République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

ABDELLATIF Wafaa

Existence et régularité de solutions pour quelques problèmes elliptiques singuliers

Membres du jury :

Encadreur :	R. SOUILAH	*M.C.B*	Université de Médéa
Examinateur 1 :	H. AYADI	*M.C.B*	Université de Médéa
Examinateur 2 :	N. BENAICHOUCHE	*M.A.A*	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes exemples éternels, mes soutiens moral et source de joie et de bonheur, ceux qui se sont toujours sacrifiés pour me voir réussir, ma mère et mon père.

A mes sœurs, mes neveux, mes nièces et toute ma famille.

A tous mes enseignants et mes collègues qui m' accompagnaient durant mon chemin d'étude.

ABDELLATIF Wafaa

Remerciements

Au début et avant tout, je remercie le Dieu avoir aidé à mener jusqu'à la fin de travail, et ma famille, pour son amour et son soutien constant.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à ***Monsieur R. SOUILAH*** *avoir encadré ce travail et pour les conseils efficaces et encore plus pour tout le temps qu'il m'a consacré pour me suivre pendant la rédaction de ce travail.*

Je voudrais aussi remercier chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'accepter d'évaluer et examiner mon travail.

Mes remerciements les plus sincères sont adressés à mes enseignants, qui ont contribué durant nos études à notre formation et tous les enseignants de l'Université ***YAHIA Fares de Médéa****.*

Merci a tous.

Résumé

Dans ce mémoire, On étudiera l'existence et la régularité de solutions pour quelques problèmes elliptiques semi-linéaires avec un terme d'ordre zéro ayant un comportement singulier.

Mots-clés : Problèmes elliptiques, problèmes singuliers, régularité, solutions faibles, solutions au sens des distributions.

Abstract

In this memoir, we will study the existence and regularity of solutions for some semilinear elliptic problems with a zero order term having singular behaviour.

Key word : Elliptic problems, singular problems, regularity, weak solutions, distributional solutions.

Notation

$\mathbb{R}^N$: L'espace Euclidien de dimension N.

Ω : Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$: La frontière topologique de Ω.

$\overline{\Omega}$: L'adhérence de l'ensemble Ω.

$|\Omega|$:La mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.

V : Un espace de Banach.

V' : Le dual topologique de V.

$\langle ., . \rangle_{V' \times V}$: Le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'.

$\|.\|_V$: La norme sur l'espace de Banach V.

H : Un espace de Hilbert.

$(.,.)$: Le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H.

$|.|$: La norme sur l'espace de Hilbert H.

$B_\rho(x_0)$: La boule de centre x_0 et de rayon $\rho > 0$.

$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$: La mesure de Lebesgue sur Ω.

$\alpha \in \mathbb{N}^N$: Un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

∂_i : La i-ième dérivée partielle ; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

∂^α : La dérivée d'ordre α; $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$: Le gradient de $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\operatorname{div} u$: La divergence du vecteur $u = (u_1, ..., u_N)$, $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial u_N}{\partial x_N}$.

$\rightharpoonup$: La convergence faible.

p.p. : Presque partout.

χ_E : La fonction indicatrice de l'ensemble E, $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

sign(x) : Le signe d'un nombre réel non nul x, sign$(x) = \frac{x}{|x|}$.

$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$: La partie positive et négative de la fonction f.

$\sup\limits_{x\in\Omega} ess(u)$: Le sup essentiel d'une fonction u sur Ω.

$$\sup_{x\in\Omega} ess(u) = \inf\{C > 0 \ ; \ |u(x)| \leq C \ \ p.p.\ x \in \Omega\}.$$

$\{u \geq k\} := \{x \in \Omega, u(x) \geq k\}$ pour une fonction donnée u.

supp$(u) := \overline{\{x \in \Omega \ ; \ u(x) \neq 0\}}$: Support d'une fonction u.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$: L'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.

$\mathcal{C}_c(\Omega)$: L'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))'$: L'espace des distributions.

$L^p(\Omega)$:L'espace de Lebesgue,

$$L^p(\Omega) = \begin{cases} \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \ \int\limits_\Omega |u|^p < +\infty\}, & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \sup\limits_{x\in\Omega} ess(u) < +\infty, & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\}$: Un espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: La fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

$W^{-1,p'}(\Omega)$: Le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega) \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$: Un espace de Sobolev.

$M(\Omega)$: L'espace des mesures de Radon dans Ω.

$M_b^+(\Omega)$: L'espace des mesures de Radon bornées et positives dans Ω.

$P' = \frac{p}{p-1}$: L'exposant conjugué de l'exposant p pour $1 \leq p \leq +\infty$.

$P^* = \frac{Np}{N-p}$: L'exposant critique de Sobolev pour $1 \leq p < N$.

$\omega \Subset \Omega$: ω sous ensemble ouvert de Ω avec $\overline{\omega} \subset \Omega$.

$\hookrightarrow$: L'injection.

Table des matières

Notations **vi**

Introduction **1**

1 Préliménaires **3**

1.1 Espaces de Lebesgue . . . 3
1.2 Distributions et mesures de Radon . . . 6
1.3 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ . . . 9
1.4 Astuce d'extraction une suite de sous-suite . . . 13
1.5 Théorèmes du point fixe . . . 14
1.6 0pérateurs monotones . . . 14

2 Quelques résultats d'existence et régularité pour un problème elliptique linéaire de type Dirichlet **17**

2.1 Existence de solutions faibles . . . 18
2.2 Régularités de solutions faibles du problème (2.1) . . . 22
2.3 Propriétés qualitatives de solutions faibles du problem (2.1) . . . 26
2.4 Problèmes de Dirichlet dans les espaces de Sobolev plus grand que $H_0^1(\Omega)$ . . . 27

3 Équations elliptiques semi-linéaires avec des non-linéarités singulières **34**

3.1 Position du problème . . . 34
3.2 Existence des solutions bornées . . . 35
3.3 Existence des solutions faibles non bornées . . . 43
3.4 Existence des solutions distributionnelles . . . 45

4 Équations elliptiques singulières avec des sources de mesure **48**

4.1 Position du problème . . . 48
4.2 Approximation . . . 49
4.3 Estimation à priori . . . 52

4.4 Passage à la limite 52

Conclusion **54**

Introduction

L'objectif de ce mémoire est l'étude de quelques problèmes elliptiques semi-linéaires avec un terme d'ordre zéro ayant un comportement singulier, plus précisément, on étudié les deux problèmes suivants :

$$(P1)\quad \begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u) = \dfrac{f}{u^\theta} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P2)\quad \begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u) = \dfrac{f}{u^\theta} + \mu & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N > 2$, et M est une matrice elliptique bornée, c'est à dire, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega,\ M$ vérifie les hypothèses suivants

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)| \leq \beta, \tag{1}$$

où α, β sont des constantes positives. On suppose en outre que $\theta \in]0,1[$, f est une fonction positive appartient à un certain espace de Lebesgue, et μ est une mesure de Radon bornée et positive. Des problèmes de ce type se posent dans la théorie de la conduction thermique dans les matériaux électriquement conducteurs, comme discuté dans [8], ainsi dans la théorie des fluides pseudoplastiques non newtoniens (voir [16]), et les catalyseurs chimiques hétérogènes (voir [16] et [19]).

Les approches classiques telles que le théorème du point fixe de Schauder 1.24 ou le théorème de surjectivité de Leray-Lions 1.31, ne peuvent pas être directement appliquées au problème $(P1)$ et $(P2)$ en conséquence de la singularité du terme d'ordre zéro $\frac{f}{u^\theta}$ par rapport à u. Pour surmonter cette difficulté, on va raisonner par approximation, en régularisant le problème $(P1)$ et $(P2)$ par une suite de problèmes réguliers qui peuvent se traiter par l'une des approches citées ci-dessus. Ensuite, on va montrer des estimations à priori sur les solutions d'approximation. Enfin, on va prouver la convergence de solutions d'approximation à une fonction qui résout le problème initial (voir [4] et [17]).

Le manuscrit de ce mémoire est divisé en quatre chapitres, organisés de la manière suivante :

Le chapitre 1 est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suite de ce travail.

Le chapitre 2 est un chapitre introductif qui sert à présenter la théorie d'existence et régularité de solutions pour le problème $(P1)$ et $(P2)$ sous la condition $\theta = 0$.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du problème $(P1)$.

Dans le chapitre 4, on considère le problème $(P2)$ avec f est une fonction positive appartient à l'espace $L^1(\Omega)$.

