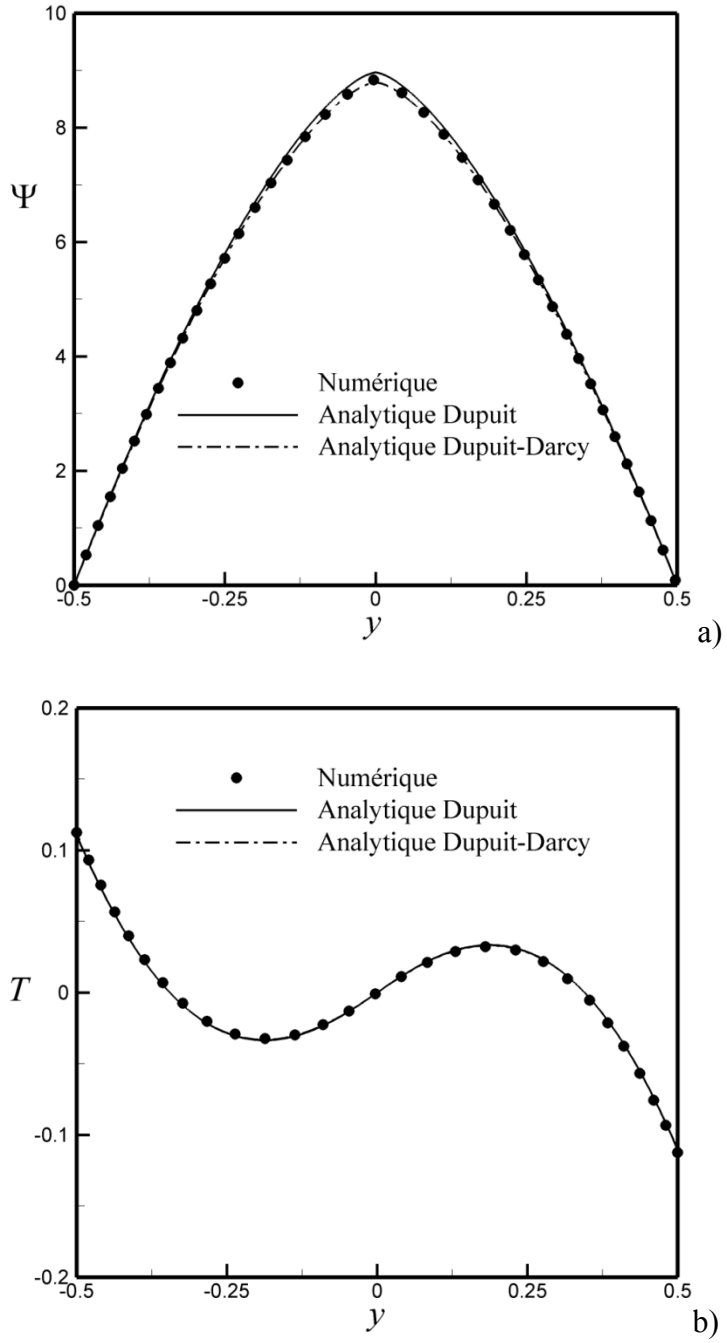


Figure 5.3 : Comparaison des profils de la fonction de courant Ψ_0 et de la température T pour A=10, $R_T = 10^3$ et $P_r^* = 1$.

Pour les mêmes paramètres de contrôle, $A = 10$ et $P_r^* = 1$, l'effet du nombre de Rayleigh, R_T, sur l'intensité de l'écoulement au centre de la couche poreuse, Ψ_0, et le nombre de Nusselt local, Nu, sont représentés sur la figure 5.4. Une bifurcation fourche se produit au nombre de Rayleigh critique $R_{TC}^{sup} = 12$. Ce nombre de Rayleigh critique a été prédit dans le passé par Nield (1968). Pour $R_T < R_{TC}^{sup}$, tout mouvement convectif est atténué

et la conduction pure est donc une solution possible. Cependant, pour $R_T > R_{TC}^{sup}$, l'intensité de l'écoulement augmente avec le nombre de Rayleigh et deux mouvements convectifs en sens opposées sont possibles, en plus de la solution triviale de la conduction pure $\left(\Psi_0 = 0,\ Nu = 1\right)$ qui de fait est instable. Les solutions analytiques générales et asymptotiques sont affichées dans la figure. Un bon accord est obtenu entre les trois approches. On constate que le régime de Dupuit couvre une large gamme du nombre de Rayleigh, c'et à dire pour $R_T \geq 100$.

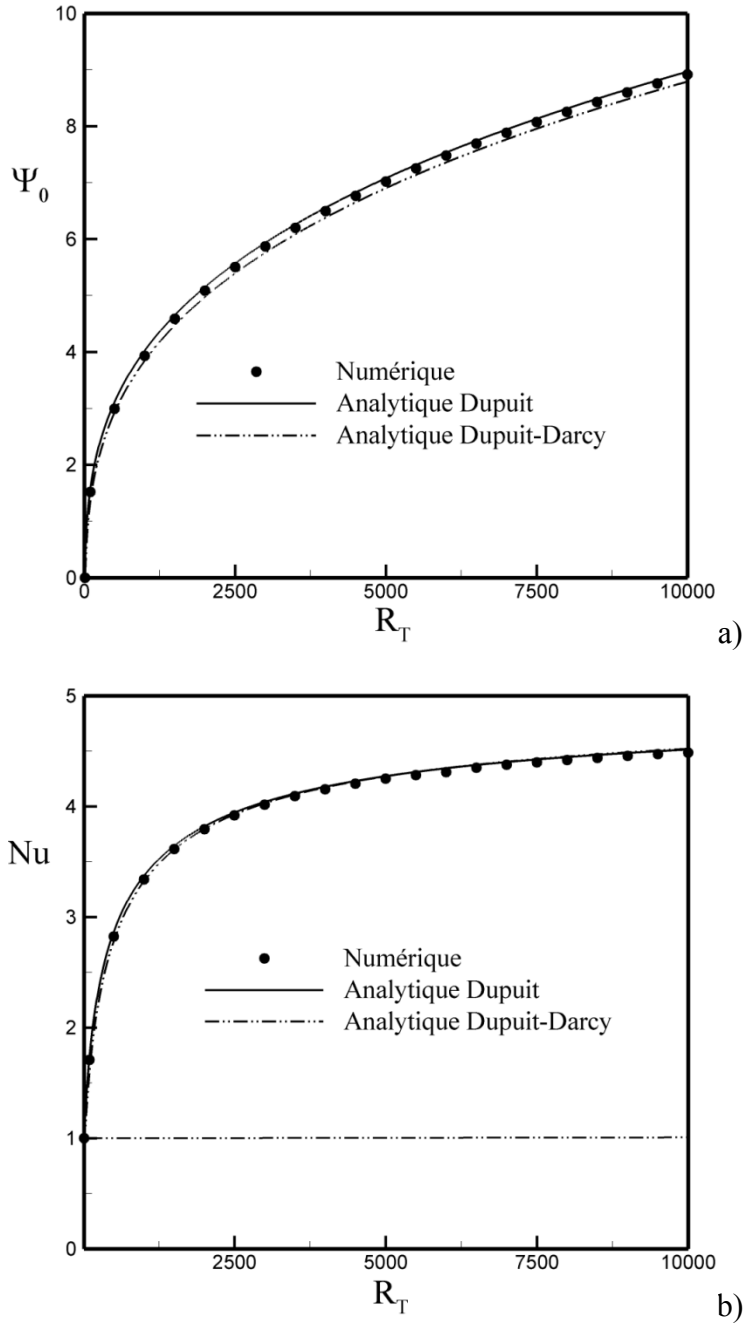
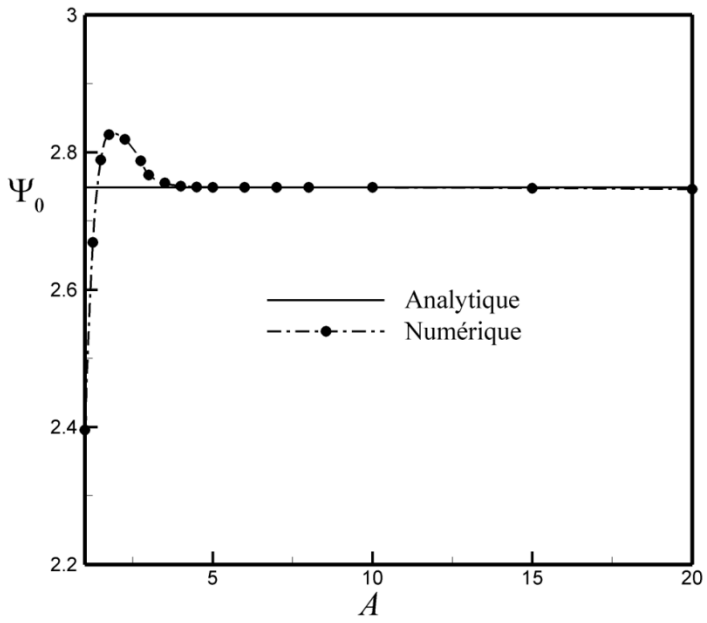


Figure 5.4 : L'effet du nombre de Rayleigh sur a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) le nombre de Nusselt local, Nu, pour $A = 10$ et $P_r^* = 1$.

Pour les paramètres de contrôle fixes $\left(P_r^* \text{ et } R_T\right)$, l'effet de rapport d'aspect de la cavité poreuse, A, est étudié. La figure 5.5 illustre l'effet du rapport d'aspect, A, sur l'intensité de l'écoulement, Ψ_0 et les nombres de Nusselt (Nu_c et Nu_m) pour $P_r^* = 10$ et $R_T = 10^2$. À partir de A=1, l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, diminue lorsque A augmente, toutefois les nombres de Nusselt $\left(Nu_c \text{ et } Nu_m\right)$ augmentent avec A. Vasseur et al. (1987), Hasnaoui (1991) et Mamou (1993) ont démontré que, dans le cas d'une cavité chauffée avec un flux de chaleur constant, la solution analytique obtenue avec l'hypothèse de l'écoulement parallèle était satisfaisante à condition que le rapport de forme de la cavité soit suffisamment grand $\left(A \geq 4\right)$. La solution numérique tend alors asymptotiquement vers la solution analytiquede telle sorte que l'effet d'extrémité de la cavité devient de plus en plus négligeable.



a)

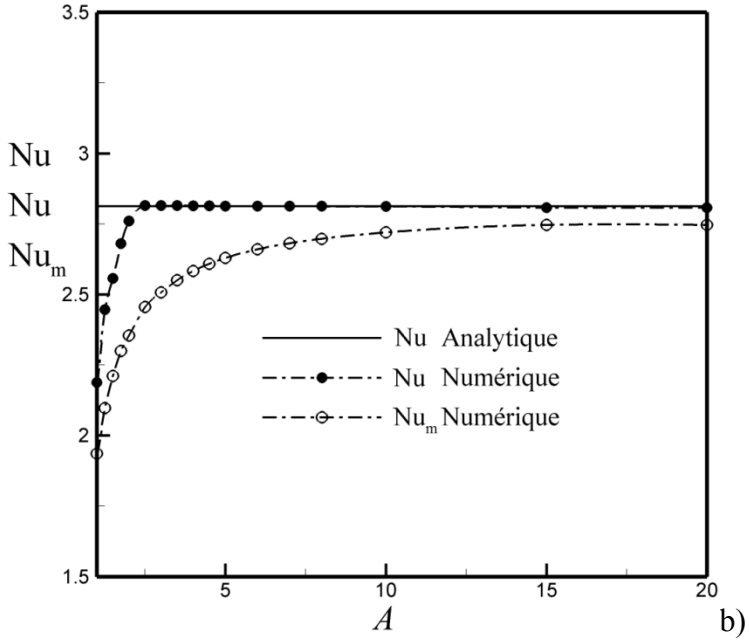


Figure 5.5 : L'influence du rapport de forme de la cavité sur a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) les transferts de chaleur, $\left(Nu,\ Nu_m\right)$ pour $P_r^* = 10$ et $R_T = 10^2$.

Pour une couche poreuse de rapport d'aspect infini $\left(A \to \infty\right)$, un examen rapide de l'écoulement convectif et du comportement de transfert de chaleur sur une large gamme du nombre de Rayleigh à partir de régime de Darcy à Dupuit est effectué, en utilisant la solution analytique. L'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et le taux de transfert de chaleur, Nu, sont illustrés dans la figure 5.6 en fonction du nombre de Rayleigh, R_T, et pour différentes valeurs du nombre de la trainée de forme, P_r^*. Pour un grand nombre de Prandtl modifié, P_r^*, le régime de Darcy est dominant et le taux de transfert de chaleur augmente de façon monotone avec le nombre de Rayleigh et puis tend asymptotiquement vers une valeur constante 6, une limite, déjà rapportée par Vasseur et al. (1987). Pour des valeurs intermédiaires de $\left(P_r^* > 10\right)$, le taux de transfert de chaleur augmente avec, R_T, il atteint son maximum puis décroît asymptotiquement vers une nouvelle limite de 5. Les résultats actuels ne comptent que si la solution analytique est stable. Du point de vue physique, la transition vers les écoulements oscillatoires ou turbulents est très loin de l'état critique, ainsi une étude numérique plus approfondie est effectuée pour examiner le comportement d'écoulement à un nombre Rayleigh élevé. En effet, les seuils de transition ou de bifurcation de Hopf sont déterminés.

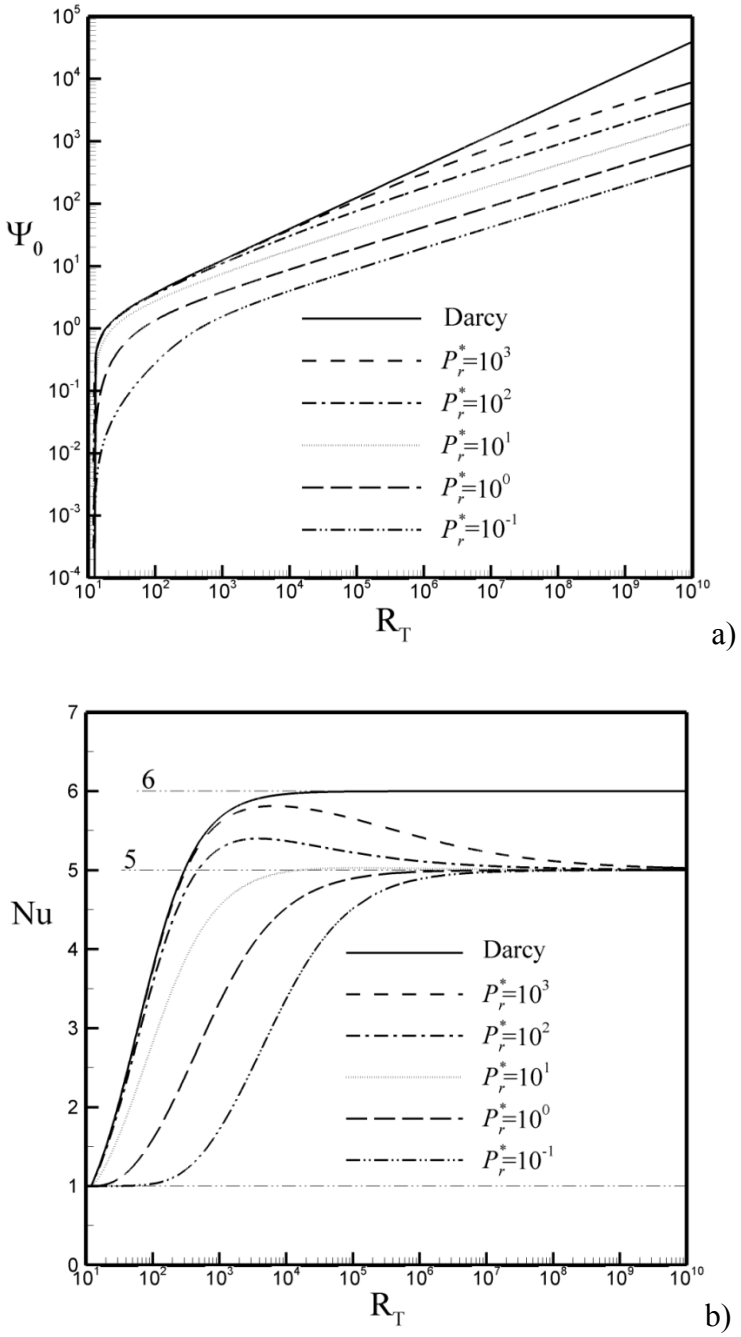


Figure 5.6 : L'effet du nombre de Rayleigh, R_T, et le coefficient de la trainée de forme, P_r^*, sur a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et b) le taux de transfert de chaleur, Nu.

Il est bien connu que selon le régime d'écoulement de Darcy $\left(P_r^* \to \infty\right)$ la convection devient oscillatoire lorsque le nombre de Rayleigh dépasse un certain seuil. Kimura et al. (1995) ont effectué une analyse approfondie de la stabilité d'un écoulement unicellulaire rencontré dans une couche poreuse horizontale soumise à un flux de chaleur vertical. La force de la trainée de forme n'a pas été alors considérée. Une solution d'amplitude finie a été développée pour une couche infinie. On a démontré que, grâce à la simulation numérique et

l'analyse de la stabilité (voir chapitre 6), le mode de convection unicellulaire reste stable. Pour des grandes valeurs du nombre de Rayleigh, R_T, le mode unicellulaire a perdu sa stabilité, par la bifurcation de Hopf. Ce mode subit des perturbations longitudinales stationnaires, lorsque le nombre de Rayleigh atteint $R_{TC}^{Hopf} = 311.53$ et des perturbations transversales oscillatoires lorsque le nombre de Rayleigh dépasse $R_{TC}^{Hopf} = 506$. Cela a été rapporté pour une couche poreuse infinie. Pour une couche du rapport d'aspect fini, les écoulements transitoires peuvent être légèrement différents de ceux observés dans une couche infinie. Pour illustrer l'effet de confinement sur les écoulements convectifs stable et instable, deux valeurs du rapport d'aspect sont choisis, à savoir, A=1 (cavité carrée) et 10 (cavité rectangulaire).

Pour une cavité rectangulaire A=10, l'effets de la trainée de forme sur l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, et le taux de transfert de chaleur, Nu, sont représentés dans la figure 5.7 en fonction du nombre de Rayleigh, R_T, et différentes valeurs du nombre de Prandtl modifié, P_r^*. Les résultats analytiques et numériques stables et instables (oscillantes) sont présentés. Dans les graphiques, Ψ_0 est l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité pour les deux solutions stables, analytiques et numériques, Ψ_0^τ est l'intensité de l'écoulement numérique moyenne sur une période de temps d'oscillation, Nu, est le nombre de Nusselt analytique, Nu_c est le nombre de Nusselt numérique au centre de la cavité et Nu_m^τ est le nombre de Nusselt numérique moyen sur une période de temps d'oscillation. Le calcul de la solution moyenne pour une période de temps est effectué comme suit :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_0^\tau &= \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \Psi_0 dt \\ Nu_c^\tau &= \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} Nu_m dt \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

où τ est la période de temps d'oscillation. Les intégrales de temps sont effectuées à l'aide de la méthode de trapèze.

La solution numérique est obtenue avec un nombre des nœuds de 401×201 et en utilisant un pas de temps de 10^{-6} à 10^{-5}. La solution analytique est représentée par des lignes solides et la solution numérique stable et instable par des symboles (symboles pleins pour la solution stable et des symboles vides avec des lignes en pointillés pour la solution instable). Dans le régime stationnaire (permanent), un bon accord est observé entre les solutions analytiques et numériques.

Pour chaque valeur de P_r^*, la solution numérique est obtenue pour des valeurs discrètes de, R_T, à partir des plus petites valeurs aux plus grandes, en utilisant la solution précédente comme condition initiale. Tout d'abord, au-delà de l'apparition de la convection stationnaire ($R_{TC}=12$ et $R_{TC}=22.94$ pour A=10 et A=1, respectivement, Kimura et al. (1995)), des solutions de régime permanent sont obtenues. Comme, R_T, augmente encore, les solutions périodiques instables apparaissent. Le seuil de l'apparition de la bifurcation de Hopf, R_{TC}^{Hopf}, (marquant la transition de l'écoulement de convection de régime stationnaire vers le régime oscillatoire) est déterminé dans un intervalle donné de, R_T, comme indiqué dans le tableau 5.6. L'intervalle est réduit à 25, résultant a une précision de 4% maximum sur la valeur de R_{TC}^{Hopf}. La fréquence d'oscillation correspondant à la limite de l'écart supérieur est aussi donnée. Pour $A=10$, dans le cas du régime de Darcy $\left(P_r^* \to \infty\right)$, la fréquence prédite est $f_r=23.81$ pour $R_{TC}^{Hopf}=575$, qui est très proche de celle prédite par Kimura et al. (1995) $f_r=22.1$ au début de l'écoulement oscillatoire $R_{TC}^{Hopf}=506$. En raison d'effets des extrémités de l'enceinte, le seuil de la bifurcation Hopf est légèrement au-dessus de $R_T=550$. Pour des valeurs inférieures de P_r^* ($P_r^*<500$ pour $A=10$ et $P_r^*<100$ pour A=1), la fréquence d'oscillation ne semble pas être affectée par le paramètre de la trainée de forme. On remarque que pour le régime de Darcy, deux modes oscillatoires co-existent prés du seuil de bifurcation de Hopf, comme indiqué dans le tableau 5.6. La détermination numérique précise de R_{TC}^{Hopf} est fastidieuse et nécessite plus de temps de calcul avec un choix judicieux du R_T. Comme nous nous approchons de la valeur de seuil, la décomposition ou l'amplification de la perturbation transitoire devient très lente, par conséquent, la valeur exacte de R_{TC}^{Hopf} est difficile à trouver. Juste à la valeur de seuil, la croissance de la perturbation est neutre. Pratiquement, il est impossible de trouver une valeur précise de R_{TC}^{Hopf} en utilisant la solution numérique des équations de gouvernance complètes. La meilleure approche pour la prédiction exacte de lavaleur de seuil est de réaliser une analyse de stabilité de la solution de convection (comme illustre dans le chapitre 6 de la stabilité linéaire).

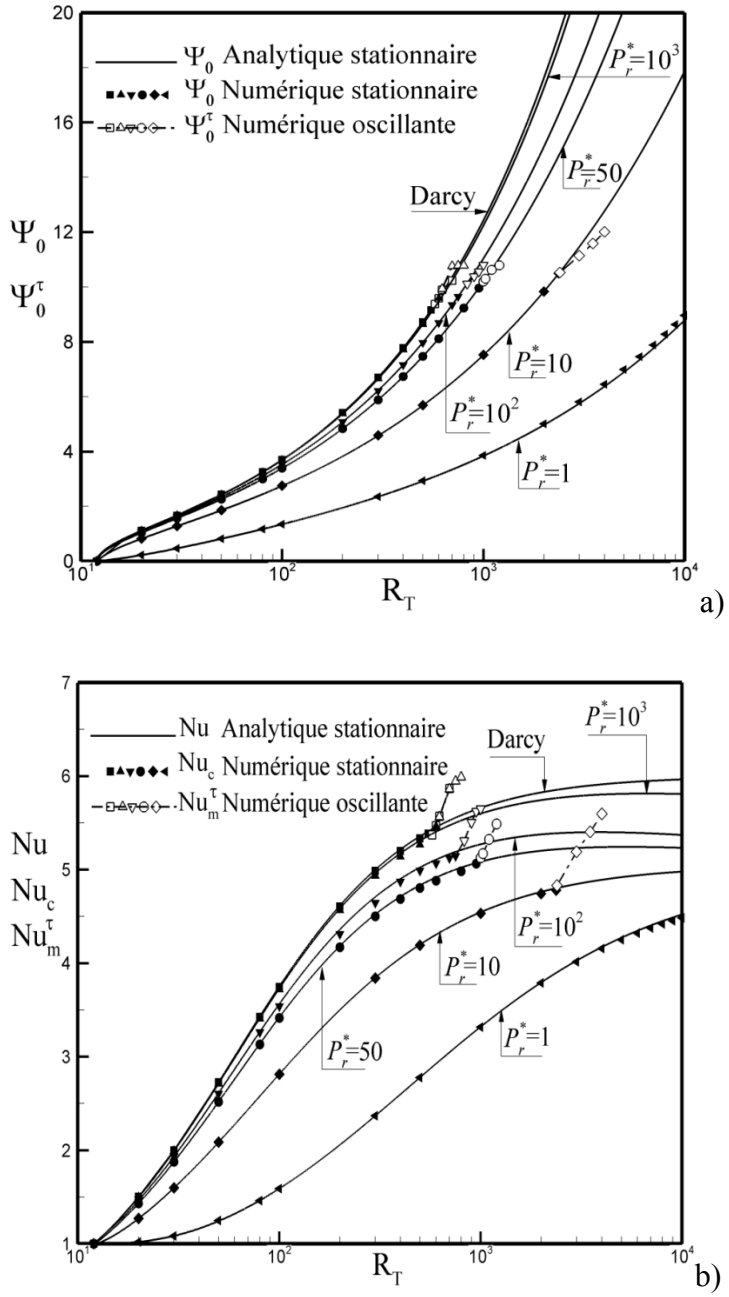
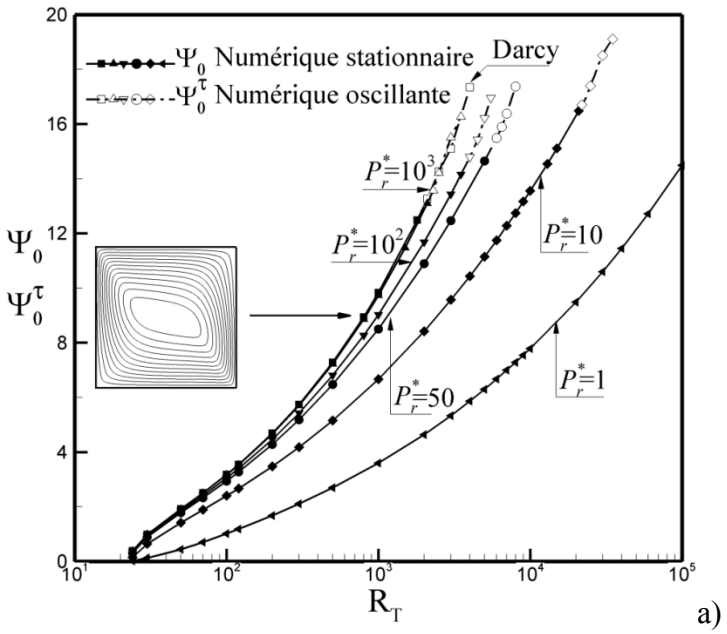


Figure 5.7 : L'effet du nombre de Rayleigh et le coefficient de la trainée de forme sur a) l'intensité de l'écoulement et b) le nombre de Nusselt pour $A = 10$, avec un écoulement monocellulaire.

Pour une enceinte carrée A=1, une analyse similaire de la transition d'écoulement est effectuée en considérant des écoulements convectifs mono ou multi cellulaires (1 à 3 cellules). Dans les figures 5.8 et 5.9 on ne représente que les résultats numériques correspondant à l'écoulement de 1 et 2 cellules, respectivement. La solution analytique n'est pas valable pour A=1. Dans la figure 5.8, Ψ_0, est l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0^{τ}, est l'intensité de l'écoulement numérique moyenne sur une période de temps

d'oscillation, Nu_m , est le nombre de Nusselt moyen et Nu_m^τ est le nombre de Nusselt moyen dans une période de temps d'oscillation. Dans la figure 5.9, comme l'asymétrie de l'écoulement se produit, les valeurs de l'intensité de l'écoulement stable $\left(\Psi_{\max} \text{ et } \Psi_{\min}\right)$ et instable $\left(\Psi_{\max}^\tau \text{ et } \Psi_{\min}^\tau\right)$ sont tracées. Rappelons que le régime de Darcy est caractérisé par $\left(P_r^* \to \infty\right)$. Dans les figures 5.8 et 5.9 et le tableau 5.6, et même la figure 5.7 avec *A*=10, il est clairement observé que lorsque, P_r^*, diminue; le seuil de la bifurcation de R_{TC}^{Hopf} augmente et l'effet de la trainée de forme devient de plus en plus stabilisant, qui est en accord avec les conclusions de Nield et Joseph (1985). En général, comme prévu, tant que R_T, augmente, l'intensité de l'écoulement et le taux de transfert de chaleurs augmentent et quand P_r^* diminue, ces quantités décroissent de manière significative. Comme illustré dans les figures 5.7-5.9 la bifurcation de Hopf est caractérisée par une modification de pente de taux de transfert de chaleur dans les deux cas *A*=1 et 10. Toutefois, la variation de la pente de la fonction du courant n'est pas perceptible. La figure 5.8 illustre les résultats avec un flux de chaleur d'une seule cellule. On constate que la transition se produit sans changement significatif de la structure de la cellule et la symétrie de l'écoulement est bien conservée.



a)

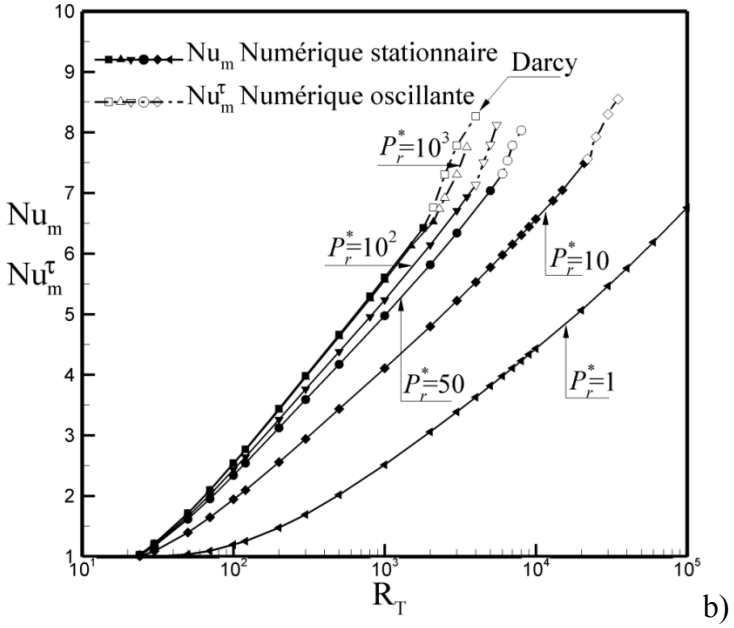
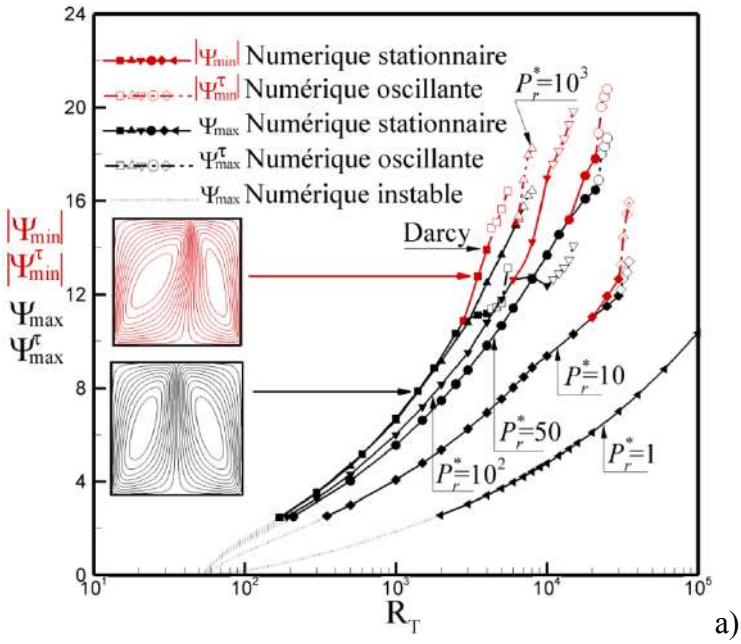


Figure 5.8 : L'effet du nombre de Rayleigh et le coefficient de la trainée de forme sur a) l'intensité de l'écoulement et b) le nombre de Nusselt pour une cavité carrée A=1 avec un écoulement monocellulaire.

Cependant, pour un écoulement de convection à deux cellules, la transition de l'écoulement est complexe car la symétrie de l'écoulement est rompue à l'approche du seuil de transition. Un exemple de la configuration d'écoulement est illustré dans la figure 5.9. Dans cette dernière, l'écoulement avec deux cellules ne peut être maintenu à un nombre très faible de Rayleigh. Le seuil de mode d'écoulement de deux cellules est R_{TC}=54.1, selon l'analyse de la stabilité linéaire. La solution est instable lorsqu'elle dépasse cette valeur, devenant ainsi un écoulement unicellulaire. Les solutions instables sont représentées par des lignes en pointillés et elles ont été obtenus avec un rapport d'aspect de A=1/2. D'après le tableau 5.6 le seuil de la transition augmente en fonction du nombre des cellules de convection, ou diminue en fonction du rapport d'aspect de la couche poreuse.



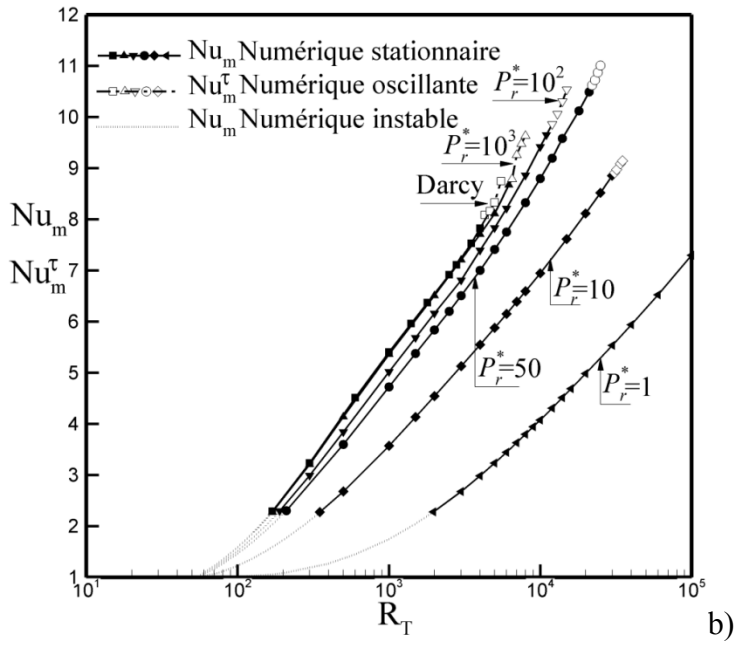


Figure 5.9 : L'effet du nombre de Rayleigh et le coefficient de la trainée de forme sur a) l'intensité de l'écoulement et b) du nombre de Nusselt pour une cavité carrée A=1 avec un écoulement de deux cellules.

Tableau 5.6 : L'effet de la trainée de la forme sur le seuil de la bifurcation de Hopf dans les cavités carrées et rectangulaires.

Une cellule						Deux cellules		Trois cellules	
A=1			A=10			A=1		A=1	
P_r^*	R_{TC}^{Hopf}	f_r	R_{TC}^{Hopf}	f_{r1}	f_{r2}	R_{TC}^{Hopf}	f_r	R_{TC}^{Hopf}	f_r
Darcy	2000-2100	28.17	550-650	23.81	2.75	4600-4700	197.23	11400-11500	393.71
10^3	2200-2300	57.50	600-700	21.28	…	6300-6400	231.26	10000-10100	256.41
10^2	3500-3600	61.53	700-800	24.51	…	11000-11100	264.41	21600-21700	392.15
50	5150-5250	58.61	900-1000	24.45	…	21000-21100	283.60	25900-26000	320.00
10	20900-21000	106.11	2300-2400	24.33	…	29900-30000	125.47	49900-50000	386.79
1	…	…	…	…	…	…	…	…	…

La figure 5.10 montre le diagramme de bifurcation pour le flux de convection multicellulaire, où de nombreuses régions sont délimitées. Le diagramme est obtenu numériquement en utilisant les modes d'écoulement de convection 1-, 2- et 3-cellules. La distribution de la grille a été ajustée en fonction du nombre des cellules, de telle sorte que chaque cellule de convection est résolue en utilisant les mêmes points de grille pour tous les cas. Les trois premières lignes verticales ($R_{TC1} = 22.94,\ R_{TC2} = 54.1 \text{ et } R_{TC3} = 105.4$) correspondent aux seuils pour l'appariation de la convection stationnairepour 1-, 2-, 3-cellules respectivement, obtenus à partir d'une analyse de la stabilité linéaire. Les seuils de bifurcation de Hopf sont tracés pour chaque mode de convection. Régime (I) correspond à un régime de conduction pure. Le mode de convection 1-cellule stationnaire est stable dans les régions (II), (III) et (IV). Ce mode devient oscillant au-dessus de seuil de bifurcation de Hopf R_{TC1}^{Hopf} (régions V, VI et VII). Le mode de convection de 2-cellules stationnaire est possible au-dessus de seuil $R_{TC2} = 54.1$ et peut rester stable jusqu'aux seuils de bifurcation de Hopf (régions III, IV et V). Proche du seuil, une rupture de symétrie se produit et le mode devient instable (oscillant) au-dessus de seuil R_{TC2}^{Hopf} (régions VI et VII). Le mode de convection de 3-cellules stationnaires ne devient possible qu'au-dessus de la valeur critique $R_{TC3} = 105.4$ et pourrait être maintenu jusqu'au seuil de bifurcation de Hopf R_{TC3}^{Hopf} (régions IV, V et VI), au-dessus duquel la convection oscillatoire prévaut (région VII). D'après le diagramme de bifurcation, le seuil de convection oscillatoire augmente en fonction de l'augmentation du coefficient de la trainée de forme $\left(1/P_r^*\right)$.

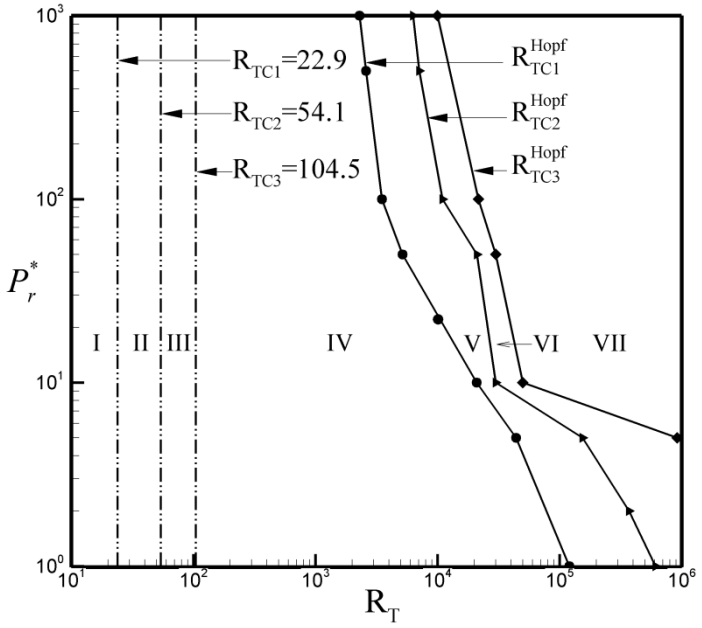
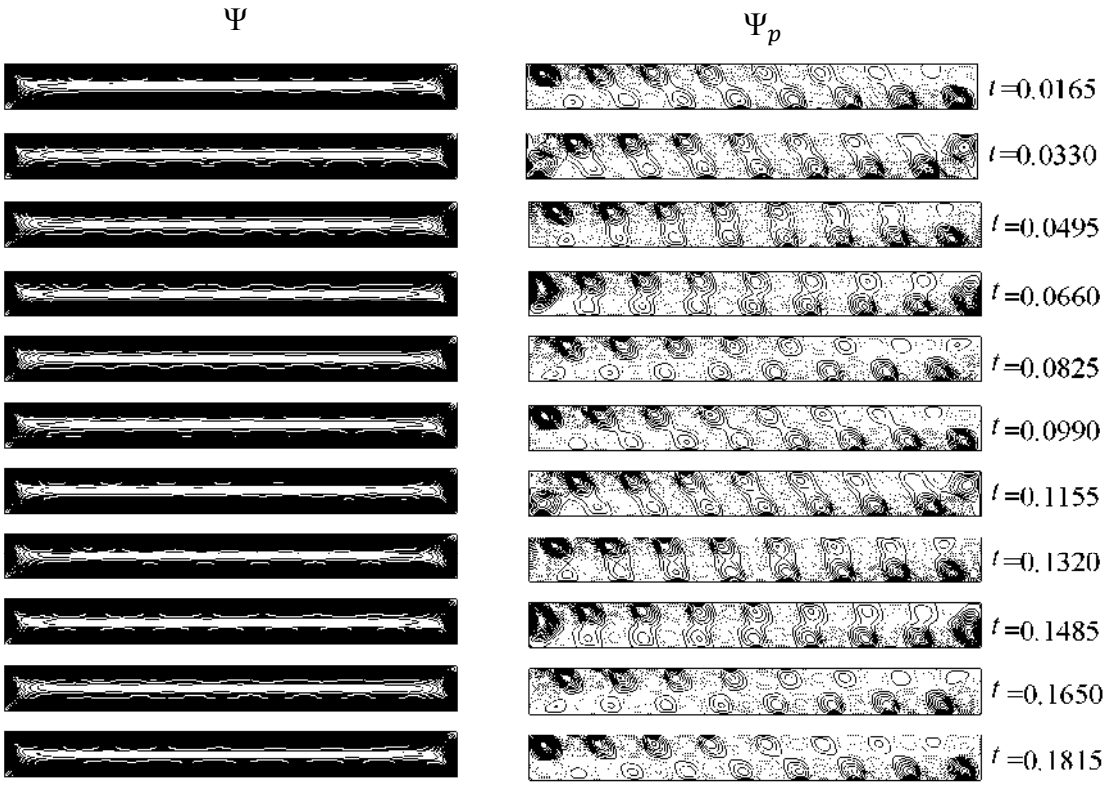


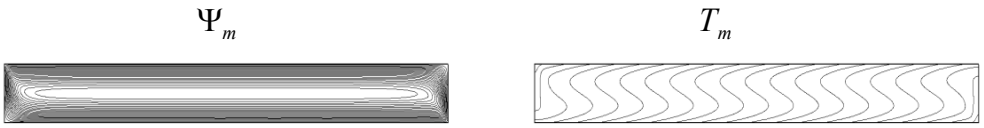
Figure 5.10 : Diagramme de bifurcation pour le flux de convection multicellulaires dans une cavité carrée.

Pour une explication physique des flux de convection transitoires, des solutions oscillantes sont représentées dans les figures 5.11 et 5.12 juste au-dessus du seuil de bifurcation de Hopf, pour R_T=950 et A=10 et dans les figures 5.13 et 5.14 pour R_T=7000 et A=1, dans le régime de convection Dupuit-Darcy à $P_r^* = 50$. Les évolutions temporelles du nombre de Nusselt Nu_m et l'intensité de l'écoulement Ψ_0 sont illustrés dans les figures 5.12 et 5.14 pour $A = 10$ et 1, respectivement. Dans les figures 5.11-5.14, les évolutions instantanées de la fonction de courant (Ψ) et de la fonction du courant moyenne dans une période de temps (Ψ_m) sont affichées. Le moment où les contours sont pris est affichés dans les figures 5.12 et 5.14. À chaque pas de temps donné, la perturbation de la fonction de courant est calculée comme $\Psi_p = \Psi - \Psi_m$, où Ψ_m est la fonction de courant moyenne dans une période de temps. Pour A=10, la figure 5.11a, la structure de la perturbation par convection est illustrée par deux couches consistant en une série de petits tourbillons en contre rotation avec une longueur d'onde de $A_C = 1.25$ se déplaçant le long des parois horizontales. Les deux couches tourbillonnaires se déplacent les unes contre les autres. Ce modèle, qui est obtenu dans le régime de Dupuit-Darcy, est similaire à celui obtenu par Kimura et al. (1995) dans le cas d'un milieu poreux de Darcy. Les tourbillons deviennent de plus en plus faibles quand ils négocient leur chemin le long des parois d'extrémité de

l'enceinte, et reprennent leurs forces progressivement plus tard comme ils voyagent le long des parois horizontales.



a)



b)

Figure 5.11 : a) Contours instantanés de la fonction de courant et de sa perturbation sur cinq périodes de temps pour $R_T = 950,\ P_r^* = 50,\ A = 10$ et $\tau = 0.041$, b) les lignes de courant et isothermes moyennes dans une période de temps, $\Psi_0^\tau = 9.962$ et $Nu_m^\tau = 5.047$.