Chapitre 1

Préliménaires

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. on introduit quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les espaces fonctionnels et les espaces des mesures de Radon, ensuite on donne quelques définitions et résultats sur les opérateurs.

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1. *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :*

Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad mesurable, \quad \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

mini de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad mesurable, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ et de Hilbert Pour $p = 2$ muni de prouit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x)\ dx.$$

Proposition 1.1 (**Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$**).

1. *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.*
2. *Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*
3. *$L^1(\Omega)$ est séparable, ni réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.*
4. *$L^\infty(\Omega)$ ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.*

Démonstration. Voir [1] □

Lemme 1.1 (**Inégalité de Young**). *Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. pour tout réel positif a et b , on a*

$$ab \leq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q$$

Démonstration. Voir [5] □

Lemme 1.2 (**Inégalité de Young avec epsilon**). *Pour $a,b \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ et $p,q \geq 1$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a*

$$ab \leq \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{q}\,(\frac{b}{\varepsilon})^q$$

Théorème 1.2 (**Inégalité de Hölder**). *Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors $fg \in L^1$ et*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}$$

Démonstration. Voir [1] □

Lemme 1.3. *Soient $1 \leq p < +\infty$ et $a,b \geq 0$, on a*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$$

Démonstration. voir [1] □

Corollaire 1.3. *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

Définition 1.2 (**Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$**). *Soient $p \in [1,\infty[$,et $\{f_n, f\}$ une famille de $L^p(\Omega)$.*

- *on dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

- *on dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0, \quad \forall g \in L^{p'}$$

- *on dit que f_n converge faible $*$ vers f dans $L^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0, \quad \forall g \in L^1$$

Lemme 1.4 (**Lemme de Fatou**). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction mesurable, à valeurs dans $[0,+\infty[$ on a*

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\ dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n(x)\ dx.$$

Démonstration. Voir [12] □

Théorème 1.4 (**Théorème de convergence dominée**). *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que,*

1. *$f_n \longrightarrow f$ p.p. dans Ω.*
2. *il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leq g$ p.p. dans Ω.*

Alors

$$f_n \longrightarrow f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

Démonstration. Voir [12] □

Définition 1.3 (**Equi-intégrabilité**). *Soit $1 \leq p < \infty$,on dit qu'une suite de fonction $(f_n)_n$ de $L^p(\Omega)$ est equi-intégrable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall E \subset \Omega$ mesurable , avec $|E| < \delta$ on a $\int_E |f_n|^p < \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 1.5 (**Théorème de Vitali**). *Soient $1 \leq p < \infty$, et une suite de fonction $(f_n)_n$ dans $L^p(\Omega)$,on suppose que*

1. *$f_n \longrightarrow f$ p.p. dans Ω.*
2. *$(f_n)_n$ est equi-intégrable.*

Alors

$$f \in L^p(\Omega) \quad et \quad f_n \longrightarrow f \quad dans \quad L^p(\Omega)$$

Démonstration. Voir [13, Theorem B.101, page 674] □

Définition 1.4 (**Fonction de Carathéodory**). *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de Carathéodory si*

1. *$f(.,s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$.*
2. *$f(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue p.p. $x \in \Omega$.*

Définition 1.5 (**Opérateur de Nemitski**). *Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. on appelle l'opérateur de Nemitski relatif à f,l'opérateur N_f de la forme suivante $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$.*

Théorème 1.6. *Si f est de carathéodory et elle existe une fonction positive $a \in L^q(\Omega)$ et une constante $b > 0$, tels que*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p}{q}}$$

alors l'opérateur de Nemitski est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. Voir [3, theorem 3.6, page 17] □

1.2 Distributions et mesures de Radon

Définition 1.6. *On appelle support d'une fonction continue φ sur Ω, et on note supp(φ) l'ensemble définie par*

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \quad \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.7. *On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact, un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelé fonction test.*

Exemple 1. *La fonction φ définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

appartient à l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, où $\Omega = B(0,1)$ représente la boule unité de $\mathbb{R}^N$.

Proposition 1.7. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. voir [5]. □

Définition 1.8 (**Distributions**). *Le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ noté par $\mathcal{D}'(\Omega)$, un élément T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est appelé distribution sur Ω définie par*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \langle T\ , \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\mathcal{D}(\Omega)} = \langle T\ , \varphi \rangle. \end{array}$$

Définition 1.9 (**Distribution régulière**). *On dit que T est une distribution régulière s'il exite une fonction f appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$ telle que*

$$T(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.2}$$

On dénote cette distribution par T_f.

Définition 1.10. *Soit $K \subset \Omega$ compact, on noté*

$$\mathcal{D}_c(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \quad supp(\varphi) \subset K\}.$$

Définition 1.11 (**Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$**). *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on dit que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Définition 1.12 (**Dérivées aux sens de distributions**). *Soit $N \in \mathbb{N}^\star, k \in \{1, \ldots, N\}, \alpha \in \mathbb{N}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

On appelle dérivé partielle de T par rapport à la k-ième variable et on la note $\frac{\partial T}{\partial x_k}$, la distribution définie par

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

par récurrence, on définit la dérivé partielle de T d'ordre α par

$$\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.13 (**Suites régularisantes**). *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction positive telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\, dx = 1, \quad supp\, \varphi \subset \overline{B}(0,1)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonction $\varphi_n(x) = n^N \varphi(nx)$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\, dx = 1$, et $supp\, \varphi_n \subset B(0, \frac{1}{n})$. la suite de fonction $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée suite régularisante.

Exemple 2. *La suite de fonction $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui associe à la fonction (1.1) est une suite régularisante.*

Définition 1.14 (**Translation**). *Soient f une fonction de $\mathbb{R}^N$, et h un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^N$. La translation τ_h de f par h est une fonction de $\mathbb{R}^N$ définie par :*

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 1. *Il est facile de prouver que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est stable par translations, c'est à dire, $\tau_h \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ quand $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.*

Définition 1.15 (**Réflexion par rapport à l'origine**). *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^N$. On définit la fonction $\hat{f}$ par :*

$$\hat{f}(x) = f(-x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Définition 1.16 (**Produit de convolution**). *Soient $f, g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, on leur associe une fonction appelée produit de convolution de f et g, notée $f * g$ définie par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, dy$$

Théorème 1.8. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, soient $f \in L^P(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \longrightarrow f(x-y)g(y)$ est intégrable. alors le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, et*

$$\|f * g\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

De plus $f * g = g * f$.

Démonstration. Voir [5] □

Remarque 2. *En utilisant la translation et la réflexion, on peut écrire le produit de convolution $f*g$ comme suivant :*

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)(\tau_x \hat{g})(y)\, dy. \tag{1.3}$$

La formule (1.3) permet de définir la convolution d'une distribution régulière avec une fonction test.

Définition 1.17 (**Convolution d'une distribution régulière**). *Soit $T = T_f$ une distribution associé à la fonction localement intégrable f. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on peut définir le produit de convolution $T * f$ par :*

$$\begin{aligned}(T*f)(x) &= \int_\Omega f(y)(\tau_x\hat{\varphi})(y)\, dy \\ &= f(\tau_x\hat{\varphi}).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Maintenant on peut généraliser la formule (1.4) pour une distribution quelconque.

Définition 1.18 (**Convolution d'une distribution**). *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Leur produit de convolution est la fonction définie en chaque point par*

$$(T*\varphi)(x) = T(\tau_x\hat{\varphi}) = \langle T, \tau_x\hat{\varphi}\rangle, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Théorème 1.9. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $T*\varphi$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Voir [2, Theorem 3.5, page 90]. □

Le théorème suivant permet d'approcher une distribution par une suite de fonctions régulières.

Théorème 1.10. *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante, on note la régularisée de T par*

$$T_n = T*\varphi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ alors $T_n \longrightarrow T$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$, pour $n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration. Voir [13]. □

Définition 1.19 (**Mesure de Radon**). *Une mesure de Radon μ sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que pour tout compact K de Ω, il existe $C_K \geq 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$*

$$supp\, u \subset K \implies |\langle \mu, u\rangle| \leq C_K \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Définition 1.20. *L'espace des mesures de Radon sur Ω est définie par*

$$M(\Omega) = \{\mu : \mathcal{C}_c(\Omega) \to \mathbb{R} \quad \mu \text{ est linéaire et continue}\}$$

Remarque 3. *L'espace des mesures de Radon sur Ω est le dual de l'espace des fonctions continue à support compact.*

Définition 1.21. *L'espace $M(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme duale*

$$\forall \mu \in M(\Omega), \quad \|\mu\|_{M(\Omega)} = Sup\{|\langle \mu, \varphi \rangle| : \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}$$

Remarque 4. *Toute mesure de Radon est une distribution.*

Théorème 1.11. *Soit T une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ($T(\varphi) \geq 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0$), alors il existe une et une seule mesure de Radon μ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad T(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu$$

Démonstration. Voir [6, page 64] □

Théorème 1.12. *Pour tout $\mu \in M(\Omega)$, il existe une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ qui converge faiblement vers μ au sens des mesures telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} = \|\mu\|_{M(\Omega)}$$

Démonstration. Il suffit de prendre

$$\mu_n = \int_\Omega \rho_n(x - y) \, d\mu(y)$$

où $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante. □

1.3 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.22. *On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq +\infty$ par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < \infty \\ \\ \max\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\right) & si \quad p = \infty \end{cases}$$

pour $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.13. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, et séparable pour $1 \leq p < +\infty$, et réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

Démonstration. voir [5]. □

Définition 1.23. *Soit $1 \leq p < +\infty$, on note $W_0^{1,p}(\Omega)$ la ferméture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, (c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$), de plus, si Ω est Lipschitzien, alors*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

si $p > 1$, on note $W^{1,p'}(\Omega)$ au dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Définition 1.24 (**Convergence faible, convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$**).
Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\{f_n, f\}$ une famille de $W^{1,p}(\Omega)$.

- *on dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega)$$

- *on dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega)$$

Théorème 1.14 (**Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov**).
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe $\mathcal{C}^1$,on a :

- *si $p < N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1, p^*)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*
- *si $p = N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1, +\infty)$.*
- *si $p > N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte.*
  en particulier l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compact pour tout $p \in [1, +\infty)$

Démonstration. Voir [21] □

Théorème 1.15 (**Inégalité de Poincaré**). *Soit $1 \leq p < +\infty$, on suppose que Ω est un ouvert borné dans une direction de $\mathbb{R}^N$ alors, il existe une constante positive $C = C(p, N, \Omega)$ telle que :*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad , \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

par conséquence l'application $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p}$ définie une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle.

Démonstration. Voir [10, page 48] □

Théorème 1.16 (**Inégalité de Sobolev**). *Soient $1 \leq p < N$ et $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (l'exposant de sobolev), alors il existe une constante positive $S_p = C(p,N)$ telle que :*

$$\left[\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right]^{\frac{1}{p^*}} \leq S_p \left[\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.5}$$

Démonstration. Voir [10, page 43] □

Théorème 1.17 (**Meyers-Serrin**). *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ alors il existe une suite $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. voir [10]. □

Théorème 1.18 (**Stampacchia**). *Soient $1 \leq p \leq +\infty$, et f une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$, de dérivée bornée, alors pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a :*

$$f(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad et \quad \forall i,\, 1 \leq i \leq N,\ \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u) = (f' \circ u)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad p.p.\ dans\, \Omega$$

Remarque 5. *Le théorème 1.18 reste vrai en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Remarque 6. *La condition $f(0) = 0$ est superflue dans le cas où $|\Omega| < \infty$.*

Remarque 7. *Le théorème 1.18 reste vrai si f est une fonction de classe C^1 par morceaux.*

Démonstration. D'après le théorème 1.17, il existe une suite de fonction $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.
Tout d'abord, on va montrer que

$$\forall i, 1 \leq i \leq N, \quad \int_\Omega (f \circ u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \tag{1.6}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega f(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx\right| &\leq \int_\Omega |f(u) - f(u_n)|\,|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(u) - f(u_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\int_{u_n}^{u} f'(t)\,dt|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |u - u_n|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq C \left(\int_\Omega |u - u_n|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'égalité (1.6), et l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f\circ u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega f(u_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\\ &= -\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(f(u_n))\,\varphi\,dx\\ &= -\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega f'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi\,dx\\ &= -\int_\Omega f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx\\ &= -\int_\Omega (f'\circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx\end{aligned}$$

Finalement, on va prouver que $f(u)\in W^{1,p}(\Omega)$:

comme on a

$$|f(u)| = |f(u)-f(0)| = |\int_0^u f'(t)\,dt| \le \|f'\|_{L^\infty(\Omega)}|u|$$

Donc

$$\left(\int_\Omega |f(u)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \|f'\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Et

$$\left(\int_\Omega |f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \|f'\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

□

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 1.18 au cas f est une fonction globalement Lipschitzienne.

Théorème 1.19. *Soit u une fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ avec $1\le p<+\infty$. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction globalement Lipschitzienne, telle que $f(0)=0$, alors $f\circ u\in W^{1,p}(\Omega)$ et de plus on a*

$$\forall i,\ 1\le i\le N,\ \frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ u) = (f'\circ u)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad p.p.\ dans\ \Omega.$$

Remarque 8. *Le théorème 1.19 reste vrai en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Théorème 1.20 (Dérivation faible d'un produit). *Soient $u,v\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ avec $1\le p\le+\infty$ alors $uv\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$*

$$et\quad \forall i,\ 1\le i\le N,\ \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad p.p.\ dans\ \Omega$$

Démonstration. D'après le théorème 1.17, il existe $u_n,v_n\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$ telles que $u_n\longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $v_n\longrightarrow v$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ quand $n\longrightarrow+\infty$.

soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, en utilisant l'intégration par partie, on obtient

$$\int_\Omega u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(u_n v_n)\varphi\, dx = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right)\varphi\, dx, \quad \forall i$$

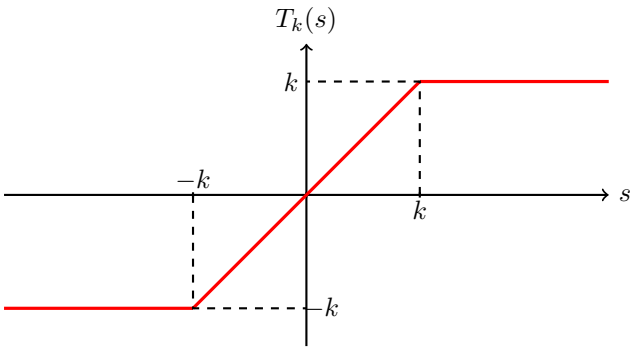
par suite, en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ et en utilisant le théorème de convergence dominée pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on obtient

$$\int_\Omega uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\varphi\, dx, \quad \forall i$$

□

Définition 1.25 (**Fonction de troncature**). *Pour tout $k > 0$, la fonction troncature de niveau k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$T_k(s) = \begin{cases} -k & si \quad s < -k \\ s & si \quad |s| \leq k \\ k & si \quad s > k \end{cases}$$



Théorème 1.21.

1. *Si $u \in L^p(\Omega)$ donc $T_k(u) \to u$ dans $L^p(\Omega)$ quand $k \to +\infty$.*
2. *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ donc $T_k(u) \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ quand $k \to +\infty$.*

Démonstration. voir [12, page 88] □

1.4 Astuce d'extraction une suite de sous-suite

Théorème 1.22. *Soit X un espace topologique et x_n une suite de cet espace qui a la propriété qu'il existe $x \in X$ tel que de toute sous-suite de cette suite, on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers x. Alors la suite entière x_n converge vers x.*

Démonstration. Voir [12, Lemma 1.1]. □

Théorème 1.23.

- *Soit E un espace de Banach réflexif (i.e. E est isomorphe à E''), alors toute suite bornée de E, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans E.*
- *Soit E un espace de Banach séparable (i.e. qui admet une partie dénombrable dense), alors toute suite bornée de E', on peut extraire une sous suite qui converge $\star$-faible dans E'.*

Démonstration. voir [5]. □

1.5 Théorèmes du point fixe

Théorème 1.24 (**Théorème du point fixe de Schauder**). *Soit X un espace de banach, K un convexe fermé de X et S une application continue de K dans K telle que $S(K)$ est relativement compact, alors S admet un point fixe.*

Démonstration. voir [11, page 303]. □

Théorème 1.25 (**Théorème du point fixe de Tikhonov**). *Soit $S : K \subset X \longrightarrow K$ une application continue laissant invariant l'ensemble K non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel topologique X localement convexe séparé. Alors, S admet un point fixe dans K.*

Démonstration. Voir [11, page 308]. □

1.6 0pérateurs monotones

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable, A est un opérateur de V dans V' (en général non linéaire).

Définition 1.26 (**Opérateur borné**). *On dit que l'opérateur A est borné, s'il transforme les bornés de V en bornés de V'.*

Définition 1.27 (**Opérateur monotone**). *On dit que l'opérateur A est monotone si*

$$\forall u, v \in V, \qquad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0. \tag{1.7}$$

On dit que A est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle = 0$ implique $u = v$.