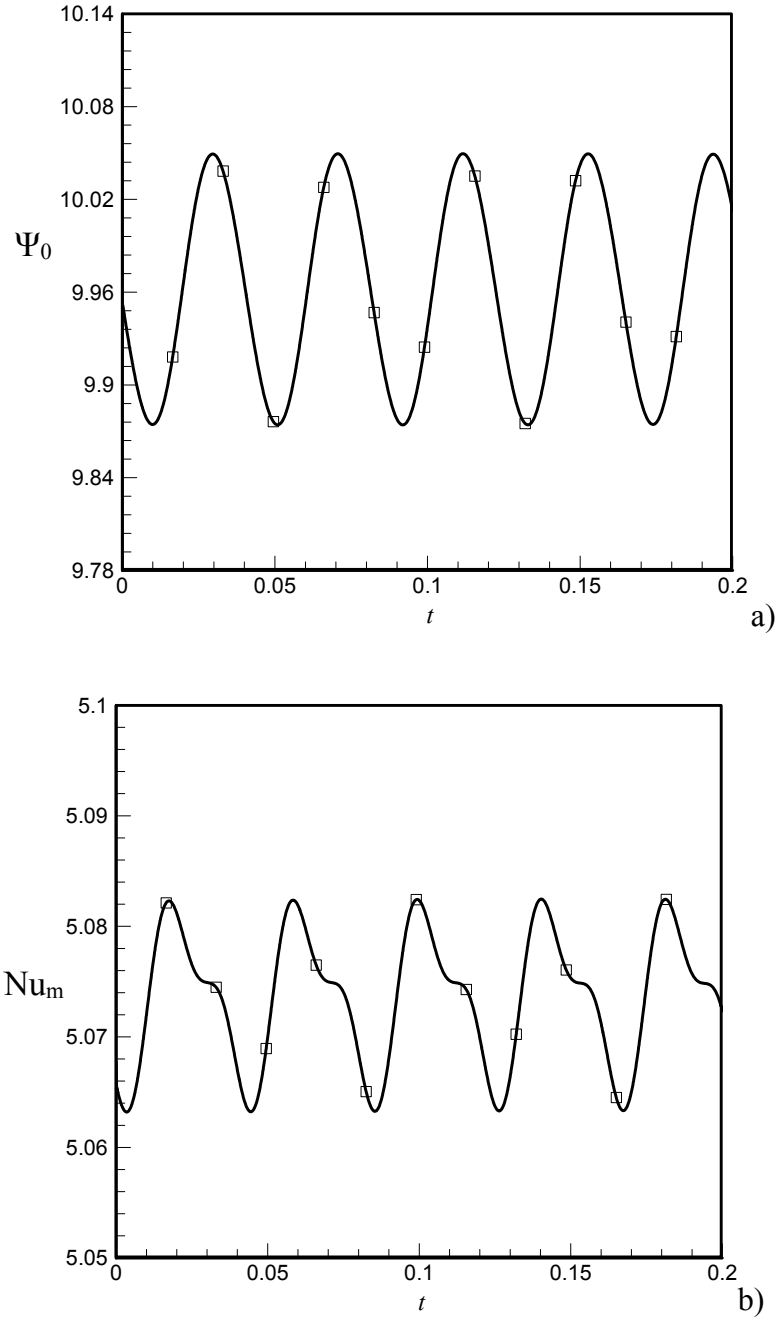


Figure 5.12 : Évolution dans le temps, a) de l'intensité de l'écoulement, Ψ_0 , et b) du nombre de Nusselt, *Nu* pour $R_T = 950,\ P_r^* = 50$ et $A = 10$.

Pour *A*=1, le comportement de l'écoulement de perturbation est tout à fait différent de celui observé pour *A*=10. La perturbation est principalement constituée de huit tourbillons contra-rotatifs voyageant dans le sens antihoraire selon les parois de l'enceinte. Pour terminer son mouvement de circulation à l'intérieur de l'enceinte, un vortex prend quatre périodes de temps, au cours des quelles l'intensité du vortex subit une amplification et une décadence alternatives. Lorsque les tourbillons s'approchent des coins de l'enceinte, une fusion partielle se produit. Du point de vue physique, le changement brusque de la pente de taux transfert de

chaleur, comme on l'observe sur les figures 5.7-5.9 pour la solution instable (oscillante), est due à l'existence des tourbillons de perturbation de roulement, qui sont responsables de débit supplémentaire du mélange prés des parois de l'enceinte.

Dans les figures 5.7-5.9 seulement quatre points de données sont présentées pour les solutions laminaires instables. On remarque qu'une nouvelle augmentation du nombre de Rayleigh R_T au-delà du seuil de la bifurcation de Hopf conduit très rapidement à un écoulement de convection oscillatoire périodique et puis un flux de convection chaotique. Dans ce travail, l'étude est axée uniquement autour de l'apparition de la bifurcation de Hopf. Le seuil de bifurcation de Hopf représente le début de la transition vers la turbulence. Par conséquent, les gammes du nombre de Rayleigh et le coefficient de la trainée de forme avec l'apparition des prédictions de la transition pourrait fournir des informations utiles pour le choix du modèle d'écoulement approprié pour les simulations de la convection laminaire ou turbulent. Dans la présente étude, on peut conclure que l'écoulement de convection reste laminaire pour un nombre de Rayleigh extrêmement élevé à condition que le coefficient de la trainée de forme reste très faible.

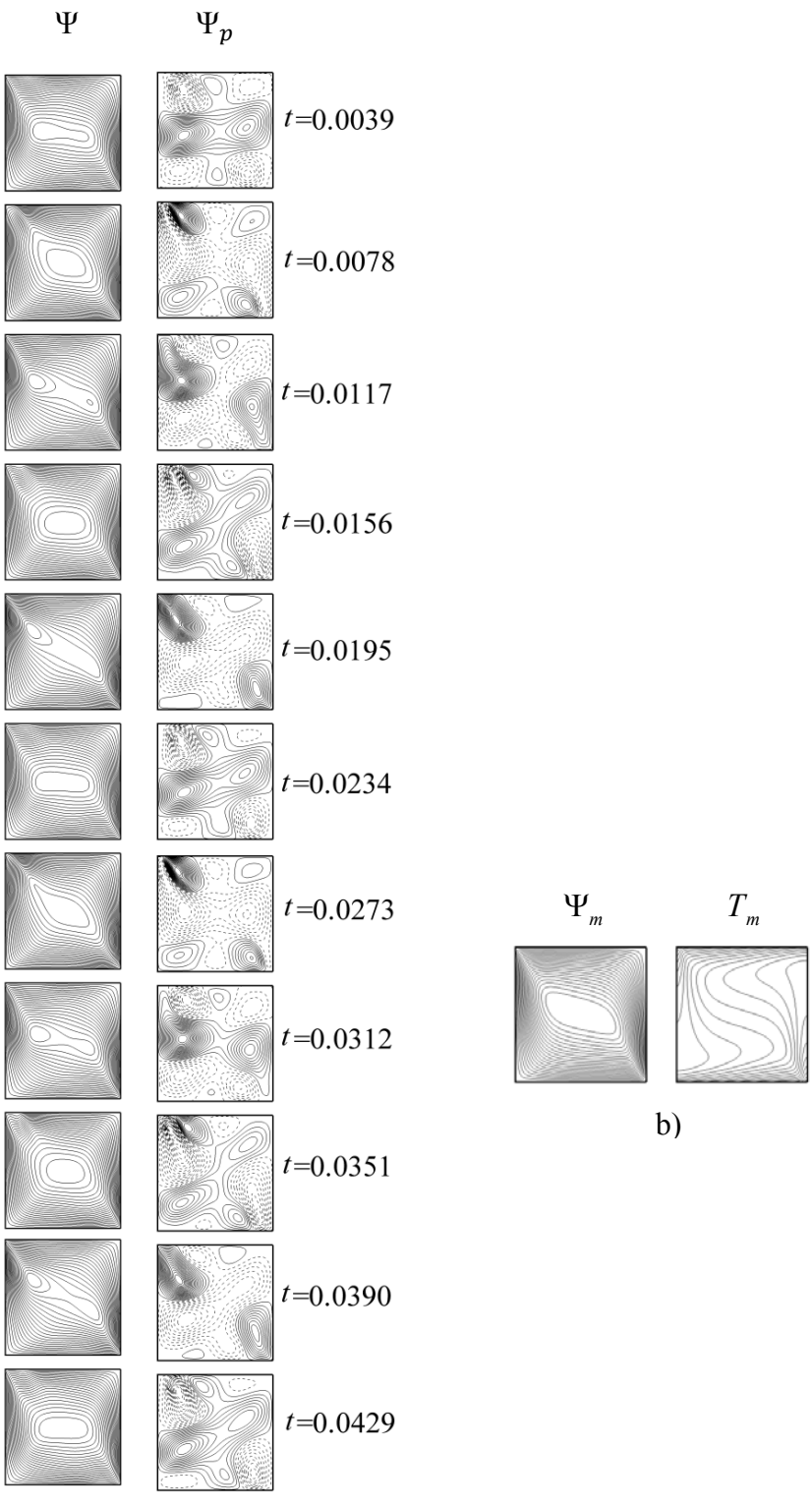


Figure 5.13 : a) Contours instantanés de la fonction de courant et de sa perturbation sur cinq périodes de temps pour $R_T = 7000,\ P_r^* = 50,\ A = 1$ et $\tau = 0.00942$, b) les lignes de courant et isothermes moyennes dans un période de temps, $\Psi_0^\tau = 16.402$ et $Nu_m^\tau = 7.705$.

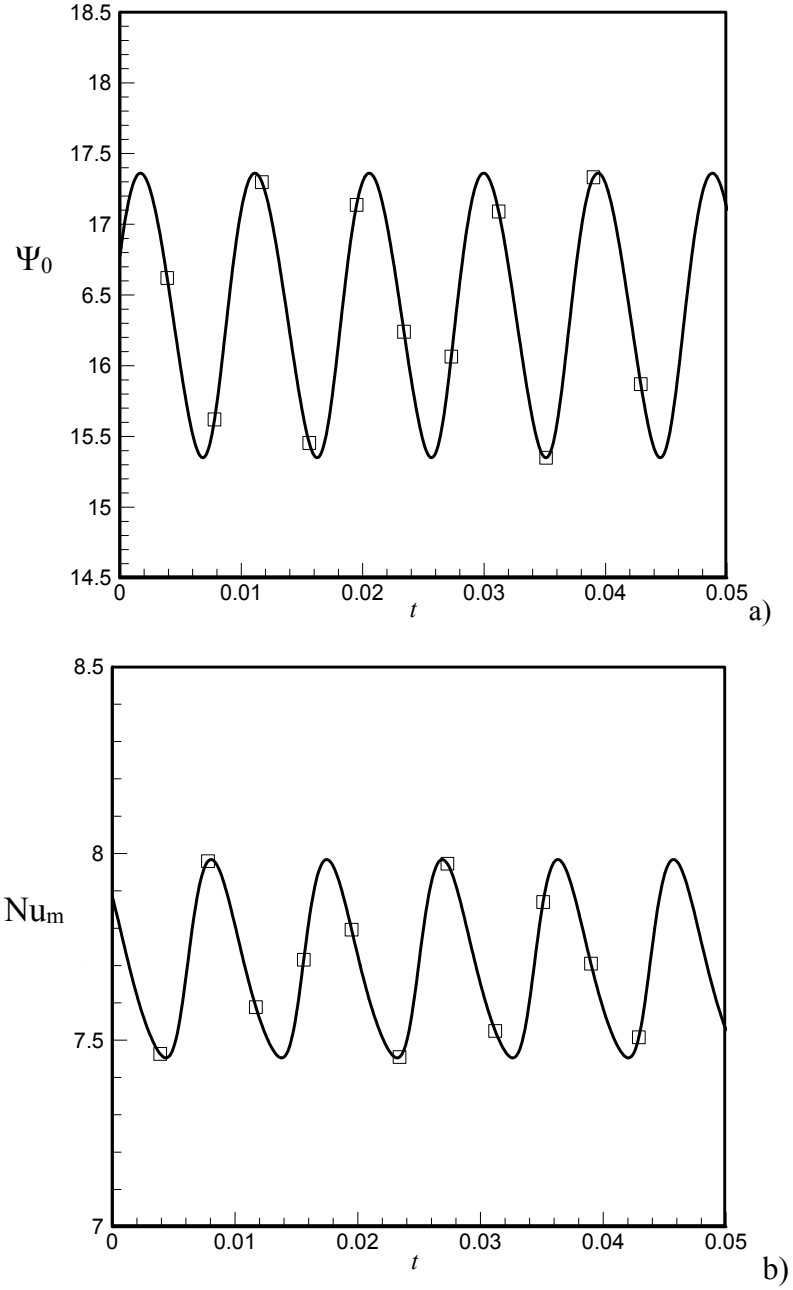


Figure 5.14 : Évolution dans le temps, a) de l'intensité de l'écoulement, Ψ_0 , et b) du nombre de Nusselt, *Nu* pour $R_T = 7000,\ P_r^* = 50,\ A = 1$.

En complément des résultats présents ci-dessus, au-dessous du seuil de bifurcation de Hopf, l'existence des solutions multiples est démontrée. Comme indiqué par Kimura et al.(1995), l'écoulement de convection unicellulaire est le mode préféré dans une couche poreuse de Darcy avec les parois horizontales chauffées par le bas par un flux de chaleur constant. Cela est vrai à proximité du début de la convection; toutefois, pour un grand nombre de Rayleigh, divers modes de convection à différents nombres de cellules de convection sont possibles, ce qui est indépendant du rapport d'aspect de l'enceinte. Dans la présente étude, pour la convection Dupuit-Darcy, la multiplicité de solutions convectives est démontrée pour une couche poreuse

ayant un rapport d'aspect de A=4. Pour $R_T = 100$ et $P_r^* = 10$, au moins trois modes de convection stables sont constatés, comme indiqué dans la figure 5.15. Une cellule, deux cellules et quatre cellules sont calculées en utilisant la même distribution du maillage 400×200. Quel que soit le rapport d'aspect de l'enceinte, comme démontré par Mamou (2003), lorsque le nombre de Rayleigh augment juste au-dessus du seuil de la convection supercritique $R_{TC}^{\sup}$, le mode de convection monocellulaire reste dominant avec une augmentation du taux de croissance de la perturbation. Comme le nombre de Rayleigh augmente encore, deux autres cellules, trois cellules, etc..., de convection émergent et deviennent instables, mais avec différentes valeurs du taux de croissance. Ainsi, dans une enceinte confinée, comme illustré dans la figure 5.15 pour une grande valeur du nombre de Rayleigh, plusieurs modes convectifs avec le nombre de cellules différentes coexistent. Naturellement, pour obtenir les différentes solutions possibles, les simulations numériques sont effectuées en utilisant la convection monocellulaire, avec deux cellules, etc…, comme conditions initiales.

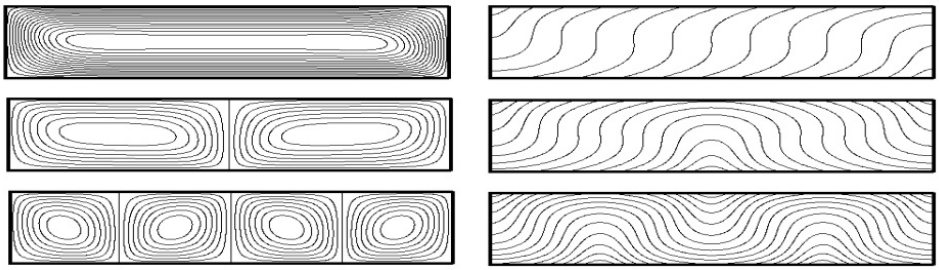


Figure 5.15 : Solutions multiples stables pour $A = 10,\ R_T = 100$ et $P_r^* = 10$:

a) une cellule $\Psi_{\min} = 0.000,\ \Psi_{\max} = 2.789,\ Nu_c = 2.814, Nu_m = 2.583$.

b) deux cellules $\Psi_{\min} = -2.825,\ \Psi_{\max} = 2.825,\ Nu_c = 1.697, Nu_m = 2.354$.

c) quatre cellules $\Psi_{\min} = -2.400,\ \Psi_{\max} = 2.400,\ Nu_c = 1.673,\ Nu_m = 1.941$.

5.2.1.2 Couche inclinée : -180°≤Φ≤180°

Pour une couche poreuse inclinée, les équations gouvernant (2.19) et (2.23) peuvent être simplifiées considérablement en utilisant l'approximation d'écoulement parallèle. La procédure a été décrite en détail dans le chapitre 3, alors on se limite ici de donner les principales étapes de la solution.

En introduisant les approximations (3.1) et (3.2) dans l'équation (2.19) pour les conditions aux frontières (2.27)-(2.29), on obtient :

$$\frac{d\theta}{dy} = C_T \Psi + 1 \tag{5.2}$$

À partir de l'équation (5.2), on constate que l'équation de la quantité de mouvement peut être exprimée comme :

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}\left[1+\frac{2}{P_r^*}\left|\frac{d\Psi}{dx}\right|\right] - R_T C_T \Psi \sin\Phi = R_T\left(\sin\Phi - C_T\cos\Phi\right) \tag{5.3}$$

Evidement, les conditions aux limites dans la direction *x*, Eq. (2.28), ne peuvent pas être exactement appliquées avec l'approximation de l'écoulement parallèle. Toutefois, comme indiqué dans le passé par Trevisan et Bejan (1986), le bilan énergétique dans le volume de contrôle, Fig (3.1), s'écrit sous la forme suivante :

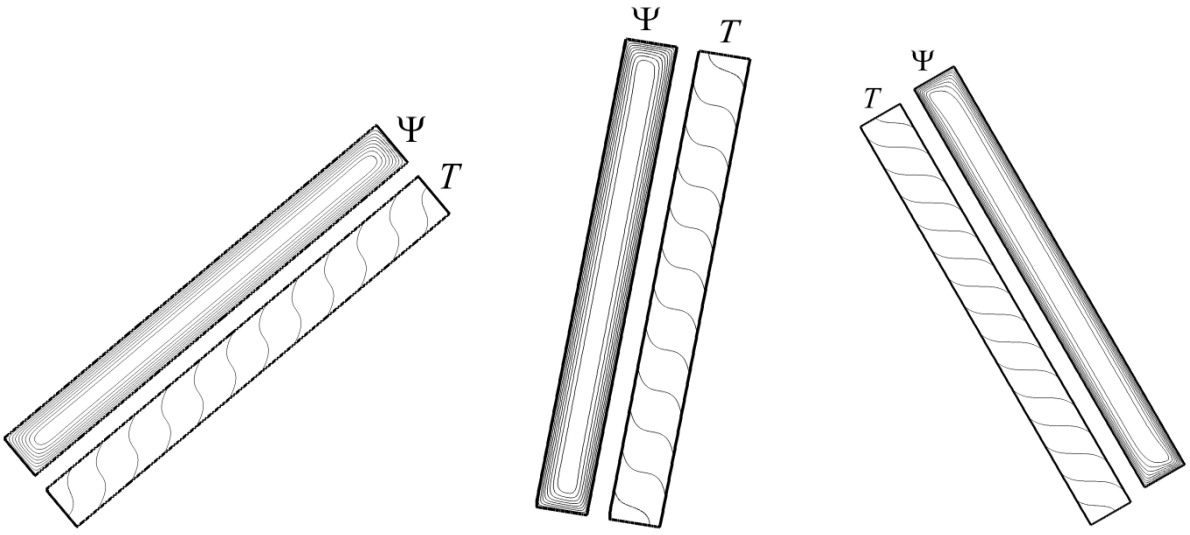
$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} dy = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} T dy \tag{5.4}$$

Après l'intégration de l'équation (5.2) suivie d'une manipulation algébrique de l'équation (5.4) l'expression de C_T est obtenue sous la forme suivante :

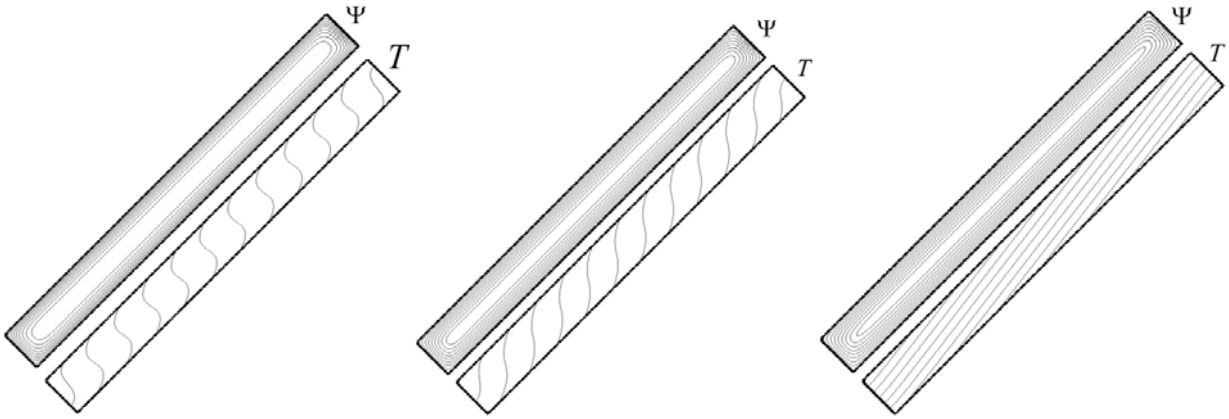
$$C_T = \frac{2\int_0^{1/2} \Psi(y)\,dy}{1+2\int_0^{1/2} \Psi^2(y)\,dy} \tag{5.5}$$

En devinant la valeur de C_T , l'équation (5.3) soumise à des conditions aux limites (2.28) et (2.29) est résolue numériquement en utilisant la méthode TRIDAG pour obtenir le champ de fonction de courant Ψ. Pour ce faire, cette équation a été discrétisée en utilisant une procédure de différences finies. Ensuite, sur la base de programme d'intégration Simpson, une nouvelle valeur de C_T est calculée en effectuant l'intégration numérique impliquée dans l'équation (5.5). La procédure est répétée jusqu'à ce que la convergence de C_T et C_S est atteinte. Les solutions initiales sont considérées et une technique de relaxation est appliquée pour améliorer la convergence et stabiliser les solutions souhaitées. Pour la convection Dupuit-Darcy la solution de Darcy est considérée comme condition initiale. Le champ de température *T* est ensuite évalué par la résolution de l'équation (5.2) avec les conditions aux limites correspondantes, Eq. (2.29). La procédure semi analytique présentée prend moins de temps que la procédure numérique impliquée dans la solution des équations complètes (2.19) et (2.23).

Les figures 5.16a)-f) illustrent les effets du nombre de Rayleigh, R_T , du paramètre de la trainée de forme, P_r^* et de l'angle d'inclinaison, Φ, sur les lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite), tel que prédit par la solution numérique. Les résultats indiquent que, indépendamment des paramètres régissant, l'écoulement dans la région centrale de l'enceinte est essentiellement parallèle tandis que la température dans le cœur de la cavité est stratifiée de manière linéaire dans la direction *x*. La solution analytique développée dans la section précédente, est fondée sur ces observations. Naturellement, comme de nombreux auteurs l'ont déjà signalé (voir par exemple Mamou et al. (1996)), il est prévu que l'écoulement ne peut être considéré comme parallèle que si le rapport d'aspect de la cavité est grand. Pour cette raison, la plupart des résultats numériques présentés ici ont été obtenus pour $A = 10$ avec un maillage de 200×400.



a) b) c)



d) e) f)

Figure 5.16 : Les lignes de courant et isothermes pour A=10:

a) $R_T = 100,\ \Phi = 40°,\ P_r^* = 5:\ \Psi_0 = 2.442,\ Nu = 2.652,\ Nu_m = 2.580$.

b) $R_T = 300,\ \Phi = 80°,\ P_r^* = 5:\ \Psi_0 = 2.812,\ Nu = 3.333,\ Nu_m = 3.253$.

c) $R_T = 500,\ \Phi = 120°,\ P_r^* = 5:\ \Psi_0 = 1.636,\ Nu = 2.310,\ Nu_m = 2.270$.

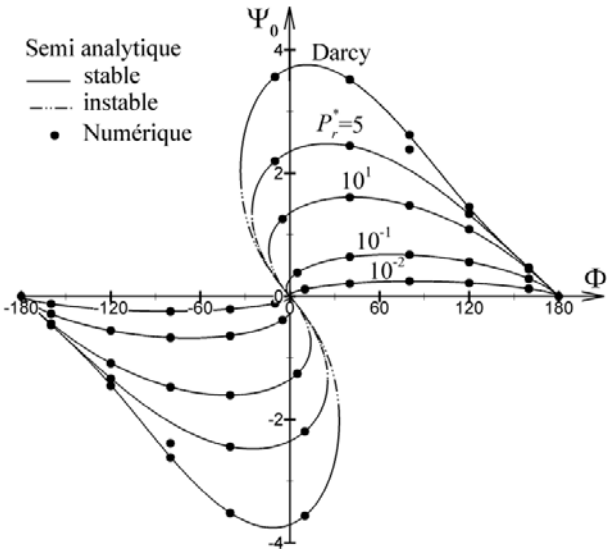
d) $R_T = 100,\ \Phi = 45°,\ P_r^* = \infty\left(\text{Darcy}\right):\ \Psi_0 = 3.436,\ Nu = 4.106,\ Nu_m = 3.984$.

e) $R_T = 100,\ \Phi = 45°,\ P_r^* = 1:\Psi_0 = 1.605,\ Nu = 1.816,\ Nu_m = 1.774$.

f) $R_T = 100,\ \Phi = 45°,\ P_r^* = 10^{-2}:\ \Psi_0 = 0.216,\ Nu = 1.016,\ Nu_m = 1.014$.

Dans cette section, l'effet de l'angle d'inclinaison, Φ, de la cavité par rapport au plan horizontal est discuté. Les figures 5.17a)-b) montrent la variation de Ψ_0 et Nu respectivement en fonction de l'inclinaison de l'enceinte Φ (variant de Φ=180° à -180°) pour $R_T = 10^2$ et différentes valeurs de P_r^*. Un excellent accord est observé entre l'analyse de l'écoulement parallèle, illustré par des traits pleins, et les résultats numériques représentés par des cercles pleins. Le transfert de chaleur se fait par conduction pure $\left(\Psi_0 = 0,\ Nu = 1\right)$ lorsque Φ s'approche de ±180°. Dans cette situation, le fluide avoisinant la paroi supérieure est plus chaud, tandis que le fluide qui se trouve au voisinage de la paroi inférieure est moins chaud. Dans ce dernier cas, le gradient de densité est stable. Pour cette situation, l'effet de P_r^* sur Ψ_0 et Nu, comme prévu, est petit. En absence d'effet du paramètre de la trainée de forme ($P_r^* \to \infty$) les courbes obtenues sont les mêmes que celles déjà obtenues par Sen et al. (1987), qu'ils ont considéré le problème de la convection naturelle dans une couche poreuse inclinée modélisée selon la loi de Darcy. Les figures illustrent clairement l'effet de l'angle d'inclinaison, Φ, sur la force de la convection et le taux de transfert de chaleur résultant. On observe que, lorsque l'angle d'inclinaison diminue de Φ=180° à -32.98°, le taux de transfert

de chaleur *Nu* augmente au début, il atteint son maximum à Φ=30° puis diminue. Pour de petit angle d'inclinaison Φ (au voisinage de Φ=0°), des solutions multiples existent, parmi lesquelles certaines sont instables; elles sont indiquées sur les figures par des lignes discontinues. Dans le graphique, les lignes pleines positives (négatives) correspondent à la solution naturelle (antinaturelle). Dans le cas de la convection naturelle, l'écoulement résultant circule dans le sens antihoraire en accord avec les conditions aux limites thermiques imposées sur l'enceinte. D'autre part, dans le cas de la convection antinaturelle l'écoulement circule dans le sens horaire. Mathématiquement cette multiplicité de solutions, pour un ensemble donné de paramètres régissant, est due à la non-linéarité des équations de base.



a)

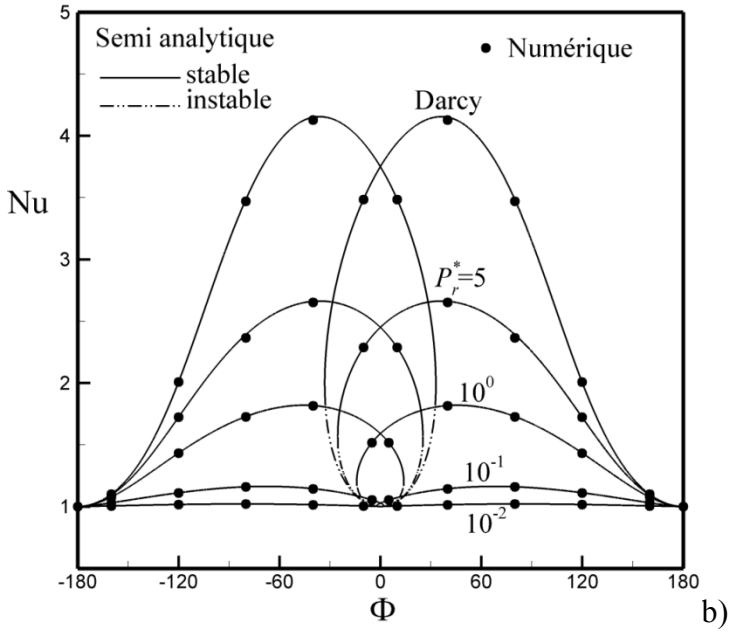


Figure 5.17 : Effets de l'angle d'inclinaison, Φ, et le paramètre de la trainée de forme, P_r^* pour $A = 10$, $R_T = 10^2$ sur a) l'intensité de l'écoulement Ψ_0 et b) le nombre de Nusselt *Nu*.

Dans la Fig 5.18 la valeur de C_T est tracée en fonction de l'angle d'inclinaison Φ et le paramètre de la trainée de forme P_r^* pour $R_T = 100$. Une augmentation du paramètre de la trainée de forme à partir de $P_r^* = \infty$ à 0.01 conduit à une réponse comme représentée sur les Figs 5.17a)-b) et 5.18. Les figures indiquent que pour une valeur donnée de l'angle d'inclinaison Φ, l'intensité du transfert thermique par convection décroit de façon continue avec une diminution de P_r^*. Comme indiqué précédemment, la force de l'écoulement convectif est faible quand l'angle d'inclinaison s'approche de ±180°. Pour une valeur donnée de P_r^*, quand l'angle d'inclinaison augmente, la convection devient de plus en plus forte et Ψ_0 et *Nu* sont promus. Comme l'angle d'inclinaison devient supérieur à Φ=90° l'enceinte commence à chauffer du bas. Néanmoins, on observe que Ψ_0 et *Nu* augmentent au début, ils atteignent leur maximum, puis ils commencent à diminuer. Les sommets de Ψ_0 et *Nu* pour différents valeurs de P_r^* varient considérablement. Pour $P_r^* = \infty$ (Darcy) ces pics se produisent à environ $\Phi = 11.4°\left(\Psi_0\right)$ et $\Phi = 36°\left(Nu\right)$ respectivement, tandis que pour $P_r^* = 10^{-2}$ ils se produisent à environ $\Phi = 81°\left(\Psi_0,\ Nu\right)$. Les Figs 5.17a)-b) et 5.18 indiquent que pour $P_r^* = \infty$ (Darcy) plusieurs états stables sont possibles dans l'intervalle $\left(-\Phi_{cr} < \Phi < \Phi_{cr}\right)$, où $\Phi_{cr} = 32.98°$.

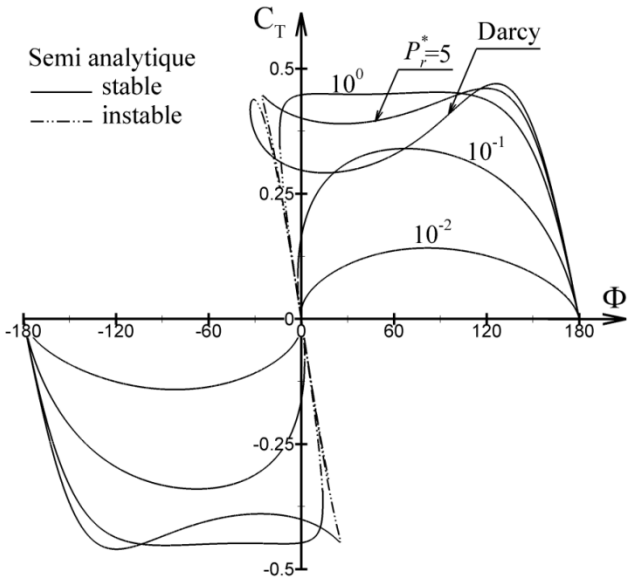


Figure 5.18 : Effets de l'angle d'inclinaison, Φ, et le paramètre de la trainée de forme, P_r^* pour $R_T = 100$ sur le constant de gradient de température C_T .

La figure 5.19 montre la variation de l'angle d'inclinaison Φ_{cr} en fonction de P_r^*. Il est constaté que, lors de l'augmentation du paramètre de la trainée de forme P_r^*, la gamme d'angles d'inclinaison Φ_{cr} diminue fortement de $\Phi_{cr} = 0^\circ$ dans le régime de Dupuit pur vers Φ_{cr} = - 32.98° dans le régime de Darcy pur. En fait, lorsque le paramètre de la trainée de forme est grand, environ $P_r^* = 10^{-2}$, les solutions naturelles sont les seules possibles.

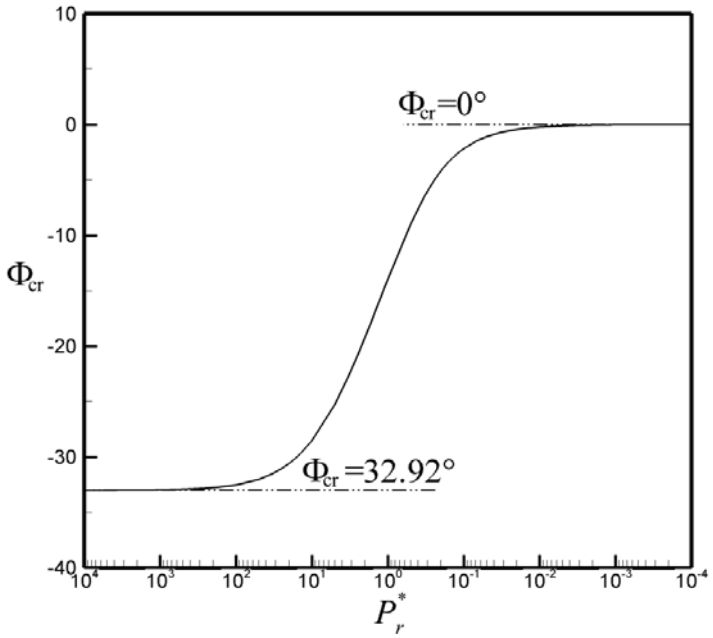


Figure 5.19 : Effet du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur l'angle d'inclinaison maximale, Φ_{cr} , pour $R_T = 100$.

5.2.2Convection induite par double diffusion et l'effet de Soret : $N\neq0$

5.2.2.1 Couche horizontale : $\Phi=0°$, $S_r=0$ et $N\leq0$

L'étude du phénomène de la convection induite par double diffusion est menée sur le déclanchement du mouvement dans une couche poreuse horizontale soumise à des gradients de température et de concentration. Les travaux de Nield en milieu fluide (1967) et poreux (1968), concernant la double diffusion dans des couches horizontales générées par des gradients de température et de concentration opposées, ont permis la prédiction du nombre de Rayleigh supercritique marquant l'apparition de la convection, pour plusieurs types des conditions aux limites. L'auteur a aussi démontré que, lorsque les forces de volume d'origine solutal et thermique s'opposent, un écoulement convectif oscillant peut se déclencher à un nombre de Rayleigh bien inférieur au celui du supercritique. Les nombres de Rayleigh critiques permettant la séparation entre les quatre régimes convectifs (stable, surstable et direct) ont été démontrés par la théorie de la stabilité linéaire (Tauntom et Lightfoot (1972)). Par la suite une étude analytique et numérique de convection au sein d'une cavité carrée, remplie d'un gaz binaire et soumise à des gradients combinés de température et de concentration a été présentée par Ranganathan et Viskanta (1988). Ces derniers ont observé que le renversement du sens de l'écoulement se produit approximativement à N=-1, quand les forces de volume sont égales et opposées.

La recherche proposée porte sur l'effet de la double diffusion dans un milieu poreux de Dupuit-Darcy dans une enceinte rectangulaire soumise à des gradients de température et de concentration uniformes. Entre autre, le travail se concentre sur l'effet du paramètre de la trainée de forme sur le flux de convection qui se produit lorsque les forces de la flottabilité thermiques et solutaux sont opposés l'un à l'autre, c'est-à dire pour des valeurs négatives de $N \leq 0$. Pour cette situation, il est connu que, en absence d'effet de la trainée de forme, l'apparition du mouvement se produit au-dessus d'un nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous}, qui dépend de N et Le . Une solution analytique, basée sur l'approximation parallèle, est dérivée pour le cas d'une couche infinie $(A >> 1)$. Les études antérieures sur ce sujet (voir, par exemple Mamou et Vasseur (1999a) et Bahloul et al. (2003)) ont démontré que, en absence d'effet de la trainée de forme $\left(P_r^* \to \infty\right)$, l'apparition de mouvement dépend fortement du signe de paramètre de la flottabilité N. Ainsi pour N>0, c'est-à-dire les forces thermiques et solutales sont déstabilisantes, le seuil pour l'apparition de la convection se

produit à un certain nombre de Rayleigh supercritique, R_{TC}^{sup}. Comme prévu, ce critère n'est pas affecté par le paramètre de la trainée de forme.

Les résultats numériques typiques sont présentés sur la figure 5.20 pour les différentes valeurs des paramètres régissant. Dans ces graphiques, les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations sont présentés de haut en bas. Les résultats illustrent clairement le fait que pour une cavité infinie, l'écoulement dans la région centrale de l'enceinte est sensiblement parallèle alors que la température et la concentration sont stratifiées de manière linéaire dans les directions horizontales.

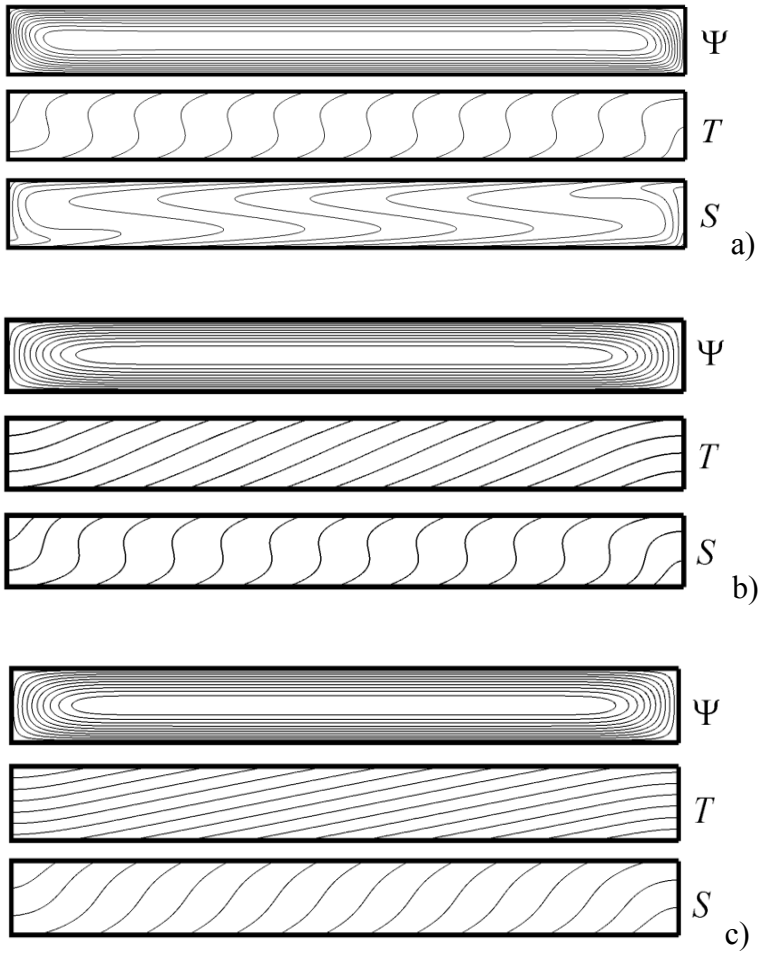


Figure 5.20 : Les lignes de courant (haut), isothermes (milieu) et isoconcentrations (bas) pour :

a) $R_T = 10^2,\ Le = 10,\ N = -0.24,\ P_r^* = \infty : \Psi_0 = 3.722,\ Nu = 3.706,\ Sh = 5.997$.

b) $R_T = 30,\ Le = 5,\ N = -0.1,\ P_r^* = 2 : \Psi_0 = 0.644,\ Nu = 1.159,\ Sh = 3.132$.

c) $R_T = 30,\ Le = 5,\ N = -0.1,\ P_r^* = 1 : \Psi_0 = 0.285,\ Nu = 1.033,\ Sh = 1.693$.

Les nombres de Rayleigh critiques correspondants au seuil de la convection et à la nature des mouvements convectifs résultants, tels que sont modélisés selon la loi de Darcy, ont été étudiés dans le passé par Mamou et Vasseur (1999a). Il a été démontré que, selon les valeurs des paramètres de contrôle, il y a quatre régimes différents possibles. A savoir, le régime souscritique, régime surstable, régime oscillant et régime supercritique. Les nombres de Rayleigh critiques pour le début du mouvement stable ou instable ont été obtenus par ces auteurs.

L'apparition de la convection supercritique est donnée par le nombre de Rayleigh supercritique comme indiqué dans l'équation (5.6).

$$R_{TC}^{\sup} = \frac{R^{\sup}}{1+NLe} \tag{5.6}$$

L'équation ci-dessus prédit le nombre de Rayleigh critique pour le cas d'une cavité horizontale, de rapport de forme A, soumise à des flux constants de chaleur et de masse par le bas, caractérisée par l'état du repos du fluide. Ce dernier peut être maintenu jusqu'au nombre de Rayleigh critique surstable. Dans le cas limite d'une couche horizontale infinie $A >> 1$ on peut démontrer aisément à partir de l'équation (5.6) que $R_{TC}^{sup} = 12$.

Le régime surstable dans lequel la convection est oscillante est donné par l'équation (5.7).

$$R_{TC}^{sur} = \frac{\left(\varepsilon Le+1\right)}{Le\left(\varepsilon+N\right)} R^{\sup} \tag{5.7}$$

Notons que le régime de la surstabilté commence à la valeur de $R_{TC} = R_{TC}^{sur}$ et prend fin à la valeur de R_{TC}^{osc}. Le nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{osc} représente la valeur du nombre de Rayleigh marquant la transition de régime surstable oscillant à un régime monotone croissant. L'expression du nombre de Rayleigh oscillant, R_{TC}^{osc}, est donnée par l'équation (5.8).

$$R_{TC}^{osc} = \frac{\left(\varepsilon Le-1\right)}{Le\left(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{-N}\right)^2} \tag{5.8}$$

Rq : la procédure de calcul de $\left(R_{TC}^{\sup},\ R_{TC}^{sur},\ R_{TC}^{osc}\right)$ est discutée en détail dans le chapitre 6.

Les critères ci-dessus marquent les seuils des mouvements convectifs qui se produisent à partir de l'état de repos, c'est-à-dire (Ψ_0=0, Nu=Sh=1). La trainé de forme P_r^* pris en compte dans la présente étude n'exerce aucun effet sur ces critères.