Définition 1.28 (**Opérateur hémicontinu**). *On dit que l'opérateur A est hémicontinu si*

$\forall u, v, w \in V$, l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.29 (**Opérateur fortement continu**). *On dit que l'opérateur A est fortement continu (ou totalement continu) si A est continu de V faible dans V', c-à-d., si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V, alors $A(u_n) \longrightarrow A(u)$ fortement dans V'.*

Théorème 1.26. *Soit A un opérateur borné, hémicontinu et monotone. Alors A est continu de V fort dans V' faible.*

Démonstration. voir le livre Le dret [12]. □

Définition 1.30 (**Opérateur coercif**). *On dit que l'opérateur A est coercif si*

$$\exists \zeta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \lim_{s \longrightarrow +\infty} \zeta(s) = +\infty \text{ et } \langle A(u), u\rangle \geq \zeta\left(\|u\|\right)\|u\|.$$

En d'autres termes, A est coercif si

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{1.8}$$

Théorème 1.27. *Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif. Alors A est surjectif.*

Démonstration. Voir [14, théorème 2.1, p. 171]. □

Définition 1.31 (**Opérateur pseudo-monotone**). *On dit que l'opérateur A est pseudo-monotone si*

(i) A est borné.

(ii) lorsque $u_n \rightharpoonup u$ dans V faiblement et $\limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ alors

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{1.9}$$

La proposition suivante donne une caractérisation de la pseudo-monotonie.

Proposition 1.28. *Soit $A : V \longrightarrow V'$. l'opérateur A est pseudo-monotone si et seulement si A est borné et satisfait la condition suivante :*

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } V \\ \\ \text{et } \limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} A(u_n) \rightharpoonup A(u) \text{ faiblement dans } V' \\ \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0. \end{array}\right.$$

Démonstration. Voir [15, Proposition 3.66, page 85]. □

Proposition 1.29. *Si $A : V \longrightarrow V'$ est un opérateur pseudo-monotone, alors les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V et $A(u_n) \rightharpoonup \psi$ faiblement dans V' avec

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \psi, u\rangle,$$

alors $\psi = A(u)$.

(ii) Si $u_n \to u$ dans V, alors $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ faiblement dans V'.

Démonstration. voir [15]. □

Proposition 1.30. *Soit $A, B : V \longrightarrow V'$ deux opérateurs. Les assertions suivantes sont vraies*

1. *Si A est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone.*

2. *Si A et B sont pseudo-monotones, alors $A+B$ est pseudo-monotone.*

3. *Si A est pseudo-monotone et B est fortement continu, alors $A+B$ est pseudo-monotone.*

Démonstration. Voir [22, Proposition 27.6, page 586]. □

Théorème 1.31 (**Leray-Lions**). *Tout opérateur A pseudo-monotone et coercif est surjectif; cela signifie, pour tout $f \in V'$, il y a au moins une solution à l'équation*

$$A(u) = f \tag{1.10}$$

Démonstration. : Voir [14, Théorème 2.7., p. 180]. □

1.6.1 Opérateurs du calcul des variations

Définition 1.32. *Soit V un espace de Banach réflexif séparable. Un opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est dite du type "calcul des variations" s'il est borné et si on peut le représenter par*

$$(H1): \quad A(v) = \mathcal{A}(v,v), \quad \forall v \in V,$$

où $\mathcal{A} : V \times V \longrightarrow V'$ est un opérateur satisfait les hypothèses suivantes

$$(H2): \begin{cases} \forall u \in V, \quad v \longmapsto \mathcal{A}(u,v) \text{ est un opérateur borné et hemi-continu de } V \\ \text{dans } V', \text{ et } \quad \langle\, \mathcal{A}(u,u) - \mathcal{A}(u,v), u - v \,\rangle \geq 0. \end{cases}$$

$$(H3): \begin{cases} \forall v \in V, \quad u \longmapsto \mathcal{A}(u,v) \text{ est un opérateur borné et hemi-continu de } V \\ \text{dans } V'. \end{cases}$$

$$(H4): \begin{cases} \text{si } u_n \longrightarrow u \text{ faiblement dans } V \text{ et } \langle\, \mathcal{A}(u_n,u_n) - \mathcal{A}(u_n,u), u_n - u \,\rangle \longrightarrow 0 \\ \text{alors, } \forall v \in V, \ \mathcal{A}(u_n,v) \longrightarrow \mathcal{A}(u,v) \text{ faiblement dans } V'. \end{cases}$$

$$(H5): \begin{cases} \text{si } u_n \longrightarrow u \text{ faiblement dans } V \text{ et } \mathcal{A}(u_n,v) \longrightarrow \psi \text{ faiblement dans } V' \\ \text{alors } \langle\, \mathcal{A}(u_n,v), u_n \,\rangle \longrightarrow \langle\, \psi, u \,\rangle. \end{cases}$$

Remarque 9. *Les hypothèses $(H1)$–$(H2)$ entraînent que A est hémicontinu.*

Proposition 1.32. *Si A est un opérateur du clacul des variations, alors A est pseudo-monotone.*

Démonstration. Voir [14, Proposition 2.6, page 181]. □

Chapitre 2

Quelques résultats d'existence et régularité pour un problème elliptique linéaire de type Dirichlet

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, et M est une matrice elliptique bornée ; c'est-à-dire, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)| \leq \beta, \tag{2.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega$. De plus, on suppose que la fonction $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.

Définition 2.1. *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une sur-solution faible du problème (2.1), si pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$ dans Ω, on a :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx \geq \int_\Omega f\varphi\, dx. \tag{2.3}$$

Définition 2.2. *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une sous-solution faible du problème (2.1), si pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$ dans Ω, on a :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx \leq \int_\Omega f\varphi\, dx. \tag{2.4}$$

Définition 2.3. *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (2.1), si*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Remarque 10. *l'intégrale* $\int_\Omega f\varphi\,dx$ *est bien défini ,en effet :*

L'inégalité de Hölder avec les exposants $2^* = \frac{2N}{N-2}$ *et* $2^{*'} = \frac{2N}{N+2}$ *implique*

$$|\int_\Omega f\varphi\,dx| \leq \| f \|_{L^{2^{*'}}(\Omega)} \| \varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)}$$

et on a déjà dit que $f \in L^{2^{*'}}$ *et* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *, et comme* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ *donc* $\varphi \in L^{2^*}(\Omega)$.

2.1 Existence de solutions faibles

Théorème 2.1. *On suppose que l'hypothèse* (2.2) *est satisfaite, et que* $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. *Alors le problème* (2.1) *admet une unique solution faible.*

Tout d'abord, on va démontrer l'existence. Pour cela on va utiliser deux méthodes : la première en utilisant le théorème de Lax-Milgram (représentation de Riesz), et la deuxième est dite méthode de monotonie (théorème de surjectivité de Leray-Lions 1.31), qui est basée sur la théorie des opérateurs monotones.

Avant de commencer la preuve, on énonce le théorème de Lax-Milgram.

Théorème 2.2 (**Lax-Milgram**). *Soit* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilineaire, continue et coercive, et soit* $L \in H'$, *donc il existe un unique élément* u *de* H *tel que :*

$$a(u,\varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H$$

Démonstration. voir [5]. □

Démonstration. 1. **Existence via le théorème de Lax-Milgram**

on définit la forme lineaire continue $L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\,dx$$

et on définit la forme bilineaire $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u,\varphi) = \langle\, A(u), \varphi\,\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx$$

d'abord, on montre que a est coercive et continue.

(a) a est coercive :

en utilisant l'hypothèse (2.2) ,on obtient pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle\, A(u), u\,\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla u\,dx &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\ &\geq \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq C\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où $\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$.

(b) a est continue :

en utilisant l'hypothèse (2.2) et l'inégalité de Hölder, on obtient, pour tout u, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}|\langle A(u), \varphi\rangle| = |\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx| &\leq \beta\int_\Omega |\nabla u\nabla\varphi|\,dx\\ &\leq \beta\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \beta\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

2. **Existence via la méthode de monotonie**

On considère l'opérateur A défini par :

$$\begin{aligned}A:\ V = H_0^1(\Omega) &\longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega)\\ u &\mapsto A(u),\end{aligned} \tag{2.6}$$

avec

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx, \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

On va montrer que l'opérateur A est coercif et pseudo-monotone .le résultat découlera du théorème 1.31.