Cependant, lorsque les forces thermiques et solutaux sont opposées l'une a l'autre $(N<0)$ la convection peut être souscritique et le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition de la convection est donné par : (voir chapitre 3)

$$R_{TC}^{sous}=\frac{\left(Le^2-1\right)}{Le\left(\sqrt{Le}-\sqrt{-N}\right)^2}R^{\sup},\qquad \left(P_r^*\to\infty\right) \tag{5.9}$$

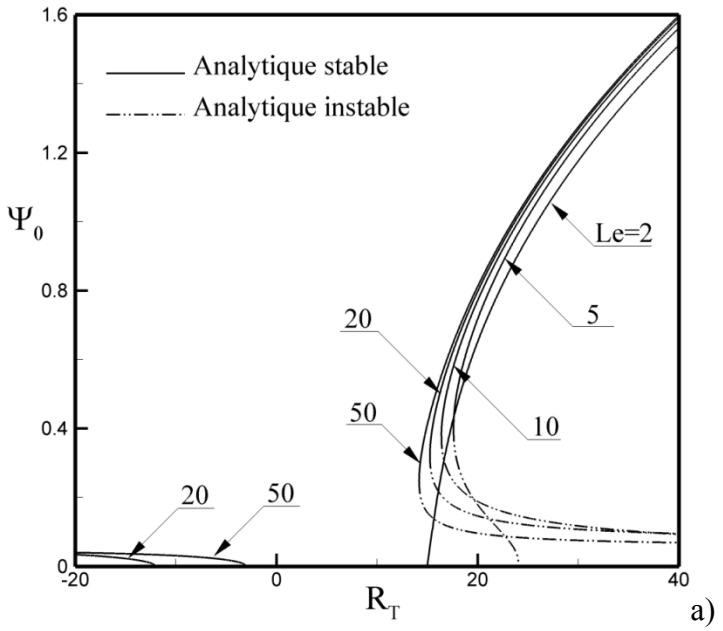
$$R_{TC}^{sous}=\frac{P_r^{*2}Le\hbar^2\Upsilon^2}{2\left(Le\Upsilon^2\lambda+N\hbar^2\gamma\right)},\qquad \left(P_r^*\to 0\right) \tag{5.10}$$

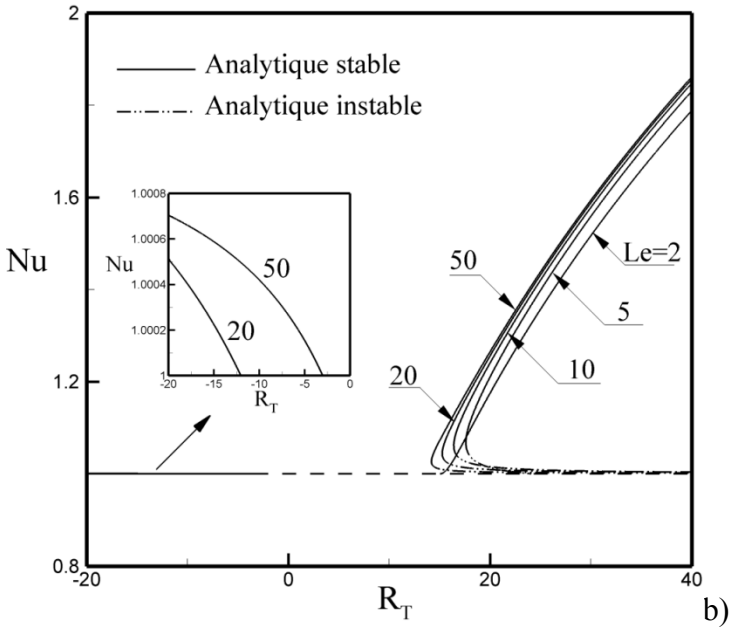
En général, la convection souscritique n'existe que lorsque les forces de volume thermique et solutal sont opposées $N<0$. Un examen attentif de (5.9) et (5.10) montre que l'existence de la convection souscritique est liée non seulement à N mais aussi à Le. Les nombres de Rayleigh supercritique et souscritique en fonction de N et Le sont donnés par les relations (5.9) et (5.10). Dans ce cas, la condition nécessaire et satisfaisante pour l'éxistence de la convection souscritique a été déjà reportée par Mamou (1998d):

$$\left.\begin{array}{l} N<0 \\ Le>\dfrac{1}{\sqrt[3]{-N}} \end{array}\right\} \tag{5.11}$$

Dans cette situation, notons que la valeur du nombre de Lewis $Le_{trans}=1/\sqrt[3]{-N}$ marque la transition de la bifurcation souscritique vers la bifurcation supercritique. C'est-à-dire que pour $Le<Le_{trans}$ la convection est supercritique et que pour $Le>Le_{trans}$ elle est souscritique. La Fig 5.21 illustre les variations de Ψ_0, *Nu* et *Sh* en fonction du nombre de Rayleigh R_T pour *N*=-0.1, $P_r^*=10$ et différentes valeurs de *Le*. Pour cette situation, $Le_{trans}=2.154$. Dans le cas de la bifurcation supercritique $\left(Le<2.154\right)$, le seuil de la convection est exprimé par la relation (5.6). Sur la Fig 5.21, pour $Le=2$, nous constatons qu'à partir du seuil de convection, l'intensité de l'écoulement augmente d'une façon monotone avec le nombre de Rayleigh. Dans le cas de la convection souscritique $\left(Le>2.154\right)$, le seuil de bifurcation est donné par la relation (5.10). Avant ce seuil, le transfert de chaleur et de masse se fait par la conduction pure $\left(\Psi_0=0,\ Nu=Sh=1\right)$. Au de là de ce seuil $\left(R_T\ge R_{TC}^{sous}\right)$, deux solutions à amplitudes finies bifurquent de l'état de repos. Notons que pour la solution instable, représentée en pointillés, l'amplitude de cet écoulement,

qui est maximale au point de bifurcation $\left(R_T = R_{TC}^{sous}\right)$, diminue avec l'augmentation de R_T et s'annule au-delà de $R_T = R_{TC}^{sup}$. L'amplitude de la solution stable, Ψ_0, quant à elle, augmente continuellement avec R_T . D'autre part Nu et Sh augmentent considérablement au début et convergent par la suite vers une valeur constante égale à 5 comme illustré dans les résultats précédents (Fig 5.6). Notons que d'après la relation (5.6) pour *Le*=10, 20 et 30 le nombre de Rayleigh supercritique devient infinie ou négative. On constate aussi que pour $Le \geq 10$ et $R_T < 0$ la convection supercritique apparait.





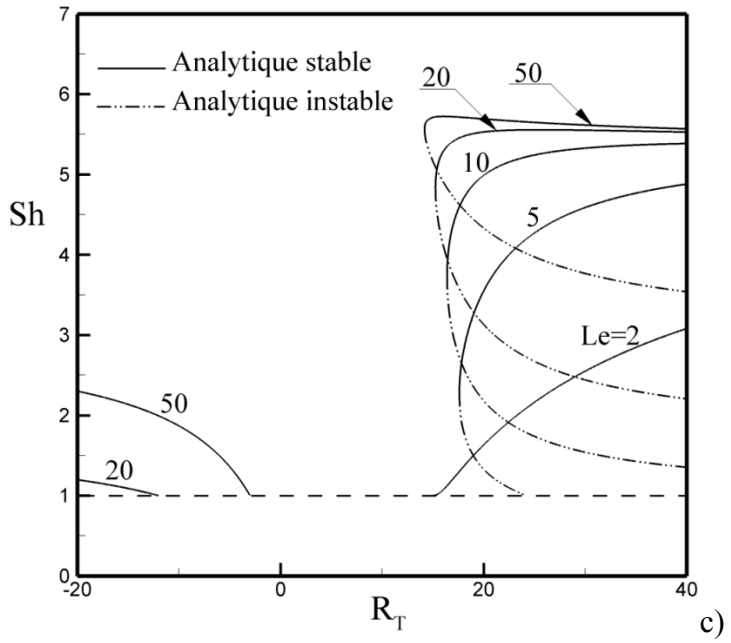
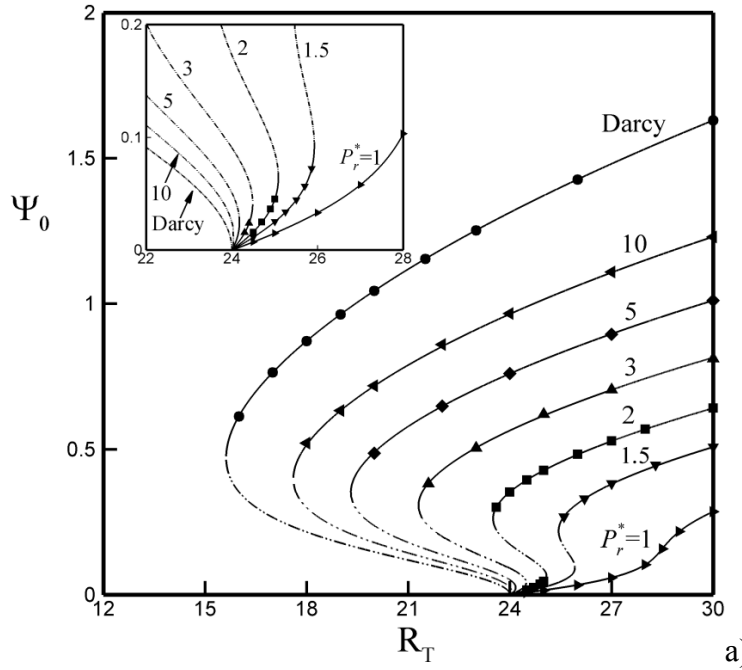
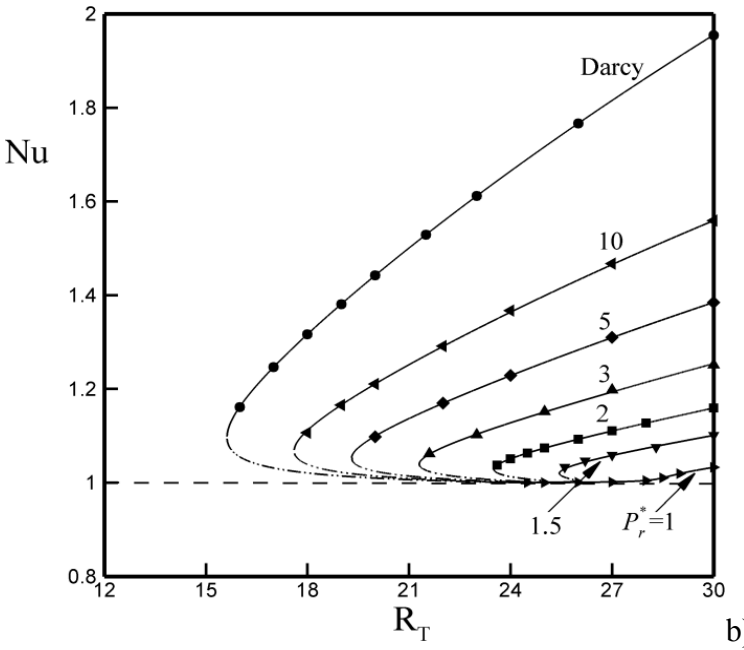


Figure 5.21 : Influence du nombre de Rayleigh sur : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) le transfert de chaleur, *Nu*, et c) transfert de masse *Sh* pour $P_r^* = 10$, *N*=-0.1 et *Le*=2, 5, 10, 15, 30.

Une vue plus complète de l'effet de la trainée de forme, P_r^*, et du nombre de Rayleigh, R_T, sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, et les taux de transfert de chaleur, *Nu*, et de masse, *Sh*, sont présentés dans les figures 5.22a)-c) pour *N*=-0.1, *Le*=5 et $\varepsilon = 1$. Les résultats sont obtenus pour des valeurs du nombre de Prandtl modifié, P_r^*, variant entre $P_r^* = \infty$ (Darcy) et $P_r^* = 1$. En général, la figure 5.22a) illustre clairement le fait que la diminution du nombre de Prandtl modifié, P_r^*, pour un nombre de Rayleigh donné, permet de réduire considérablement la force de mouvement de convection dans la couche. Cela est dû au fait que la diminution de, P_r^*, entraîne une augmentation de la force de la trainée de forme microscopique. Par conséquent, comme on peut l'observer à partir des figures 5.22b) et 5.22c), les transferts de chaleur et de masse sont à la fois considérablement inhibés avec une diminution du nombre de Prandtl modifié. Les diagrammes montrent aussi clairement l'effet de, P_r^*, sur l'existence d'un autre type de courbe de bifurcation comme illustrésur les figures 5.23-5.25.


Ψ0
RT
Darcy
10
5
3
2
1.5
P*r=1
a)


Nu
RT
Darcy
10
5
3
2
1.5
P*r=1
b)

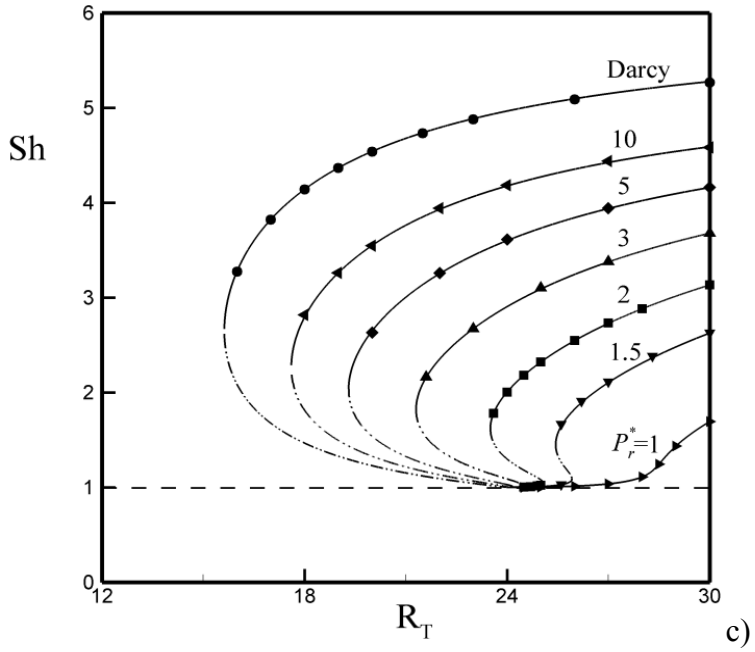
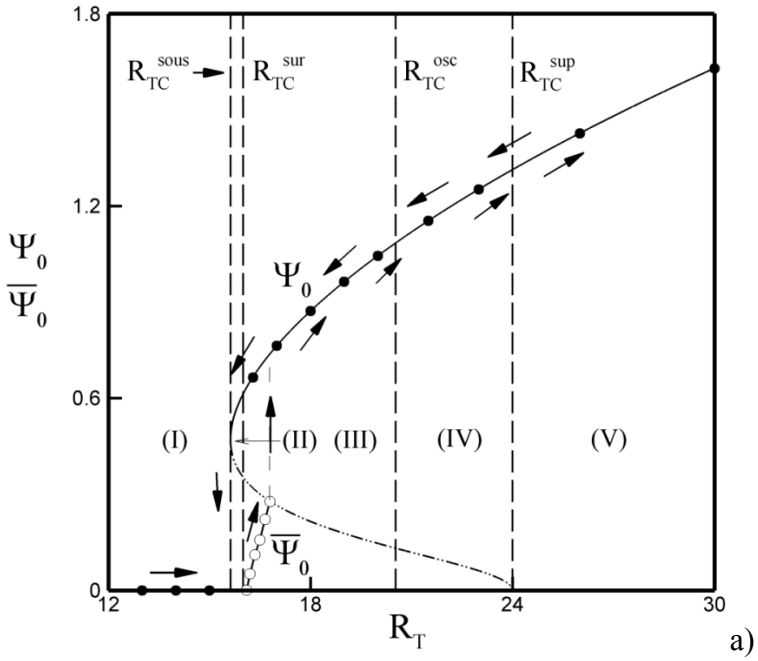


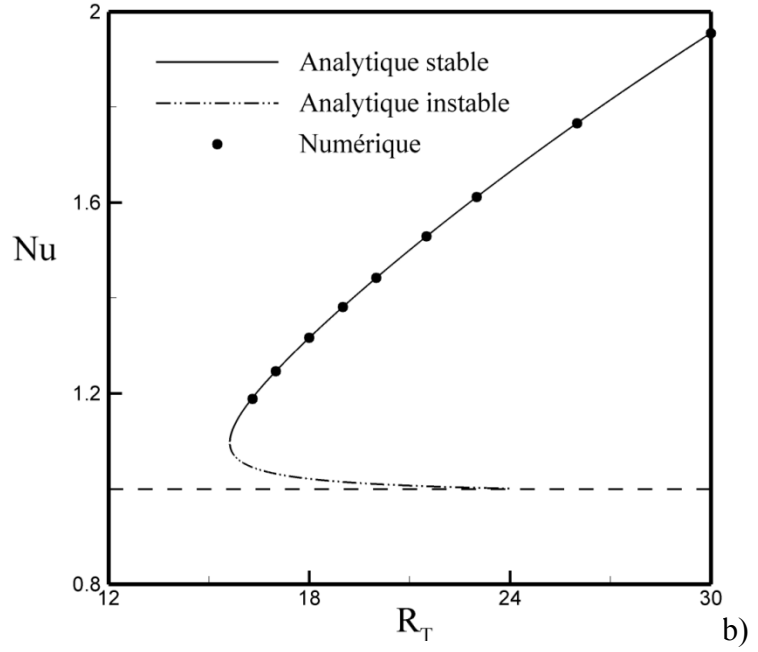
Figure 5.22 : Diagramme de bifurcation en fonction de R_T et P_r^* sur : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) taux de transfert de chaleur *Nu* et c) taux de transfert de masse, *Sh* pour *N*=-0.1, *Le*=5, ε=1 et *A*=10. —— analytique stable, ·-·-·-· analytique instable, ●◀◆▲■▼▶ numérique.

L'effet du nombre de Prandtl modifié, P_r^*, sur les diagrammes de bifurcation dans le cas d'une cavité infinie soumise à des flux constants de chaleur et de masse, sont illustrés sur les figs 5.23-5.25. Les diagrammes des bifurcations résultants sont présentés en termes de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, et les taux de transfert de chaleur, *Nu*, et de masse, *Sh*, en fonction du nombre de Rayleigh, R_T, pour *N*=-0.1, *Le*=5 et $\varepsilon = 1$. Les courbes représentées sur ces graphiques sont les prédictions de la présente théorie (écoulement parallèle), les lignes pleines correspondant aux branches stables et les lignes en pointillées sont les branches instables. Les solutions numériques des équations gouvernantes complètes, sont obtenues pour *A*=10 et sont représentées par des symboles pleins. Le comportement prédit par ce modèle analytique est qualitativement en accord avec les résultats numériques. Pour les valeurs des paramètres régissant, les nombres de Rayleigh critique prédit par les équations (5.6)-(5.8) sont donnés par: $R_{TC}^{\sup} = 24$, $R_{TC}^{sur} = 16$ et $R_{TC}^{osc} = 20.53$. Ces nombres de Rayleigh critiques ne sont pas affectés par les effets de la trainée de forme. Il est bien connu que la circulation de l'écoulement dans la couche peut être indifféremment dans le sens horaire ou antihoraire. Comme les résultats sont symétriques, seules les solutions antihoraires $(\Psi_0 > 0)$ sont présentées dans les courbes de bifurcation présentées dans ce cas.

Les résultats présentés dans la Fig 5.23 sont obtenus pour $\left(P_r^* \to \infty\right)$, c'est-à-dire en absence d'effet de la trainée de forme. La courbe de bifurcation résultante est compatible avec les comportements rapportés dans le passé par Mamou et Vasseur (1999a) et Bahloul et al. (2007), tout en considérant la convection induite par double diffusion et l'effet Soret dans une couche poreuse modélisée selon la loi de Darcy. Le début du mouvement est caractérisé par une transition du l'état de repos (Ψ_0=0) vers la convection d'amplitude finie, ($\Psi_0 \neq 0$), c'est-à-dire instabilités non linéaires. Cette transition se produit à un nombre de Rayleigh souscritique $R_{TC}^{sous} = 15.63$, Eq. (5.9), bien en dessous du nombre de Rayleigh supercritique, $R_{TC}^{\sup} = 24$. Ce type de seuil, appelé bifurcation souscritique, ne se produit que lorsque les forces de flottabilité induites par les contributions thermiques et solutales sont opposées et lorsque $Le > 1$. Dans le graphique, la solution analytique représentée par une ligne solide (branche thermique) est stable, elle est confirmée par les résultats numériques représentés par des cercles pleins. Ceci n'est pas de même pour la ligne en pointillé (branche solutal), reliant les nombres de Rayleigh souscritique et supercritique. Les lignes thermiques et solutales sont reliées les uns aux autres par une bifurcation ayant un nœud de selle. En général, les résultats numériques présentés dans la Fig 5.23 indiquent que, en dessous du nombre de Rayleigh souscritique $R_T < R_{TC}^{sous}$ région (I), l'état de repos prévaut. Dans la région (II), délimitée par $R_{TC}^{sous} \le R_T \le R_{TC}^{sur}$ la théorie de l'écoulement parallèle prédit l'existence de deux solutions (une solution stable et l'autre instable). Dans la région (III), délimitée par $R_{TC}^{sur} \le R_T \le R_{TC}^{osc}$, à partir de l'état de repos comme conditions initiales, les résultats numériques montrent que pour $R_T = 16.1$ l'écoulement est oscillant. Ce résultat est présenté dans le graphique par des cercles blancs, en terme de moyenne quadratique de la fonction de courant $\overline{\Psi}_0$. Après une augmentation graduelle du nombre de Rayleigh et en utilisant les résultats précédents comme conditions initiales, la branche d'écoulement oscillant $\overline{\Psi}_0$ peut être étendue jusqu'à $R_T = 16.9$. Au-dessus de ce nombre de Rayleigh la solution bifurque directement vers le mouvement de convection stable prédit par la théorie de l'écoulement parallèle. Numériquement, on a trouvé que lors de l'augmentation (diminuant) du nombre de Rayleigh en commençant les calculs avec un état de convection d'amplitude finie, la solution résultante suit le cycle d'hystérésis représenté par des flèches. Ces derniers indiquent le comportement de la solution du problème quand R_T augmente de zéro à 30 et diminue de 30 à zéro.


1.8
1.2
0.6
0
12
18
24
30
R_{TC}^{sous}
R_{TC}^{sur}
R_{TC}^{osc}
R_{TC}^{sup}
Ψ_0
$\overline{\Psi}_0$
(I)
(II)
(III)
(IV)
(V)
R_T

a)


Analytique stable
Analytique instable
Numérique
Nu
2
1.6
1.2
0.8
12
18
24
30
R_T

b)

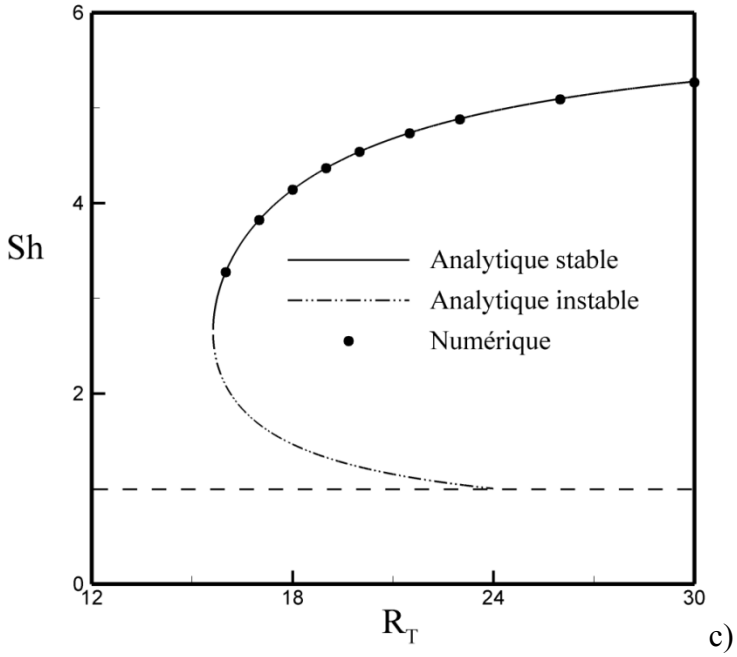
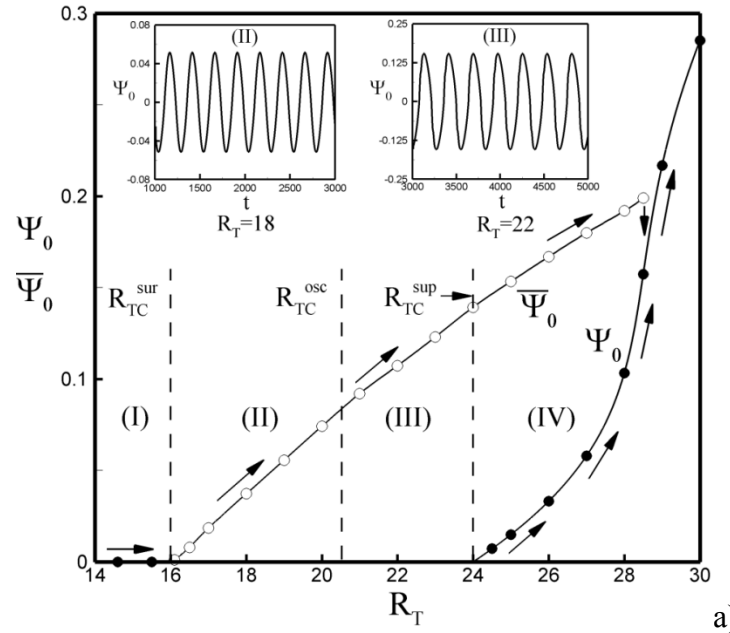


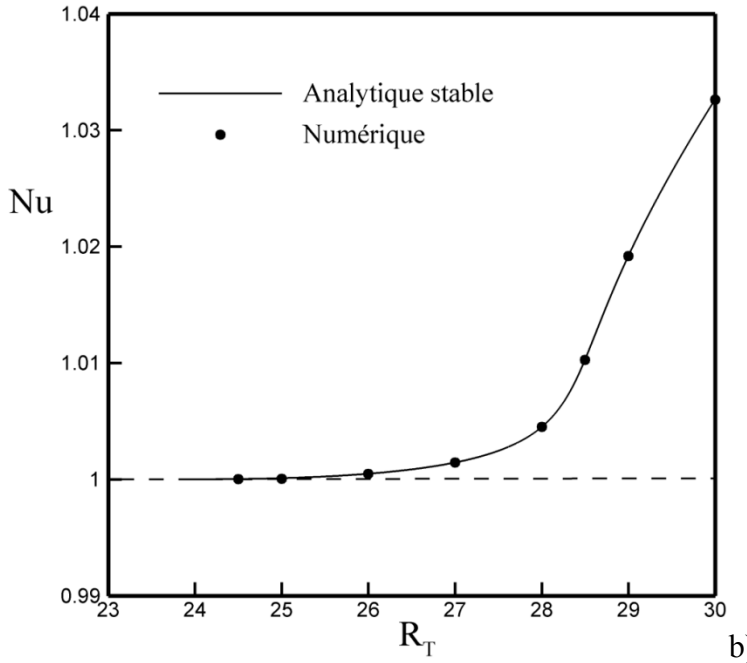
Figure 5.23 : Diagramme de bifurcation sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) transfert de chaleur, *Nu*, et c) transfert de masse, *Sh*, pour $P_r^* = \infty$ (Darcy), $N = -0.1$, $Le = 5$ et $\varepsilon = 1$.

Les résultats présentés dans la Fig 5.24 sont obtenus pour une valeur du nombre de Prandtl modifié relativement faible, à savoir $P_r^* = 1$, pour lequel les effets de la trainée de forme sont importants. Comme déjà motionné dans la théorie de la stabilité linéaire (voir chapitre 6), les nombres de Rayleigh critiques pour l'apparition du mouvement (R_{TC}^{sur} , R_{TC}^{osc} , $R_{TC}^{\sup}$) ne sont pas affectés par les effets de la trainée de forme. Ainsi le nombre de Rayleigh critique minimale pour l'apparition du mouvement est le nombre de Rayleigh surstable $R_{TC}^{sur} = 16$ de telle sorte qu'au-dessous de cette valeur, zone (I), le système reste à l'état de repos $\left(\Psi_0 = 0,\ Nu = Sh = 1\right)$, comme indiqué par les résultats numériques présentés dans le graphique. Au dessus de cette valeur, de façon similaire aux résultats obtenus dans la Fig. 5.23, pour $R_T > R_{TC}^{sur}$ les résultats numériques montrent l'existence d'une branche d'écoulement oscillant, $\overline{\Psi}_0$, étendue sur la gamme $16.2 \le R_T \le 28.5$. Le type d'écoulement oscillant résultant, dans la zone (II), est illustré dans le graphique pour le cas particulier $R_T = 18$ en termes de l'évolution dans le temps de Ψ_0 pendant quelques cycles. Il est constaté que la branche oscillante existe aussi dans la zone (III), délimitée par $\left(R_{TC}^{osc} \le R_T \le R_{TC}^{\sup}\right)$, comme le montrent les résultats obtenus pour $R_T = 22$. La ligne solide dans la zone (IV) est la prédiction de la théorie de l'écoulement parallèle non linéaire. On observe que le début du mouvement stable n'est pas en ce moment souscritique, tel qu'obtenu dans la fig 5.23 par la

loi Darcy, mais plutôt supercritique. La courbe de bifurcation résultant, caractérisée par une transition de l'état repos à régime convectif, a eu lieu à un nombre de Rayleigh supercritique $R_{TC}^{\sup} = 24$. Après l'augmentation du nombre de Rayleigh au-dessus de cette valeur critique un bon accord est observé entre les résultats analytiques et numériques.



a)



b)

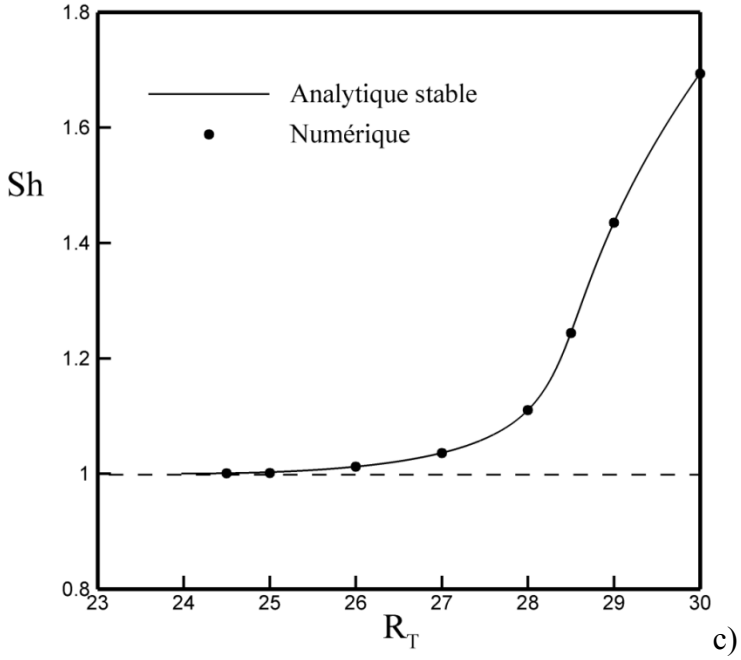
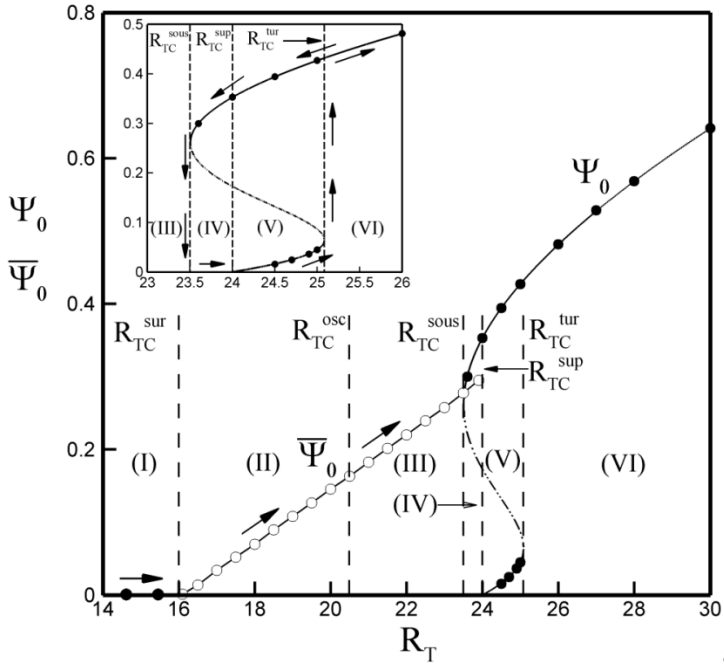


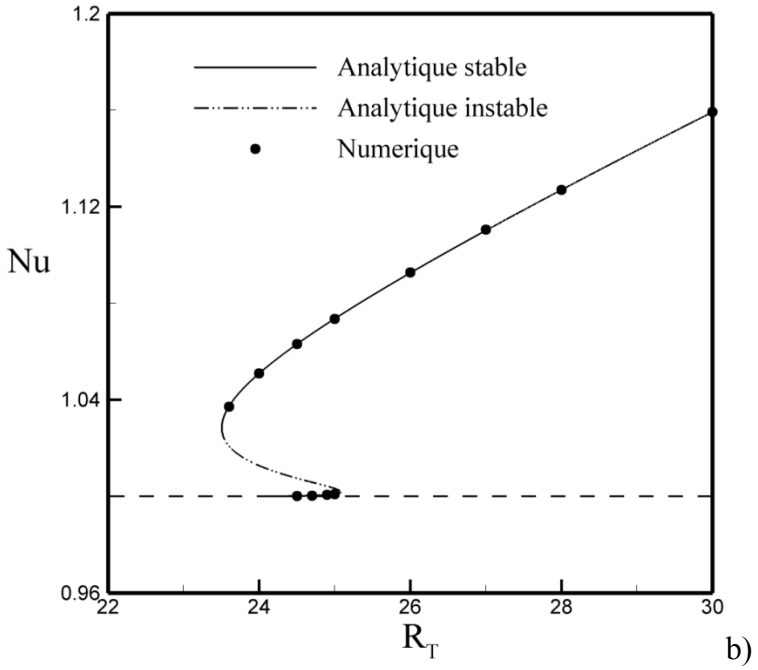
Figure 5.24 : Diagramme de bifurcation sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) transfert de chaleur, *Nu*, et c) transfert de masse, *Sh*, pour $P_r^* = 1,\ N = -0.1,\ Le = 5$ et $\varepsilon = 1$.

Le cas de $P_r^* = 2$, qui est une valeur intermédiaire du nombre de Prandtl modifié entre les deux valeurs considérés ci-dessus, est représenté dans la Fig 5.25. Le diagramme de bifurcation résultant est maintenant caractérisé par six zones différentes. En particulier, les zones (I) et (II), délimitées par R_{TC}^{sur} et R_{TC}^{osc} sont les mêmes que celles discutées ci-dessus pour $P_r^* = 1$. Ainsi, l'état de repos prévaut dans la zone (I) tandis que pour $R_T > R_{TC}^{sur}$ l'écoulement est oscillant. Ce régime d'écoulement donne lieu à la branche correspondant aux résultats numériques obtenus pour $\overline{\Psi}_0$ versus R_T. On constate que la branche oscillante peut être maintenue jusqu'à $R_T = 23.9$. Au-dessus de cette valeur la solution numérique bifurque vers un régime de convection d'amplitude finie. La Fig 5.26 illustre les résultats numériques obtenus pour $R_T = 18$, zone (II), en fonction de la variation de Ψ_0, *Nu* et *Sh* dans le temps et la structure de l'écoulement pendant une période. La structure de l'écoulement est monocellulaire, elle remplit toute la cavité. Un renversement de la circulation de l'écoulement dans le sens antihoraire à horaire et vice versa est observé. La courbe de bifurcation, prédite par la théorie d'écoulement parallèle, indique que le début du mouvement se produit maintenant au nombre de Rayleigh souscritique $R_{TC}^{sous} = 23.51$. Ainsi, la zone (III) dans le graphique, est maintenant confinée dans la gamme $R_{TC}^{osc} \le R_T \le R_{TC}^{sous}$. La

Fig 5.27 illustre les résultats numériques obtenus dans cette région pour $R_T = 22$. La force de la circulation d'oscillation qui en résulte est naturellement supérieure à celle rapportée dans la zone (II) où la structure d'écoulement correspondante est plus complexe. A l'instant *t*=620, la structure de l'écoulement est monocellulaire et la circulation se fait dans le sens antihoraire. Comme le temps augmente, cette structure monocellulaire se décompose pour donner naissance à une circulation centrale dans le sens horaire et deux petits tourbillons dans le sens antihoraire qui sont localisée sur les extrémités de la cavité. Ces deux tourbillons disparaissent progressivement, donnant lieu à une faible circulation monocellulaire dans le sens horaire dans la couche comme on peut le voir à partir des résultats obtenus en *t*=840. En outre, au fil du temps la structure d'écoulement se compose d'une cellule de circulation dans le sens antihoraire dans la partie centrale du système et deux tourbillons dans le sens horaire proches des zones d'extrémités de la cavité. Au moment où *t*=1020 la structure unicellulaire avec une circulation dans le sens antihoraire est observée et récupérée à *t*=620. L'ensemble du processus est répété au cours de chaque période de temps. Ce comportement oscillatoire et les modèles d'écoulement peuvent être différents lorsque le rapport d'aspect de la couche est modifié.



a)



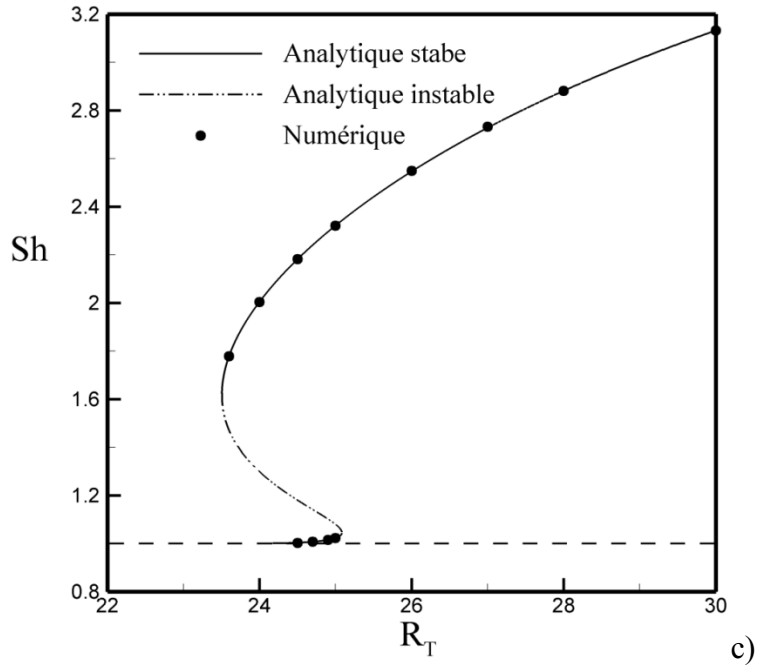


Figure 5.25 : Diagramme de bifurcation sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) transfert de chaleur, *Nu*, et c) transfert de masse, *Sh*, pour $P_r^* = 2,\ N = -0.1,\ Le = 5$ et $\varepsilon = 1$.

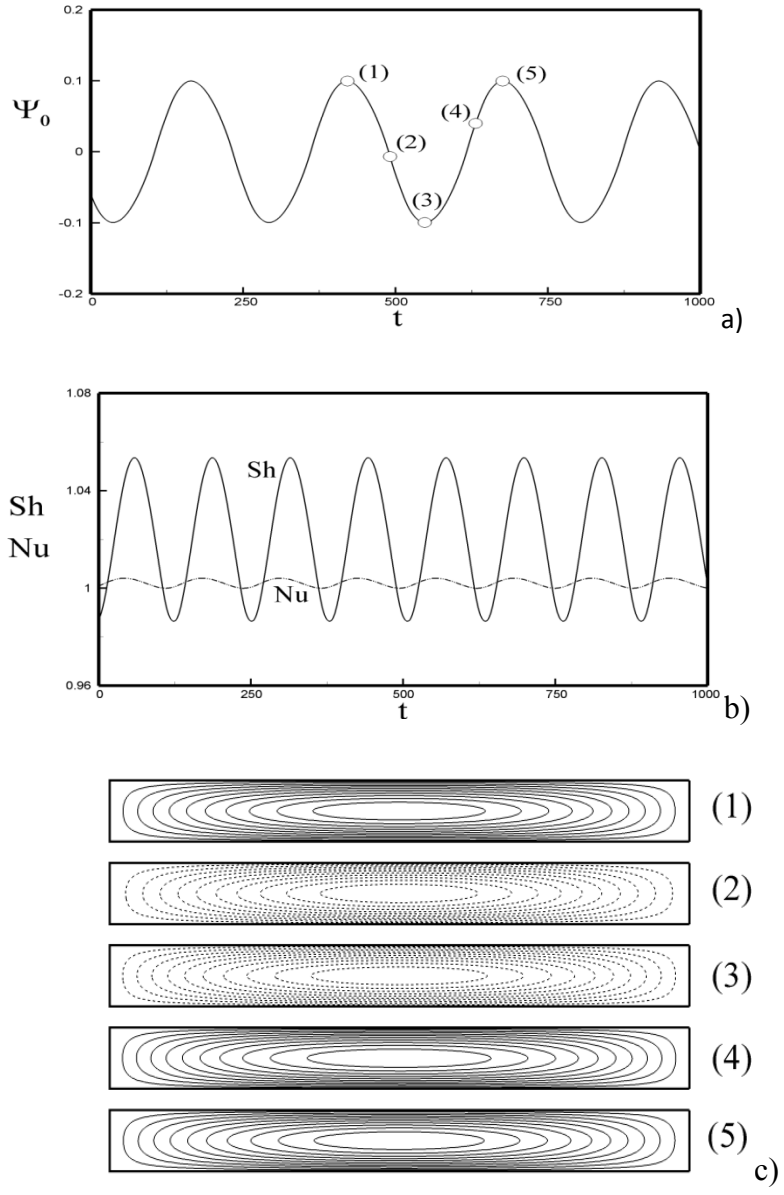


Figure 5.26 : Évolution dans le temps : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) des taux de transfert de chaleur, *Nu*, et de masse, *Sh*, et c) la structure de l'écoulement pour (zone II), pour $R_T = 18,\ P_r^* = 2,\ N = -0.1,\ Le = 5$ et $\varepsilon = 1$.

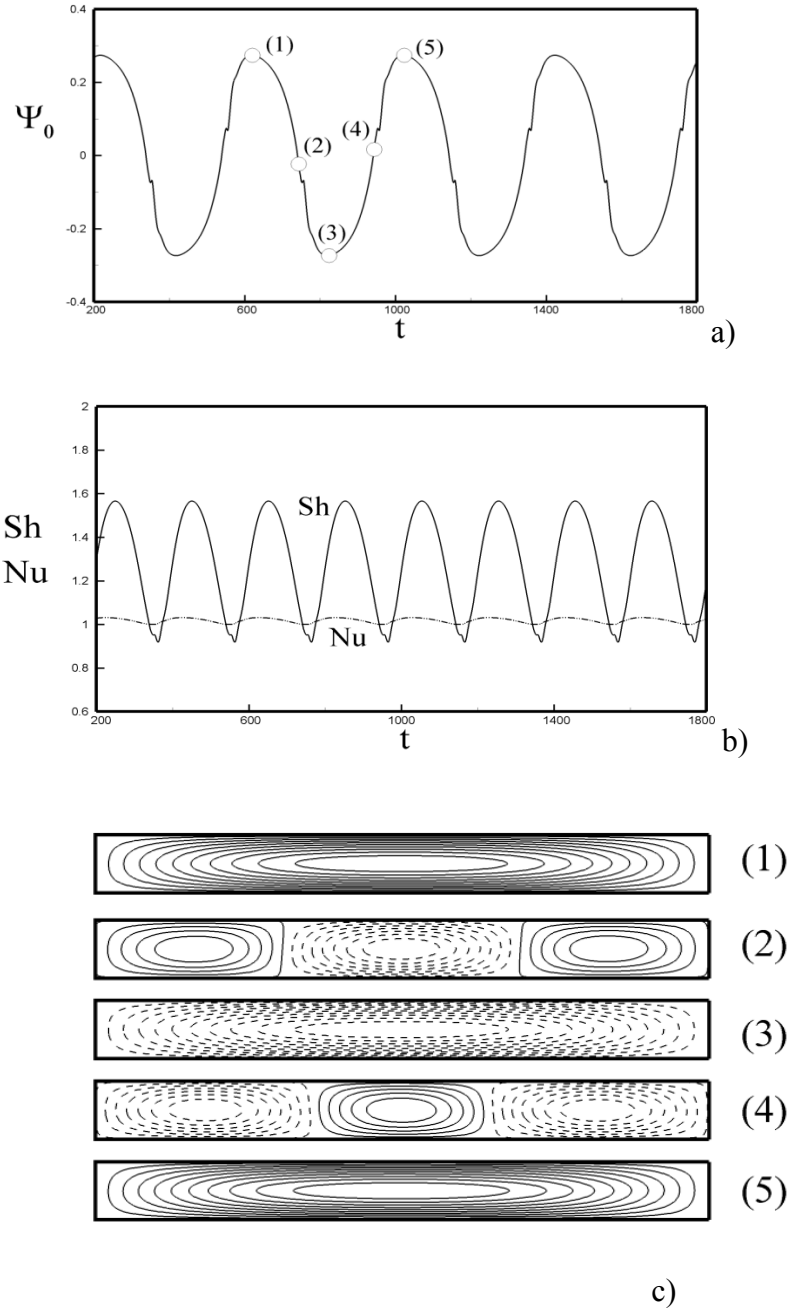


Figure 5.27 : Évolution dans le temps : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) des taux de transfert de chaleur, *Nu*, et de masse, *Sh*, et c) la structure de l'écoulement pour (zone III), $R_T = 22$, $P_r^* = 2$, $N = -0.1$, $Le = 5$ et $\varepsilon = 1$.

Les résultats, prédits par le modèle de l'écoulement parallèle, sont maintenant discutés. La courbe de bifurcation qui en résulte est considérée comme tout à fait particulière. La figure 5.25 indique l'existence de deux branches différentes stables, représentées par des traits pleins. La partie supérieure, à partir de R_{TC}^{sous} est la branche standard observée dans la bifurcation souscritique, comme illustré par exemple dans la Fig 5.23. D'autre part, la branche inférieure stable, qui commence à $R_{TC}^{\sup} = 24$, correspond à une bifurcation supercritique similaire à celui décrit dans la Fig 5.24. Cependant, on constate que cette branche n'existe que dans l'intervalle $R_{TC}^{\sup} \le R_T \le R_{TC}^{tur}$, où $R_{TC}^{tur} = 25.08$, ce nombre de Rayleigh correspond à un point tournant. Les deux branches stables sont connectées l'une à l'autre par une branche instable, illustrée en pointillés. La confirmation numérique de la solution analytique est également présentée dans le graphique. L'accord est toujours excellent. Au démarrage de la procédure numérique avec l'état de repos comme conditions initiales, il a été constaté que lorsque le nombre de Rayleigh est au dessus de $R_{TC}^{sous} = 23.51$, la solution résultante suit le cycle d'hystérésis représenté par des flèches sur le zoom inclus dans la Fig 5.25a. Ainsi, pour $R_T \ge R_{TC}^{tur}$, d'une zone (VI), la branche supérieure existe et on voit que, comme prévu sur l'augmentation de R_T, la force de la convection est favorisée de façon monotone. Cette solution stable peut être maintenue jusqu'à un certain nombre de Rayleigh critique, R_{TC}^{Hopf}, au dessus de cette valeur une bifurcation de Hopf se produit et l'écoulement devient instable (oscillant). Ce point sera discuté dans le chapitre suivant. D'autre part, quand le nombre de Rayleigh diminue au dessous de R_{TC}^{tur}, il faut alors examiner deux zones distinctes. Zone (V), $R_{TC}^{\sup} \le R_T \le R_{TC}^{tur}$, qui se caractérise par l'existence à un nombre de Rayleigh donné, de trois différentes solutions sont possibles (deux stables et une instable).