(a) On montre que A est coercif :

en utilisant l'hypothèse (2.2) ,on obtient pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla u\,dx &\geq \alpha\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\\ &\geq \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq C\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où $\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$.

(b) On montre que A est pseudo-monotone :

i. On montre que l'opérateur A est borné :

Soient $u, \varphi \in H_0^1$, en utilisant l'hypothèse (2.2) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle A(u), \varphi \rangle| = |\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx| &\leq \beta \int_\Omega |\nabla u \nabla \varphi| \, dx \\ &\leq \beta \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \, \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \beta \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \, \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

et on a

$$\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = Sup \left\{ |\langle A(u), \varphi \rangle| \, ; \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \right\} \leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donc $\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ est borné si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ est borné.

ii. On suppose que $u_n \rightharpoonup u$ dans $V = H_0^1(\Omega)$ faiblement

et

$$\limsup_{n \to +\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle \leq 0 \tag{2.7}$$

et on montre que $\liminf_{n \to +\infty} \langle A(u_n), u_n - w \rangle \geq \langle A(u), u - w \rangle, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$

On va d'abord montrer que A est monotone :

soient $u, v \in H_0^1$, en utilisant l'hypothèse (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} \langle A(u) - A(v), u - v \rangle = \langle A(u - v), u - v \rangle &= \int_\Omega M(x)\nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v) \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Comme l'opérateur A est monotone, alors

$$\langle A(u_n), u_n - u \rangle \geq \langle A(u), u_n - u \rangle$$

En passant à la limite inférieure , et en utilisant le fait que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$\liminf_{n \to +\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle \geq 0 \tag{2.8}$$

De (2.7) et (2.8), on en déduit que

$$\limsup_{n \to +\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle = 0 = \liminf_{n \to +\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle$$

et par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle = 0 \tag{2.9}$$

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$, en posant $v = u + t(w - u)$, pour $t \in]0, 1[$.

En utilisant la monotonie du l'opérateur A, on obtient

$$\langle A(u_n) - A(v), u_n - v \rangle \geq 0$$

et par conséquent

$$\langle A(u_n) - A(v), u_n - u - t(w-u)\rangle \geq 0$$

d'où

$$t\langle A(u_n), u-w\rangle \geq -\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(v), u_n - u\rangle + t\langle A(v), u-w\rangle$$

et par suite

$$t\langle A(u_n), u_n - w\rangle + t\langle A(u_n), u - u_n\rangle \geq -\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(v), u_n - u\rangle + t\langle A(v), u-w\rangle \quad (2.10)$$

En utilisant (2.9) et le fait que $u_n \rightharpoonup u$, et en passant à la limite inférieure quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité (2.10), on obtient

$$t \liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq t\langle A(v), u-w\rangle$$

En divisant par t, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq \langle A(v), u-w\rangle \quad (2.11)$$

comme l'opérateur A est linéaire, alors $A(v) = A(u + t(w-u)) = (1-t)A(u) + tA(w)$
En substituant dans (2.11),il vient

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq (1-t)\langle A(u), u-w\rangle + t\langle A(w), u-w\rangle$$

En passant à la limite quand t tend vers 0, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq \langle A(u), u-w\rangle \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

— **Démonstration de l'unicité**.

On suppose que le problème (2.1) admet deux solutions u_1 et u_2, donc on a

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_1 - u_2)\cdot\nabla\varphi = 0, \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.12)$$

En prenant $\varphi = u_1 - u_2$ dans (2.12) et en utilisant l'hypothèse (2.2), on obtient

$$0 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla(u_1 - u_2)\cdot\nabla(u_1 - u_2) = 0$$

Alors, on déduit que $u_1 = u_2$.

□

2.2 Régularités de solutions faibles du problème (2.1)

Avant d'énoncer les résultats de régularité, on va rappeler un lemme d'analyse, dû à G. Stampacchia [18].

Lemme 2.1 (Lemme de Stampacchia.). *Soit $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante telle que :*

$$\psi(h) \leq \frac{M\psi(k)^\delta}{(h-k)^\gamma}, \qquad \forall h > k > 0 \tag{2.13}$$

où $M > 0$, $\delta > 1$ et $\gamma > 0$, donc $\psi(d) = 0$ tel que $d^\gamma = M\psi(0)^{\delta-1}2^{\frac{\delta\gamma}{\delta-1}}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $d_n = d(1-2^{-n})$, et on suppose que

$$\psi(d_n) \leq \psi(0)2^{\frac{-n\gamma}{\delta-1}} \tag{2.14}$$

Tout d'abord, il suffit de montrer par récurrence que l'inégalité (2.14) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) on a l'inégalité (2.14) est vérifiée pour $n = 0$.

(ii) on suppose que l'inégalité (2.14) est vraie pour n et on va montrer que elle est vraie pour $n+1$, donc, en utilisant l'inégalité (2.13) pour obtenir

$$\psi(d_{n+1}) \leq \frac{M\psi(d_n)^\delta}{(d_{n+1}-d_n)^\gamma} \leq M\,\psi(0)^\delta 2^{-\frac{n\,\gamma\,\delta}{\delta-1}}\,2^{(n+1)\gamma}\,d^{-\gamma} = \psi(0)\,2^{-\frac{(n+1)\,\gamma}{\delta-1}}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité (2.14) et le fait que ψ est décroissante, on obtient

$$0 \leq \psi(d) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \psi(d_n) \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \psi(0)\,2^{-\frac{n\gamma}{\delta-1}} = 0$$

D'où le résultat. □

Théorème 2.3. *On suppose que l'hypothèse (2.2) est satisfaite, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$. Alors la solution u du problème (2.1) appartient l'espace $L^\infty(\Omega)$.*

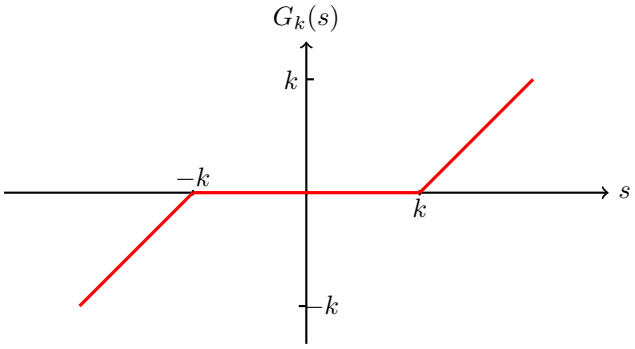
Démonstration. pour $k > 0$, on définit :

$$A_k = \{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > k\}$$

et on définit la fonction $G_k(s)$ par

$$G_k(s) = s - T_k(s) = \begin{cases} s-k & \text{si} \quad s > k \\ 0 & \text{si} \quad |s| \leqslant k \\ s+k & \text{si} \quad s < -k \end{cases}$$

(T_k c'est la fonction de troncature).



En prenant $G_k(u)$ comme une fonction test dans (2.5) , obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla G_k(u)\,dx=\int_\Omega f\,G_k(u)\,dx, \tag{2.15}$$

D'une part , en utilisant l'hypothèse (2.2) et l'inégalité de Sobolev , on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla G_k(u)\,dx=\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla u\chi_{A_k}\,dx &\geq \alpha\int_\Omega |\nabla u|^2\chi_{A_k}\,dx\\ &\geq \alpha\int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2\,dx\\ &\geq \frac{\alpha}{S_2^2}\|G_k(u)\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.16}$$

D'autre part , par deux applications de l'inégalité de Hölder ,l'une avec l'exposant 2^* et l'autre avec $\frac{m}{2^{*'}}$,on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,G_k(u) &\leq \int_{A_k}|f||G_k(u)|\\ &\leq \Big(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\Big)^{\frac{1}{2^*}}\Big(\int_{A_k}|f|^{2^{*'}}\Big)^{\frac{1}{2^{*'}}}\\ &\leq \|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\Big(\int_\Omega |f|^{2^{*'}}\chi_{A_k}\Big)^{\frac{1}{2^{*'}}}\\ &\leq \|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\Big(\int_\Omega |f|^{2^{*'}\frac{m}{2^{*'}}}\Big)^{\frac{1}{2^{*'}}\frac{2^{*'}}{m}}|A_k|^{(\frac{1}{2^{*'}}-\frac{1}{m})}\\ &\leq \|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|f\|_{L^m(\Omega)}|A_k|^{(\frac{1}{2^{*'}}-\frac{1}{m})}\end{aligned} \tag{2.17}$$