Les figures 5.28a)-b), illustrent les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues numériquement dans cette zone, pour $R_T = 24.5$. Les conditions initiales appropriées doivent être spécifiées pour simuler les deux solutions stables différentes. Ainsi, un mode d'écoulement de convection a été utilisé comme condition initiale pour obtenir le modèle d'écoulement de la Fig 5.28a, ce qui correspond à la branche supérieur stable. Cependant, l'état de repos a été considéré comme conditions initiales pour lancer la procédure numérique afin d'obtenir le mode d'écoulement présenté dans la Fig 5.28b. Ce type de régime de convection à faible diffusion correspond à la solution de la branche inférieure. Naturellement, il n'a pas été possible de confirmer numériquement la troisième solution instable prédite par le modèle analytique.

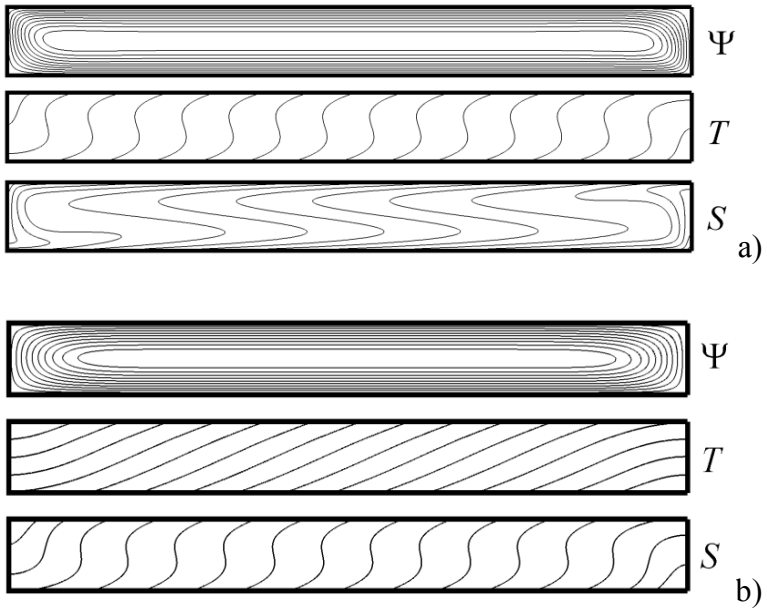


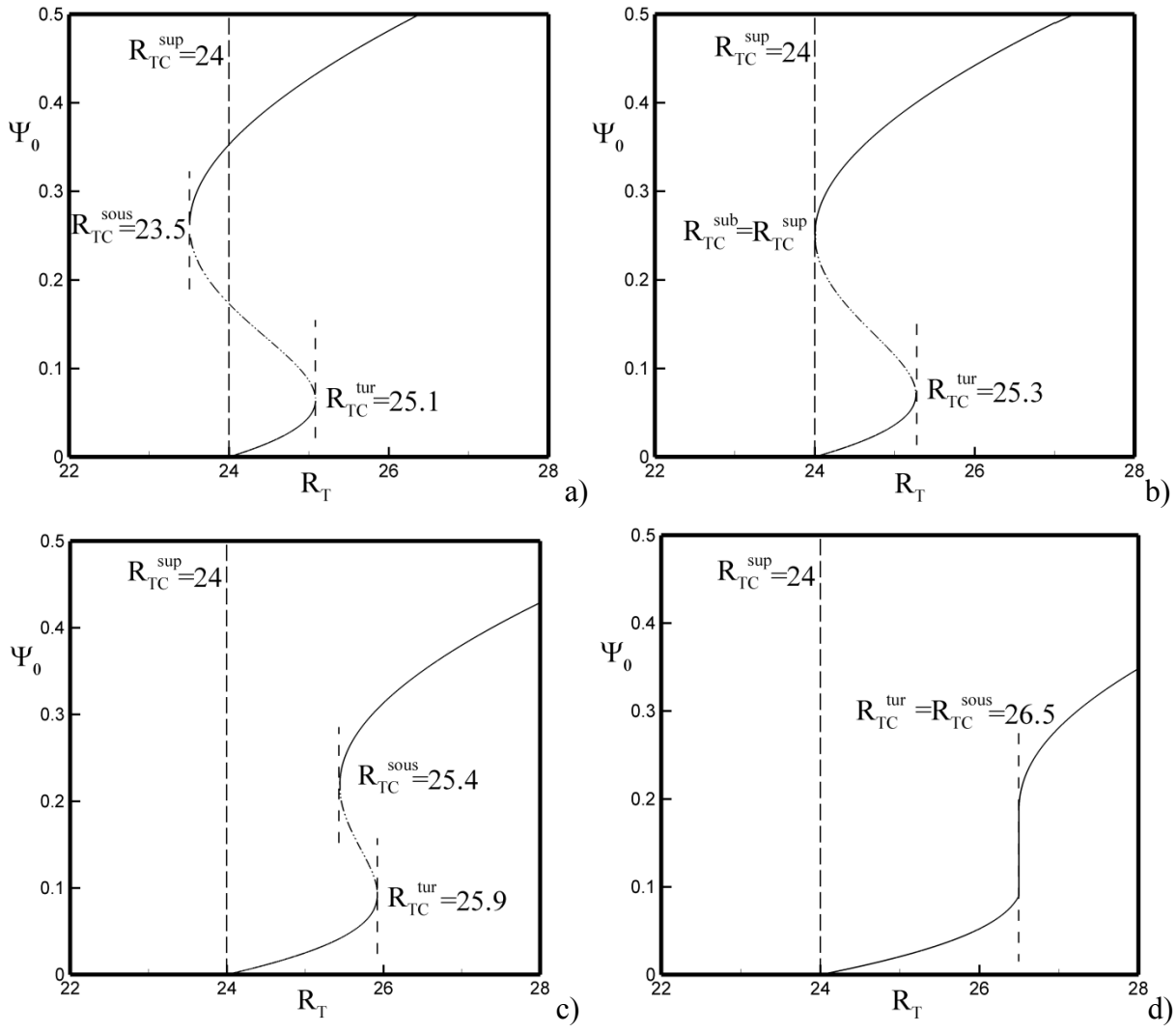
Figure 5.28 : Les lignes de courant (haut), isothermes (milieu) et isoconcentrations (bas) pour : $R_T = 24.5$, $P_r^* = 2$, N=-0.1, Le=5 et ε=1.

a) $\Psi_0 = 0.394,\ Nu = 1.063,\ Nu_m = 1.044,\ Sh = 2.181$ et $Sh_m = 1.861$.

b) $\Psi_0 = 0.016,\ Nu = 1.000,\ Nu_m = 1.000,\ Sh = 1.002$ et $Sh_m = 1.002$.

Pour l'ensemble des paramètres régissant considérés ici, il est prédit par le modèle analytique, que la bifurcation est sous-critique à condition que $P_r^* > 1.85$, comme illustré dans la Fig 5.29a) pour $P_r^* = 2$. La courbe de bifurcation résultante est caractérisée par une branche supérieure stable souscritique existante pour $R_T \geq R_{TC}^{sous} = 23.51$. En outre, en raison des effets de la trainée de forme, le graphique indique aussi l'existence d'une solution stable supercritique s'étendent entre $R_{TC}^{sup} = 24 \leq R_T \leq R_{TC}^{tur} = 25.1$. Les deux R_{TC}^{sous} et R_{TC}^{tur} sont reliés entre aux par une branche instable représentée par une ligne en pointillée. Avec la diminution de la valeur de P_r^*, le début du mouvement demeure souscritique vers $P_r^* = 1.85$, à laquelle la condition $R_{TC}^{sous} = R_{TC}^{\sup} = 24$ est atteinte, comme illustré dans la Fig 5.29b). Pour $P_r^* \leq 1.85$, on constate dans les Figs 5.29b)-c) que le début du mouvement est maintenant supercritique. Ainsi, comme illustré dans la Fig 5.29c) pour $P_r^* = 1.5$, on remarque que le nombre de Rayleigh souscritique R_{TC}^{sous} devient tellement supérieur à $R_{TC}^{\sup}$ qu'il dégénère en un second point de retournement R_{TC}^{sous}. La courbe de bifurcation est maintenant caractérisée par deux points de retournement $R_{TC}^{tur} = 25.9$ et $R_{TC}^{sous} = 25.4$, respectivement. Il est remarqué à partir des Figs 5.29a)-c) que, dans l'intervalle $R_{TC}^{sup}(R_{TC}^{sous}) \leq R_T \leq R_{TC}^{tur}$, trois solutions

différentes (deux stable et une instable) sont possibles pour une valeur donnée de R_T, confirmant l'existence du phénomène de bistabilité. Enfin, Les résultats présentés dans la Fig 5.29d) pour $P_r^* = 1.3$ indiquent que la condition $R_{TC}^{tur} = R_{TC}^{sous} = 26.5$ est atteinte. En conséquence, pour $P_r^* \leq 1.3$, le modèle analytique prédit que, pour un nombre de Rayleigh donné $R_T > R_{TC}^{sup}$, la convection est supercritique. Le diagramme de stabilité est illustré dans la figure 5.29e), où la région de bistabilité est délimitée par la surface hachurée.



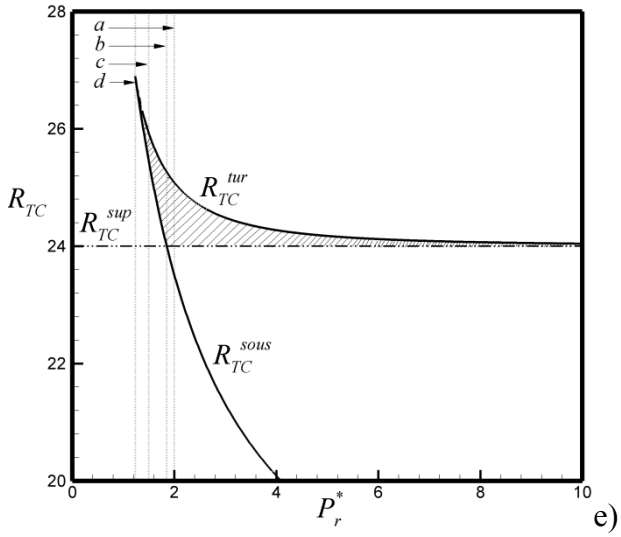
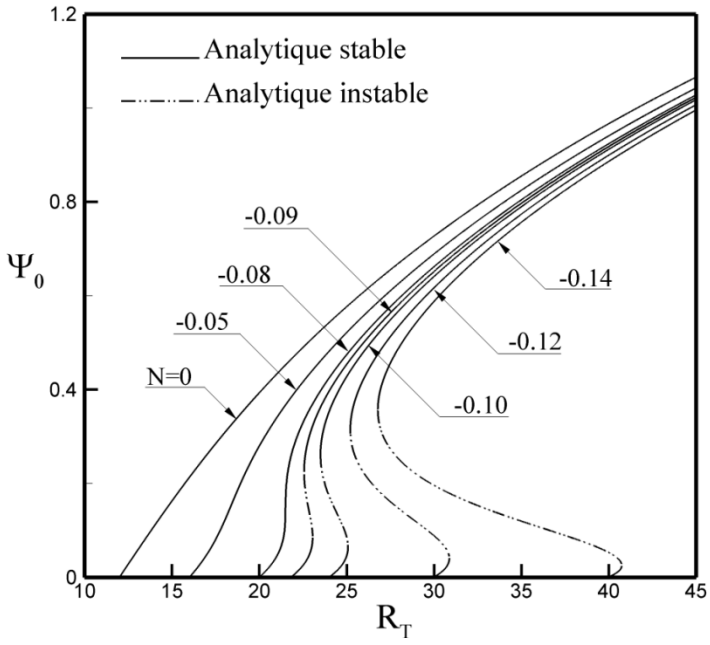
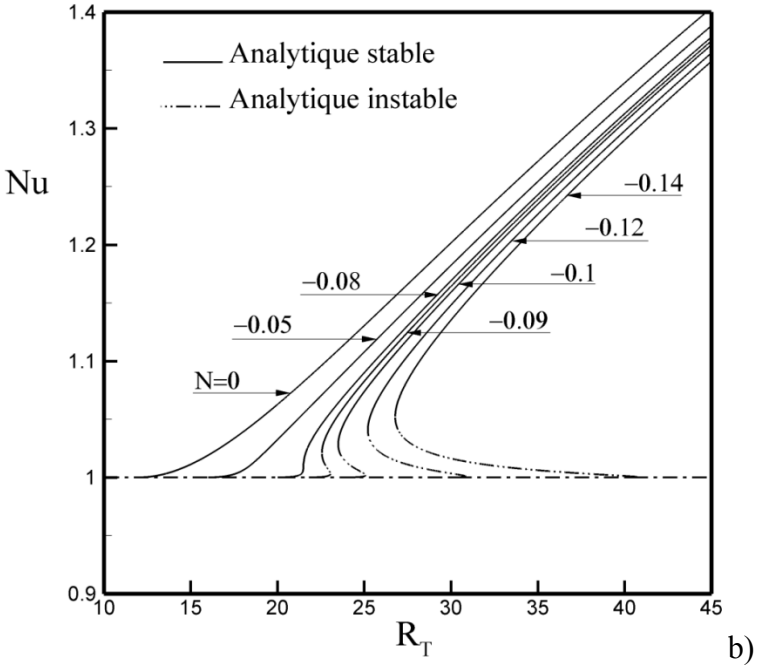


Figure 5.29 : Diagramme de bifurcation en termes de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, en fonction de R_T pour N=-0.1 et Le=5: a) $P_r^* = 2$, b) $P_r^* = 1.85$, c) $P_r^* = 1.5$ et d) $P_r^* = 1.3$, e) diagramme de stabilité. —— analytique stable, -·-·-·- analytique instable.

Les figures 5.30a)-c) montrent les variations de Ψ_0, Nu et Sh en fonction de R_T et N pour Le=5 et $P_r^* = 2$. La courbe obtenue pour N=0 correspond à la convection induite par les effets thermiques seulement. Elle donne lieu à une bifurcation de type fourche se produisant à un nombre de Rayleigh supercritique $R_{TC}^{\sup} = 12$. La courbe de bifurcation supercritique est affectée suivant la diminution de la valeur du rapport de la flottabilité. En effet, l'évolution des courbes de bifurcation avec le taux de flottabilité est tout à fait semblable à celle décrite dans les figures 5.29a)-d) sur l'effet de P_r^*.





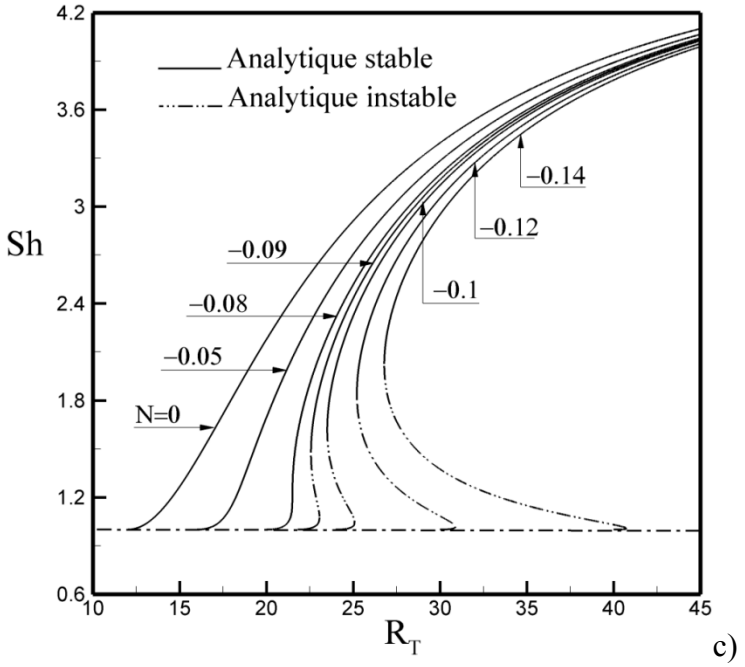
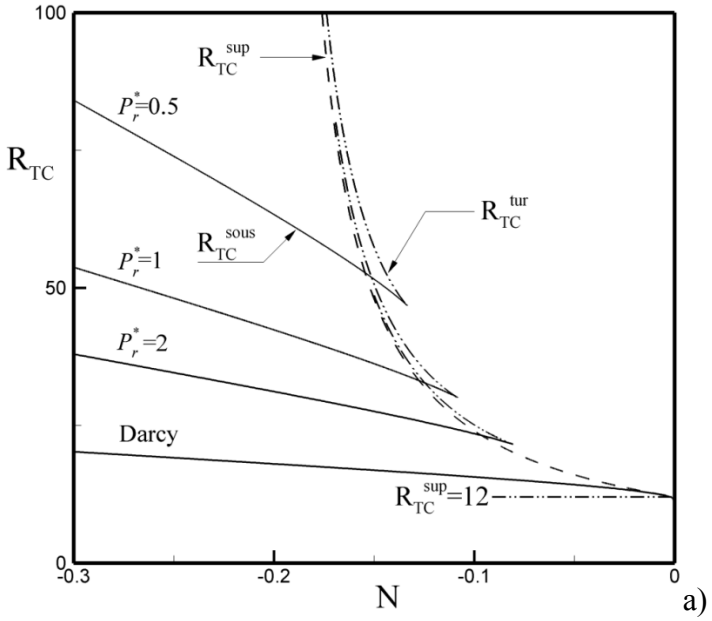


Figure 5.30 : L'effets du nombre de Rayleigh R_T et le rapport des forces de volume N sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le nombre de Nusselt, Nu, et c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $P_r^* = 2$ et Le=5 .

La figure 5.31a) montre les variations des nombres de Rayleigh critiques $R_{TC}^{\sup}$, R_{TC}^{sous}, et R_{TC}^{tur} avec N et P_r^*. D'après le zoom présenté dans la Fig. 5.31b) pour $P_r^* = 2$, la solution analytique prédite indique que dans l'intervalle $-0.15 \le N \le -0.096$, le nombre de Rayleigh souscritique R_{TC}^{sous} est le plus faible $\left(R_{TC}^{sous} < R_{TC}^{\sup} < R_{TC}^{tur}\right)$, alors le début du mouvement

devient souscritique comme illustré dans la Fig 5.29a. À N=-0.096 on constate que, $R_{TC}^{sous} = R_{TC}^{\sup} = 23.19$ cette situation étant similaire à celle représentée dans la Fig 5.29b. Quand la valeur du rapport de la flottabilité varie, on observe que dans l'intervalle $-0.096 \le N \le -0.081$, la courbe de bifurcation consiste à une branche inférieure supercritique étendant entre $R_{TC}^{sup} \le R_T \le R_{TC}^{tur}$ et une branche supérieure qui existe pour la condition $R_T \ge R_{TC}^{sous}$, comme illustré dans la Fig 5.29c. La branche souscritique se dégénère en une branche correspondant au nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{sous}. Les résultats obtenus à N=-0.081, pour lequel $R_{TC}^{tur} = R_{TC}^{sous} = 21.58$, sont similaires à ceux représentés dans la Fig 5.29d. Pour $-0.081 \le N \le 0$, il existe uniquement le nombre de Rayleigh supercritique, $R_{TC}^{\sup}$, de telle sorte que le début de mouvement est supercritique $R_{TC}^{\sup}$.



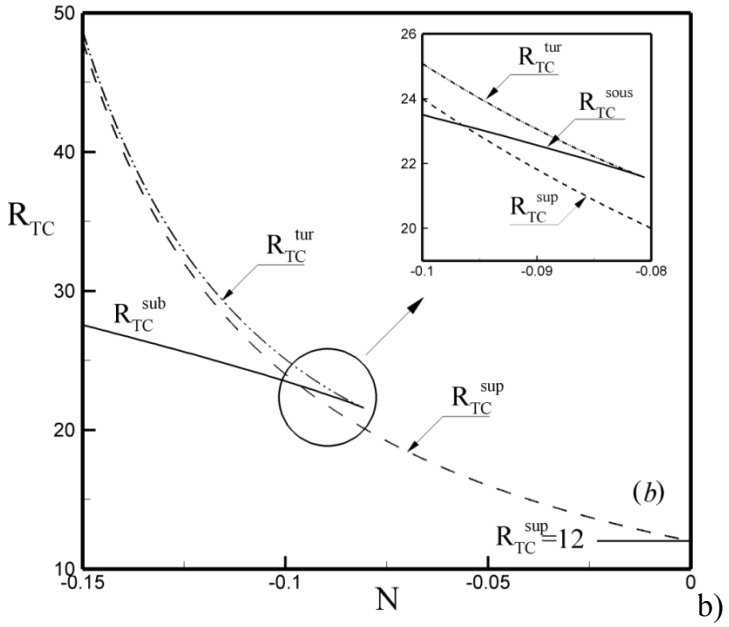


Figure 5.31 : Les résultats analytiques obtenus pour *Le*=5, a) l'effet du nombre de Prandtl modifié, P_r^*, et le rapport de la flottabilité, *N*, sur les nombres de Rayleigh critiques, b)effet de rapport de la flottabilité, *N*, sur le nombres de Rayleigh critiques, R_{TC}, pour $P_r^* = 2$.

Le nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous}, est représenté dans la Fig 5.32 en fonction de, P_r^*, et différentes valeurs de nombre de Lewis pour le cas de *N*=-0.1. Pour les plus grandes valeurs du nombre de Prandtl modifié $\left(P_r^* \to \infty\right)$, les résultats prédits par le modèle de Darcy, Eq 5.9, sont récupérés comme illustré dans la petite fenêtre incluse dans le graphique. Ainsi, quand *Le*→∞ la concentration est presque uniforme dans le système. Par conséquent, l'apparition de la convection se rapproche asymptotiquement du critère pour l'apparition de la convection dans une couche poreuse soumise uniquement à un flux de chaleur constant (c'est-à dire $R_{TC}^{sous} \to R_{TC}^{\sup} = 12$). Après avoir progressivement augmenté le nombre de Lewis, le nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{sous} augmente fortement au début, jusqu'à un maximum $R_{TC}^{sous} = 16$ à *Le*=3.22, puis diminue de façon monotone. On observe qu'au dessous de *Le*=2.16, la convection souscritique est impossible. Ceci résulte du fait que, lorsque le nombre de Lewis est suffisamment faible, le processus de transfert de masse à travers de la couche poreuse est gouverné par diffusion pure. Le début du mouvement est alors supercritique, survenant à un nombre de Rayleigh $R_{TC}^{\sup} = 15.3$, comme prévu par l'équation 5.6. Au fur et à mesure que le nombre de Lewis diminue, le nombre de Rayleigh supercritique tend asymptotiquement vers $R_{TC}^{sup} = 12$ à $\left(Le \to 0\right)$. L'effet du nombre de Prandtl modifié sur le nombre de Rayleigh souscritique est clairement illustré dans le

graphique. Comme déjà mentionné, une diminution de P_r^* affaibli la force du mouvement de convection dans la couche. Ainsi, pour un nombre de Lewis donné, il est constaté que les valeurs de R_{TC}^{sous} aux quelles la convection se produit, augmentent considérablement lors de la diminution de P_r^*. Par exemple, pour Le=10^3, on note que le nombre de Rayleigh souscritique augmente à partir de $R_{TC}^{sous} = 12.25$ pour $P_r^* = 10^3$ à $R_{TC}^{sous} = 28$ pour $P_r^* = 10^{-1}$. Naturellement, pour les faibles valeurs du nombre de Lewis présentées dans le graphique la convection souscritique n'est possible que lorsque le nombre de Prandtl modifié est réduit. Ainsi, pour Le=3 (5) le début de mouvement est supercritique pour $P_r^* \leq 14$ (1.85).

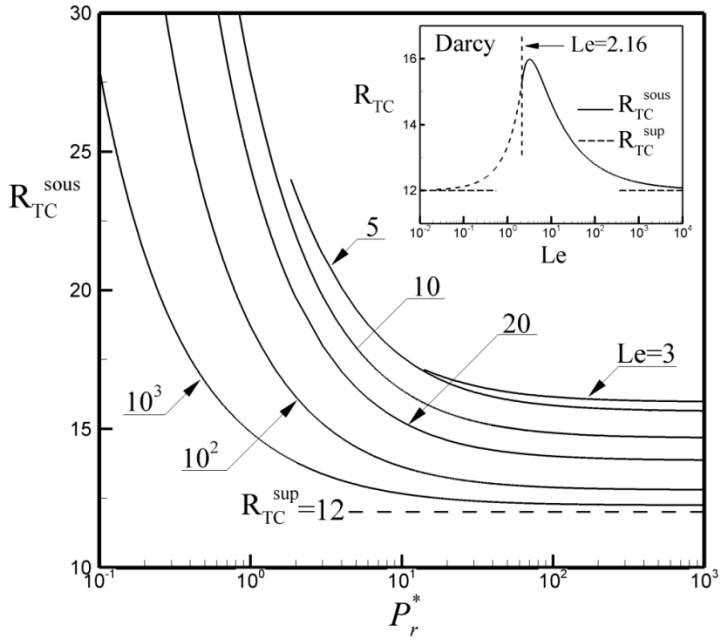
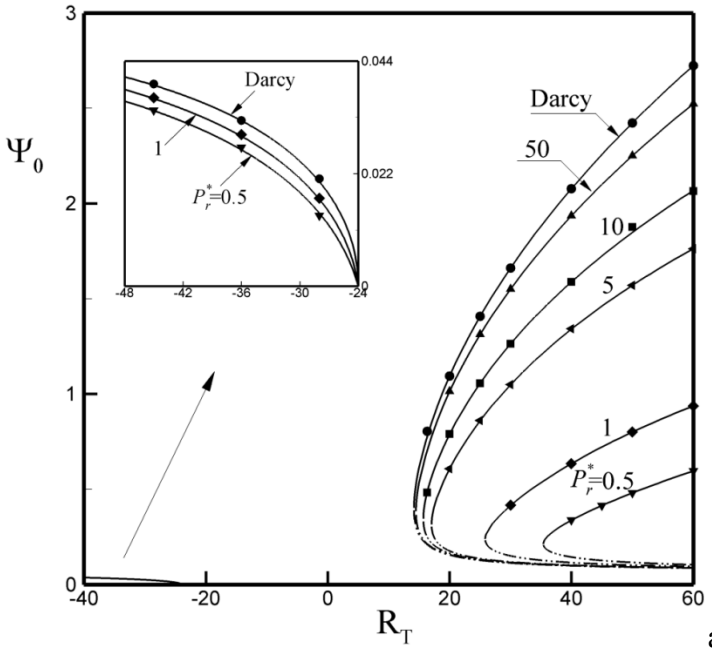


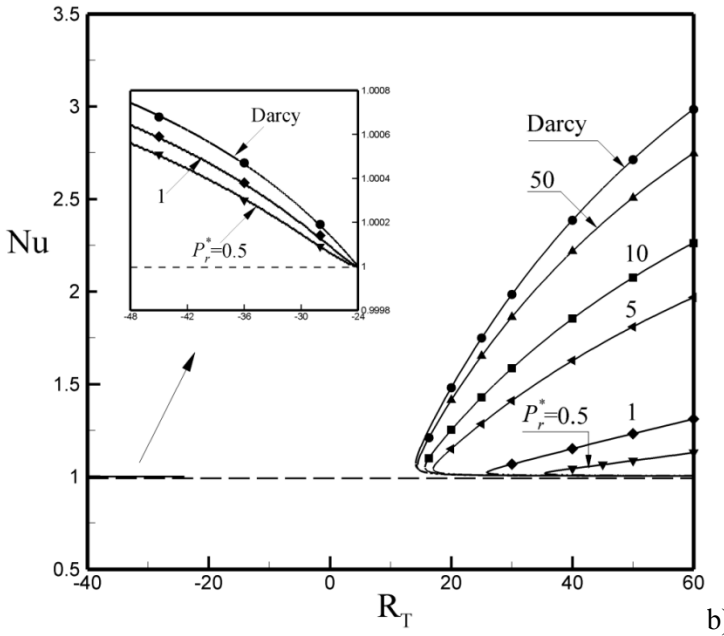
Figure 5.32 : Le nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous}, en fonction de nombre de Prandtl modifié, P_r^*, pour Le=10^3, 10^2, 20, 10, 5, 3 et N=-0.1.

Une autre vue de l'effet du nombre de Lewis est illustré dans la figure 5.33. Les résultats obtenus en termes de Ψ_0, Nu et Sh en fonction de R_T et P_r^*, pour N=-0.1 et Le=15, sont différents de ceux décrits dans les figs 5.22 pour Le=5. Ainsi, indépendamment de la valeur de P_r^*, la solution analytique indique que les courbes de bifurcation souscritique sont constituées des branches supérieures stables connectées avec des branches inférieures instables. On constate que ces dernières tendent asymptotiquement vers le nombre de Rayleigh supercritique $\left(R_{TC}^{\sup} \to \infty\right)$. En fait, pour le nombre de Lewis particulier considéré ici, l'apparition de la convection supercritique est possible seulement pour les valeurs négatives du nombre de Rayleigh, à savoir $R_{TC}^{\sup} = -24$, comme prédite par l'équation 5.6. Ce

résultat correspond au cas d'une couche chauffée par le haut. Bien que la force de mouvement convectif résultant, Ψ_0, est très faible comme illustré dans l'élargissement représenté dans la Fig 5.33 qui montre que l'accord entre le modèle analytique et le code numérique est très bon. Pour une valeur donnée du coefficient de la trainée de forme, on voit que l'état de repos prévaut dans l'intervalle $R_{TC}^{\sup} \le R_T \le R_{TC}^{sous}$ $\left(P_r^*\right)$.



a)



b)

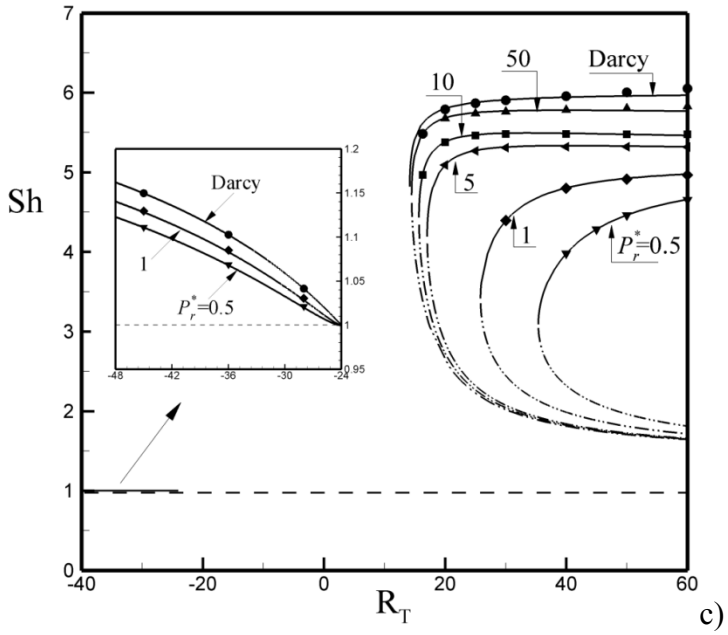
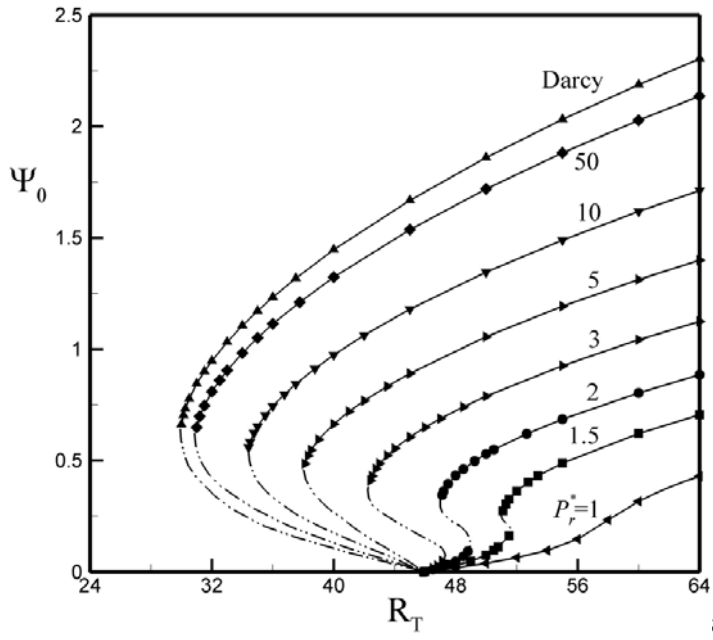


Figure 5.33 : Diagramme de bifurcation en fonction de R_T et P_r^* sur : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) taux de transfert de chaleur *Nu* et c) taux de transfert de masse, *Sh* pour *N*=-0.1, *Le*=15, ε=1 et *A*=10. —— analytique stable, ·-·-·- analytique instable, ●▲■◀◆▼numérique.

Dans cette section, nous considérons le cas d'une cavité carrée *A*=1 soumise à des gradients de température et de concentration constants. Les deux parois verticales de la cavité sont adiabatiques et imperméables que les parois horizontales sont soumises à des conditions aux limites verticales thermiques et solutales de type Neumann (flux constantes de chaleur et de concentration) et Dirichlet (température et concentration constantes imposées). Pour cette situation un modèle analytique n'est pas disponible de telle sorte que tous les résultats présentés ici sont les prédictions du code numérique discuté dans le chapitre 4.

Les figures 5.34 montrent des résultats typiques obtenus pour le cas d'une cavité carrée chauffée et salée par le bas par des flux constants. La Fig 5.34a) illustre les effets du nombre de Rayleigh, R_T, et le nombre de Prandtl modifié, P_r^*, sur la courbe de bifurcation en terme de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, pour le cas *N*=-0.1, *Le*=5 et ε=1. Les traits pleins sur le graphe sont obtenus par un ajustement de courbe des données numériques, tandis que les lignes en pointillées sont des prédictions basées sur les résultats obtenus pour la couche infinie. La figure indique que les résultats sont qualitativement similaires à ceux obtenus dans la section précédente (couche infinie). Ainsi, lors de la diminution de la valeur de Prandtl modifié de $P_r^* = \infty$ (Darcy) à 1, on voit que les courbes de bifurcation évoluent à partir d'un comportement souscritique à supercritique. Pour les valeurs intermédiaires du

nombre de Prandtl modifié, les courbes de bifurcation indiquent l'apparition des branches stables supercritique et souscritique connectées par une branche instable. Ce point est illustré par la courbe pour $P_r^* = 2$ représentée dans la Fig 5.34b). Pour cette situation, pour un certain nombre de Rayleigh donné, des solutions bi-stables sont possibles pour une gamme du nombre de Rayleighdonné qui dépend des paramètres régissant du problème. Ce point est illustré dans les Figs 5.34c)-d) qui montrent les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenus pour $R_T = 48$. La solution présentée dans la Fig 5.34d), correspond à la branche inférieure et elle est obtenue à partir des calculs numériques en utilisant l'état de repos comme conditions initiales. Cependant, la solution correspondant à la branche supérieure, Fig 5.34c), peut être obtenue suivant le chemin d'hystérésis représenté pour $P_r^* = 2$. Les Figs 5.35 montrent des résultats typiques obtenus pour une cavité soumise à des conditions aux limites thermiques et solutales de type Dirichlet. Les paramètres régissant considérés ici sont les mêmes que ceux des Figs 5.34. Il est claire que l'existence des solutions doubles sont également obtenues comme décrit par la courbe de bifurcation obtenue par exemple pour $P_r^* = 5$.



a)

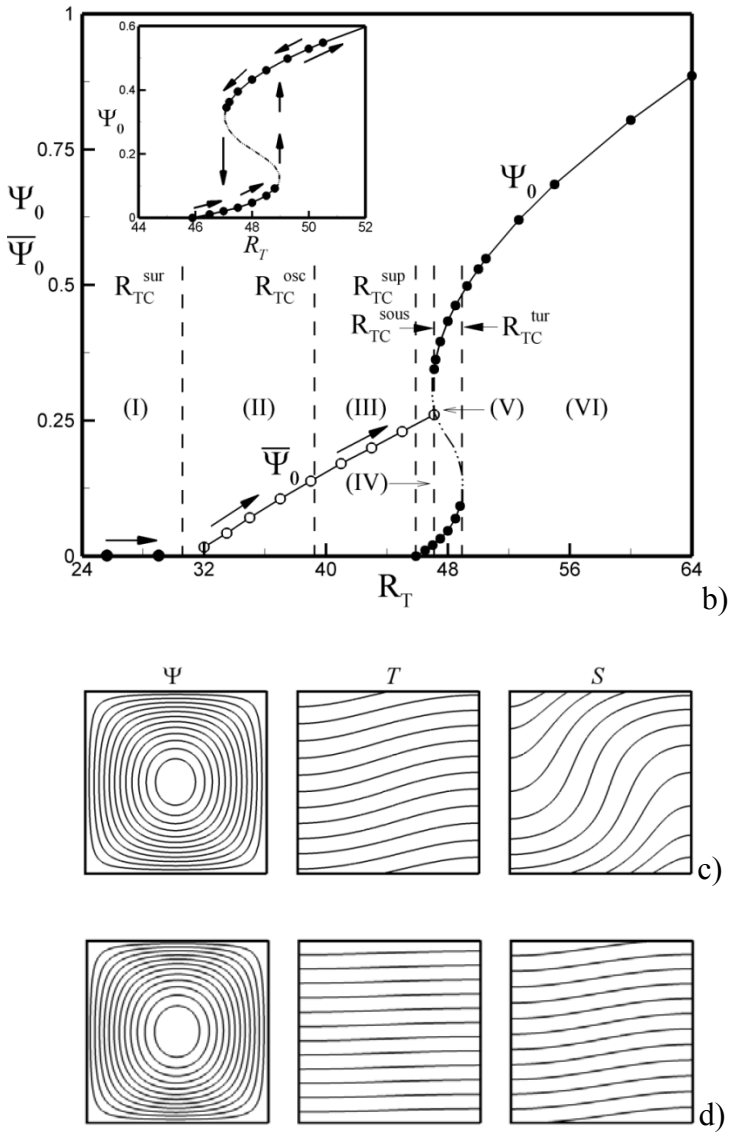
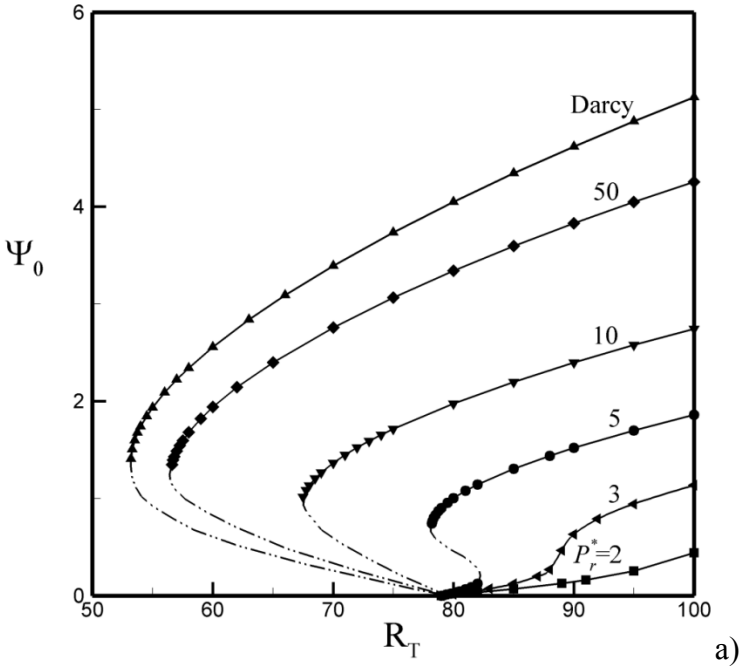


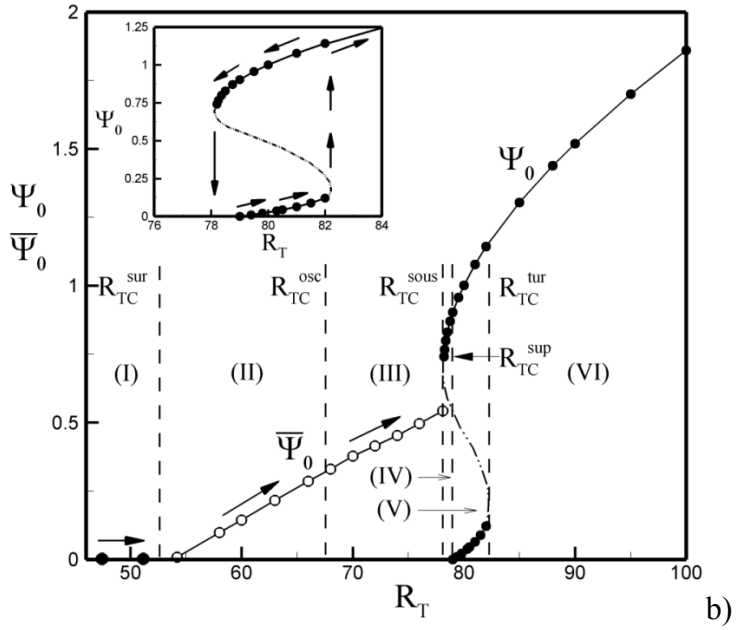
Figure 5.34 : Diagramme de bifurcation en terme de Ψ_0 en fonction de R_T et P_r^* pour $A=1$, N=-0.1, Le=5 et ε=1, a) $P_r^*=\infty$ (Darcy) à 1, b) $P_r^*=2$, numérqiue instable, numérique stable (conditions aux limites Neumann).

c) Lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T=48$ et $P_r^*=2,\ \Psi_0=0.433,\ Nu_m=1.040,\ Sh_m=1.779$, (solution supérieur).

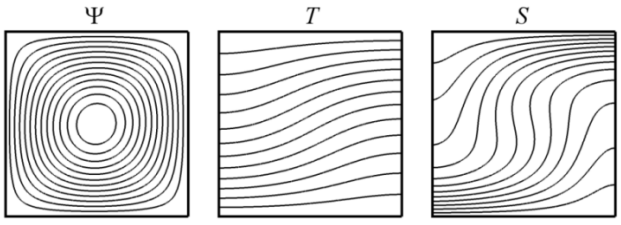
d) Lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T=48$ et $P_r^*=2,\ \Psi_0=0.047,\ Nu_m=1.000,\ Sh_m=1.013$, (solution inférieur).


Darcy
50
10
5
3
P_r^*=2
Ψ_0
R_T

a)


Ψ_0
$\overline{\Psi}_0$
R_{TC}^{sur}
R_{TC}^{osc}
R_{TC}^{sous}
R_{TC}^{tur}
R_{TC}^{sup}
(I)
(II)
(III)
(IV)
(V)
(VI)
R_T

b)


Ψ
T
S

c)

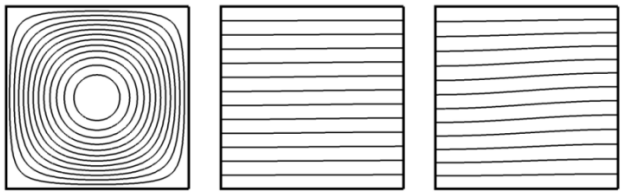

d)

Figure 5.35 : Diagramme de bifurcation en terme de Ψ_0 en fonction de R_T et P_r^* pour $A=1$, N=-0.1, Le=5 et ε=1, a) $P_r^*=\infty$ (Darcy) à 1, b) $P_r^*=5$, numérique instable, numérique stable (conditions aux limites Dirichlet).

c) Lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T=80$ et $P_r^*=5$, $\Psi_0=1.005$, $Nu_m=1.108$, $Sh_m=2.274$, (solution supérieur).

d) Lignes de courant (gauche), isothermes (milieu), isoconcentrations (droit) pour $R_T=80$ et $P_r^*=5$, $\Psi_0=0.028$, $Nu_m=1.000$, $Sh_m=1.002$, (solution inférieur).

5.2.2.2 Couche verticale : Φ=90° et *N*=-1

Pour la situation où la cavité verticale Φ=90°, la convection naturelle induite par double diffusion $(S_r=0)$ et l'effet de Soret $(S_r=1)$ a été étudié. Dans cette investigation, les écoulements convectifs sont induits par des conditions aux limites thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleur et de masse) imposées sur les parois verticales, tandis que les deux parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Quand les forces de volume thermique et solutal sont de même intensité mais de sens opposé N=-1 une solution d'équilibre correspondant à l'état de repos est possible. L'apparition du mouvement résultant peut être soit supercritique ou souscritique. Une solution semi-analytique, valable pour une couche infinie $A>>1$ en supposant un écoulement parallèle, est dérivée.

La présente étude se concentre sur le cas particulier où les forces de volume sont de même intensité mais de sens opposé, tels que :

$$N=\frac{\beta_S \Delta S'}{\beta_T \Delta T'}=-1 \tag{5.12}$$

Dans les équations présentées dans le chapitre 2, la condition $(S_r=0)$ correspond à la convection à double diffusion induite par l'application des flux constants de chaleur q' et de masse j' de telle sorte que $\partial T/\partial x=1$ et $\partial S/\partial x=1$ sur les limites verticales du système. Toutefois, la condition $(S_r=1)$ correspond à la convection induite par l'effet de Soret pour

lequel la condition limite de concentration est déterminée par l'imperméabilité des parois solide ce qui implique $\left(\partial T / \partial x - \partial S / \partial x\right) = 0$.

Pour une couche poreuse verticale infinie $\left(A >> 1\right)$, les équations gouvernant (2.19), (2.20) et (2.23) peuvent être simplifiées considérablement en utilisant l'approximation d'écoulement parallèle. La procédure a été décrite en détail dans la section de la couche inclinée, on se limite ici de donner les principales étapes.

En introduisant les approximations dans les équations (2.19) et (2.20), pour les conditions aux frontières (2.28) et (2.29) nous obtenons pour les deux systèmes les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d\theta_T}{dy} = -C_T \Psi + 1 \tag{5.13}$$

$$\frac{d\theta_S}{dy} = \left(S_r C_T + LeC_S\right)\Psi + 1 \tag{5.14}$$

En substituant les deux équations (5.13) et (5.14) respectivement dans l'équation (2.23), l'équation de la quantité de mouvement se réduit alors à:

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2}\left[1 + \frac{2}{P_r^*}\left|\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|\right] - R_T\left[C_T\left(1 - S_r\right) - LeC_S\right]\Psi = 0 \tag{5.15}$$

Les équations (3.3) et (3.4) peuvent être combinées avec les équations (5.13) et (5.14) afin d'obtenir les expressions suivantes de C_T et C_S :

$$C_T = \frac{\int_{-1/2}^{1/2}\Psi\left(y\right)dy}{1 + \int_{-1/2}^{1/2}\Psi^2\left(y\right)dy}, \qquad C_S = \frac{S_r\left[1 - Le\int_{-1/2}^{1/2}\Psi^2 dy\right] + Le\int_{-1/2}^{1/2}\Psi dy}{1 + Le^2\int_{-1/2}^{1/2}\Psi^2 dy} \tag{5.16}$$

La situation de Darcy pur est récupérée dans la limite $P_r^* \to \infty$ dans les équations ci-dessus. Pour cette condition, il est possible de résoudre les équations (5.13)-(5.16) analytiquement. Comme la procédure est une généralisation des solutions discutées en détail par Mamou et al. (1998a) et Joly et al. (2000), la forme finale de la solution des équations (5.13)-(5.16) est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
\Psi\left(x, y\right) &= \Psi_0 \cos\left(\omega y\right) \\
T\left(x, y\right) &= C_T x - \frac{\Psi_0}{\omega} C_T \sin\left(\omega y\right) + y \\
S\left(x, y\right) &= C_S x - \frac{\Psi_0}{\omega}\left(LeC_S + S_r C_T\right)\sin\left(\omega y\right) + y
\end{aligned} \tag{5.17}$$

où $\omega = \left[R_T \left(LeC_S - C_T \left(1 - S_r \right) \right) \right]^{1/2} = \pi$

Ces équations permettent maintenant de déterminer les valeurs de C_T et C_S qui sont données par :

$$C_T = \frac{4\Psi_0}{\omega\left(\Psi_0^2 + 2\right)}, \qquad C_S = \frac{4\Psi_0\left[Le\left(2 + \Psi_0^2\right) + S_r\left(2 - \Psi_0^2 Le\right)\right]}{\omega\left(2 + \Psi_0^2 Le^2\right)\left(2 + \Psi_0^2\right)} \tag{5.18}$$

où Ψ_0, est la valeur de la fonction de courant au centre da la cavité qui peut être évaluée à partir de l'expression suivante :

$$\frac{\Psi_0^2}{4}\left[\Psi_0^2 Le^2 + 2\left(Le^2 + 1\right)\right] - \sqrt{2}\Psi_0\left[\left(Le - 1\right) + S_r\left(Le + 1\right)\right] R_T / R^{sous} + 1 = 0 \tag{5.19}$$

avec : $R^{sous} = \omega^3 \dfrac{S_r\left(\sqrt{2} - 1\right) + 1}{S_r\left(2 - \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}}$

Par ailleurs, les taux de transfert de chaleur et de masse ont pour expressions :

$$Nu = \frac{\omega^2\left(2 + \Psi_0^2\right)}{\left(\omega^2 - 8\right)\Psi_0^2 + 2\omega^2} \tag{5.20}$$

$$Sh = \frac{\omega^2\left(2 + \Psi_0^2 Le^2\right)\left(2 + \Psi_0^2\right)}{\left[\left(\omega^2 - 8\right)\left(\Psi_0^2 + 2\right)Le^2 - \left(16 S_r\left(Le + 1\right) - 2\omega^2\right)\right]\Psi_0^2 + 4\omega^2} \tag{5.21}$$

En prenant la dérivée de, Ψ_0, par rapport à R_T dans l'équation (5.19), nous constatons que le seuil de la convection souscritique est donné par:

$$R_{TC}^{sous} = \frac{\sqrt{2}\left[Le^2\left(\Psi_{0C}^2 + 1\right) + 1\right]\Psi_{0C}}{2\left[Le^2 + Sr\left(Le + 1\right) - 1\right]} R^{sous} \tag{5.22}$$

où Ψ_{0C} est la valeur de la fonction de courant critique située au centre de la cavité qui peut être calculée à partir de :

$$\Psi_{0C} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}Le}\left[\left(\left(Le^2 + 1\right)^2 + 12Le^2\right)^{1/2} - \left(Le^2 + 1\right)\right]^{1/2} \tag{5.23}$$

Dans le cas d'une cavité rectangulaire verticale les nombres de Rayleigh critiques se réduisent aux expressions suivantes : (voir le détail dans le chapitre 6).

$$\left.\begin{aligned} R_{TC}^{\sup} &= \frac{R^{\sup}}{1-\left(Le+Sr\right)}, \qquad R_{TC}^{sur} = \frac{\left(\varepsilon Le+1\right)R^{\sup}}{Le\left(\varepsilon-1\right)} \\ R_{TC}^{osc} &= \frac{\left(\varepsilon Le-1\right)\left(\varepsilon+1\right)+2Sr\varepsilon+2\left[\varepsilon\left(\varepsilon\left[Le+Sr\right]-1\right)\left(\varepsilon Le+Sr-1\right)\right]^{1/2}R^{\sup}}{Le\left(\varepsilon-1\right)^{2}} \end{aligned}\right\} \quad (5.24)$$

Les expressions critiques de la stabilité ci-dessus sont approximatives, basées sur l'analyse de Galerkin qui repose sur des profils de perturbation obtenus au début de la convection stationnaire. Prés du nombre de Rayleigh critique surstable, les profils de perturbation sont calculés numériquement comme décrit dans Mamou (2003), ils peuvent différer légèrement de ceux qui sont au début de la convection stationnaire. Pour une cavité verticale infinie *A*>>1 la constante $R^{\sup}$ dans les équations (5.24) est calculée de façon précise, elle est donnée par $R^{\sup}=105.33\ \left(-105.33\right)$ pour $Le>1\ \left(Le<1\right)$. Ce résultat est indépendant du type des conditions aux limites thermiques et solutales imposées sur les parois verticales du système. Ainsi, pour un système soumis à des flux de chaleur et de concentration constants, cette constante a été obtenue par Mamou et al. (1998a, 1998b) pour la convection à double diffusion et Joly et al. (2000) pour la convection induite par l'effet de Soret. La même valeur a été rapportée par Marcoux et al. (1998), Charrier-Mojtabi et al. (1997) et Mamou et al. (1998c) pour le cas où les parois verticales de l'enceinte sont soumises à différentes températures et concentrations constants et uniformes. En fait, la valeur de $R^{\sup}$ dépend de l'angle d'inclinaison et du rapport d'aspect de la cavité, comme décrit par exemple par Mamou et al. (1998c). Ainsi, pour une couche de Brinkman, $R^{\sup}$ varie considérablement avec le nombre de Darcy, *Da*, comme démontré par Mamou et al. (1998b) et Joly et al. (2000). Naturellement, dans le cas du nombre de Darcy petit $\left(Da\to 0\right)$ la situation de Darcy est récupérée pour $R^{\sup}=105.33$. D'autre part, la limite $\left(Da\to\infty\right)$ correspond à la situation de fluide pur pour laquelle $R^{\sup}=6511$. Ce résultat a été également prédit par Ghorayeb et Mojtabi (1997), Xin et al. (1998) et Mamou et Vasseur (1999b), qui ont étudié l'apparition de la convection dans une couche fluide sous différentes conditions aux limites thermiques et soluatles.

Les résultats numériques typiques sont présentés dans les Figs. 5.36a)-d) pour $R_T=200,\ Le=2,\ A=10,\ P_r^*=\infty,\ P_r^*=0.1,\ S_r=0$ et 1. Sur les graphiques les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations sont présentés de gauche à droit, respectivement. D'après ces résultats, il est clair qu'indépendamment des paramètres régissants, l'écoulement dans la région centrale de la cavité est parallèle tandis que la température et la concentration

sont stratifiées de façon linéaire dans la direction *x*. La solution analytique développée dans la section précédente se fondera sur ces observations. Dans la gamme des paramètres considérés dans cette étude, il a été constaté que les résultats numériques peuvent être considérés comme indépendants du rapport d'aspect de la cavité lorsque $(A \geq 6)$. Pour cette raison, la plupart des résultats numériques présentés ici ont été obtenus pour *A*=10 avec un maillage de 200×400.

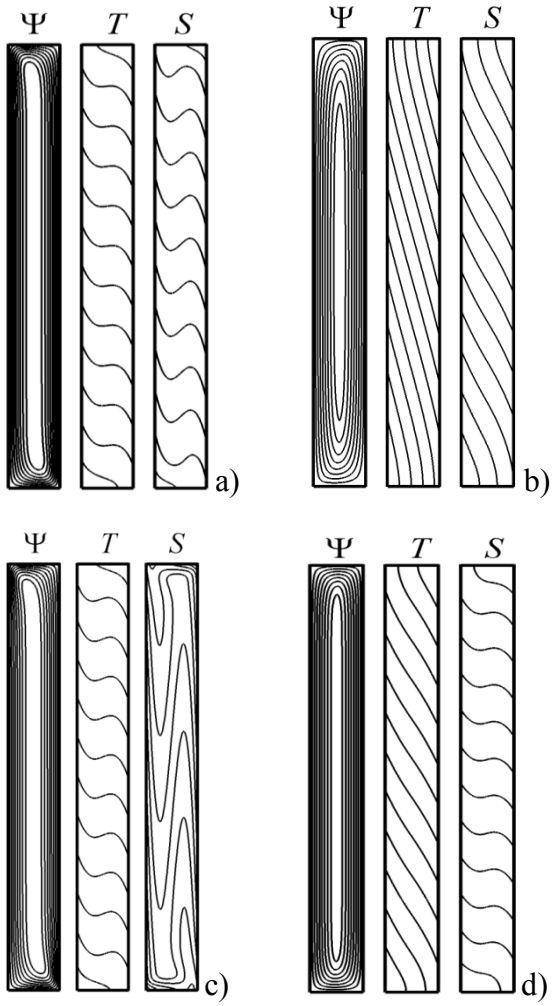


Figure 5.36 : Les lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et isoconcentrations (droit) pour $R_T = 200,\ Le = 2,\ \varepsilon = 1,\ A = 10$:

a) Darcy, $S_r = 0,\ \Psi_0 = 3.13,\ Nu = 3.05,\ Sh = 4.35.$

b) $P_r^* = 0.1,\ S_r = 0,\ \Psi_0 = 0.40,\ Nu = 1.05,\ Sh = 1.20.$

c) Darcy, $S_r = 1,\ \Psi_0 = 4.06,\ Nu = 3.59,\ Sh = 6.67$.

d) $P_r^* = 0.1,\ S_r = 1,\ \Psi_0 = 0.85,\ Nu = 1.23,\ Sh = 3.14.$

Les Figures 5.37 et 5.38 montrent l'effet du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur les profils de vitesse, v , de température, *T*, et de concentration, *S*, à la mi-hauteur de la

couche poreuse $(x = 0)$, pour $R_T = 200,\ Le = 2,\ A = 10,\ \varepsilon = 1,\ S_r = 0$ et $S_r = 1$, respectivement. Un excellent accord est observé entre la solution parallèle semi-analytique, représentée par des traits pleins, et les résultats numériques représentés par des cercles pleins. Ces profils sont antisymétriques par rapport à x et les résultats sont représentés uniquement dans la partie gauche de la couche $(0 \le x \le 0.5)$. Puisque le milieu poreux est modélisé selon la loi de Dupuit-Darcy, il est observé à partir des Figs 5.37a) et 5.38a) que la vitesse est maximale sur les parois c'est-à-dire $x = 0$ où le cisaillement est annulé car les forces de flottabilité sont égales et opposées. De plus, ceci résulte du fait que, selon ce modèle le fluide est autorisé à glisser sur les frontières de la cavité. Les profils de vitesse, de température et de concentration obtenus pour $\left(P_r^* \to \infty\right)$ sont ceux qui correspondent à un milieu poreux modélisé selon la loi de Darcy. Lors de la diminution de la valeur du paramètre de la trainée de forme P_r^*, on voit que la vitesse au voisinage des parois est considérablement réduit, indépendamment de la valeur de S_r. On peut comprendre qu'une augmentation du P_r^* provoque une augmentation de la force de la trainée de forme microscopique, ce qui affaiblit le mouvement du fluide. L'effet de, P_r^*, sur les profils de température est illustré sur les Figs 5.37b) et 5.38b). Une diminution de, P_r^*, réduit l'intensité de la convection résultante et cause une augmentation de la température sur les parois de telle sorte que le même flux de chaleur peut être maintenu dans le système. Concernant les profils de concentration, on peut voir dans la Fig 5.37c) que, dans le cas de convection induite par double diffusion, similaire aux profils de température, la concentration prés des parois solides est promue avec une diminution du paramètre de la trainée de forme. Cependant, pour la convection induite par l'effet de Soret, les résultats sont très différents comme on peut le voir dans la Fig. 5.38c). Comme déjà discuté, pour cette situation, les gradients de concentration ne résultent pas de l'imposition d'un flux d'espèce constant sur les parois solides. Au contraire, ils résultent d'une redistribution de la concentration initiale uniforme constante au sein du système en raison des gradients thermiques.

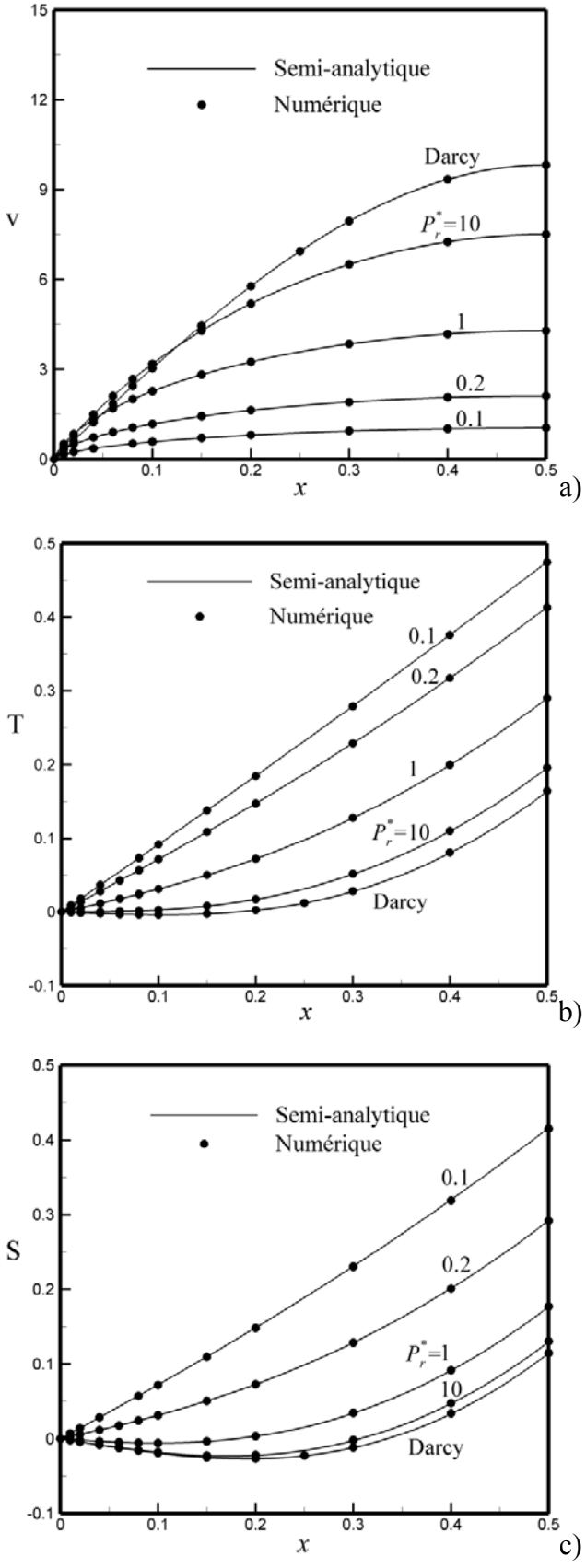
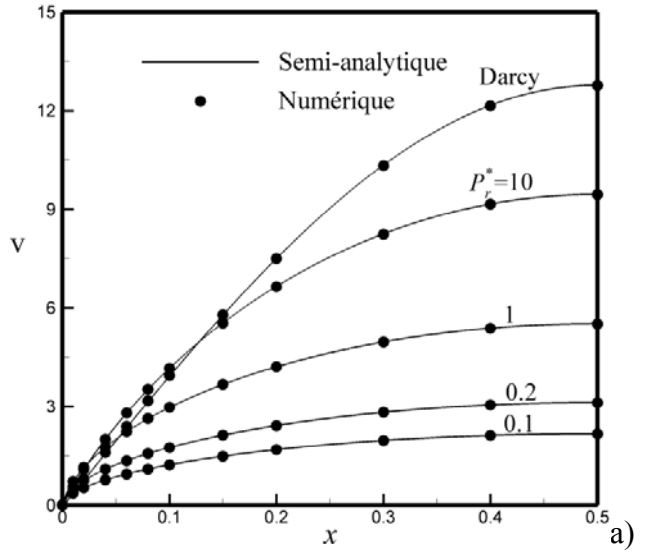
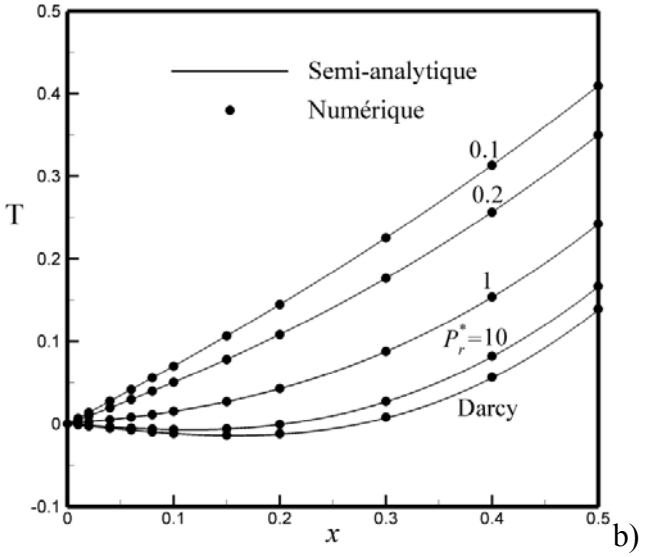


Figure 5.37 : Profils de la vitesse, *v*, de la température, *T*, et de la concentration, *S*, dans le plan médiane horizontal pour $R_T = 200,\ Le = 2,\ A = 10,\ \varepsilon = 1$ et $S_r = 0$.





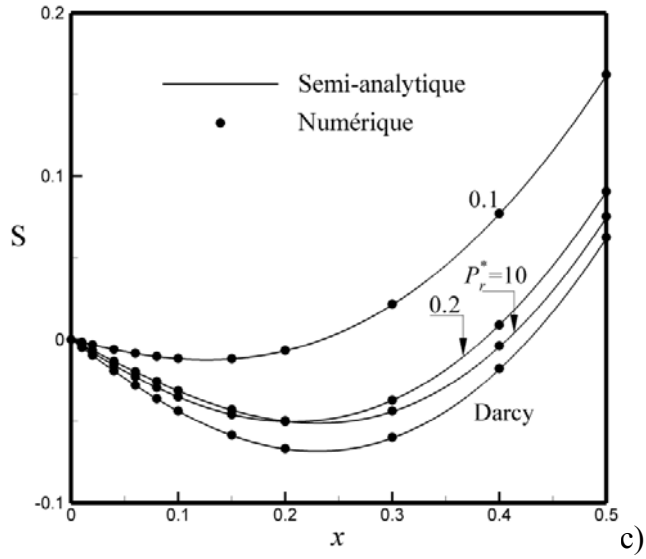
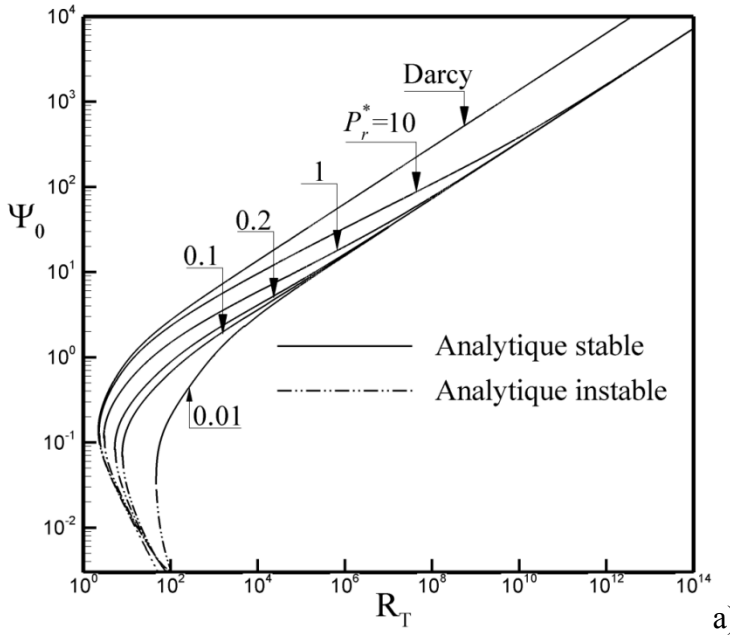
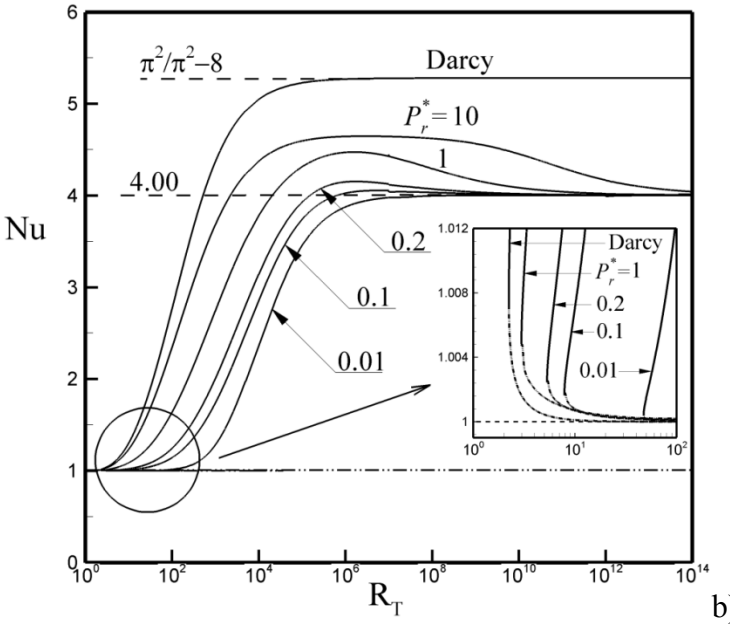


Figure 5.38 : Profils de la vitesse, *v*, de la température, *T*, et de la concentration, *S*, dans le plan médiane horizontal pour $R_T = 200,\ Le = 2,\ A = 10,\ \varepsilon = 1$ et $S_r = 1$.

Les figures 5.39a)-c) montrent la dépendance de la fonction de courant, Ψ_0, Nusselt, *Nu*, et Sherwood, *Sh*, sur R_T et P_r^* pour *Le*=10 et $S_r = 0$. Les lignes solides affichées dans les graphes correspondent à la prédiction de la présente solution semi-analytique. Les résultats indiquent clairement que, pour une valeur donnée du paramètre de la trainée de forme P_r^*, il existe un nombre de Rayleigh souscritique R_{TC}^{sous} caractérisant le début de la convection d'amplitude finie unicellulaire. Les courbes représentées pour $\left(P_r^* \to \infty\right)$ correspondent au régime d'écoulement de Darcy pur. Pour cette situation, le nombre de Rayleigh souscritique est donné par $R_{TC}^{sous} = 2.236$ où: $\Psi_0 = 0.139$, $Nu = 1.008$ et *Sh*=1.667. La Fig. 5.39a) montre que, comme prévu, la force du mouvement de convection, Ψ_0, augmente de façon monotone avec R_T et P_r^*. Cependant, d'après les Figs. 5.39b)-c), il est clair que pour les grandes valeurs de, R_T, le nombre de Nusselt, *Nu*, et de Sherwood, *Sh* , tendent asymptotiquement vers une valeur constante dépendante du paramètre de la trainée de forme P_r^*. Ainsi, pour un milieu poreux de Darcy $\left(P_r^* \to \infty\right)$ on constante que $Nu\left(Sh\right) \to \pi^2/\left(\pi^2 - 8\right)$, comme déjà prédit par Mamou et al. (1998a). Cependant, pour un milieu poreux modélisé selon la loi de Dupuit-Darcy, les résultats indiquent que $Nu\left(Sh\right) \to 4$ et ce indépendamment de la valeur du paramètre de la trainée de forme P_r^*. Les résultats obtenus pour la convection induite par l'effet de Soret (non présentées ici), indiquent que lors d'une augmentation suffisante de, R_T, les mêmes valeurs limites sont obtenues $Nu\left(Sh\right) \to 4$. Une tendance similaire a été rapportée dans la section de simple diffusion (voir la Fig 5.6b).


Darcy
P_r^*=10
1
0.2
0.1
0.01
Analytique stable
Analytique instable
Ψ_0
R_T

a)


π^2/π^2–8
Darcy
P_r^*= 10
1
4.00
0.2
0.1
0.01
Nu
R_T

b)

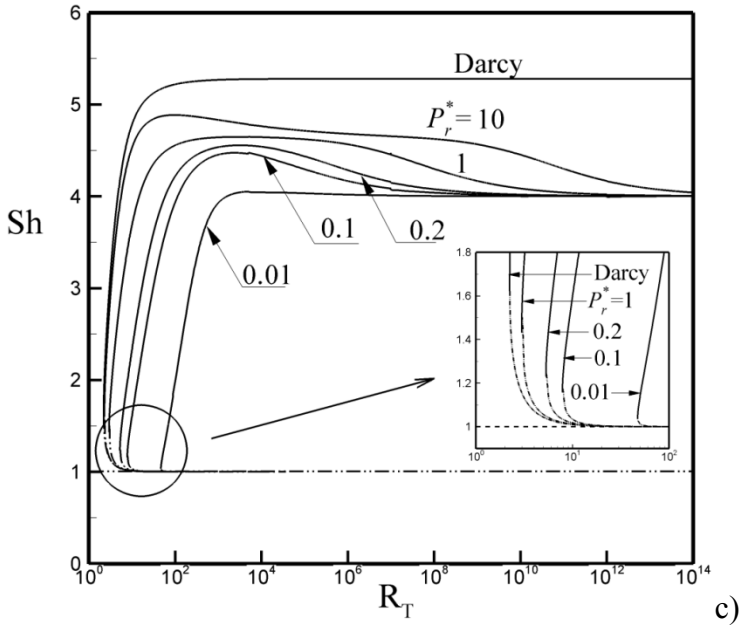
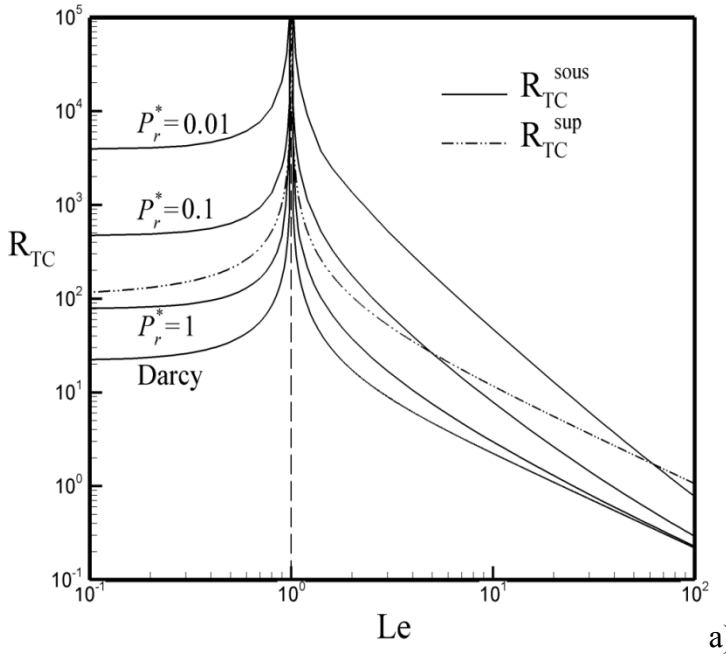


Figure 5.39 : Effets du nombre de Rayleigh, R_T , et Prandtl modifié, P_r^* , sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le nombre de Nuesslt, *Nu*, et c) le nombre de Sherwood, *Sh*, pour $Le = 10,\ S_r = 0$ et différentes valeurs de P_r^* .

L'influence du nombre de Lewis, Le , sur le nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous} , est représenté sur les Figs 5.40a)-b) pour différentes valeurs de P_r^*, $S_r = 0$ et $S_r = 1$, respectivement. Le nombre de Rayleigh souscritique a été évalué à partir du modèle non linéaire semi analytique en recherchant numériquement pour quelle valeur de, R_T , l'inverse de la dérivée de, Ψ_0, par rapport à, R_T , est égale à zéro. Les résultats, représentés en trais pleins sur les graphes correspondent à des seuils de souscritique de régime de convection d'amplitude finie unicellulaire. Les courbes pour $\left(P_r^* \to \infty\right)$ sont la prédiction de la solution analytique pour un milieu poreux de Darcy pur. En général, on observe que le système est stable, indépendamment de la valeur de P_r^* quand $Le = 1$ (0) pour $S_r = 0$ (1) comme prédit par l'équation (5.22). Quand on diminue la valeur du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, il est clair que le seuil, R_{TC}^{sous} , augmente puisque l'effet de la trainée de forme devient de plus en plus stabilisant. Pour une valeur donnée de, P_r^*, la Fig. 5.40a) indique que, pour la convection induite par double diffusion, R_{TC}^{sous} diminue fortement vers une valeur constante quand le nombre de Lewis, *Le*, diminue en dessous de l'unité. D'autre part, lors de l'augmentation de la valeur du nombre de Lewis au dessus l'unité, le nombre de Rayleigh souscritique diminue de façon monotone vers $\left(R_{TC}^{sous} \to 0\right)$. Pour la convection induite par

l'effet de Soret, la Fig 5.40b) montre que le nombre de Rayleigh souscritique diminue de façon monotone de $R_{TC}^{sous} \to \infty$ comme $Le \to 0$ vers $R_{TC}^{sous} \to 0$ comme $Le \to \infty$. Les lignes en pointillés dans les Figs 5.40a)-b) sont la prédiction de la théorie de la stabilité linéaire, Eq (5.24). Pour un nombre de Lewis donné, le nombre de Rayleigh supercritique, $R_{TC}^{\sup}$, correspond à la valeur critique du nombre de Rayleigh thermique au-dessus duquel le régime diffusif devient purement instable et donne lieu à une structure d'écoulement multicellulaire dans le stade précoce de la convection. En dessous de cette limite, le début de mouvement est sous-critique et unicellulaire. Ainsi, à partir des Figs 5.40a-b) il est possible d'estimer la valeur du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, délimitant les zones des régimes de convection souscritique et supercritique, en termes de Le. Pour $P_r^* \neq 0$, il est remarqué que, conformément à la Fig 5.40, le seuil de la convection souscritique, R_{TC}^{sous}, devient plus élevé que le seuil de la convection, $R_{TC}^{\sup}$, ce qui favorise l'apparition de problème de bi-stabilité, ce phénomène sera discuté plus tard.



a)

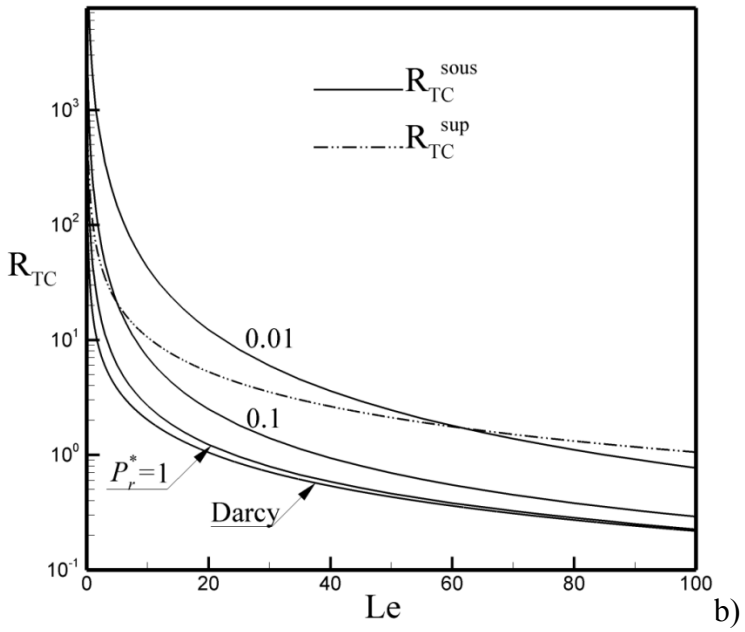
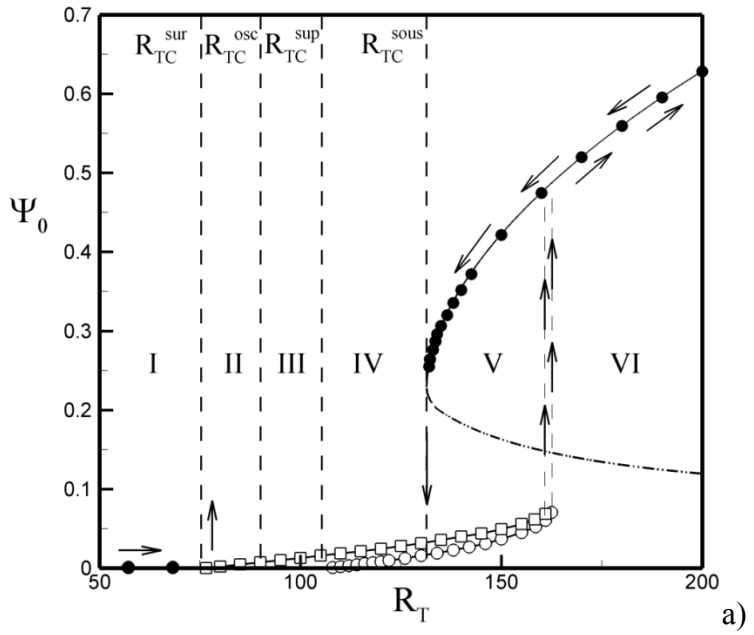


Figure 5.40 : Effets du nombre de Lewis, *Le*, et de Prandtl modifié, P_r^*, sur les nombres de Rayleigh critiques R_{TC}^{sous} et $R_{TC}^{\sup}$ pour : a) $S_r = 0$ et b) $S_r = 1$.

Dans la figure 5.41a), la fonction de courant au centre de la cavité, Ψ_0, est tracée en fonction du nombre de Rayleigh, R_T, pour *Le*=2, $P_r^* \approx 0.14$, ε=0.1 et $S_r = 0$. Pour les valeurs des paramètres régissant considérées ici, les nombres de Rayleigh critiques pour le début du mouvement, comme prévu par les équations 5.24, sont donnés par $R_{TC}^{sur} = 70.22$, $R_{TC}^{osc} = 90.11$ et $R_{TC}^{\sup} = 105.33$. Ces nombres de Rayleigh critiques ne sont pas affectés par le paramètre de la trainée de forme, P_r^*, car ils correspondent à l'apparition du mouvement qui se produit à l'état de repos (comme on a déjà discuté dans les résultats précédent). Selon la solution de l'écoulement parallèle non linéaire le seuil de convection souscritique a lieu à $R_{TC}^{sous} = 131.42$. Ainsi, l'apparition de la convection se produit au nombre de Rayleigh minimum, à savoir $R_{TC}^{sur} = 70.22$ de telle sorte qu'en dessous de cette valeur, d'une zone (I) dans le graphe de bifurcation, le système reste au repos, comme indiqué par les résultats numériques présentés dans le graphe par des symboles cercles pleins. Au-dessus de cette valeur critique dans l'intervalle $R_{TC}^{sur} \le R_T \le R_{TC}^{osc}$, d'une zone (II), la théorie de la stabilité linéaire prédit l'existence possible d'écoulement oscillant. Ce point est confirmé par les résultats numériques obtenus à partir des équations gouvernantes complètes qui sont présentées dans le graphique par des carrés vides, en termes de moyenne quadratique de la fonction de courant, $\overline{\Psi}_0$, en fonction de R_T. Comme on peut le voir sur le zoom présenté dans la Fig 5.41b), la solution numérique prédit que le flux oscillant commence à

$R_{TC}^{sur} = 76.25$ qu'est environ de 8% plus élevé que la valeur prédite par l'équation (5.24). Il est intéressant de mentionner que l'apparition de la convection surstable prévue par une procédure plus précise développée par Mamou (2002), à savoir $R_{TC}^{sur} = 75.26$ est seulement 1.3% inférieure à la prévision de la solution numérique présente. Le type d'écoulement oscillant se produisant dans la cavité verticale est illustré par les résultats numériques obtenus pour $R_T = 80$, comme indiqué dans la Fig 5.42 en fonction de l'évolution temporelle de la fonction de courant au centre de la cavité Ψ_0 et de *Nu* et *Sh* pendant quelques cycles. On a également présenté dans le graphique les modes de l'écoulement à différentes étapes de temps pendant une période d'oscillation (les points (1)-(7)). La solution montre la formation de plusieurs cellules tournant en sens inverse superposées dans la direction verticale. Les cellules thermiquement fortes tournant dans le sens antihoraire sont séparées les une des autres par des cellules plus faibles tournant dans le sens horaire. Les champs instantanés de l'évolution du mouvement oscillant avec le temps indiquent la génération continuelle (destruction), au sommet (en bas) de l'enceinte, de telle sorte que toute la structure des cellules propage vers le bas. Lors de l'augmentation du nombre de Rayleigh à partir de $R_T = R_{TC}^{sur}$ étape par étape et en utilisant les résultats précédents comme conditions initiales, cet écoulement de convection oscillant peut être maintenu jusqu'à $R_T = 161.5$, c'est-à-dire qu'il existe dans les zones (II) à (V) de la Fig. 5.41b) un déplacement des ondes dont la vitesse de propagation diminue/augmente légèrement avec R_T. Au-dessus du nombre de Rayleigh supercritique $R_{TC}^{\sup} = 105.33$, zone (IV), les résultats obtenus par la solution numérique des équations gouvernantes complètes indiquent que, à partir des calculs de l'état de repos comme conditions initiales, la solution résultante consiste en la formation d'une structure d'écoulement stationnaire multicouche consistant en des cellules tournant en sens inverse dans la direction verticale de la cavité. Les résultats numériques, représentés par des cercles vides, indiquent que, lors de l'augmentation progressive du nombre de Rayleigh de $R_T = R_{TC}^{\sup}$ en utilisant les résultats précédents comme conditions initiales, cet écoulement de convection multicellulaire peut être maintenu jusqu'à $R_T = 162.5$. Au-dessus de cette valeur du nombre de Rayleigh critique, zone (VI), la solution bifurque vers un modèle d'écoulement unicellulaire stable. La solution prédite par le modèle semi-analytique est représentée dans le graphe en traits pleins et en pointillés. Le diagramme résultant indique l'existence d'une bifurcation de type fourche souscritique. La branche supérieure stable (trait plein) est connectée avec une branche inférieure instable (ligne pointillée) dans un point tournant

(nœud de selle) se produisant à $R_T = R_{TC}^{sous}$. La solution correspondant au mode de convection plus élevé a été validée par des solutions numériques complètes représentées par des cercles pleins. Naturellement, il n'a pas été possible de confirmer numériquement l'existence du mode de convection inférieur (solution instable). En outre, les résultats numérique montrent que quand le nombre de Rayleigh augmente ou bien diminue autour de $R_T = 162.5$, la solution obtenue suit la boucle d'hystérésis indiquée par les flèches. Il est clair qu'à partir des Figs 5.41a) et 5.41b) qui, selon les conditions initiales utilisées pour initier la procédure numérique, deux solutions différentes (modes de l'écoulement multicellulaires stables et instables) sont possibles dans l'intervalle $76.25 \le R_T \le 131.42$ pour un nombre de Rayleigh donné. En outre, dans l'intervalle $131.42 \le R_T \le 162.5$ le mode de l'écoulement unicellulaire est également possible, en plus des deux solutions précédentes. Les figures 5.43a)-c) illustrent respectivement les modes d'écoulement multicellulaire stationnaire et instationnaire et unicellulaire stationnaire obtenus pour $R_T = 150$, c'est-à-dire dans la zone (V). Enfin dans la zone (VI), la seule solution possible est unicellulaire stationnaire jusqu'à R_T^{Hopf}, mais lorsqu'il dépasse cette valeur, l'écoulement dans la zone (VII) devient oscillant.



a)

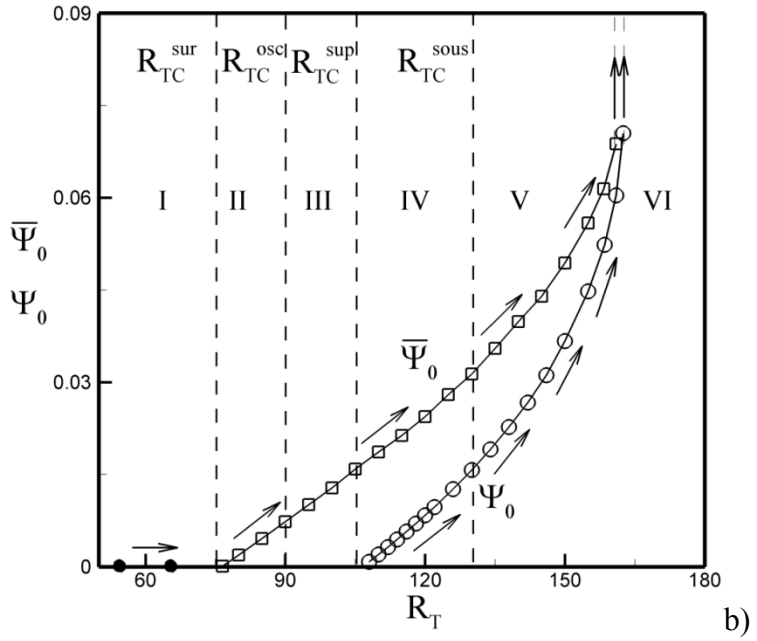
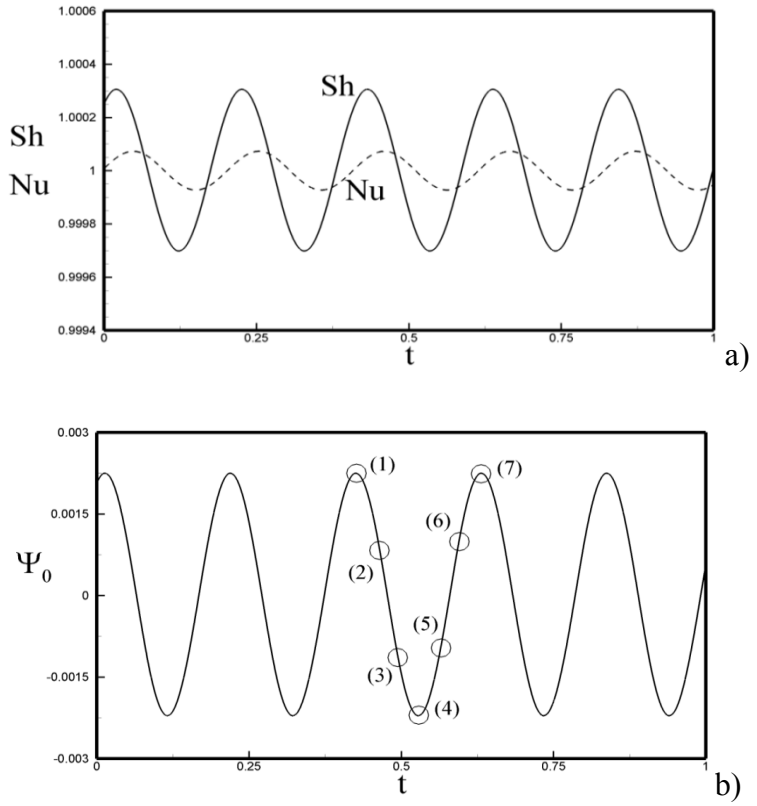
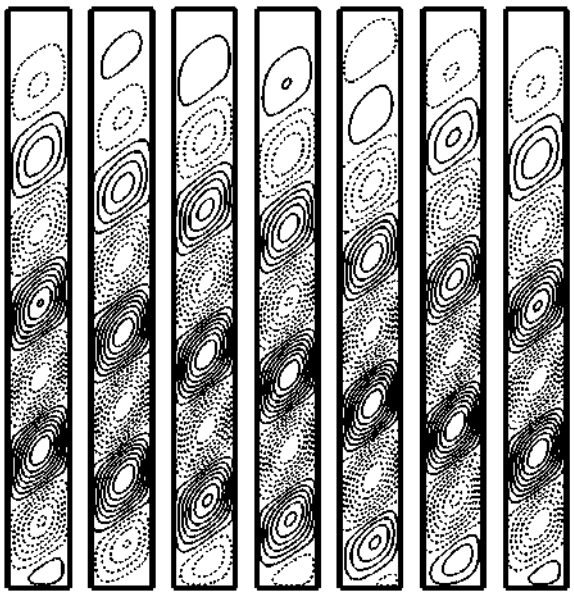


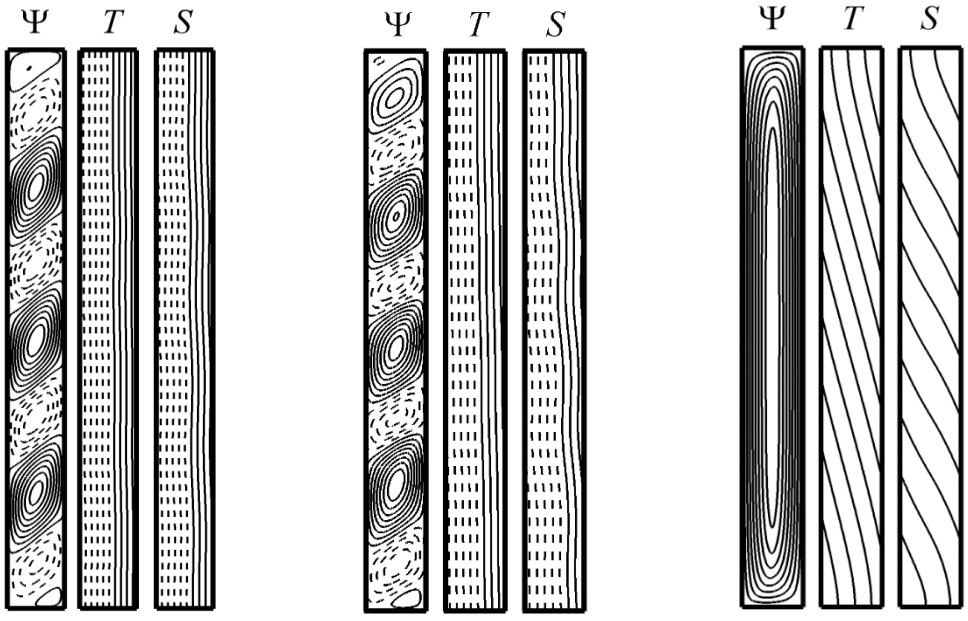
Figure 5.41. Diagramme de bifurcation en termes de Ψ_0 en fonction de R_T pour $P_r^* = 0.14,\ A = 10,\ Le = 2,\ \varepsilon = 0.1$ et $S_r = 0$. —— analytique stable, -·-·-·- analytique instable, ● numérique unicellulaire stable, —○— numérique multicellulaire stables, —□— numérique multicellulaire instables.





c)

Figure 5.42 : Évolution dans le temps : a) les taux de transfert de chaleur et de masse, b) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité et c) écoulement transitoire pour $R_T = 80,\ A = 10,\ P_r^* = 0.14,\ Le = 2,\ \varepsilon = 0.1$ et $S_r = 0$, (zone II).



a) b) c)

Figure 5.43 : Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et isoconcentration (droit) pour $R_T = 150,\ P_r^* = 0.14,\ A = 10,\ Le = 2,\ \varepsilon = 0.1,\ S_r = 0$, (zone V) :

a) $\Psi_{\min} = -0.0219,\ \Psi_{\max} = 0.0367,\ Nu_m = 1.0001,\ Sh_m = 1.0005$.

b) $\overline{\Psi}_{\min} = -0.0415,\ \overline{\Psi}_{\max} = 0.0836,\ \overline{Nu}_m = 1.0002,\ \overline{Sh}_m = 1.0022$.

c) $\Psi_{\min} = 0.0000,\ \Psi_{\max} = 0.4215,\ Nu_m = 1.0486,\ Sh_m = 1.1862$.