En combinant (2.15) ,(2.16) et (2.17), on obtient

$$\|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\leq C_f\,|A_k|^{(\frac{1}{2^{*'}}-\frac{1}{m})} \tag{2.18}$$

avec $C_f=\frac{S_2^2\|f\|_{L^m(\Omega)}}{\alpha}$

Et comme on a

$$|G_k(u)| = \begin{cases} |u-k| & \text{si} \quad u > k \\ 0 & \text{si} \quad |u| \leq k \\ |u+k| & \text{si} \quad u < -k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |u| \leq k \\ |u|-k & \text{si} \quad |u| > k \end{cases}$$

pour $h > k$ on a $A_h \subset A_k$, donc on obtient

$$\begin{aligned} \|G_k(u)\|_{L^{2^*}(\Omega)} &= (\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*})^{\frac{1}{2^*}} \\ &= (\int_\Omega (|u|-k)^{2^*})^{\frac{1}{2^*}} \\ &\geq (\int_{A_h} (|u|-k)^{2^*})^{\frac{1}{2^*}} \\ &\geq (\int_{A_h} (h-k)^{2^*})^{\frac{1}{2^*}} \\ &\geq (h-k)\,|A_h|^{\frac{1}{2^*}} \end{aligned} \tag{2.19}$$

En combinant (2.18) et (2.19) , on obtient

$$|A_h| \leq \frac{C_f}{(h-k)^{2^*}} |A_k|^{2^*(\frac{1}{2^{*\prime}} - \frac{1}{m})}$$

Comme $2^*(\frac{1}{2^{*\prime}} - \frac{1}{m}) > 1$ (car $m > \frac{N}{2}$), donc on peut utiliser le lemme de Stampacchia avec $\psi(h) = |A_h|$ alors il existe $M > 0$ tel que $|A_M| = 0$, et on obtient que $|u| \leq M$. □

Remarque 11. *On observe que, si u vérifiant*

$$\alpha \int_{A_k} |\nabla u|^p \leq \int_{A_k} f G_k(u)$$

alors u est bornée.

Théorème 2.4. *On suppose que l'hypothèse (2.2) est satisfaite, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec $\frac{2N}{N+2} \leq m < \frac{N}{2}$. Alors la solution u du problème (2.1) appartient l'espace $L^{m^{**}}(\Omega)$ où $m^{**} = \frac{Nm}{N-2m}$.*

Démonstration. soient $k > 0$ et $\gamma > 1$, en prenant $v = |T_k(u)|^{2\gamma-2}T_k(u)$ (T_k c'est la fonction de troncature) comme une fonction test dans (2.5), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla(|T_k(u)|^{2\gamma-2}T_k(u)) = \int_\Omega f\,|T_k(u)|^{2\gamma-2}T_k(u) \tag{2.20}$$

d'aprés les deux théorèmes 1.20 et 1.18, on a

$$\nabla(|T_k(u)|^{2\gamma-2}\,T_k(u)) = (2\gamma-1)\,\nabla T_k(u)\,|T_k(u)|^{2\gamma-2}$$

D'une part, en utilisant l'hypothèse (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla(|T_k(u)|^{2\gamma-2}T_k(u)) &= (2\gamma-1)\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla T_k(u)\,|T_k(u)|^{2\gamma-2}\\
&= (2\gamma-1)\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla u\,|T_k(u)|^{2\gamma-2}\chi_{\{|u|\le k\}}\\
&\ge \alpha(2\gamma-1)\int_\Omega |\nabla u|^2\,|T_k(u)|^{2\gamma-2}\chi_{\{|u|\le k\}}\\
&\ge \alpha(2\gamma-1)\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2\,|T_k(u)|^{2\gamma-2}\\
&\ge \alpha(2\gamma-1)\int_\Omega \left|\nabla T_k(u)\,|T_k(u)|^{\gamma-1}\right|^2\\
&\ge \frac{\alpha(2\gamma-1)}{\gamma^2}\int_\Omega |\nabla|T_k(u)|^\gamma|^2
\end{aligned}$$

Par suite, l'inégalité de Sobolev implique

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla(|T_k(u)|^{2\gamma-2}T_k(u)) \ge \frac{\alpha(2\gamma-1)}{S_2^2\,\gamma^2}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{\gamma 2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \tag{2.21}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\int_\Omega f\,|T_k(u)|^{2\gamma-2}T_k(u) \le \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\gamma-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{2.22}$$

En combinant (2.20),(2.21) et (2.22), on obtient

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{\gamma 2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \le \frac{S_2^2\,\gamma^2}{\alpha(2\gamma-1)}\,\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\gamma-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}$$

On choisit γ de tel sorte que $\gamma 2^* = (2\gamma-1)m'$, on trouve que $\gamma = \frac{m^{**}}{2^*}$. et on remarque que $\gamma > 1$ si et seulement si $m > (2^*)'$.

comme $\frac{1}{m'} < \frac{2}{2^*}$ (car $m < \frac{N}{2}$), donc on a

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m^{**}}\right)^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}} \le \frac{S_2^2\,\gamma^2}{\alpha(2\gamma-1)}\,\|f\|_{L^m(\Omega)}$$

et comme $\frac{2}{2^*} - \frac{1}{m'} = \frac{1}{m^{**}}$, on obtient

$$\|T_k(u)\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^m(\Omega)}, \quad \forall k > 0$$

Par passage à la limite quand k tend vers $+\infty$, en utilisant le lemme de Fatou et le théorème 1.21, on obtient

$$\|u\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^m(\Omega)}$$

D'où le résultat. □

2.3 Propriétés qualitatives de solutions faibles du problem (2.1)

2.3.1 Principe maximum faible

Théorème 2.5. *Soit u une solution faible du problème (2.1). Les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$.*
2. *Si $f \leq 0$, alors $u \leq 0$.*

Démonstration. Voir [3, Theorem 4.12, page 32] □

2.3.2 Inégalité de Harnack faible

Théorème 2.6 (Inégalité de Harnack faible)**.** *Soit u une sur-solution du problème (2.1) avec $f \geq 0$ dans Ω, et $u \geq 0$ dans la boule $B_{4R}(x_0) \subset \mathbb{R}^N$. Alors, pour tout $1 \leq p < \frac{N}{N-2}$, on a :*

$$R^{-n/p} \left(\int_{B_{2R}(x_0)} u^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \inf_{B_R(x_0)} u, \tag{2.23}$$

où $C = C\left(N, \frac{\beta}{\alpha}, R, p\right)$.

Démonstration. Voir [9, Theorem 8.18.]. □

2.3.3 Principe de maximum fort

Théorème 2.7. *Soit u une solution faible du problème (2.1), avec $f \geq 0$ dans Ω. Alors soit $u = 0$ dans Ω ou $u > 0$ dans Ω.*

Démonstration. Voir [20, Theorem 11.1, page 60]. □

Dans cette section, On va traiter le problème (2.1) où le deuxième membre f n'appartient plus à l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

2.4 Problèmes de Dirichlet dans les espaces de Sobolev plus grand que $H_0^1(\Omega)$

Dans cette section, on considère le problème (2.1) avec $f \in L^m(\Omega)$ où $1 \leq m < \frac{2N}{N+2}$ au lieu de $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}$.Donc, on ne peut rien dire sur l'appartenance de f à $H^{-1}(\Omega)$. Par conséquent, le théorème 1.31 ne peut pas être appliqué directement.Et la définition (2.3) n'a aucun sens. Donc, on a besoin d'introduire une autre notion de solution.

Définition 2.4. *On dit que $u \in W_0^{1,\delta}(\Omega)$ avec $1 < \delta < 2$, est une solution distributionnelle (au sens de distribution) du problème (2.1), si*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega). \tag{2.24}$$

Remarque 12. *L'intégrale $\int_\Omega f\varphi \, dx$ est bien défini, en effet :*
On a la fonction $f \in L^m(\Omega)$ où $1 \leq m < \frac{2N}{N+2}$, et $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ donc $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ qui implique que $\varphi \in L^{m'}(\Omega)$ .alors on peut appliquer l'inégalité de Hölder avec les exposants m et m' pour obtenir le résultat.
L'intégrale $\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx$ aussi est bien défini,en effet :
D'une part, on a déjà dit que $u \in W_0^{1,\delta}(\Omega)$ où $1 < \delta < 2$, donc $\nabla u \in (L^\delta(\Omega))^N$.
D'autre part, $\nabla \varphi \in (L^\infty(\Omega))^N$ qui implique que $\nabla \varphi \in (L^{\delta'}(\Omega))^N$.
alors, on peut appliquer l'hypothèse (2.2) et l'inégalité de Hölder avec les exposants δ et δ' pour obtenir le résultat.