La figure 5.44 présente le diagramme de bifurcation en terme de Ψ_0 en fonction de R_T pour $Le = 10,\ P_r^* = 0.1,\ A = 10,\ S_r = 0$ et $\varepsilon = 1$. Pour ce cas, les nombres de Rayleigh souscritique et supercritique sont $R_{TC}^{sous} = 7.08$ et $R_{TC}^{\sup} = 10.53$, respectivement. A partir de l'état de repos comme conditions initiales de la région (I), le système reste stable jusqu'à $R_T = R_{TC}^{\sup}$. Au-dessus de cette valeur du nombre de Rayleigh critique, la simulation numérique indique que la structure de l'écoulement au début des calculs est multicellulaire et en accord avec la théorie de la stabilité linéaire. Cependant, au fil du temps, cette structure de l'écoulement évolue vers une structure unicellulaire stable comme l'illustrent les lignes de courant incluses dans le graphique. La boucle d'hystérésis est indiquée sur le graphe par des flèches. Ces derniers indiquent le comportement de la solution du problème quand R_T augmente de zéro à 15 et diminue de 15 à zéro.

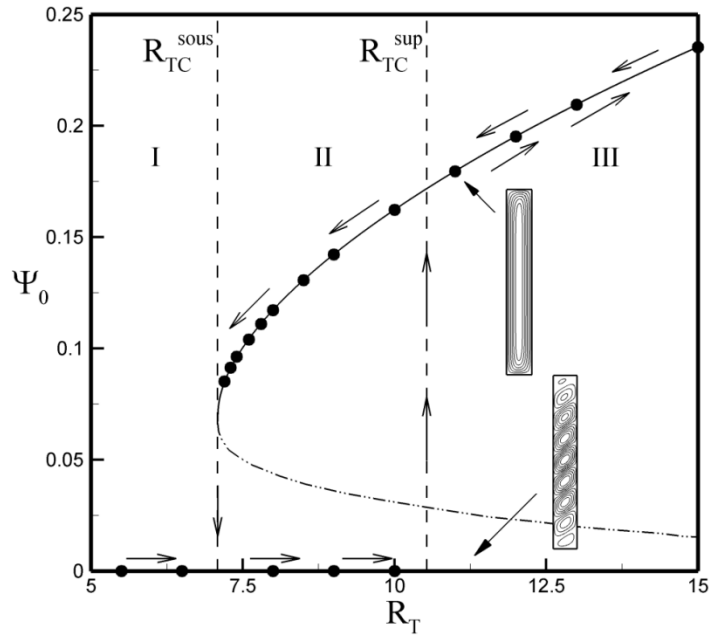


Figure 5.44 : Diagramme dee bifurcation en terme de, Ψ_0, en fonction de R_T pour $P_r^* = 0.1$, $A = 10$, $\varepsilon = 1$, $S_r = 0$ et $Le = 10$. —— analytique stable, -·-·-·- analytique instable, ● numérique unicellulair.

La figure 5.45 montre les résultats obtenus pour A=10, $P_r^* = 0.1$, S_r=1, $Le = 2$ et ε=1. Pour ces valeurs des paramètres, nous avons $R_{TC}^{sous} = 87.61$ et $R_{TC}^{\sup} = 52.66$. Ainsi, de manière similaire aux résultats obtenus dans la Fig 5.44, pour la convection induite par double diffusion, un écoulement convectif multicellulaire stable est possible pour $R_T > R_{TC}^{\sup}$, région (II). Ce mode d'écoulement se prolonge jusqu'à $R_T \approx 99.5$, région (III), au-dessus duquel la

solution bifurque vers une configuration unicellulaire, zone (IV). Lorsque R_T augmente ou diminue autour de ce nombre de Rayleigh critique, on obtient une courbe d'hystérésis de la configuration d'écoulement unicellulaire représenté par des flèches. Ainsi, dans la région (III) plusieurs solutions sont possibles pour une valeur donnée de, R_T, qui indique la possibilité de l'existence d'un phénomène de bi-stabilité.

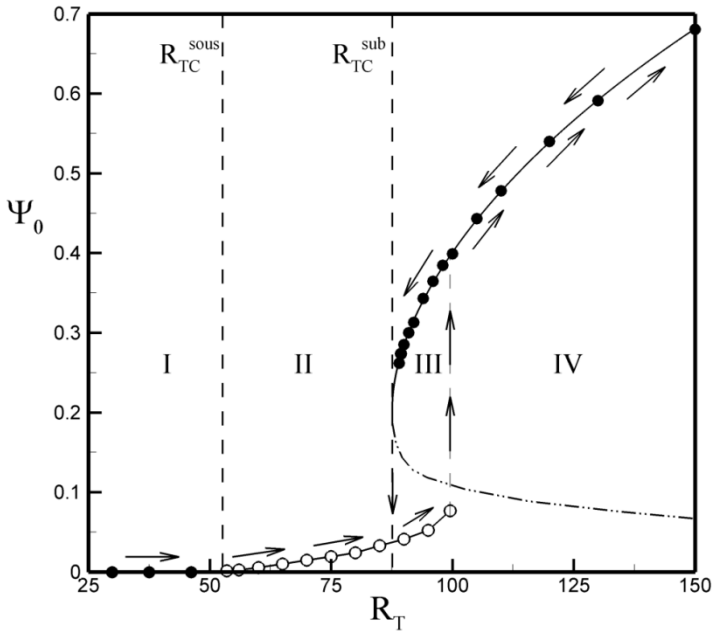


Figure 5.45 : Diagramme de bifurcation en terme de, Ψ_0, en fonction de R_T pour $P_r^* = 0.1$ $A = 10,\ \varepsilon = 1,\ S_r = 1$ et $Le = 2$. —— analytique stable, -·-·-·- analytique instable, ● numérique unicellulair, —○— numérique multicellulaire stable.

Dans le domaine de la convection de double diffusion, l'existence des solutions multiples a été déjà rapportée dans le passé par quelques auteurs. Par exemple Kalla et al. (2001) ont étudié le problème de la convection thermosolutale dans une couche poreuse de Darcy soumise à des flux de chaleur et de masse croisés. On a constaté que, pour des conditions de convection souscritique, jusqu'à cinq solutions différentes sont possibles (dont deux sont instables). Ici, l'effet des flux horizontaux de la chaleur est similaire à celui du nombre de Prandtl modifié dans la présente étude. En raison du manque de symétrie des conditions aux limites thermiques et solutales, le nombre des solutions stables est réduit de quatre à trois. Des résultats similaires ont été rapportés par Mansour et al. (2008) tout en étudiant le même problème lors de la combinaison des effets de diffusion thermique (Soret) avec ceux de double diffusion. La convection naturelle dans une couche de fluide d'un mélange binaire induite par l'action combinée d'une contrainte de cisaillement et l'effet de Soret a été examinée par Mahidjiba et al. (2006b). Ici encore, l'existence d'un maximum de

cinq solutions différentes (trois stables et deux instables) a été démontrée analytiquement et numériquement. Récemment, le début de convection Marangoni dans un fluide en loi de puissance dans un environnement de gravité zéro a été étudié par Alloui et Vasseur (2013b). Pour les fluides rhéofluidifiants, la convection souscritique est possible et cinq solutions différentes ont été également rapportées par ces auteurs.

CHAPITRE VI

ANALYSE DE LA STABILTÉ LINÉAIRE DE LA CONVECTION DANS DES COUCHES POREUSES

La différence fondamentale entre la convection naturelle dans les cavités chauffées latéralement et celles chauffées par le bas est bien connue, théoriquement et expérimentalement, Bejan (1995). Cette différence réside dans le fait que pour les cavités chauffées par le bas, le gradient thermique imposé doit excéder une certaine valeur, dite seuil critique, pour pouvoir observer l'apparition des mouvements convectifs. La configuration géométrique du système considéré est présentée sur la Fig 2.1 dans laquelle on a un milieu poreux saturé par un fluide binaire. De nombreuses études du problème d'instabilité dans une couche poreuse horizontale, soumise à diverses conditions aux limites, ont été entreprises dans le passé par de nombreux d'auteurs comme Nield (1967), Taunton et Lightfoo (1972), Poulikakos (1986), Nield et Bejan (1999), Mamou et al. (1995b), Mamou (2003), et ont montré l'existence de nombres de Rayleigh supercritiques caractérisant le seuil de la convection. Ils ont aussi étudié, le régime de la convection surstable et oscillante ainsi que les conditions d'existence de ces régimes. Dans le cas d'une couche verticale, il est également possible que le fluide se trouve dans un état de repos lorsque les forces de volume thermique et solutal sont de la même intensité, mais de sens opposé N=-1. La stabilité de ce type de configuration a été très peu étudiée dans le passé. Ceci est dû à la complexité des équations de base pour lesquelles il est difficile de trouver des solutions analytiques. Dans le cas d'une couche poreuse verticale infinie soumise à des gradients de température et de concentration constante, Bertholz (1978), et Ghorayeb et Mojtabi (1997), Joly et al. (2001), Mamou (2002), se sont intéressés à l'étude de l'enclenchement de la convection double-diffusive et à effet de Soret en cavité verticale pour différentes conditions aux limites. Ils ont déterminé les valeurs des nombres de Rayleigh critiques marquant le seuil critique de la convection. L'occurrence du mouvement de convection souscritique, c'est-à-dire ayant lieu à un nombre de Rayleigh inférieur au Rayleigh supercritique, ainsi que l'existence des solutions multiples ont été mises en évidence.

Ce dernier chapitre de la thèse est consacré à l'étude de la stabilité linéaire d'une couche saturant un milieu poreux. Il est réparti en deux volets; Le premier volet est consacré à l'étude du cas de l'instabilité de l'état de repos, qui aura lieu lorsque les forces de volume induites par les effets thermique et solutal sont opposées (N<0) où la concentration est l'agent

stabilisant dans le système et contribue ainsi à retarder le déclanchement de la convection, ainsi que le cas d'une cavité verticale soumise à des forces de volume de la même intensité et de sens opposé (N=-1). Dans ce dernier cas, la densité du fluide est uniforme dans la cavité et la force de poussée résultante est nulle. Cependant, quand le nombre de Lewis est différent de l'unité, la convection est possible mais seulement au-delà d'un seuil. Le deuxième volet de ce chapitre est consacré à l'étude de l'écoulement convectif afin de prédire le déclenchement de la bifurcation oscillatoire dite de Hopf. Par la suite et pour déterminer le nombre de Rayleigh critique, ainsi que la structure de l'écoulement au seuil de la convection, nous utilisons l'approche classique de la stabilité linéaire. Cette dernière consiste à perturber hydrodynamiquement l'état stable du système et étudier, par la suite l'évolution de la perturbation dans le temps. L'analyse de la stabilité linéaire permet de préciser si cette bifurcation est stationnaire ou oscillatoire. Comme nous allons voir plus loin dans ce chapitre, cette analyse permet non seulement de déterminer le seuil critique de stabilité mais encore la structure de l'écoulement.

Il est à remarquer que l'état de repos de fluide caractérisé par :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_b &= 0 \\ T_b &= S_b = -y \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

est une solution possible au système des équations de gouvernance (2.19), (2.20) et (2.23).

Au début de la convection, la solution est de la forme :

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= \Psi_b + \psi(t,x,y) \\ T &= T_b + \theta(t,x,y) \\ S &= S_b + \phi(t,x,\mathrm{y}) \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Elle est la somme de la solution de base et une perturbation hydrodynamique $(\psi,\ \theta,\ \phi)$. La solution de base (Ψ_b, T_b, S_b) représente l'état de conduction pure ou un état convectif établi.

6.1 Théorie de la stabilité linéaire de l'écoulement convectif

La stabilité de l'écoulement parallèle décrit par (3.11)-(3.13) et (5.15) est étudiée dans cette section. Au-delà d'un nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{Hopf}, l'écoulement devient oscillant. Dans le but de déterminer ce point de bifurcation, une analyse de la stabilité de l'écoulement est requise. Considérons l'écoulement parallèle décrit par les équations (3.11)-(3.13) et (5.15). Au tout début de l'instabilité, l'écoulement global est supposé être la

superposition de l'écoulement de base $\Psi_b(x,y) \approx \Psi(y)$, $T_b(x,y) \approx C_T x + \theta_T(y)$ et $S_b(x,y) \approx C_S x + \theta_S(y)$ et une perturbation infinitésimale :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_p(x,y,t) &= \psi_0 e^{pt+iky} F(y) \\ T_p(x,y,t) &= \theta_0 e^{pt+iky} G(y) \\ S_p(x,y,t) &= \phi_0 e^{pt+iky} H(y) \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

où p est le taux de croissance de la perturbation, i est le nombre complexe pure i^2=-1, k est un nombre réel qui désigne le nombre d'onde, $F(y)$, $G(y)$ et $H(y)$ sont des fonctions inconnues qui satisfont les conditions aux limites, données par (2.27)-(2.29). Les fonctions perturbées de la fonction de courant, de la température et de la concentration sont décrites par $\Psi_p(x,y,t)$, $T_p(x,y,t)$ et $S_p(x,y,t)$, alors que ψ_0, θ_0 et ϕ_0 sont des petites amplitudes constantes.

En introduisant (6.3) dans les équations (2.19), (2.20) et (2.23), et en négligeant les termes non linéaires de second ordre nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\left(D^2-k^2\right)f + P_r^{*-1}\left(\left|D\Psi_b\right|\left(D^2-k^2\right)+2(-1)^q D^2\Psi_b D^2\right)f = -ikR_T\left(g+Nh\right) \tag{6.4}$$

$$\left(C_T D - ikDT_b\right)f + \left(k^2 + ikD\Psi_b - D^2\right)g = -pg \tag{6.5}$$

$$\left(C_S D - ikDS_b\right)f + S_r Le^{-1}\left(D^2-k^2\right)g + \left(Le^{-1}k^2 + ikD\Psi_b - Le^{-1}D^2\right)h = -p\varepsilon h \tag{6.6}$$

où :

$$\psi_0 F = f\ ,\quad \theta_0 G = g\ ,\quad \phi_0 H = h\ ,\quad D = \frac{d}{dy},\quad \left|D\Psi_b\right| = \frac{\left(D\Psi_b\right)^2}{\left|D\Psi_b\right|} \tag{6.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\Psi_b}{\left|D\Psi_b\right|}(-1)^q, \quad & q=0,\quad D\Psi_b>0 \\ & q=1,\quad D\Psi_b<0 \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Les conditions aux limites correspondantes sont :

$$f = 0,\quad Dg = Dh = 0,\quad x = \pm\frac{A}{2},\quad y = \frac{1}{2} \tag{6.9}$$

6.2 Solution numérique

La solution numérique des équations de perturbation peut être obtenue par la méthode des éléments finis.

6.2.1 Formulation variationnelle

Le comportement de notre système est représenté par des équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites en espace et en temps. La discrétisation des

équations (6.4)-(6.6) nécessite alors, l'utilisation de la méthode des résidus pondérés de Galerkin, dite formulation faible. En multipliant l'équation (6.4) par $\omega(y)$ et les équations (6.5) et (6.6) par $\vartheta(y)$ et en intégrant sur le domaine de y, la formulation variationnelle des équations (6.4)-(6.6) obtenue est la suivante :

$$\int_{-1/2}^{1/2}\left(1+2P_r^{*-1}\left|D\Psi_b\right|\right)DfD\omega dy + k^2\int_{-1/2}^{1/2}\left(1+P_r^{*-1}\left|D\Psi_b\right|\right)f\,\omega dy = ikR_T\left(\int_{-1/2}^{1/2} g\,\omega dy + N\int_{-1}^{1/2} h\,\omega dy\right) \tag{6.10}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\left(C_T D - ikDT_b\right)f\,\vartheta dy + \int_{-1/2}^{1/2}\left(k^2 + ikD\Psi_b\right)g\,\vartheta dy + \int_{-1/2}^{1/2} Dgd\,\vartheta dy = -p\int_{-1/2}^{1/2} g\,\vartheta dy \tag{6.11}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\left(C_S D - ikDS_b\right)f\,\vartheta dy - S_r Le^{-1}\left(\int_{-1/2}^{1/2} k^2 g\,\vartheta + \int_{-1/2}^{1/2} DgD\vartheta\right)dy + \int_{-1/2}^{1/2}\left(Le^{-1}k^2 + ikD\Psi_b\right)h\,\vartheta dy + Le^{-1}\int_{-1/2}^{1/2} DhD\,\vartheta dy = -p\varepsilon\int_{-1/2}^{1/2} h\,\vartheta dy \tag{6.12}$$

où $\omega(y)$ et $\vartheta(y)$ sont les fonctions admissibles satisfaisant les conditions aux limites données par (6.9).

Les codes des éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisée lors de conception et à l'analyse des produits industriels. L'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée. Le passage de l'élément de référence à l'élément réel sera réalisé par une transformation géométrique. Comme les équations (6.10)-(6.12) sont uni-dimensionnelles nous choisissons l'élément de Hermite cubique d'ordre trois à deux nœuds avec un maillage uniforme (Fig 6.1). En chaque nœud, les inconnues sont la fonction et sa première dérivée.

Dans chaque élément de référence, les fonctions d'interpolation de l'élément de Hermite sont données pars les expressions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}\left(2-3\eta+\eta^3\right) \quad , \quad N_2 = \frac{l}{8}\left(1-\eta-\eta^2+\eta^3\right) \\ N_3 &= \frac{1}{4}\left(1-\eta-\eta^2+\eta^3\right), \quad N_4 = \frac{l}{8}\left(-1-\eta+\eta^2+\eta^3\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

où $y = y_0 + \frac{\mathrm{D}y}{2}\eta$, $dy = \frac{\mathrm{D}y}{2}d\eta$ et $y_0 = (y_1 + y_2)/2$, (voir la fig 6.1).



a) Élément réel b) Élément de référence

Figure 6.1 : Représentation schématique de l'élément de Hermite cubique.

Dans chaque élément les profils inconnus de la fonction de courant $f(y)$, de la température $g(y)$ et de la concentration $h(y)$ sont approximés par :

$$K^e(y) = \sum_{j=1}^{4} N_j(y) K_j^e \tag{6.14}$$

où K désigne $f(y)$, $g(y)$, $h(y)$ et $N_j(y)$ sont les fonctions de Hermite et $f_j^e(y)$, $g_j^e(y)$ et $h_j^e(y)$ sont les valeurs inconnues nodales élémentaires.

En portant les approximations (6.14) dans la formulation variationnelle (6.10)-(6.12) et en substituant $\omega(y)$ et $\vartheta(y)$ par $N_j(\eta)$ et après intégration sur l'élément de référence, on obtient pour chaque équation un système matriciel élémentaire. L'assemblage des matrices élémentaires résultant de chaque élément du domaine de calcul nous donne un système matriciel global suivant.

$$\left[K_\psi\right]\{f\} = R_T\left(\left[B_\psi\right]\{g\} + N\left[B_\psi\right]\{h\}\right) \tag{6.15}$$

$$\left[B_\theta\right]\{f\} + \left[K_\theta\right]\{g\} = -p\left[M_\theta\right]\{g\} \tag{6.16}$$

$$\left[B_\phi\right]\{f\} - S_r Le^{-1}\left[K_\theta\right]\{g\} + Le^{-1}\left[K_\phi\right]\{h\} = -p\varepsilon\left[M_\phi\right]\{h\} \tag{6.17}$$

où $\left[K_\psi\right]$, $\left[B_\psi\right]$, $\left[C_\psi\right]$, $\left[B_\theta\right]$, $\left[K_\theta\right]$, $\left[M_\theta\right]$, $\left[B_\phi\right]$, $\left[K_\phi\right]$ et $\left[M_\phi\right]$ sont des matrices carrées de dimension $m \times m$ où $m = 2N_{ey} + 1$ (N_{ey} est le nombre d'élément dans la direction de y) dans le domaine de $\Omega = \left\{y \in \left[-1/2,\ 1/2\right]\right\}$. $\{f\}$, $\{g\}$ et $\{h\}$ sont des vecteurs propres inconnus de dimension m. Les matrices élémentaires correspondantes sont obtenues comme suit :

$$
\left.
\begin{aligned}
\left[B_{\Psi}\right]^e &= \int_{-1}^{1} ikN_j N_i \frac{\Delta y}{2} d\eta \\
\left[B_{\theta}\right]^e &= \int_{-1}^{1} \left(C_T \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - ik \frac{\partial T_b}{\partial \eta} \right) N_i d\eta \\
\left[B_{\phi}\right]^e &= \int_{-1}^{1} \left(C_S \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - ik \frac{\partial S_b}{\partial \eta} N_j \right) N_i d\eta \\
\left[K_{\Psi}\right]^e &= \int_{-1}^{1} \left(\left(1 + \frac{2}{P_r^*} \left| \frac{\partial \Psi_b}{\partial \eta} \frac{2}{\Delta y} \right| \right) \frac{2}{\Delta y} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + k^2 \left(1 + \frac{1}{P_r^*} \left| \frac{\partial \Psi_b}{\partial \eta} \frac{2}{\Delta y} \right| \right) \frac{\Delta y}{2} N_j N_i \right) d\eta \\
\left[K_{\theta}\right]^e &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{\Delta y}{2} k^2 N_j N_i + ik \frac{\partial \Psi_b}{\partial \eta} N_j N_i + \frac{2}{\Delta y} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) d\eta \\
\left[K_{\phi}\right]^e &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{\Delta y}{2} k^2 N_j N_i + ikLe \frac{\partial \Psi_b}{\partial \eta} N_j N_i + \frac{2}{\Delta y} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) d\eta \\
\left[M_{\theta}\right]^e &= \left[M_{\phi}\right]^e = \int_{-1}^{1} N_j N_i \frac{\Delta y}{2} d\eta
\end{aligned}
\right\} \quad (6.18)
$$

L'intégration par la méthode de Galerkin est utilisée pour obtenir une formulation faible des équations (6.15)-(6.17). L'intégration des équations linéaires par la méthode des éléments finis, après l'assemblage dans le système de matrice globale, est obtenue comme suit :

$$
\begin{bmatrix}
\left[K_{\psi}\right] & -R_T\left[B_{\psi}\right] & -\frac{R_S}{Le}\left[B_{\psi}\right] \\
\left[B_{\theta}\right] & \left[K_{\theta}\right] & 0 \\
\left[B_{\phi}\right] & -\frac{S_r}{Le}\left[K_{\theta}\right] & Le^{-1}\left[K_{\phi}\right]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} f \\ g \\ h \end{Bmatrix}
= p
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & -\left[M_{\theta}\right] & 0 \\
0 & 0 & -\varepsilon\left[M_{\phi}\right]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} f \\ g \\ h \end{Bmatrix} \quad (6.19)
$$

Après avoir transformé les intégrales dans l'élément de référence Fig 6.1, la méthode d'intégration de Gauss permet de calculer exactement les intégrales en utilisant cinq points de Gauss dans la direction de coordonné de η. Chaque intégrale peut être calculée de la manière suivante :

$$
\int_{-1}^{1} f(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^{4} f(\eta_j) \omega_j \quad (6.20)
$$

où η_j est le coordonné de point d'intégration de Gauss et ω_j est le coefficient de pondération de Gauss. Ils sont donnés par le tableau 6.1.

Tableau 6.1 : Points de Gauss

j	η_j	ω_j
1	-0.90617984	0.23692688
2	-0.53846931	0.47862867
3	0.00000000	0.56888888
4	0.53846931	0.47862867
5	0.90617984	0.23692688

6.3 Stabilité de l'état de repos

6.3.1 Théorie de la stabilité linéaire

L'état du repos est donné par ;

$$\Psi_b = 0, \quad T_b = S_b = - y \tag{6.21}$$

Les systèmes matriciels (6.15)-(6.17) se réduisent à :

$$\left[K_\psi\right]\{f\} = R_T\left(\{g\} + N\{h\}\right)\left[B_\psi\right] \tag{6.22}$$

$$p\left[M_\theta\right]\{g\} - \left[B_\theta\right]\{f\} = -\left[K_\theta\right]\{g\} \tag{6.23}$$

$$p\varepsilon\left[M_\phi\right]\{h\} - \left[B_\phi\right]\{f\} = Le^{-1}\left(S_r\left[K_\phi\right]\{g\} - \left[K_\phi\right]\{h\}\right) \tag{6.24}$$

6.3.2 La stabilité marginale : *p*=0

La stabilité marginale nous permet de déterminer le seuil supercritique de la convection. Pour la stabilité marginale p=0, nous pouvons déduire, à partir des équations (6.22)-(6.24) que :

$$\left[K_\psi\right]\{f\} = R_T\left(\{g\} + N\{h\}\right)\left[B_\psi\right] \tag{6.25}$$

$$\left[B_\theta\right]\{f\} = \left[K_\theta\right]\{g\} \tag{6.26}$$

$$\left[B_\phi\right]\{f\} = -Le^{-1}\left(S_r\left[K_\phi\right]\{g\} - \left[K_\phi\right]\{h\}\right) \tag{6.27}$$

La combinaison entre les équations (6.25)-(6.27) nous conduit au problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\left[E\right] - \lambda\left[I\right]\right)\{f\} = 0 \tag{6.28}$$

où $[I]$ est la matrice d'identité, $\{f\}$ le vecteur inconnu, $[E]$ est la matrice de dimension $m \times m$ définir par:

$$[E]=\left[K_{\psi}\right]^{-1}\left[B_{\psi}\right]\left(\left(1-S_{r}N\right)\left[K_{\theta}\right]^{-1}\left[B_{\theta}\right]+NLe\left[K_{\phi}\right]^{-1}\left[B_{\phi}\right]\right) \tag{6.29}$$

et λ sont les valeurs propres associées donnée par :

$$\lambda=\frac{1}{R_{T}} \tag{6.30}$$

Du point de vue mathématique, l'équation (6.28) représente un problème aux valeurs propres. Le système d'équation admet une solution non triviale si, et seulement si son déterminant $[E-\lambda I]$ est égal à zéro. Ceci nous conduit à chercher toutes les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres $\{f\}_i$ vérifiant l'équation (6.28). Ces derniers sont déterminés en utilisant les sous-routines de la librairie EigPack. Une fois que les vecteurs propres $\{f\}_i$ sont connus, on peut déterminer les profils $g(y)$ et $h(y)$ à partir des expressions (6.26) et (6.27).

On réarrange les valeurs propres $\{\lambda\}_i$ avec i=1,…m de la matrice $[E]$ de la façon suivante :

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_{m-1} \le \lambda_m \tag{6.31}$$

où λ_1 est la valeur propre minimale et λ_m est la valeur propre maximale. Les vecteurs propres correspondant sont données par $\{f\}_i$. En général, la valeur propre maximale, λ_m, est positive et représente le plus petit nombre de Rayleigh critique au-dessus duquel la convection stationnaire est possible. La valeur propre minimale, λ_1 est généralement nulle ou négative et représente le plus grand nombre de Rayleigh critique en dessous duquel l'écoulement de convection est possible. Alors le nombre de Rayleigh supercritique $R_{TC}^{\sup}$ caractérisant le seuil de la convection est donné par :

$$R_{TC}^{sup}=\frac{R^{sup}}{1+N(Le+S_r)} \quad \text{où} \quad \left.\begin{array}{ll} R^{sup}=\frac{1}{\lambda_1}, & \text{si} \quad 1+N(Le+S_r)<0 \\ R^{sup}=\frac{1}{\lambda_m}, & \text{si} \quad 1+N(Le+S_r)>0 \end{array}\right\} \tag{6.32}$$

6.3.3 La stabilité transitoire : $p\neq 0$

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté la méthode des éléments finis pour calculer les profils de la fonction de courant, f, de la température, g, et de la concentration, h, ainsi que la valeur de R^{sup} correspondant au seuil de la convection supercritique. Dans cette section, les différents nombres de Rayleigh critiques qui délimitent les régions dans lesquelles la convection croissante ou oscillante sont déterminés.

Comme les fonctions admissibles $\omega(x,y)$ et $\vartheta(x,y)$, figurant dans la formulation variationnelle (Eqs. (6.15)-(6.17)) sont des fonctions arbitraires, alors nous pouvons prendre les fonctions $f(x,y)$, $g(x,y)$ et $h(x,y)$ comme fonctions admissibles. Ainsi la forme faible des équations de perturbations (6.15)-(6.17) se réduit aux équations linéaires suivantes:

$$\psi_0 \mathcal{K}_\psi = R_T \left(\theta_0 + N\phi_0\right)\mathcal{B} \tag{6.33}$$

$$p\theta_0 \mathcal{M} - \psi_0 \mathcal{L} = -\theta_0 \mathcal{K} \tag{6.34}$$

$$p\varepsilon\phi_0 \mathcal{M} - \psi_0 \mathcal{L} = Le^{-1}\left(\phi_0 - S_r\theta_0\right)\mathcal{K} \tag{6.35}$$

où $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}_\psi$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont des constantes définies par :

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{B} = \int_\Omega \frac{\partial G}{\partial y} F d\Omega \quad , \quad \mathcal{K}_\psi = \int_\Omega \left(\nabla F\right)^2 d\Omega \\ &\mathcal{K} = \int_\Omega \left(\nabla G\right)^2 d\Omega, \quad \mathcal{L} = -\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x} G d\Omega \\ &\mathcal{M} = \int_\Omega G^2 d\Omega \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

À partir des équations (6.34) et (6.35), on peut déduire les expressions suivantes pour θ_0 et ϕ_0 :

$$\theta_0 = \frac{\psi_0 \mathcal{L}}{p\mathcal{M} + \mathcal{K}} \tag{6.37}$$

$$\phi_0 = \frac{\psi_0 \mathcal{L} + Le^{-1} S_r \theta_0 \mathcal{K}}{p\varepsilon\mathcal{M} + Le^{-1}\mathcal{K}} \tag{6.38}$$

En substituant les équations (6.37) et (6.38) dans l'équation (6.33), on obtient l'équation polynomiale de dispersion de second ordre en termes du paramètre p.

$$\varepsilon^2 Le^2 p^2 - \gamma\varepsilon Le p_1 p - \gamma^2 p_2 = 0 \tag{6.39}$$

où

$$\left.\begin{aligned} &p_1 = R_T^0 Le\left(\varepsilon + N\right) - \left(1 + \varepsilon Le\right) \\ &p_2 = \varepsilon Le\left[R_T^0\left(1 + N\left(Le + S_r\right)\right) - 1\right] \\ &R_T^0 = \frac{R_T}{R^{\sup}} \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

et les constantes R^{sup} et γ sont données par :

$$R^{\sup} = \frac{\mathcal{K}_\psi \mathcal{K}}{\mathcal{B}\mathcal{L}}, \qquad \gamma = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{M}} \tag{6.41}$$

Dans l'équation (6.39) on peut constater facilement que l'inconnue p est donnée par l'expression suivante :

$$p = \frac{\gamma}{2\varepsilon Le}\left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + 4p_2}\right) \tag{6.42}$$

En général, le paramètre p est un nombre complexe qui est défini comme :

$$p = p_r + ip_i \tag{6.43}$$

où p_r et p_i sont respectivement les parties réelle et imaginaire du paramètre p qui sont données par :

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\gamma}{2\varepsilon Le}\left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + 4p_2}\right) \\ p_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad p_1^2 + 4p_2 \geq 0 \tag{6.44}$$

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\gamma}{2\varepsilon Le} p_1 \\ p_i &= \frac{\gamma}{2\varepsilon Le}\sqrt{\left|p_1^2 + 4p_2\right|} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad p_1^2 + 4p_2 \leq 0 \tag{6.45}$$

Le seuil de la convection connu sous le nom de la stabilité marginale, p=0, se produit lorsque $p_2 = 0$. À partir de l'équation (6.40), le nombre de Rayleigh critique $R_{TC}^{\sup}$ caractérisant le début de la convection supercritique est donné par :

$$R_{TC}^{\sup} = \frac{R^{\sup}}{1 + N\left(Le + S_r\right)} \quad \text{ou} \quad R_{TC}^{\sup} = R^{\sup} - \frac{R_S}{1 + S_r / Le} \tag{6.46}$$

Le nombre de Rayleigh surstable R_{TC}^{sur} correspond à la condition, $p_r = 0$, c'est-à-dire $p_1 = 0$. De l'équation (6.40) on peut montrer que :

$$R_{TC}^{sur} = \frac{\left(\varepsilon Le + 1\right)}{Le\left(\varepsilon + N\right)} R^{\sup} \quad \text{ou} \quad R_{TC}^{sur} = \frac{R^{\sup}\left(1 + \varepsilon Le\right) - R_S}{\varepsilon Le} \tag{6.47}$$

Notons que le régime surstable commence à une valeur de $R_T = R_{TC}^{sur}$ et prend fin à une valeur de $R_T = R_{TC}^{osc}$. Le nombre représente la valeur du nombre de Rayleigh marquant la transition du régime surstable oscillant à un régime monotone croissant.

L'expression du nombre de Rayleigh oscillante R_{TC}^{osc} est déduite de la condition $p_i = 0$, c'est-à-dire, $p_1^2 + 4p_2 = 0$. On obtient ainsi :

$$R_{TC}^{osc} = \frac{(\varepsilon Le - 1)(\varepsilon - N) - 2S_r \varepsilon N + 2\sqrt{-\varepsilon N\left[\varepsilon\left(Le + S_r\right)\right]\left[\varepsilon Le - S_r N - 1\right]}}{Le\left(\varepsilon + N\right)^2} R^{\sup} \quad (6.48)$$

ou

$$R_{TC}^{osc} = \frac{\left(\varepsilon Le - 1\right) R^{\sup} - R_S + 2\sqrt{\left[1 - \varepsilon\left(Le + S_r\right)\right] R_S R^{\sup}}}{\left(\varepsilon Le\right)} \quad (6.49)$$

avec : $R_S = R_T\, N\, Le$.

6.4 Résultats et discussion

6.4.1 Couche horizontale : Φ=0°, $N \leq 0$ et $S_r=0$

Le seuil de transition (bifurcation de Hopf) R_{TC}^{Hopf} caractérise le passage de la convection stationnaire vers la convection oscillatoire. Le phénomène de transition se produit généralement au nombre de Rayleigh élevé. Pour la validation de la procédure, nous avons considéré le cas d'une cavité horizontale infiniment longue soumise à des gradients de température et de concentration constants sur les parois horizontales. Les équations de perturbation ci-dessus sont fondamentalement similaires à celles qui régissent l'écoulement de Darcy, la seule différence étant associée au le coefficient de la trainée de forme. Le tableau 6.2 montre une comparaison entre la prédiction de la présente étude et celle rapportée dans la littérature sur l'apparition de la bifurcation de Hopf dans le cas de la convection thermique pure N=0. Le tableau 6.3 montre une comparaison correspondant au cas de la convection double diffusion $R_S = -100$, Le=10 et $\varepsilon = 1$. Le paramètre, R_S, correspondant au nombre de Rayleigh solutal qui est défini comme $R_S = R_T NLe$. Un excellent accord est obtenu pour la prédiction du nombre de Rayleigh critique, le nombre d'onde critique et la fréquence correspondante pour la bifurcation de Hopf.

Tableau 6.2 : Comparaison des résultats de la convection thermique pure pour *N*=0.

	Kimura et al. (1995)	Mamou and Vasseur (1999a)	Bahloul et al. (2003)	Présent étude
R_{TC}^{Hopf}	506.07	506.0742	507.02	506.0706
$K_{TC}^{Hopf} = 2\pi / A_C$	4.825	4.8251	4.825	4.8254
$f_r = \lvert p_i \rvert / 2\pi$	22.11	22.109	22.11	22.1159

Tableau 6.3 : Comparaison des résultats de la convection double diffusion pour $R_S = -100$, *Le*=10 et $\varepsilon = 1$.

	Mamou et Vasseur (1999a)	Bahloul et al. (2003)	Présent étude
R_{TC}^{Hopf}	532.12	532.10	532.1204
$K_{TC}^{Hopf} = 2\pi / A_C$	4.842	4.831	4.8321
$f_r = \lvert p_i \rvert / 2\pi$	22.73	22.71	22.6744

Dans la présente étude, le domaine de calcul est discrétisé avec un maillage uniforme. La précision des résultats dépend évidemment de la finesse du maillage. Le tableau 6.4 montre l'influence du maillage sur la précision des résultats obtenus pour les valeurs de R_{TC}^{Hopf}, longueur d'onde, A_C, et la fréquence, f_r. En utilisant différents maillages, des tests numériques ont été faits pour un milieu poreux de Dupuit-Darcy. On constate que l'influence du maillage devient négligeable à partir d'un maillage N_{ey}=8.

Tableau 6.4 : Effet du maillage sur le nombre de Rayleigh critique, R_{TC}^{Hopf}, la longueur d'onde, A_C, et la fréquence, f_r, pour $R_S = -240$, $P_r^* = 10$, *Le*=10 et ε=0.2.

N_{ey}	4	8	12	16	20	40
R_{TC}^{Hopf}	1974.65	1966.45	1966.69	1966.84	1966.92	1967.05
A_C	1.2561	1.2478	1.2472	1.2469	1.2468	1.2468
f_r	22. 2392	22.2845	22.2947	22.2988	22.3004	22.3021

Le seuil de transition, les profils de perturbation des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations au seuil de la transition (au début de bifurcation de Hopf) R_{TC}^{Hopf} comme prédit par l'analyse de la stabilité linéaire pour, $R_S = -240$, $P_r^* = 10$, *Le*=10 et ε=0.2 sont représentés dans la Fig 6.2. Les résultats indiquent que la stabilité linéaire prédit l'existence

de deux valeurs propres identiques mais de signe contraire (p_i=±140.12). L'écoulement est composé de petits tourbillons périodiques alignés prés des parois horizontales.

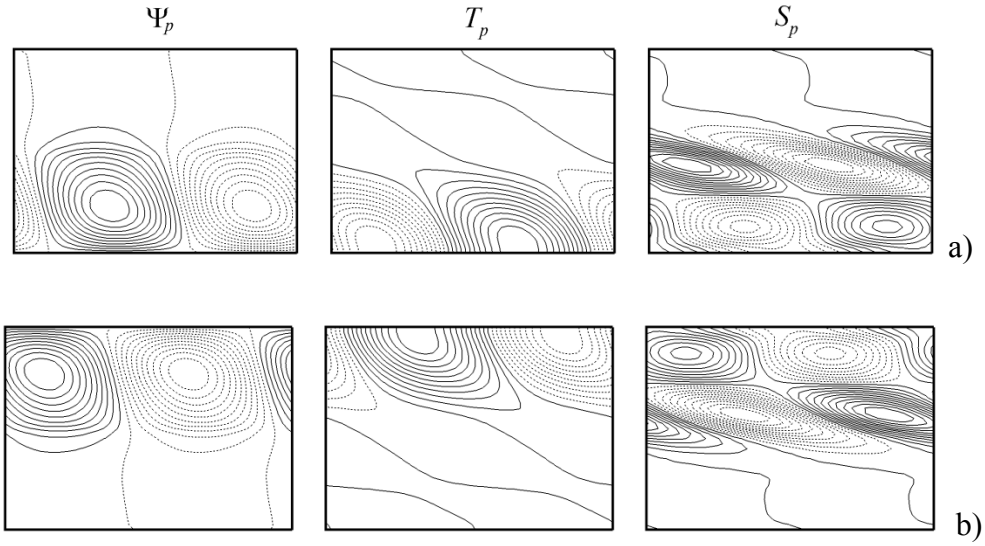
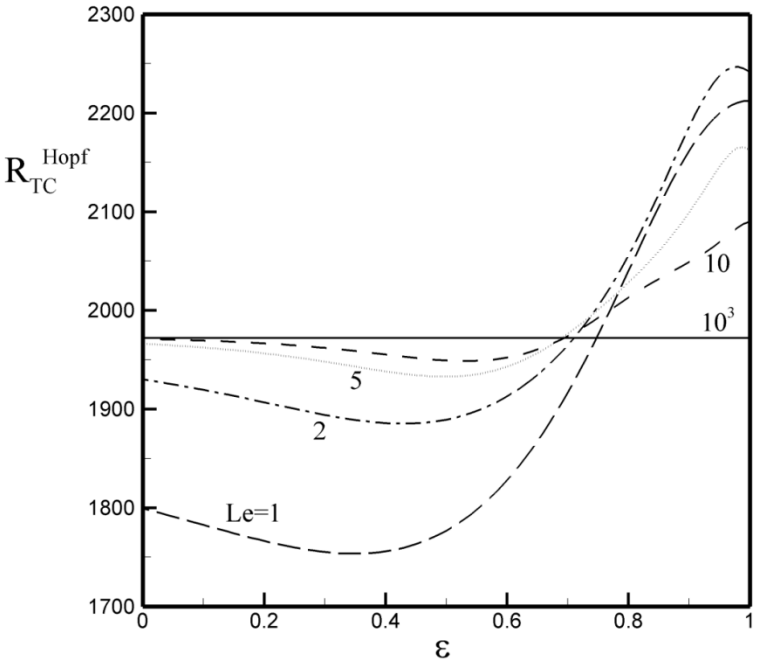
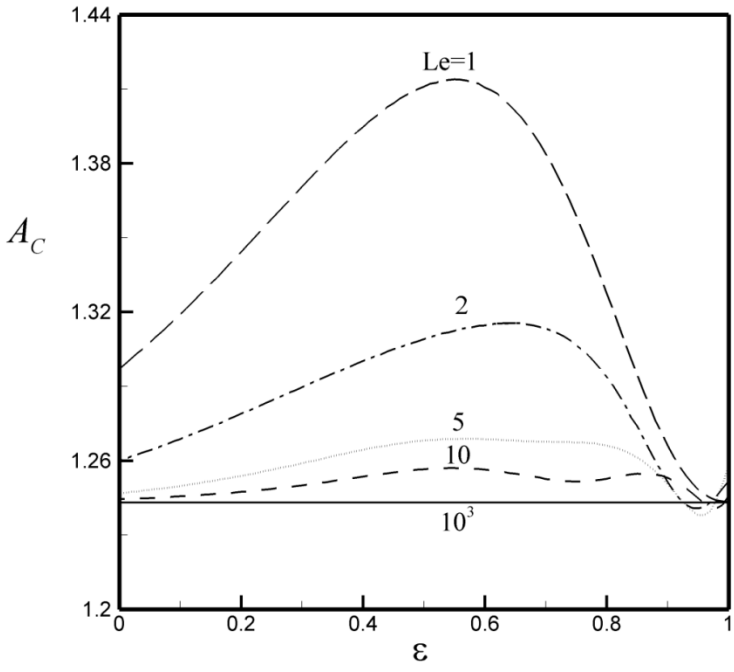


Figure 6.2 : Les profils de perturbation $\left(\Psi_p,\ T_p,\ S_p\right)$ au seuil de transition R_{TC}^{Hopf} prédit par l'analyse de la stabilité linéaire pour $R_S = -240$, $P_r^* = 10$, Le=10 et ε=0.2: $R_{TC}^{Hopf} = 1967.057$, $A_C = 1.246$, a) $p_i = 140.12$ et b) $p_i = -140.12$. Les résultats sont obtenus avec un maillage de 40 éléments dans la direction y.

L'effet du nombre de Lewis, Le, et de la porosité normalisée, ε, sur les paramètres critiques de la transition, R_{TC}^{Hopf}, A_C, et f_r, sont représentés dans les figures 6.3a)-c) pour $R_S = -240$, $P_r^* = 10$ et Le=1, 2, 5, 10, 10^3. Les paramètres ε et Le ont un effet significatif sur les paramètres critiques. Les paramètres critiques deviennent indépendants de Le, quand celui-ci devient assez grand. Ceci est dû à la concentration de soluté quand elle devient uniforme à l'intérieur d'une grande partie de l'enceinte et au transfert de masse causé principalement par convection. Pour cette situation, les valeurs critiques tendent vers celles correspondant à la convection thermique pure.


2300
2200
2100
2000
1900
1800
1700
R_{TC}^{Hopf}
10
10^3
5
2
Le=1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
ε

a)


1.44
1.38
1.32
1.26
1.2
A_C
Le=1
2
5
10
10^3
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
ε

b)

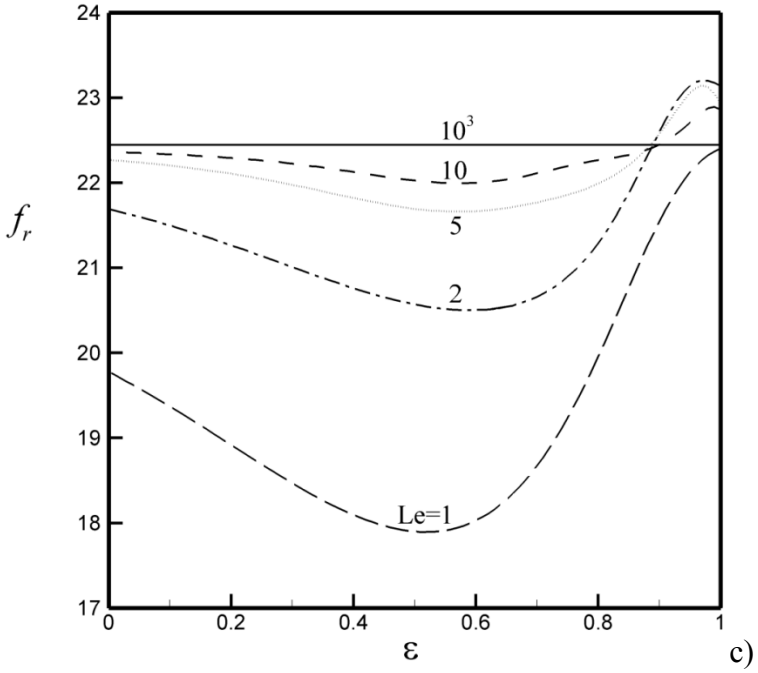
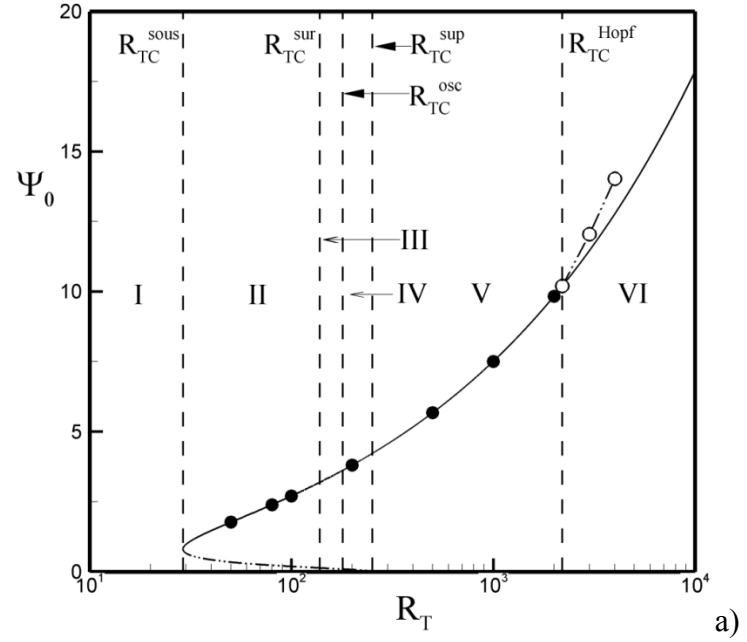


Figure 6.3 : Effets de *Le* et ε sur les paramètres critiques au début de la transition pour $R_S = -240$, $P_r^* = 10$ et *Le*=1, 2, 5, 10, 10^3, a) R_{TC}^{Hopf} b) A_C et c) f_r.

La figure 6.4 illustre l'effet du nombre de Rayleigh thermique, R_T, sur, Ψ_0, *Nu* et *Sh* pour $R_S = -240$, $P_r^* = 10$, *Le*=10 et ε=0.2. Les résultats numériques obtenus pour une cavité avec un rapport d'aspect *A*=20 ont donné un excellent accord avec les prédictions du modèle d'écoulement parallèle. Selon la théorie de la stabilité linéaire, pour les valeurs des paramètres considérés ici, les nombres de Rayleigh critiques pour le début de mouvement comme le montre les équations (6.46)-(6.49) sont donnés par $R_{TC}^{sur} = 138$, $R_{TC}^{osc} = 180$ et $R_{TC}^{sup} = 252$, respectivement. Le début du mouvement oscillant, prédit par la théorie de la stabilité linéaire, se produit à $R_{TC}^{Hopf} = 1967$, tandis que l'apparition de la convection souscritique prédite par l'approximation d'écoulement parallèle non linéaire est $R_{TC}^{sous} = 29$. Dans le graphique, les zones (I) à (V), sont équivalentes à celles définies dans la figure 5.23, tandis que dans la zone (VI), pour laquelle $R_T \geq R_{TC}^{Hopf}$, l'écoulement convectif est oscillant. Ce point est confirmé par les résultats numériques obtenus pour R_T =2000, 3000 et 4000, respectivement. Pour cette situation, l'écoulement est périodiquement oscillant mais la configuration d'écoulement reste unicellulaire. Les symboles blancs présentés dans les graphiques correspondant aux valeurs moyennes de Ψ_0, *Nu* et *Sh* pour une période d'oscillation obtenue par le code numérique.



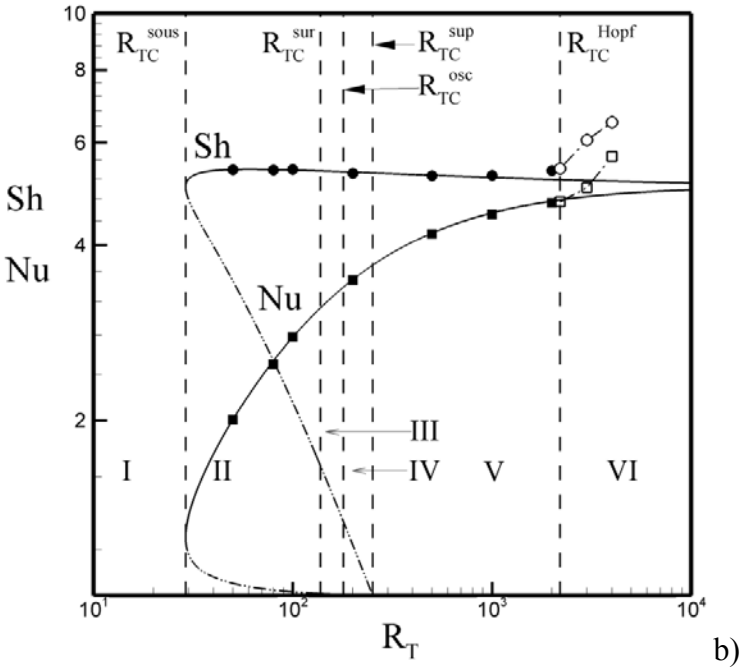
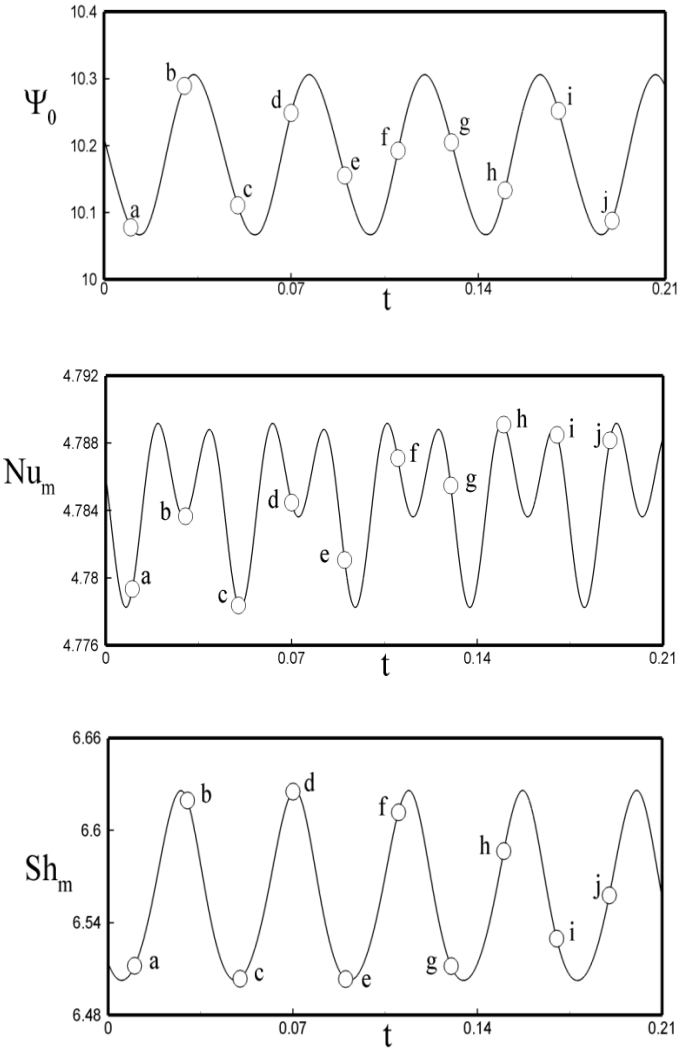
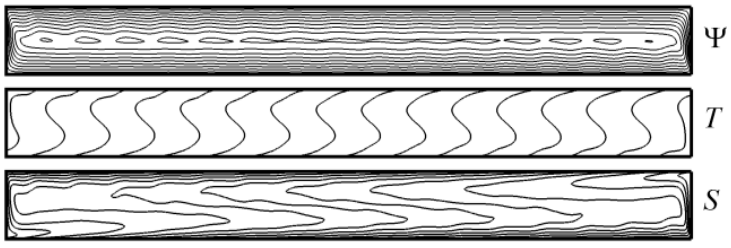


Figure 6.4 : Diagramme de bifurcation en termes, a) de l'intensité de l'écoulement et b) des transferts de chaleur et de masse pour $R_S = -240$, $P_r^* = 10$, Le=10 et ε=0.2. —— analytique stationnaire, -·-·-·- analytique instable, • numérique stationnaire, —⊙— numérique oscillante.

Pour examiner le comportement oscillatoire des écoulements convectifs au-dessus du seuil de bifurcation de Hopf, R_{TC}^{Hopf}, des résultats typiques sont présentés dans la Fig 6.5 pour $R_S = -240$, $P_r^* = 10$, Le=10 et A=20. La longueur d'onde critique et la fréquence d'oscillation sont données par $A_C = 1.25$ et $f_r = 23.15$ respectivement, qui sont proches des valeurs $A_C = 1.24$ et $f_r = 22.30$ prédites par la théorie de la stabilité linéaire. L'amplitude des oscillations est très petite à proximité de R_{TC}^{Hopf} et les changements de la structure d'écoulement sont indiscernables. Pour cette raison, un certain nombre de Rayleigh thermique $R_T = 2200$ est choisi pour le calcul numérique. Pour cette situation, l'écoulement est périodiquement oscillant mais la configuration d'écoulement reste unicellulaire. L'évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité (Ψ_0) et les transferts de chaleur et de masse (Nu_m et Sh_m) sont obtenus pour $R_T = 2200$, c'est-à-dire juste au-dessus du nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{Hopf} prédit par la théorie de la stabilité linéaire $R_{TC}^{Hopf} = 1967$, et sont représentés dans les Figs 6.5a. Cependant, le parallélisme des lignes de courant est rompu, en particulier au milieu de la hauteur de l'enceinte comme illustré dans la Fig 6.5b. L'instabilité de l'écoulement est caractérisée par l'existence de deux couches superposées, chaque couche est constituée d'une série de circulations secondaires voyageant dans la direction horizontale. Les modes d'écoulement de perturbation sont illustrés dans les Figs. 6.5c)-e) en termes des profils perturbés de la fonction de courant, Ψ_p, de la température, T_p, et de la concentration, S_p, et sont définies par l'équation (5.1). Les tourbillons dans les deux couches se déplacent le long des parois de l'enceinte dans le sens horaire. Comme le montre les Figs 6.5c)-e), les tourbillons se renforcent à l'approche des parois verticales, et les taux de transfert de chaleur et de masse deviennent plus forts à proximité des zones d'extrémité de l'enceinte. Le comportement de l'écoulement oscillatoire caractérisé par les transferts de chaleur et de masse locaux est représenté dans la figure 6.5f). Les extremums de Ψ_0, Nu_c et Sh_c suivent les tourbillons comme ils voyagent dans la direction horizontale à l'instant t=0.1122. La forme et la longueur d'onde des tourbillons sont approximativement les mêmes que ceux prédits par l'analyse de la stabilité linéaire lors de la superposition des deux solutions conjuguées (Fig 6.2).


Ψ_0
10.4
10.3
10.2
10.1
10
0
0.07
0.14
0.21
t
a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
Nu_m
4.792
4.788
4.784
4.78
4.776
Sh_m
6.66
6.6
6.54
6.48

a)


Ψ
T
S

b)

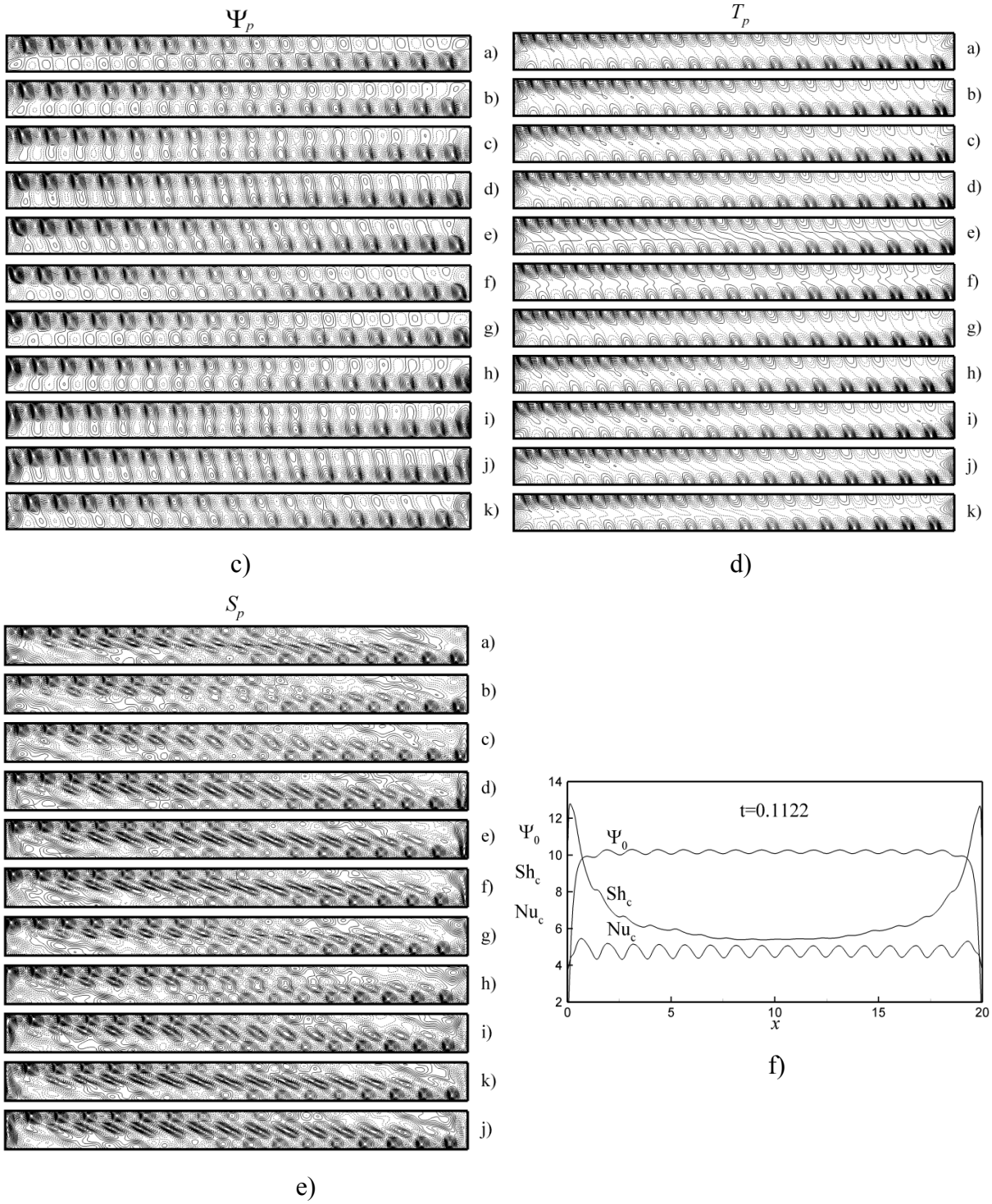
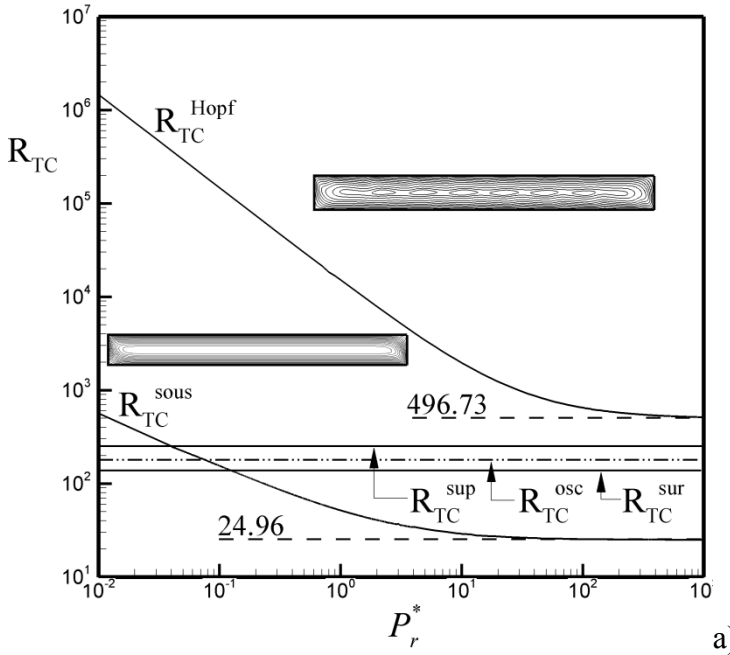
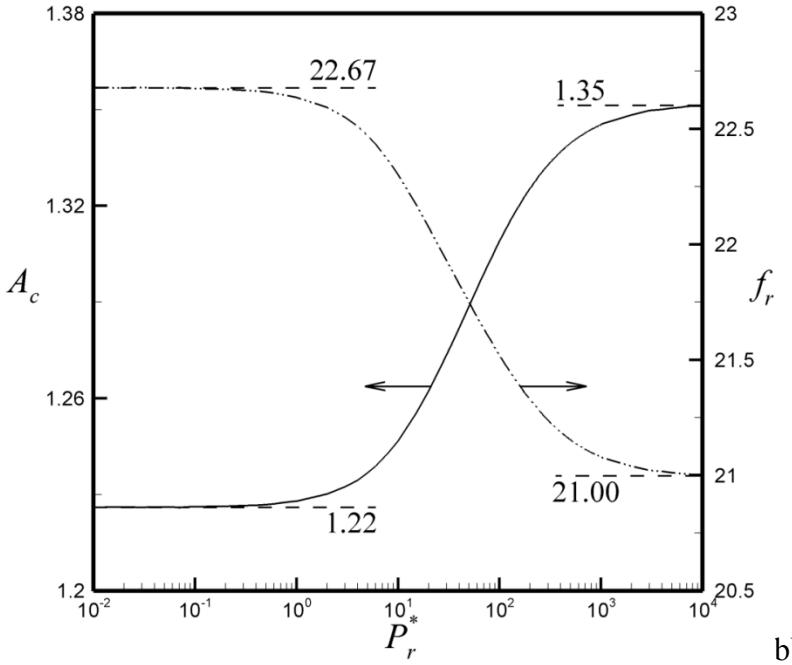


Figure 6.5 : a) Évolution dans le temps de la fonction de courant au centre de la cavité et des transferts de chaleur et de masse, b) les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations à t=0.21 pour R_T=2200, A=20, $P_r^* = 10$, Le=10 et ε=0.2, c)-d) les contours de perturbation des lignes de courant, températures et concentrations obtenus à différents instants du temps : (a) t=0.10, (b) t=0.30, (c) t=0.50, (d) t=0.70, (e) t=0.90, (f) t=0.11, (g) t=0.13, (h) t=0.15, (i) t=0.17, (k) t= 0.19, (j) t=0.21 et f) les comportements de ligne decourant et les transferts de chaleur et de masse locaux suivent les tourbillons comme ils voyagent dans la direction x.

La figure 6.6a) montre l'influence du coefficient de la trainée de forme sur les seuils de la bifurcation $\left(R_{TC}^{Hopf},\ R_{TC}^{sous},\ R_{TC}^{sur},\ R_{TC}^{osc}\right)$ pour $R_S = -240$ et $\varepsilon = 0.2$. Selon les équations (6.46)-(6.49) les seuils du mouvement convectif sont donnés par $R_{TC}^{sur} = 138$, $R_{TC}^{osc} = 180$ et $R_{TC}^{\sup} = 252$, ces valeurs étant indépendantes de P_r^*. Comme prédit, la figure montre que l'apparition de la bifurcation de Hopf, R_{TC}^{Hopf}, diminue fortement lors de l'augmentation de la valeur du paramètre de la trainée de forme. Il en résulte que l'écoulement parallèle stationnaire est déstabilisé plus tôt avec une augmentation de P_r^*. Une tendance similaire est observée pour l'évolution du nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous}, avec le coefficient de la trainée de forme. Dans les deux cas, pour des valeurs suffisamment grandes de P_r^*, les limites de Darcy représentées par des lignes en pointillées sont atteintes asymptotiquement. Il est également observé que, dans l'intervalle $0.12 \le P_r^* \le 10^3$, le nombre de Rayleigh critique minimal pour le début du mouvement est souscritique. Toutefois, pour $P_r^* \le 0.12$ la théorie de la stabilité linéaire prédit que la convection est possible quand $R_T \ge R_{TC}^{sur}$. La figure 6.6b illustre l'effet de P_r^* sur la longueur d'onde, A_C, et la fréquence, f_r, à l'apparition de la bifurcation de Hopf. On constate que la longueur d'onde (fréquence) diminue (augmente) de façon monotone à partir de $A_C = 1.35$ $\left(f_r = 21\right)$ dans le régime de Darcy pur, vers $A_C = 1.22$ $\left(f_r = 22.67\right)$ dans le régime de Dupuit pur. Les effets de la trainée de forme sur ces deux paramètres sont donc relativement faibles.



a)



b)

Figure 6.6 : Effet de la trainée de forme pour $R_S = -240$, $Le = 10$ et $\varepsilon = 0.2$ sur : a) les seuils de convection R_{TC} et b) la longueur d'onde critique, A_C , et la fréquence d'oscillation, f_r .

L'effet du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur le seuil de bifurcation de Hopf, comme prédit par la théorie de la stabilité linéaire est illustré dans les tableaux 6.5 et 6.6. Les résultats typiques représentés dans le tableau 6.5 correspondent au cas de convection de double diffusion pour $R_S = -240$, Le=10 et ε=1, et ceux représentés dans le tableau 6.6 correspondent au cas de la convection thermique pure $R_S = 0$ (N=0). Il est clair que lorsque P_r^* diminue, le seuil de bifurcation de Hopf, R_{TC}^{Hopf} est retardé (augmente) et les valeurs critiques de la longueur d'onde de perturbation A_C et la fréquence d'oscillation, f_r, diminuent. Par contre, le tableau 6.6 montre que la fréquence d'oscillation augmente quand P_r^* diminue.

Tableau 6.5 : Effet du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur le seuil de bifurcation de Hopf dans une couche infinie pour $R_S = -240$, *Le*=10 et ε=1.

P_r^*	R_{TC}^{Hopf}	A_C	f_r
Darcy	566.81	1.29	23.38
10^2	735.48	1.27	23.39
50	893.19	1.26	23.28
10	2090.63	1.24	22.87
5	3565.53	1.23	22.78
1	15323.27	1.22	22.72
0.5	30010.26	1.22	22.71
10^{-1}	147924.30	1.22	22.70
5×10^{-2}	234343.24	1.22	22.70
10^{-2}	1469147.80	1.22	22.70

Tableau 6.6 : Effet du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur le seuil de bifurcation de Hopf dans une couche infinie pour $R_S = 0$.

P_r^*	R_{TC}^{Hopf}	A_C	f_r
Darcy	506.07	1.30	22.11
10^2	659.19	1.28	22.20
50	806.32	1.26	22.21
10	1972.79	1.24	22.41
5	3437.38	1.23	22.52
1	15175.36	1.22	22.64
0.5	29849.77	1.22	22.66
10^{-1}	147245.34	1.22	22.67
5×10^{-2}	293989.77	1.22	22.67
10^{-2}	1467945.30	1.22	22.67

6.4.2 Couche verticale : Φ=90°, *N*=-1, S_r=0 et 1

Dans cette section, le problème de la stabilité de la solution convective prédite par la théorie de la stabilité linéaire est étudié dans le cas de la convection naturelle induite par double diffusion ($S_r = 0$), et dans le cas de l'effet de Soret ($S_r = 1$). Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 5, pour le cas d'une cavité inclinée, le problème de stabilité existe seulement lorsque les gradients thermiques et solutaux appliqués sur les parois verticales sont égaux et opposés *N*=-1. Pour cette situation, il existe un état de repos qui demeure stable en dessous d'un nombre de Rayleigh critique. La densité du fluide est uniforme dans la cavité et la force de poussée résultante est nulle. La stabilité de ce cas a été étudiée numériquement sur la base de la théorie de la stabilité linéaire.

De manière à vérifier la précision du programme développé, les résultats du seuil du déclanchement de la convection oscillatoire (surstable), R_{TC}^{sur}, et la fréquence oscillatoire, f_r, sont obtenus pour différents maillage avec Le=2, ε=0.1 et S_r=0 et sont présentés dans le tableau 6.7. Nous avons aussi utilisé la solution de l'équation (6.47) pour la validation du code de calcul numérique. Comme on a déjà discuté dans le chapitre 5, la solution numérique prédit que la convection oscillante commence à $R_{TC}^{sur} = 76.25$ qui est environ 8% plus élevé que la valeur prédite par l'équation (6.47), $R_{TC}^{sur} = 70.22$. Le début de la convection surstable prédit par la l'analyse de la stabilité linéaire est plus précis, à savoir $R_{TC}^{sur} = 75.27$ avec 1.3% de différence.

Tableau 6.7 : Le nombre de Rayleigh critique, R_{TC}^{sur}, et la fréquence d'oscillation, f_r, au début du déclanchement de convection oscillatoire dans une couche infinie pour Le=2, ε=0.1 et S_r=0.

	Stabilité linaire						Eq. (6.47)	Numérique
	2×2	4×4	8×8	12×12	16×16	20×20		
R_{TC}^{sur}	76.052	75.289	75.274	75.273	75.273	75.273	70.22	76.250
f_r	5.085	5.110	5.112	5.115	5.113	5.114	⋯	4.608

La figure 6.7 représente les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations au moment du départ de la convection surstable, R_{TC}^{sur}, comme prédit par l'analyse de la stabilité linéaire pour Le=2, ε=0.1 et $S_r = 0$. La structure de l'écoulement au début de la convection surstable est asymétrique et les cellules de convection sont décalées à gauche de la paroi verticale. Les profils de la température et de la concentration ne sont pas identiques, comme on le voit sur la figure. Cette différence pourrait améliorer l'instabilité de l'écoulement convectif. Comme nous pouvons observer aussi sur la figure, l'écoulement est composé d'une structure périodique de rouleaux en rotation dans le sens horaire.

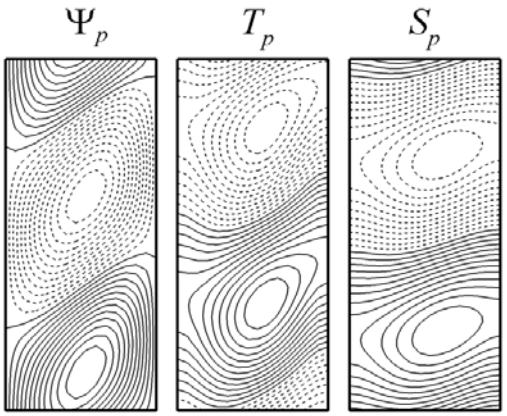


Figure 6.7 : Les profils de perturbation $\left(\Psi_p,\ T_p \text{ et } S_p\right)$ au début de convection surstable pour *Le*=2, ε=0.1 et S_r=0, $R_{TC}^{sur} = 75.27,\ A_C = 2.41$ et $f_r = 5.11$.

Juste au-dessus du seuil de surstable R_{TC}^{sur}, la solution d'amplitude finie des équations régissantes (2.19), (2.20) et (2.23) révèle l'existence d'un déplacement des ondes d'écoulement dans une cavité mince soumise à des gradients de température et de concentration constants. La procédure de calcul numérique de la solution non linéaire est décrite en détail dans le chapitre 4. Pour un nombre de rapport d'aspect relativement grand *A*=10 avec $R_T = 80$, $P_r^* = 0.14$, *Le*=2 et ε=0.1 et $S_r = 0$, l'écoulement oscillant est composé de plusieurs cellules voyageant verticalement le long de la couche poreuse. L'oscillation est périodique, comme l'indique l'évolution dans le temps de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité Ψ_0, et les taux de transfert de chaleur et de masse sur les figures 6.8a)-c). Les cellules convectives se déplacent de haut en bas comme indiqué sur les figures 6.8d)-f) à une vitesse presque constante. La génération des cellules commence à proximité du bord supérieur de l'enceinte, puis ces cellules se déplacent vers le bas jusqu'à ce qu'elles atteignent le bord inférieur où elles se désintègrent. Dans ce cas, les paramètres critiques de la surstabilité prédites par l'analyse de la stabilité linéaire sont $R_{TC}^{sur} = 75.27,\ A_C = 2.41$ et $f_r = 5.11$. Il existe deux solutions conjuguées, ce qui peut conduire à des déplacements des ondes vers le bas ou le haut.

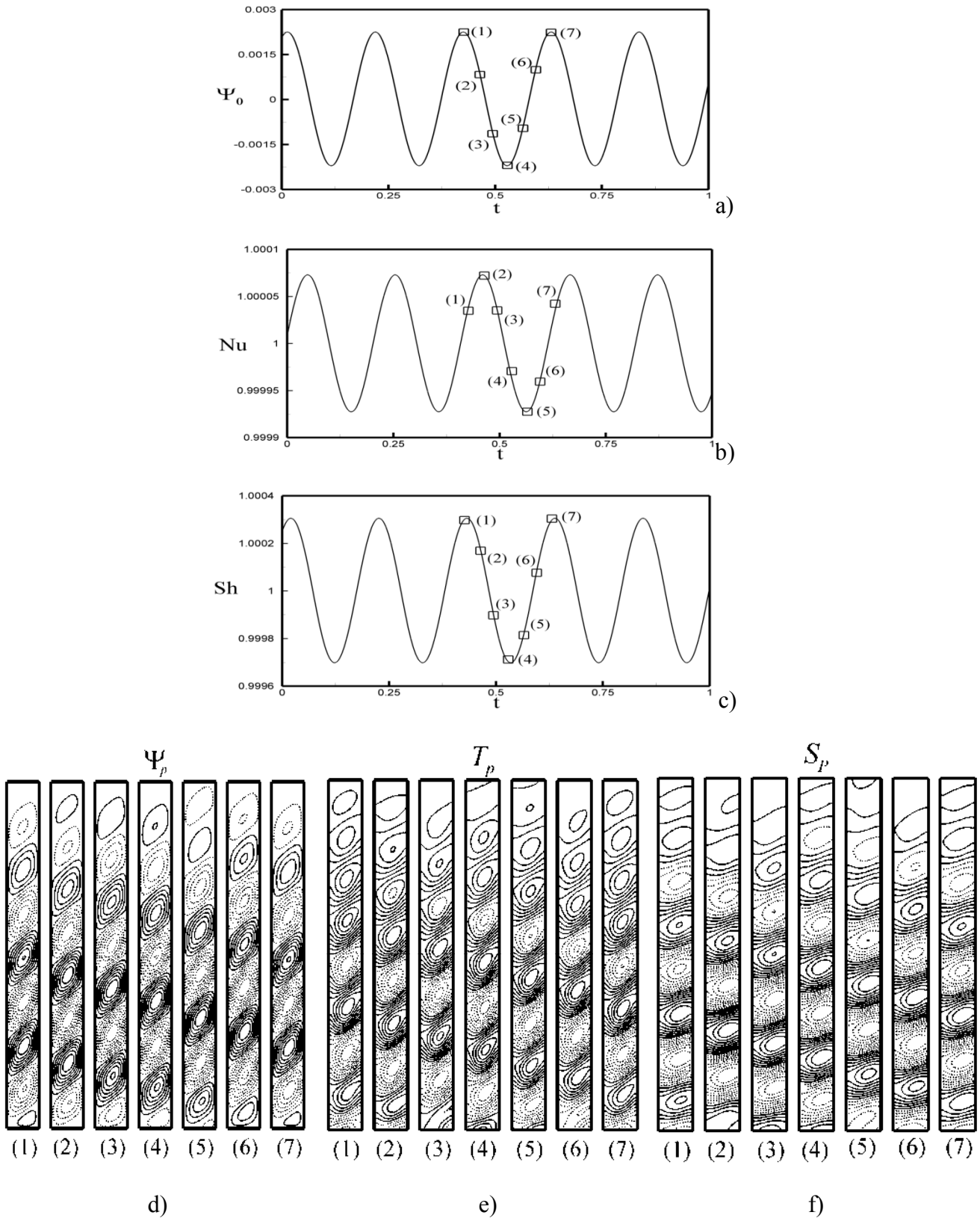


Figure 6.8 : Évolution dans le temps : a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, b) et c) les transferts de chaleur *Nu* et de masse *Sh*, d)-f) les structures d'écoulement à différents instants de temps pour A=10, $R_T = 80$, $P_r^* = 0.14$, Le=2 et S_r=0. (1) t=0.42, (2) t=0.46, (3) t=0.49, (4) t=0.52, (5) t=0.56, (6) t=0.59, (7) t=0.63.

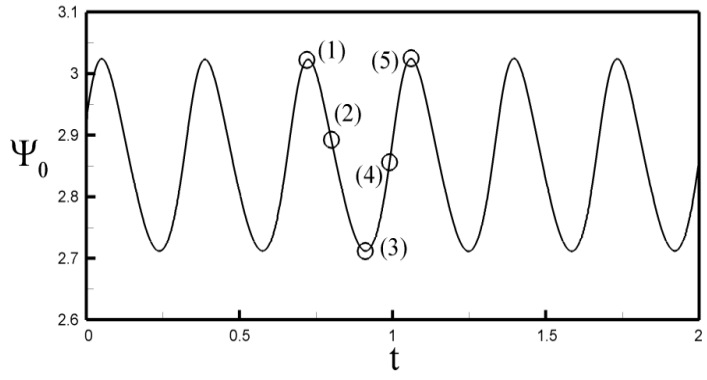
Pour la stabilité de l'état de convection, la solution de base $\left(\Psi_b,\ T_b,\ S_b\right)$ est obtenue numériquement en utilisant la méthode des différences finies, comme c'est décrit dans le chapitre 4. On utilise dans ce cas un maillage de 100 éléments finis d'Hermite cubiques dans la direction *x*. Le tableau 6.8 montre l'influence du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur le nombre de Rayleigh critique, le nombre d'onde critique et la fréquence correspondant à la bifurcation de Hopf, comme prédit par la théorie de la stabilité linéaire pour *Le*=10, ε=1, $S_r = 0$ et 1. On a présenté entre parenthèses également dans ce tableau les résultats correspondantes de R_{TC}^{Hopf} obtenues en résolvant les équations gouvernantes complètes pour une cavité avec un rapport d'aspect *A*=20. Les valeurs ont été obtenues par essais et en réduisant l'écart où la transition se produit. La détermination de la valeur numérique de R_{TC}^{Hopf} avec les équations gouvernantes complètes est très fastidieuse, donc l'intervalle de R_T est donné où la transition se produit. Dans le tableau pour les valeurs critiques de $R_T = R_{TC}^{Hopf}$ entre parenthèse, la solution est oscillatoire mais elle est stationnaire pour $R_T = R_{TC}^{Hopf} - 2$. Un accord raisonnable entre les deux différentes méthodes de solution est observé. Les résultats numériques sont toujours légèrement au-dessus des résultats de la stabilité linéaire. Il est clair que le nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{Hopf} augmente considérablement lors de la diminution de P_r^*. Cela découle du fait que toute diminution de la trainée de forme entraine un effet stabilisateur et un affaiblissement du flux de convection.

Tableau 6.8 : Effets du paramètre de la trainée de forme, P_r^*, sur les valeurs critiques, R_{TC}^{Hopf} et f_r pour *Le*=10, ε=1, S_r=0 et S_r=1.

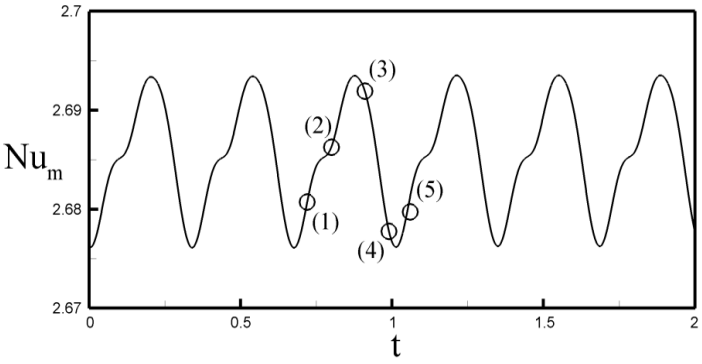
	$S_r = 0$			$S_r = 1$		
P_r^*	R_{TC}^{Hopf}	A_C	$f_r = \lvert p_i \rvert / 2\pi$	R_{TC}^{Hopf}	A_C	$f_r = \lvert p_i \rvert / 2\pi$
Darcy	79.92(86)	2.64	2.33	71.92(74)	2.64	2.32
100	88.84	2.59	2.40	79.95	2.61	2.37
10	172.64(185)	2.50	2.60	155.36(165)	2.52	2.59
2	585.40(592)	2.40	2.90	526.81(550)	2.41	2.88
1	1138.57	2.33	3.06	1015.91	2.37	2.99

Les profils de perturbation sont illustrés dans la figure 6.10. Là encore, il existe deux solutions conjuguées au début de bifurcation de Hopf et les profils de perturbation sont symétriques. Les résultats typiques d'amplitude finie sont présentés dans la figure 6.9 pour $R_T = 185$ juste au-dessus de seuil de bifurcation de Hopf (R_{TC}^{Hopf}). La convection est oscillatoire, comme le montre l'évolution dans le temps de, Ψ_0, *Nu* et *Sh* dans la figure 6.9a)-

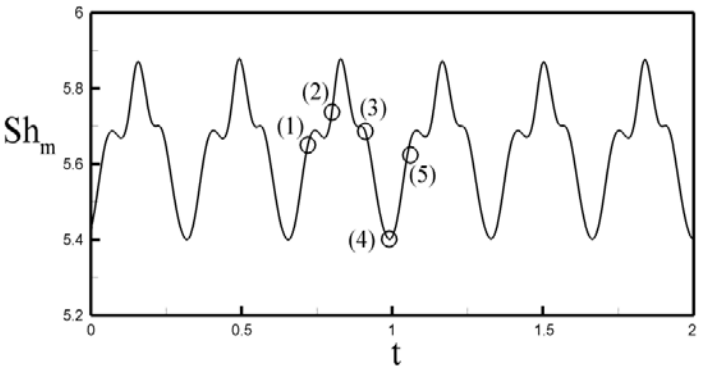
c). L'écoulement reste unicellulaire mais le parallélisme des lignes de courant est légèrement déformé, ce qui indique la présence de petits tourbillons se déplaçant le long des parois verticales de la couche comme illustré dans la figure 6.9d. Pour $R_T = 185$ la période d'oscillation est $\tau = 0.3885$ et la fréquence $f_r = 1/\tau = 2.574$. Les résultats de la stabilité linéaire ont indiqué que $R_{TC}^{Hopf} = 172.64$, la longueur d'onde $A_C = 2.50$ et la fréquence $f_r = 2.60$. La petite différence observée entre les deux approches peut être attribuée au rapport d'aspect fini considéré *A*=20 pour les calculs numériques du phénomène. La figure 6.9e)-g) montre les profils de perturbation (Ψ_p, T_p et S_p) à différents instants de temps. Le comportement oscillatoire de l'écoulement convectif est caractérisé par de petits tourbillons qui voyagent vers le haut prés de la paroi à droite et vers le bas prés de la paroi à gauche. Tous les tourbillons se déplacent à l'intérieur de la couche dans le sens horaire. Les résultats numériques, comme le montrent les figures 6.9e)-g), indiquent clairement que les deux solutions conjuguées comme prédit par l'analyse de la stabilité linéaire figure 6.10 sont superposées et se déplacent dans la direction opposée. Pour $R_T = 185$, les fonctions propres sont similaires à ceux présentes dans la figure 6.10. À partir des Figs 6.9e)-g) les profils de perturbation sont en accord avec les fonctions propres prédites par la théorie de la stabilité linéaire dans la figure 6.10.