2.4.0.1 Approximation et estimation à priori

On considère le problème approché :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u_n) = f_n & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.25}$$

où $f_n = T_n(f)$ (T_n c'est la fonction de troncature).
Maintenant, On peut facilement démontrer l'existence de solution u_n par le théorème 1.31 pour tout n fixé.

Théorème 2.8. *On suppose que l'hypothèse (2.2) est satisfaite, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec $1 < m < \frac{2N}{N+2}$. Alors le problème (2.1) admet une solution distributionnelle $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$ où $m^* = \frac{Nm}{N-m}$.*

Remarque 13. *On a $1 < m < \frac{2N}{N+2}$ implique que $1 < m^* < 2$, Ce qui entraîne que $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,m^*}(\Omega)$.*

Démonstration. On va diviser la démonstration de ce théorème en deux étapes.

Étape 1 : Estimation uniforme de la suite u_n .

On pose pour $h > 0$:

$$B_h = \{x \in \Omega : \quad h \leq |u_n(x)| \leq h+1\}$$

$$A_h = \{x \in \Omega : \quad h \leq |u_n(x)|\} = \cup_{k=h}^\infty B_k$$

On définit aussi :

$$\varphi_h(s) = T_1(G_h(s)) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad s \leq -1-h \\ s+h & \text{si} \quad -1-h < s < -h \\ 0 & \text{si} \quad -h \leq s \leq h \\ s-h & \text{si} \quad h < s < h+1 \\ 1 & \text{si} \quad s \geq h+1 \end{cases}$$

En prenant $\varphi_h(u_n)$ comme une fonction test dans (2.25) et en utilisant l'hypothése(2.2), on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \int_{B_h} |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \varphi_h(u_n) &= \int_\Omega f_n \varphi_h(u_n) \\ &\leq \int_{A_h} |f_n \varphi_h(u_n)| \\ &\leq \int_{A_h} |f| \end{aligned}$$

soit $0 < \lambda < 1$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^\lambda} = \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{B_h} \frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^\lambda} &\leq \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+h)^\lambda} \int_{B_h} |\nabla u_n|^2 \\ &\leq \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha(1+h)^\lambda} \int_{A_h} |f| \\ &\leq \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha(1+h)^\lambda} \sum_{k=h}^{+\infty} \int_{B_k} |f| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_k} |f| \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{\alpha(1+h)^\lambda} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_k} |f| \, (1+k)^{1-\lambda} \\ &\leq C \int_\Omega |f| \, (1+|u_n|)^{1-\lambda} \\ &\leq C \ \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\lambda)m'} \right)^{\frac{1}{m'}} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Soit $q > 1$,d'aprés l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Hölder , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_q^q} \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*} \right)^{\frac{q}{q^*}} \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^q = \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(1+|u_n|)^{\lambda\frac{q}{2}}} (1+|u_n|)^{\lambda\frac{q}{2}} \\ \leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^\lambda} \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\frac{\lambda q}{2-q}} \right)^{1-\frac{q}{2}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

d'aprés (2.26), on obtient

$$\frac{1}{S_q^q}\Big(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\Big)^{\frac{q}{q^*}} \leq C\ \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\lambda)m'}\right)^{\frac{q}{2m'}} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\frac{\lambda q}{2-q}}\right)^{1-\frac{q}{2}} \tag{2.28}$$

On choisit λ et q de telle sorte :

$$(1-\lambda)m' = q^* = \frac{\lambda q}{2-q}$$

donc, on trouve $\lambda = \frac{N(2-q)}{N-q}$ et $q = \frac{Nm}{N-m} = m^*$. et on peut remarquer que $1 < m < 2^*$ implique que $0 < \lambda < 1$.

par suite, d'aprés (2.27) et (2.28), on obtient

$$\Big(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\Big)^{\frac{q}{q^*}} \leq C \int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C\ \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{q^*}\right)^{1-\frac{q}{2m}} \tag{2.29}$$

L'inégalité (2.29) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, Et comme $\frac{q}{q^*} > 1 - \frac{q}{2m}$ (car $m < \frac{N}{2}$), alors la suite $\int_\Omega |u_n|^{q^*}$ est bornée, Par conséquent u_n est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ (avec $q = m^*$).

Étape 2 : Passage à la limite.

Comme u_n est bornée dans $W_0^{1,m^*}(\Omega)$ qui est réflexif, donc il existe $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,m^*}(\Omega)$, à une sous-suite prés.

Maintenant, il suffit de démontrer que la limite u est une solution du problème (2.1).

D'une part, On a $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,m^*}(\Omega)$ implique que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \tag{2.30}$$

D'autre part, On a $f_n \longrightarrow f$ p.p. dans Ω et $|f_n\varphi| \leq f\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, Alors en appliquant le théorème de convergence dominée pour déduire que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \tag{2.31}$$

En combinant (2.30) et (2.31), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

□

Théorème 2.9. *On suppose que l'hypothèse (2.2) est satisfaite , et que $f \in L^1(\Omega)$ alors le problème (2.1) admet une solution distributionnelle $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{N}{N-1}$.*

Démonstration. Soit $\lambda < \frac{1}{2}$, en prenant $v_n = [(1+|u_n|)^{2\lambda-1} - 1]\text{sign}(u_n)$ comme une fonction test dans (2.25).

D'une part,On a $|v_n| \leq 1$, d'où

$$\int_\Omega f_n v_n \leq \int_\Omega |f_n| = \|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \tag{2.32}$$

D'autre part, l'hypothèse (2.2), donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla v_n &= (1-2\lambda)\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n (1+|u_n|)^{2\lambda-2} \\ &\geq \alpha(1-2\lambda)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 (1+|u_n|)^{2\lambda-2} \\ &\geq \alpha(1-2\lambda)\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^{2(1-\lambda)}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

En combinant (2.32) et (2.33) il vient

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^{2(1-\lambda)}} \leq \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha(1-2\lambda)} = C \tag{2.34}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{2}{q}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_q^q}\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{\frac{q}{q^*}} &\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^q \\ &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(1+|u_n|)^{q(1-\lambda)}}(1+|u_n|)^{q(1-\lambda)} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^{2(1-\lambda)}}\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\frac{2q(1-\lambda)}{2-q}}\right)^{1-\frac{q}{2}} \end{aligned}$$

L'inégalité (2.34) implique

$$\frac{1}{S_q^q}\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{\frac{q}{q^*}} \leq C + C\left(\int_\Omega |u_n|^{\frac{2q(1-\lambda)}{2-q}}\right)^{1-\frac{q}{2}}$$

On choisit λ tel que $\frac{2q(1-\lambda)}{2-q} = q^*$, donc on trouve que $\lambda = \frac{q(N-2)}{2(N-q)}$, et comme $\lambda < \frac{1}{2}$ alors on a $q < \frac{N}{N-1}$, d'où :

$$\frac{1}{S_q^q}\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{\frac{q}{q^*}} \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C + C\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{1-\frac{q}{2}} \tag{2.35}$$

L'inégalité (2.35) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme $\frac{q}{q^*} > 1 - \frac{q}{2}$, alors en utilisant l'inégalité de Young, on en déduit que la suite $\int_\Omega |u_n|^{q^*}$ est bornée par conséquent u_n est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$.
Maintenant, On utilise le même raisonnement que dans la démonstration du théorème (2.8) pour obtenir que la solution $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $q < \frac{N}{N-1}$. □

Le théorème suivant donne l'existence d'une solution pour le problème (2.1) où $f \in M(\Omega)$ (c'est-à-dire f est une mesure de Radon sur Ω).