3.1
3
2.9
2.8
2.7
2.6
Ψ_0
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
0
0.5
1
1.5
2
t

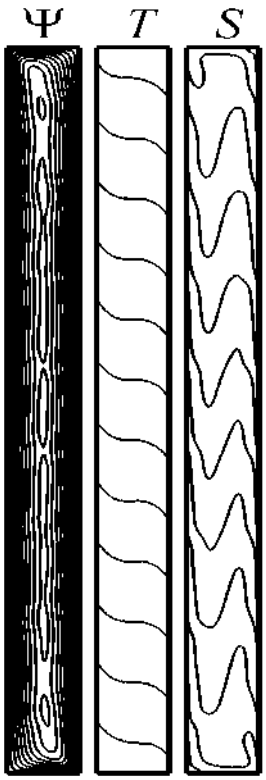
a)


2.7
2.69
2.68
2.67
Nu_m
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
0
0.5
1
1.5
2
t

b)


6
5.8
5.6
5.4
5.2
Sh_m
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
0
0.5
1
1.5
2
t

c)


Ψ
T
S

d)

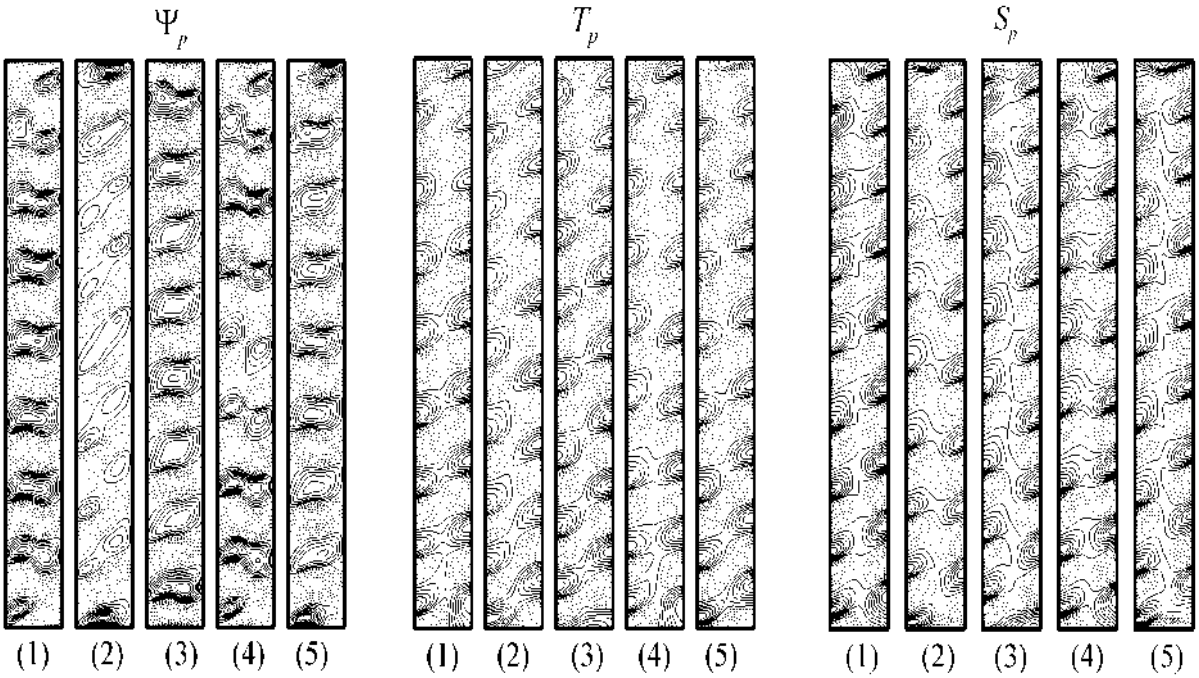


Figure 6.9 a)-c) : Évolution dans le temps de la fonction de courant au centre de la cavité et des transferts de chaleur et de masse, d) les lignes de courant, isothermes et isoconcentration à t=2 pour $R_T = 185$, A=20, $P_r^* = 10$, Le=10, ε=1 et S_r=0, e)-g) les contours de perturbation des lignes de courant, de température et de concentration obtenus à différents instants du temps : (1) t=0.725, (2) t=0.825, (3) t=950, (4) t=1.050, (5) t=1.125.

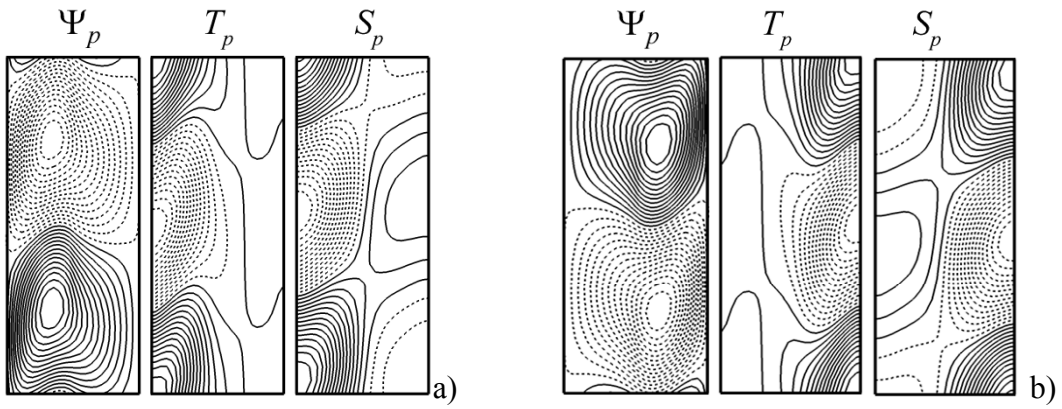
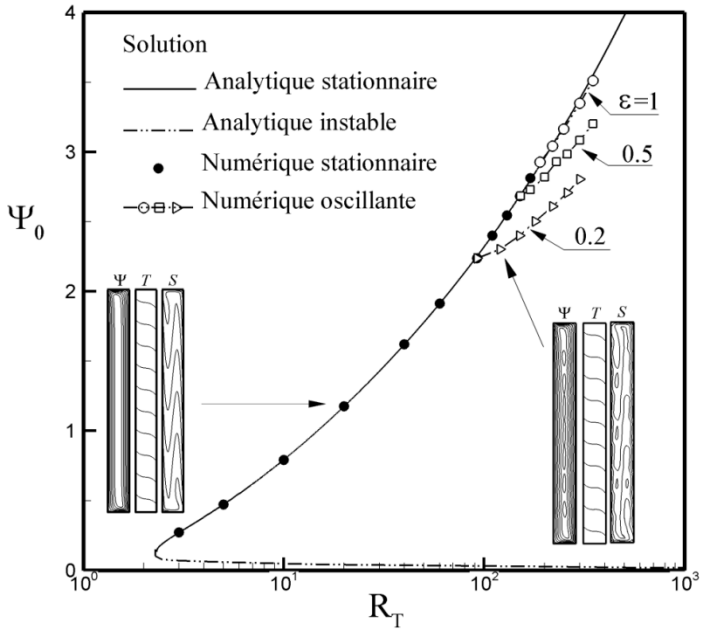


Figure 6.10 : Les profils de perturbation (Ψ_p, T_p et S_p) au seuil de bifurcation de Hopf pour Le=10, ε=1 et $S_r = 0$: $R_{TC}^{Hopf} = 172.64$ et $A_C = 2.5$, a) $p_i = 16.34$ et b) $p_i = -16.34$.

L'effet de la porosité ε sur l'état final de la solution convective est illustré sur la figure 6.11a en terme de Ψ_0, en fonction du nombre de Rayleigh. Les résultats ont été obtenus pour $P_r^* = 10$, A=20, Le=10 et S_r=1. Dans la figure 6.11a la variation de Ψ_0 en fonction du nombre

de Rayleigh, R_T, est présentée pour ε=1, 0.5 et 0.2. Les solutions analytiques permanentes, numériques permanentes et les solutions numériques oscillantes sont indiquées par des traits pleins, cercles pleins et des cercles vides avec des traits pointillés, respectivement. Dans le passé, Trévisan et Bejan (1986), Alavyoon et al. (1994), Mamou (2002, 2003) ont souligné le fait que la porosité normalisée du milieu poreux, ε, n'avait aucune influence sur l'écoulement convectif lorsque ce dernier était stationnaire. Cela est dû au fait que le terme temporal, contenant le paramètre ε dans l'équation de conservation de la masse Eq. (2.20) devient nul à l'état stationnaire. Dans la présente étude, on a observé numériquement que, pour les mêmes valeurs de ε la solution convective du problème peut être stationnaire ou oscillatoire. Dans le régime oscillant, la valeur de Ψ_0 peut être évaluée en faisant la moyenne sur une période des oscillantions. Dans le code de la stabilité linéaire (écoulement convectif), nous avons obtenu les valeurs $R_{TC}^{Hopf} = 87$, 147 et 185 pour ε=0.2, 0.5 et 1, respectivement. Ainsi on constate que R_{TC}^{Hopf} dépend énormément de ε. L'évolution dans le temps de Ψ_0 est présentée sur la figure 6.11b pour $R_T = 170$, ε=0.2, 0.5 et 1. La solution est permanente pour ε=1 mais elle est oscillante pour ε=0.2 et 0.5. La période des oscillations est également fonction du paramètre ε. En diminuant la valeur de ε, la période est aussi diminuée. Cette évaluation montre que lorsque ε tend vers de petites valeurs, la période des oscillations tend vers zéro.



a)

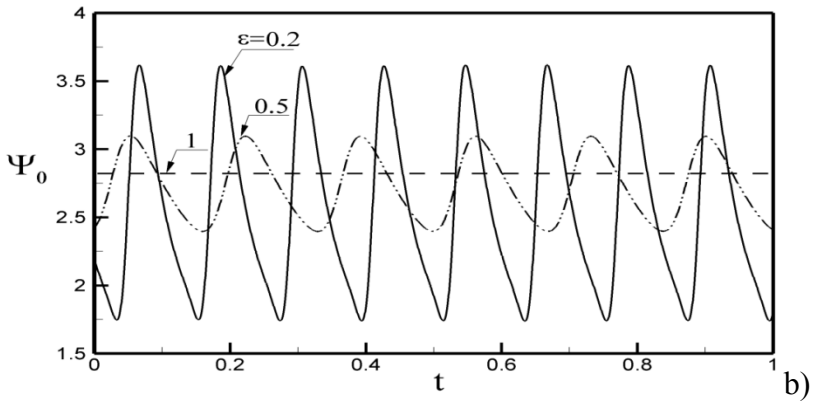


Figure 6.11 : a) Effets du nombre de Rayleigh, R_T, et de la porosité normalisée, ε, sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, pour $P_r^* = 10$, Le=10, A=20, S_r=1 et ε=0.2, 0.5 et 1, b) évolution temporelle de, Ψ_0, pour $R_T = 170$, $P_r^* = 10$, Le=10, A=20, S_r=1 et ε=0.2, 0.5 et 1.

CHAPITRE VII

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Dans la présente thèse de doctorat, on a étudié les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle induite par double diffusion et effet Soret dans une couche poreuse rectangulaire inclinée saturée par un fluide binaire soumise à des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleurs et de concentration) ou Dirichlet (température et concentration constantes imposés). La loi de Dupuit-Darcy, tenant compte des effets de la trainée de forme pour des écoulements à haut nombre de Reynolds, a été utilisée pour établir les équations gouvernantes du système.

Grâce à l'approximation de Boussinesq, nous avons développé un modèle mathématique décrivant l'écoulement convectif et les transferts de chaleur et de masse. Le problème a été abordé en utilisant deux approches différentes pour résoudre les équations résultantes dans leur intégrité. En premier lieu la méthode numérique basée sur un schéma aux différences finies a été utilisée. En second lieu, pour le cas des cavités élancées soumises à des flux constants de chaleur et de masse, des solutions analytiques basées sur l'approximation de l'écoulement parallèle, ont été dérivées. Nous avons aussi étudié l'instabilité de la couche poreuse en utilisant la théorie de la stabilité linéaire. Les différents nombres de Rayleigh critiques marquant différents seuils de convection ont été obtenus. Les équations générales de base ainsi que les équations linéaires de stabilité ont été résolues numériquement, basée sur la méthode des éléments finies. L'influence de chacun des paramètres du problème a été discutée dans cette thèse. Ces paramètres sont le nombre de Rayleigh, R_T , le nombre de Prandtl modifié, P_r^*, le rapport de forme de la cavité, A , le rapport des forces de volume, N , la porosité normalisée, ε et le nombre de Lewis, Le . Les codes de calculs ont été validés en se basant sur les résultats disponibles dans la littérature.

Les principales conclusions tirées dans cette étude sont résumées ci-dessous :

7.1 Simple diffusion: *N*=0

7.1.1 Couche horizontale: Φ=0°

Dans ce cas, nous avons étudié les effets de la trainée de forme et le seuil de bifurcation de Hopf en convection Dupuit-Darcy dans une cavité horizontale soumise à un gradient thermique vertical, en imposant un flux de chaleur constant sur les parois horizontales.

Comme observations finales, le régime d'écoulement de convection Dupuit-Darcy est caractérisé par l'existence d'un écoulement parallèle; l'augmentation de l'effet de la trainée de forme affaiblit à la fois la convection et le taux de transfert de chaleur. L'effet de la trainée de forme n'a pas affecté le seuil du déclanchement de convection stationnaire R_{TC}^{sup}. Cependant, il y avait une forte influence sur l'apparition de la bifurcation de Hopf. En général, pour les écoulements convectifs unicellulaires ou multiples, le seuil de bifurcation de Hopf augmente avec la diminution du coefficient de la trainée de forme qui joue le rôle d'un paramètre de stabilisation d'écoulement. Pour une valeur du nombre Raleigh élevé, la perte de la symétrie a été remarquée pour le modede convection de deux cellules, et ceci quelque soit le coefficient de la trainée de forme. Comme on le sait, dans le régime de convection de Darcy pur avec un nombre de Rayleigh élevé, l'intensité de l'écoulement varie avec R_T en tant que $|\Psi_0| = \sqrt{5/12} R_T^{1/2}$ et le nombre de Nusselt tend asymptotiquement vers *Nu*=6. Dans le régime de convection Dupuit, l'intensité de l'écoulement est corrélée en tant que $|\Psi_0| = (2/27)^{1/3} \left(R_T P_r^*\right)^{1/3}$ et le nombre de Nusselt tend asymptotiquement vers *Nu*=5. Pour les nombres de Rayleigh relativement élevés, des solutions convectives, stables, multiples et multicellulaires avec différents modes de convection ont été trouvées.

7.1.2 Couche inclinée :

Pour un ensemble donné de paramètres de contrôle, R_T et Φ, il a été constaté que la force de convection (Ψ_0) et le transfert de chaleur (*Nu*) résultants diminuent quand la valeur du paramètre de la trainée de forme P_r^* diminue.

L'orientation de l'enceinte comporte, pour des valeurs données de R_T et P_r^*, un grand effet sur le transfert de chaleur par convection. Indépendamment de la valeur du paramètre de la trainée de forme, le transfert de chaleur maximum se produit lorsque la couche est chauffée par le bas $(0° \le \Phi \le 90°)$. Pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh, les maximums du nombre Nusselt se produisent à des angles données Φ_m qui dépend considérablement de P_r^*.

7.2 Double diffusion : $N<0$, $S_r=0$

7.2.1 Couche horizontale : Φ=0°

Dans le cas d'une cavité horizontale soumise à des gradients constants de température et de concentration, l'étude a été principalement axée sur le comportement non linéaire de la

convection souscritique et la bistabilité causée par les effets de la trainée de forme et la convection induite par double diffusion. Les principales conclusions de la présente analyse sont les suivantes :

1) Une solution analytique sur la base de l'approximation parallèle est dérivée pour le cas d'une couche infinie (A>>1). Des études antérieures sur ce sujet (voir par exemple : Mamou et Vasseur (1999a) et Bahloul et al. (2003)) ont démontré que, en absence des effets de la trainée de forme $\left(P_r^* \to \infty\right)$, l'apparition du mouvement dépend fortement du signe du paramètre de la flottabilité N. Ainsi, pour (N>0), c'est-à-dire quand les forces de volume sont coopérantes, le seuil de l'apparition de la convection se produit à un nombre de Rayleigh supercritique donné, R_{TC}^{sup}. Puisque les forces de volume agissent dans le même sens et qu'elles tendent toutes deux à déstabiliser le système, la convection est dite coopérante. Quand la bifurcation résultante se produit à l'état de repos, on a constaté que ce critère n'est pas affecté par le paramètre de la trainée de forme. Cependant, pour les forces de volume thermique et solutale opposées (N<0), la solution analytique prédit que le seuil de mouvement peut être souscritique R_{TC}^{sous}, c'est-à-dire, se produisant à une convection d'amplitude finie. En particulier, il est constaté que les formes des courbes de bifurcation peuvent être considérablement modifiées par le paramètre de la trainée de forme. Ainsi, pour ($P_r^* \to \infty$) les diagrammes de bifurcation souscritiques classiques sont possibles, tandis que pour ($P_r^* \to 0$) les bifurcations sont de type de fourche supercritique. Entre ces deux limites, les courbes de bifurcation présentent une configuration plus complexe. Elles peuvent consister en une branche inférieure supercritique s'étendant entre $R_{TC}^{\sup}$ £ R_{TC} £ R_{TC}^{tur} et une branche supérieure souscritique pour $R_T \geq R_{TC}^{sous}$. Les deux points de retournement R_{TC}^{tur} et R_{TC}^{sous} sont reliés l'un à l'autre par une branche instable.

2) Pour un ensemble donné des paramètres régissant R_T, N et Le, on constate que l'intensité de l'écoulement (Ψ_0) et les transferts de chaleur (Nu) et de masse (Sh) diminuent quand la valeur du nombre de Prandtl modifié P_r^* diminue. En fait, pour ($P_r^* \ll 1$) l'état de repos est finalement atteint, dans lequel les transferts de chaleur et de masse sont gouvernés par conduction ($\Psi_0 \to 0$, Nu=$Sh \to 1$).

3) Comme prévu, le nombre de Prandtl modifié n'a aucune incidence sur les nombres de Rayleigh critiques dans l'apparition du mouvement tel que prédit par la théorie de la stabilité linéaire, à savoir R_{TC}^{sup}, R_{TC}^{sur} et R_{TC}^{osc}. Cependant, l'effet du nombre de Prandtl modifié a une forte influence sur l'apparition de convection d'amplitude finie qui se produit à un nombre de

Rayleigh souscritique R_{TC}^{sous}, comme prédit par le modèle non linéaire. En outre, la théorie de la stabilité indique que P_r^* affecte considérablement l'apparition de la bifurcation de Hopf R_{TC}^{Hopf}.

4) Pour un ensemble donné des paramètres régissant, les résultats analytiques et numériques indiquent l'existence de six solutions différentes (quatre stables et deux instables). Il a été démontré que ce phénomène ne dépend pas du rapport d'aspect de la couche, ni du type de conditions aux limites thermiques et solutales appliquées sur le système.

5) Les caractéristiques ci-dessus prédites par le modèle analytique et la théorie de la stabilité linéaire sont confirmées par une solution numérique des équations de gouvernance complètes. Il faut mentionner que les résultats présentés ne concernent que le cas des flux opposés ($N \leq 0$). Cependant, la présente théorie peut être également appliquée dans le cas où les forces de volume sont coopérantes ($N \geq 0$).

7.3 Double diffusion et l'effet de Soret : S_r=0 et S_r=1

7.3.1 Couche verticale : Φ=90° et *N*=-1

La convection naturelle dans une couche poreuse verticale remplie par un fluide binaire a été étudiée à la fois analytiquement et numériquement. La situation particulière des forces de flottabilité (force de volume) de même intensité et de sens contraire a été considérée. Les deux cas où la convection naturelle est induite par double diffusion ($S_r = 0$) et par l'effet Soret ($S_r = 0$) ont été considérés. Les principales conclusions de la présente investigation sont les suivantes :

1) La stabilité de l'état de repos a été étudiée sur la base de la théorie linéaire. Il a été trouvé que, pour une couche verticale infinie, le début de mouvement stationnaire $\left(R_{TC}^{\sup}\right)$ et oscillant $\left(R_{TC}^{sur}\right)$ dépend de *Le*, ε et S_r. La stabilité du système a été également étudiée en utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle. La solution résultante non linéaire indique que le seuil de mouvement d'amplitude finie se produit à un certain nombre de Rayleigh souscritique $\left(R_{TC}^{sous}\right)$ qui est fonction de P_r^*, *Le* et S_r.

2) Dans le cas d'une cavité élancée (*A*>>1), une approximation d'écoulement parallèle a été supposée pour laquelle une solution semi-analytique est possible. On observe que le mode de convection unicellulaire résultant est en excellent accord avec la solution numérique des

équations gouvernantes. On constate que, pour un ensemble donné de paramètres de contrôle R_T, Le et S_r, l'intensité de l'écoulement (Ψ_0), le transfert de chaleur (Nu) et le transfert de masse (Sh) diminue quand P_r^* est plus faible. En fait, pour $\left(P_r^* \to \infty\right)$, l'état de repos est finalement atteint, pour lequel $\Psi_0 \to 0$ et $Nu = Sh \to 1$. Dans le régime de convection Dupuit ($P_r^* \gg 1$) le modèle semi-analytique montre qu'indépendamment des valeurs des paramètres de contrôle, Nu=Sh→4 alors que comme on le sait, dans le régime de convection de Darcy pur, $Nu = Sh \to \pi^2/\pi^2 - 8$ quand le nombre de Rayleigh est suffisamment grand. Cependant, cette limite peut être seulement théorique, car une transition vers la convection oscillante peut se produire à un R_T très élevé. Globalement, la trainée de forme a un effet stabilisateur, ce qui provoque le retard de l'apparition de la convection souscritique et de la bifurcation de Hopf et la réduction substantielle du mouvement de convection. Ainsi, lorsque les paramètres de contrôle sont tels que $\left(R_{TC}^{sur},\ R_{TC}^{osc},\ R_{TC}^{\sup} < R_{TC}^{sous}\right)$, la présente étude montre l'existence de régimes d'écoulements multicellulaires stables et oscillants. En outre, il est démontré numériquement que plusieurs solutions sont possibles.

3) En fonction des valeurs du paramètre de la trainée de forme, l'apparition de la convection souscritique pourrait dépasser le seuil de convection supercritique provoquant l'existence d'une variété de solutions diverses d'écoulement. Ceci conduit évidement à l'existence d'un problème de bi-stabilité avec une boucle d'hystérésis se produisant au-delà du seuil de convection stationnaire.

Dans la présente étude, le modèle mathématique est basé sur de nombreuses hypothèses simplificatrices. En pratique, les milieux poreux ne sont pas isotropes et les fluides pas toujours Newtonien. Pour approfondir les connaissances dans ce domaine il serait intéressant de reprendre la même étude pour un milieu poreux non-Newtonien, anisotrope, en perméabilité, en conductivité thermique. Il sera aussi intéressant de considéré des configurations géométriques autres que celles étudiées dans ce mémoire. Il est recommandé de généraliser le modèle utilisé par une approche tridimensionnelle qui tient compte des géométries complexes et d'autres conditions aux limites. L'objectif important, sur lequel il conviendra sans doute de porter des efforts prioritaires, est la vérification des résultats obtenus par voie expérimentale.

RÉFÉRENCES

Alavyoon F. On natural convection in vertical porous enclosures due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries. Int. J. Heat and Mass Transfer, 36, 2479-2498, (1993).

Alavyoon F., Masuda Y and Kimura A. S. On natural convection in vertical porous enclosures due to opposing fluxes of heat and mass prescribed at the vertical walls. Int. J. Heat and Mass Transfer, 37, 195-206, (1994).

Alloui Z., Dufau L., Beji H and Vasseur P. Multiple steady states in a porous enclosure partially heated and fully salted from below. Int. J. Thermal Sciences 48, 521-534, (2009).

Alloui Z., Merabtine A and Vasseur P. Soret and thermosolutal effects on natural convection in a vertical cavity filled with a binary mixture. The Canadian Journal of Chemical Engineering 88: 718-727, (2010).

Alloui Z and Vasseur P. Convection of a binary fluid in a shallow porous cavity heated and salted from the sides. Computers and Fluids. 81, 85-94, (2013a).

Alloui A and Vasseur P. Onset of Marangoni convection and multiple solutions in a power-law fluid layer under a zero gravity environment. Int. J. Heat and Mass Transfer, 58, 43-52, (2013b).

Bahloul A., Boutana N and Vasseur P. Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer. J. Fluid Mech, 491, 325-352, (2003).

Bahloul A., Vasseur P and Robillard L. Convection of a binary fluid saturating a shallow porous cavity subjected to cross heat fluxes. J. Fluid Mech, 574, 317-342, (2007).

Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics, Chapiter 3. Cambridge University Press, London (1967).

Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. Elsevier, (1972).

Beckerman C and Viskanta R. Double-diffusive convection during dendritic solidification of binary mixture. Physico Chem. Hydrodyn., Vol. 10, pp. 195-213, (1988).

Bejan A. Convection Heat Transfer. 2nd ed. Wiley, New York (1995).

Benhadji K. Convection thermo-solutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide non newtonien binaire, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada, (2001).

Bennacer R., Tobbal A., Beji H and Vasseur P. Double Diffusive Convection in a Vertical Enclosure Filled with Anisotropic Porous Media. Int. J. Thermal Sciences, 40, 1, 30-41, (2001).

Bennacer R., Tobbal A and Beji H. Convection naturelle thermosolutale dans une Cavite poreuse anisotrope: formulation de Darcy-Brinkman. Rev. Energ. Ren. Vol. 5, 1-21, (2002).

Bera P and Khalil A. Double-diffusive natural convection in an anisotropic porous cavity with opposing buoyancy forces: multi-solutions and oscillations. Int. J. Heat and Mass Transfer vol. 45, pp. 3205-3222, (2002).

Bertholz R. F. Instability of steady natural convection in a vertical layer. J. Fluid Mechanics, 84, 743-768, (1978).

Bourich M., Hasnaoui M., Amahmid A and Mamou M. Soret driven thermosolutal convection in a shallow porous enclosure. Int. Comm. Heat and Mass Transfer, 29 (5) : 717-728, (2002).

Bourich M., Amahmid A and Hasnaoui M. Double diffusive convection in a porous enclosure submitted to cross gradients of temperature and concentration. Energy Conv. Management, 45, 1655-1670, (2004a).

Bourich M., Hasnaoui M., Mamou M and Amahmid A. Soret effect inducing subcritical and Hopf bifurcations in a shallow enclosure filled with a clear binary fluid or a saturated porous medium: A comparative study. Physics of Fluids, 16 (3) : 551-568, (2004b).

Boussinesq J. Théorie analytique de la chaleur. Gauthier-Villars, Paris, (1903).

Bories S. A. Fragment de description de la physique des transferts thermiques dans le sous-sol. Vol. 3. La Houille Blanche, (1985).

Brand H and Steinberg V. Nonlinear effect in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold. Physics Letters, 93A, 333-336, (1983a).

Brand H and Steinberg V. Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium. Physica A : Statistical and Theoretical Physics, 119 (1-2) :327-338, (1983b).

Brand H. R., Hohenberg P. Cand Steinberg V. Codimension-2 bifurcations for convection in binary fluid mixtures. Phys. Rev. A, 30 (5) :2548, (1984).

Brinkman H. C. A calculation for the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particules. Appl. Sci. Res., Vol A1, pp. 27-34, (1947).

Cai X. M., Barlow J. F and Belcher S. E. Dispersion and transfer of passive scalars in and above street canyons-Large-eddy simulations. Atmospheric Environment. 42, 5885-5895, (2008).

Chen F and Chen C. F. Double-Diffusive convection in a porous medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 36, 793-807, (1993a).

Chen F and Chen C. F. Double-Diffusive fingering convection in a porous medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 36, 798-807, (1993b).

Cormack D. E., Leal L.G and Imberger J. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls, Part.1, Asymptotic theory. J. Fluid Mechanics, 65, 209-230, (1974).

Collins R. E. Flow of fluids through porous materials. New York, Reinhold Publishing Corp., 270 p, (1961).

Darcy H. P. C. Les fontaines publiques de la ville de Dijon (Victor Dalmont, Paris, 1856).

De Groot S. R and Mazur P. Non-equilibrium thermodynamics. North Holland, (1962).

Dhont J. K. G. Thermodiffusion of interacting colloids. I. A statistical thermodynamics approach. Journal of Physical Chemistry, 120 (3) : 1632-1641, (2003a).

Dhont J. K. G. Thermodiffusion of interacting colloids. II. A statistical thermodynamics approach. Journal of Physical Chemistry, 120 (3) : 1632-1641, (2003b).

Dupuit J. E. J. Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables (Victor Datmont, Paris, 1863).

Dybbs A and Edwards R. V. A new look at porous media fluid mechanics Darcy to turbulent. Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media Martinus Nishoff, Dordrecht, pages 199-256, (1984).

El Hajjar B. Sur le couplage thermodiffusion-convection : séparation et instabilités induit par de nouvelles configuration géométriques et thermiques. Thèse de doctorat, (IMFT) Toulouse, (2008).

Ergun S. Fluid flow through packed columns. Chem. Eng. Prog. 48, 89-94, (1952).

Er-Raki M., Hasnaoui M., Amahmid A and Bourich M. Subcritical convection in the presence of Soret effect within a horizontal porous enclosure heated and salted from the short sides. Int. J. Num. Methods Heat and Fluid Flow. 21 (2), pp. 150-167, (2011).

Forchheimer P. Wasser bewe gung durch Boden. VDIZ. 45, 1782-1788, (1901).

Frankel S. P. Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. Math Tables and Other Aids to Computations, 4, 65-75, (1950).

Ghorayeb K and Mojtabi A. Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity. Phys Fluids. 9 (8), 2339-2348, (1997).

Goyeau B. J., Songbe P and Gobin D. Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy-Brinkman formulation. Int. J. Heat and Mass Transfer, 39 (7) 1363-1378, (1996).

Gray D. D and Giorgini A. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 19, pp. 545-551, (1976).

Hadim H. Non Darcy natural convection of a non-newtonian fluid in a porous cavity. Int. Comm. Heat and Mass Transfer. 33, 1179-1189, (2006).

Hasnaoui M. Étude numérique de la convection dans un champ de cavité. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada, (1991).

Horton C. W and Rogers F. T. Convection currents in a porous medium. J. App. Phys. 16, 367-370, (1945).

Joly F., Vasseur P and Labrosse G. Soret-driven thermosolutal convection in a vertical enclosure. Int. Comm. Heat Mass Transfer. 27 (6), 755-764, (2000).

Joly F., Vasseur P and Labrosse G. Soret instability in a vertical Brinkman porous enclosure. J. Num. Heat Transfer, Part A, 39 (4), 339-359, (2001).

Joseph D. D., Nield D. A and Papanicolaou G. Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium. Water Resour. Res. 18 (4), 1049-1052, doi:10.1029/WR018i004 p01049, (1982).

Jue T. C. Analysis of Bénard convection in rectangular cavities filled with a porous medium. Acta Mechanica. 146, 21-29, (2001).

Kalla L. Convection thermosolutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide binaire. PhD Université de Montréal Canada, (2004).

Kalla L., Mamou M., Vasseur P and Robillard L. Multiple solutions for double diffusive convection in a shallow porous cavity with vertical fluxes of heat and mass. Int. J. Heat and Mass Transfer, 44, 4493-4504, (2001).

Karimi-Fard M., Charrier-Mojtabi M. C and Vafai K. Non-Darcian effects on double-diffusive convection within a porous medium. Num. Heat Transfer, A 31, 837-852, (1997).

Karimi-Fard M., Charrier-Mojtabi M. C and Mojtabi A. Onset of stationary and oscillatory convection in a tilted porous cavity saturated with a binary fluid: linear stability analysis. Physics of Fluids. 11 (6), 1346-1358, (1999).

Kimura S., Vynnycky M and Alavyoon F. Unicellular natural circulation in a shallow horizontal porous layer heated from below by a constant flux. J. Fluid Mech, 294, 231-248, (1995).

Kladias N and Prasad V. Experimental verification of Darcy-Brinkman-Forchheimer flow model for natural convection in porous media. J. Thermophysics and Heat Transfer, Vol 5 No. 4, 560-575, (1990a).

Kladias N and Prasad V. Natural convection in horizontal porous layer: effects of Darcy and Prandtl numbers. J. Heat Transfer 111, 926-935, (1989).

Kladias N and Prasad V. Flow transitions in buoyancy induced non-Darcy convection in a porous medium heated from below. J. Heat Transfer 112, 675-684, (1990b).

Kozeny J. Flow in porous media. S. B. Akad. Wiss, 2a: 126, (1927).

Lage J. L. The fundamental theory of flow through permeable media from Darcy to turbulence, in transport phenomena in porous media, Edited by D. B. Ingham and I. Pop, Pergamon, 1-30, (1901).

Lage J. L., Bejan A and Georgiadis J. G. The Prandtl number effect near the onset of Bénard convection in a porous medium. Int. J. Heat and fluid 13 No. 4, 408-411, (1992).

Lage J. L and Antohe B. V. Darcy's experiments and the deviation to nonlinear flow regime. J. Fluids Engineering, 122, 619-625, (2000).

Lapwood E. R. Convection of fluid in a porous medium. Proc. Cambridge Phil. Soc, 508-521, (1948).

Lauriat G and Prasad V. Non-Darcian effects on natural convection in a vertical porous enclosure. Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol. 32, No. 11, pp. 2135-2148, (1989).

López M de Haro., Cohen E. G. D and Kincaid J. M. The Enskog theory for multicomponent mixtures. IV. Thermal diffusion. Journal of Chemical Physics, 86 (2) : 963-975, (1987).

Ludwig C. Diffusion zwichen unfleigh erwärmten orten gleich zusammengesetz losüngen. Akad. Wiss. Wien. Math Naturwiss, 20 : 539, (1856).

Mahidjiba A. Convection naturelle thermosolutale au sein d'une couche poreuse horizontale, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada, (1998).

Mahidjiba A., Robilard L and Vasseur P. Onset of penetrative convection of cold water in a porous layer under mixed boundary conditions. Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 49, 2820-2828, (2006a).

Mahidjiba A., Bennacer R and Vasseur P. Flows in a fluid layer induced by the combined action of a shear stress and the Soret effect. Int. J. Heat and Mass Transfer, 49, 1403-1411, (2006b).

Mamou M. Convection naturelle dans une cavité incline à partition multiples. Thèse de Maitrise, École Polytechnique de Montrèal, Canada, (1993).

Mamou M., Vasseur P and Bilgen E. Multiple solutions for double-diffusive convection in a vertical porous enclosure. Int. J. Heat and Mass Transfer, 38, 10, 1787-1798 (1995a).

Mamou M., Vasseur P., Bilgen E and Gobin D. Double-diffusive convection in an inclined slot filled with porous medium. Eur. J. Mechanics, B/Fluids, 14, 629-652, (1995b).

Mamou M., Vasseur P and Bilgen E. Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure. J. Heat and Mass Transfer, 32, 115-125, (1996).

Mamou M., Vasseur P and Bilgen E. Double-diffusive convection instability in a vertical porous enclosure. J. Fluid Mech. 368, pp. 263-289, (1998a).

Mamou M., Hasnaoui M., Amahmid A and Vasseur P. Stability analysis of double diffusive convection in a vertical Brinkman porous enclosure. Int. Comm. Heat Mass Transfer. 25 (4), 491-500, (1998b).

Mamou M., Vasseur P and Bilgen E. A Galerking finite-element study of the onset of double-diffusive convection in an inclined porous enclosure. Int. J. Heat and Mass Transfer. 41 (11), 1513-1529, (1998c).

Mamou M. Convection thermosolutale dans des milieux fluides et poreux confinés. PhD Université de Montréal Canada, (1998d).

Mamou M and Vasseur P. Thermosolutal bifurcation phenomena in a porous enclosure subject to vertical temperature and concentration gradients. J. Fluid Mechanics, 395, 61-87, (1999a).

Mamou M and Vasseur P. Hysterisis effect on thermosolutal convection with opposed buoyancy forces in inclined enclosures. Int. Comm. Heat Mass Transfer. 26 (3), 421-430, (1999b).

Mamou M. Stability analysis of thermosolutal convection in a vertical packed porous enclosure. Physics of Fluids. 14 (12), 4302-4314, (2002).

Mamou M. Stability analysis of the perturbed rest state and of the finite amplitude steady double-diffusive convection in a shallow porous enclosure. Int. J. Heat and Mass Transfer, 46, 12, 2263-2277, (2003).

Mansour A., Amahmid A and Hasnaoui M. Soret effect on thermosolutal convection developed in a horizontal shallow porous layer salted from below and subject to cross fluxes of heat. Int. J. Heat Fluid Flow, 29, 306-314, (2008).

Marcoux M., Charrier-Mojtabi M. C and Bergeon A. Naissance de la thermogravitation dans un mélange binaire imprégnant un milieu poreux. Entropie. 214, pp. 31-36, (1998).

Mohamad A and Bennacer R. Double diffusion, natural convection in an enclosure filled with saturated porous medium subjected to cross gradients; stably stratified fluid. Int. J. Heat and Mass Transfer. 45, (18), 3725-3740, (2002).

Murray B. T and Chen C. F. Double-Diffusive convection in a Porous Medium. J. Fluid Mech., 201, 147-166, (1989).

Nawaf H. S and Pop I. Non Darcy natural convection in a square cavity filled with a porous medium. Fluid Dynamics Research. 36, 35-43, (2005).

Neal G and Nader W. Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law: coupled parallel flows within a channel and bounding porous medium. The Canadian J. Chem. Eng., Vol. 52, pp. 475-478, (1947).

Nield D. A. Onset of thermohaline convection in a porous medium. Water Resour. Res. 4 (3), 553-560, (1968).

Nield D. A and Joseph D. D. Effects of quadratic drag on convection in a porous saturated porous media. Brief Communication in Phys. Fluids, 28 (3) 995-997, (1985).

Nield D. A and Bejan A. Convection in porous media, (2nd edn), Springer-Verlag, New York. (2005).

Oberbeck A. Ueber die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der strömungen infolge von temperaturdifferenzen. Annalen der Physik und Chemie, 243(6) : 271-292, (1879).

Palm E., Weber J. A and Kvernvold O. On steady convection in a porous medium. J. Fluid Mechanics, 54. part 1, pp. 153-161, (1972).

Podolny A., Oron A and Nepomnyashchy A. A. Long-wave Marangoni instability in a binary-liquid layer with deformable interface in the presence of Soret effect: Linear theory. Physics of Fluids, 17 :104104, (2005).

Poulikakos D. Double diffusive convection in a horizontal sparsely packed porous layer. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 13, 587-598, (1986).

Prasad A and Tuntomo A. Inertia effects on natural convection in a vertical porous cavity. Numerical Heat Transfer .Vol. 11, pp. 295-320, (1987).

Prigogine I., De Brouckère L and Amand R. Recherche sur la thermodiffusion en phase liquide (1ème communication). Physica XVI, (11-12) : 851-860, (1950a).

Prigogine I., De Brouckère L and Amand R. Recherche sur la thermodiffusion en phase liquide (2ème communication). Physica XVI, (11-12) : 851-860, (1950b).

Ranganathan P and Viskanta R. Natural convective in a square cavity due to combined driving forces. Num. Heat Transfer, 14, 35-59, (1988).

Resenberg N. D and Spera F. J. Thermohaline convection in a porous medium heated from below. Int, J. Heat and Mass Transfer, 35, 1261-1273, (1992).

Rudraiah N., Srimani P. K and Friedrich R. Finite amplitude convection in a two component fluid saturated porous layer. Int. J. Heat and Mass Transfer. 25 (5), 715-722, (1982).

Sen M., Vasseur P and Robillard L. Multiple steady states for unicellular natural convection in an inclined porous layer. Int. J. Heat and Mass Transfer, 3, 587-598, (1987).

Sidiropoulou M. G., Moutsopoulos K. N and Tsihzintzis V. A. Determination of Forchheimer equation coefficients a and b. Hydrol. Proces.21, 534-554, (2007).

Soret C. Sur l'état d'équilibre que prend au point de vue de sa concentration une dissolution saline primitivement homogène dont deux parties sont portées à des températures différentes. Arch. Sci. Phys. Nat. 2 : 187, (1879).

Stern M. E. Collective instability of salt fingers. Journal of Fluid Mechanics, 35(2). 209-218, (1969).

Stommel H., Arons A. B and Blanchard D. An oceanographic curiosity: the perpetual salt fountain. Deep-Sea Research, 3,152-153, (1956).

Tauntom J and Lightfoot E. N. Temohaline instability and salt fingers in porous medium. The Physics of Fluids, 15, 748-753, (1972).

Trevisan O. V and Bejan A. Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in porous medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 29, 1597-1611, (1985).

Trevisan O. V and Bejan A. Mass and heat transfer in a vertical slot filled with porous medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 29, pp. 403-415, (1986).

Vafai K and Kim S. J. On the limitation of the Brinkman-Forchheimer-extended Darcy equation. Int. J. Heat and Fluid Flow 16, 11-15, (1995).

Vasseur P., Satish M. G and Robillard L. Natural convection in a thin inclined porous layer exposed to a constant heat flux. In. J. Heat and Mass Transfer. 30 (3), 537-549, (1987).

Vasseur P., Robillard L and Sen N. The Brinkman model for natural convection in a shallow porous cavity with uniform heat flux. Numerical Heat Transfer, 15, 221-242, (1989).

Ward J. C. Turbulence flow in porous media, Proceedings of A. S. C. E. Journal of Hydraulics Division, 90, n° Hy. 5, September (1964).

Wiegand S. Thermal diffusion in liquid mixtures and polymer solution. Journal of Physics : Condensed Matter, 16 :R357-R379, (2004).

Xin S., Le Quéré P and Tuckerman L. S. Bifurcation analysis of double-diffusive convection with opposing horizontal thermal and solutal gradients. Phys Fluids 10 (4), 850-858, (1998).

Zhang M and Müller-Plathe F. Reverse nonequilibrium molecular-dynamics calculation of the soret coefficient in liquid benzene/cyclohexane mixtures. The Journal of Chemical Physics, 123:124502, (2005).

LISTE DES TRAVAUX RELEVANT DE LA THÈSE

Publications Internationales

1) R. Rebhi, M. Mamou & M. Alliche. Form drag effect and Hopf bifurcation in Dupuit-Darcy thermal convection in a shallow well packed porous enclosure. Physics of Fluids 26, 074104 (2014).

2) R. Rebhi, M. Mamou, P. Vasseur and M. Alliche. Form drag effect on the onset of non-linear convection and Hopf Bifurcation in Binary Fluid Saturating a tall porous cavity. International Journal of Heat and Mass Transfer 100 (2016) 178-190.

3) R. Rebhi, M. Mamou, P. Vasseur. Bistability and hysteresis induced by form drag in nonlinear subcritical and supercritical double-diffusive Lapwood convection in porous enclosures. J. Fluid Mech. (2016).

4) Z. Alloui, R. Rebhi, M. Mamou and P. Vasseur. Effects of quadratic drag on natural convection in a tilted porous layer with uniform heat flux from the side. (**article soumis** au **International Journal of Heat and Fluid Flow**).

Communications Internationales et Nationales

1) R. Rebhi, M. Alliche and **M. Mamou.** Étude Numérique et Analytique des Effets de la Traînée de Forme sur la Convection Naturelle dans une Couche Poreuse Horizontale. Conférence International sur les Energies, Matériaux et Environnement Khemis Miliana, 02-03 Décembre, (2012).

2) R. Rebhi, M. Alliche and **M. Mamou**. L'effet de la de Trainée de Forme et Hopf Bifurcation en Convection Thermique Darcy-Dupuit au sein d'une Couche horizontale Poreuse Soumise à des Flux de Chaleur constants. Séminaire International sur les Technologies Mécaniques Avancées **STEMA**, Tlemcen, 08-09 Novembre (2014).

3) M. Alliche, R. Rebhi, M. MAMOU, A. Korichi. Validation of Turbulence Models for Simulation of Turbulent Flow of Air Around an Obstacle Square Section International Conference on Materials & Energy 2016, La Rochelle, France (2016).

4) R. Rebhi, M. Alliche, **M. Mamou**. L'effet de la Force de Trainée de Forme en Convection Naturelle Darcy-Dupuit dans une Cavité Horizontale. 4^{émes} journées sur la Mécanique, Batna, 27-28 Novembre, (2013).

5) R. Rebhi, M. Alliche, M. Mamou et **A. Korichi**. Validation des modèles de turbulence pour la simulation des écoulements turbulents de l'air autour d'un obstacle à section carrée. Second International Conference on Applied Energetic and Pollution CIEAP 2014, December 14-15, (2014) Constantine-Algeria, Vol 1. ISBN : 978-9931-9229-0-2.

6) R. Rebhi, M. Alliche, **M. Mamou** and **P. Vasseur**. Non-Darcian Effects on Subcritical Rayleigh-Benard Convection in a Shallow Porous Enclosure Filled with a Binary Fluid . The first Conference on Mechanical, Energy and Material Engineering, Biskra, 8-9 December (2015).

7) R. Rebhi, M. Alliche, **M. Mamou** and **P. Vasseur.** Étude numérique et analytique du transfert thermique par convection naturelle dans des couches poreuses. CFD & Tech , 02-03 Mai (2016), CRND-Draria, Alger.