Théorème 2.10. *On suppose que l'hypothèse* (2.2) *est satisfaite , et que $f \in M(\Omega)$, alors le problème* (2.1) *admet une solution $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \bar{q} = \frac{N}{N-1}$ au sens suivant*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi = \langle\, f,\, \varphi \,\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.36}$$

Remarque 14. (2.36) *a bien un sens grâce à la remarque 4.*

Démonstration. On considère le problème approché :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(M(x)\nabla u_n) = f_n & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.37}$$

où $(f_n)_n \subset H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ qui converge au sens des distributions vers f et satisfaisant $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{M(\Omega)}$ [1]. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, le théorème 2.2 assure que le problème (2.37) admet une unique solution $u_n \in H_0^1(\Omega)$ au sens faible suivant

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \varphi = \langle\, f_n,\, \varphi \,\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.38}$$

Lemme 2.2. *La suite de solutions u_n est uniformément bornée dans l'espace $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \bar{q} = \frac{N}{N-1}$.*

Démonstration. Pour $\eta > 0$ donné, on considère la fonction

$$\psi_\eta(x) = \begin{cases} \eta \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t)^{\eta+1}} & \text{pour } x \geq 0, \\ \\ -\psi_\eta(-x) & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

On remarque que $|\psi_\eta| \leq 1$ et $|\psi_\eta^{'}| \leq \eta$. Alors, le théorème 1.18, garantit que $\psi_\eta(u_n) \in H_0^1(\Omega)$. On peut donc choisir $\psi_\eta(u_n)$ comme fonction test dans (2.38), ce qui donne

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \psi_\eta(u_n) = \langle\, f_n,\, \psi_\eta(u_n) \,\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

Comme $f_n \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ et $\psi_\eta(u_n) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, alors

$$\langle\, f_n,\, \psi_\eta(u_n) \,\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f_n \psi_\eta(u_n)\, dx$$

1. L'existence de cette suite s'est garantie par le théorème 1.10.

D'après le théorème de Stampacchia 1.18, on a

$$\nabla\psi_\eta(u_n) = \psi_\eta'(u_n)\cdot\nabla u_n = \frac{\eta}{(|u_n|+1)^{\eta+1}}\cdot\nabla u_n \tag{2.39}$$

par suite, en utilisant (2.39) et l'hypothèse (2.2), on obtient

$$\alpha\eta\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(|u_n|+1)^{\eta+1}} \leq \|f\|_{M(\Omega)}. \tag{2.40}$$

Soit $q<2$, l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{2}{q}$ donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^q &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(|u_n|+1)^{\frac{q}{2}(\eta+1)}}(|u_n|+1)^{\frac{q}{2}(\eta+1)} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(|u_n|+1)^{(\eta+1)}}\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega (|u_n|+1)^{\frac{q(\eta+1)}{2-q}}\right)^{1-\frac{q}{2}}\end{aligned} \tag{2.41}$$

On choisit $\eta>0$ de telle sorte que $\frac{q(\eta+1)}{2-q} < q^*$, ce qui est possible pour $q<\bar{q}=\frac{N}{N-1}$, alors en utilisant l'inégalité de Young avec epsilon et le lemme 1.3, on obtient

$$(|u_n|+1)^{\frac{q(\eta+1)}{2-q}} \leq \varepsilon|u_n|^{q^*} + C(\varepsilon). \tag{2.42}$$

En combinant (2.40), (2.41) et (2.42), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C\varepsilon^{(1-\frac{q}{2})}\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{1-\frac{q}{2}} + C$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{\frac{q}{q^*}} \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C_1\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{1-\frac{q}{2}} + C_2 \tag{2.43}$$

Comme $\frac{q}{q^*} > 1-\frac{q}{2}$, alors en utilisant l'inégalité de Young, on en déduit que la suite u_n est uniformément bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $1\leq q<\bar{q}=\frac{N}{N-1}$. □

Maintenant, on démontre le théorème 2.10 par passage à la limite dans le problème approché (2.37). Grâce au lemme 2.2, la suite u_n est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ qui est réflexif, donc il existe $u\in W_0^{1,q}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, à une sous-suite prés. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, comme $u_n\rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega M(x)\nabla u_n\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi. \tag{2.44}$$

En utilisant le fait que la suite f_n converge au sens des distributions vers f, alors

$$\langle f_n, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \langle f_n, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}. \tag{2.45}$$

En combinant (2.44) et (2.45), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

□

Chapitre 3

Équations elliptiques semi-linéaires avec des non-linéarités singulières

3.1 Position du problème

Dans ce chapitre on va étudier le problème suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(M(x)\nabla u) = \dfrac{f}{u^\theta} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, M est une matrice elliptique bornée ; c'est-à-dire, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)| \leq \beta, \tag{3.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $x \in \Omega$ presque partout. On suppose en outre que

$$0 < \theta < 1, \tag{3.3}$$

$$f \geq 0, \quad f \not\equiv 0, \tag{3.4}$$

$$f \in L^m(\Omega), \quad m \geq 1, \tag{3.5}$$

Définition 3.1. *Une solution du problème (3.1) est une fonction $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ telle que*

$$\forall \omega \Subset \Omega,\ \exists c_\omega > 0 : \quad u(x) \geq c_\omega > 0 \text{ dans } \omega, \tag{3.6}$$

et

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega \frac{f\,\varphi}{u^\theta}\,dx,\quad \forall\varphi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega). \tag{3.7}$$

Remarque 15. *Grâce à la condition (3.6), le deuxième membre de (3.7) est bien définie, en effet : Comme f appartient à l'espace de Lebesgue et pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)$, on a u satisfait la condition (3.6), donc l'inégalité de Hölder donne*

$$\int_\Omega \frac{f\,\varphi}{u^\theta}\,dx\le\frac{1}{c_\omega}\|f\|_{L^1(\Omega)}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

3.2 Existence des solutions bornées

Dans cette section, on va prouver l'existence des solutions bornées dans l'espace d'énergie $H_0^1(\Omega)$ sous la condition que la fonction f est plus sommable.

Théorème 3.1. *On suppose que les hypothèses (3.2)-(3.4) sont satisfaites, et que $f\in L^m(\Omega)$ avec $m>\frac{N}{2}$. Alors le problème (3.1) admet au moins une solution $u\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.*

Remarque 16. *On remarque que le résultat du théorème 3.1 coïncide avec le résultat du théorème 2.3 quand $\theta\to 0$.*

Pour prouver le théorème précédent.Tout d'abord, on va approcher le problème (3.1) par un problème régulier qui peut être résolu facilement , en appliquant le théorème 1.31. Ensuite, on va montrer des estimations uniformes. Enfin,On peut le prouver par passage à la limite dans le problème approché.

3.2.1 Approximation et estimation à priori

On considère le problème approché suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(M(x)\nabla u_n)=\dfrac{f_n}{\left(|u_n|+\frac{1}{n}\right)^\theta} & \text{dans }\Omega,\\ u_n=0 & \text{sur }\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.8}$$

où $f_n=T_n(f)$ (T_n c'est la fonction de troncature).

Lemme 3.1. *Le problème approché (3.8) admet au moins une solution positive $u_n\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. **Partie 1 :** L'existence d'une solution du problème (3.8).

1-ère Méthode. En utilisant le théorème du point fixe de Tikhonov 1.25.

Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé, soit $v\in V=H_0^1(\Omega)$. On définit l'application

$$\begin{aligned} S:V&\longrightarrow V\\ v&\mapsto S(v)=w \end{aligned} \tag{3.9}$$

où w est la solution unique du problème linéaire suivant [1] :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla w) = \dfrac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\theta}} & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

On va maintenant vérifier que l'application S satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Tikhonov 1.25.

Étape 1 : On doit prouver que S fixe une certaine boule K .

Tout d'abord, en prenant w comme une fonction test, on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla w = \int_\Omega \frac{f_n w}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\theta}}$$

D'une part, en utilisant l'hypothèse (3.2), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla w \tag{3.11}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{f_n w}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\theta}} &\leq \int_\Omega \left| \frac{f_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta}} \right| |w| \\ &\leq n^{\theta+1} \int_\Omega |w| \\ &\leq n^{\theta+1} \left(\int_\Omega |w|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\, n^{\theta+1} \left(\int_\Omega |\nabla w|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

En combinant (3.11) et (3.12), on obtient

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha}\, n^{\theta+1}$$

Alors

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha}\, n^{\theta+1} \tag{3.13}$$

Par conséquent, on en déduit que $w \in K$ tel que K est la boule fermée dans $H_0^1(\Omega)$ de centre 0 et de rayon $\frac{C}{\alpha}\, n^{\theta+1}$.

Étape 2 : On doit prouver que S est continue de K faible dans K faible (c'est-à-dire, si v_ε converge faiblement vers v dans V, alors $S(v_\varepsilon) = w_\varepsilon$ converge faiblement vers $w = S(v)$)

1. 1 Le problème (3.10) admet une unique solution via le théorème (2.1)

Soit w_ε est une solution du problème :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla w_\varepsilon) = \dfrac{f_n}{\left(|v_\varepsilon| + \frac{1}{n}\right)^\theta} & \text{dans } \Omega, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

Et d'aprés (3.13), w_ε est une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est réflexif, donc il existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que $w_\varepsilon \rightharpoonup w$, à une sous-suite prés.

Maintenant, on montre que $w = S(v)$(c'est-à-dire on montre que w est une solution du problème (3.10)).pour cela, en passant à la limite quand ε tend vers 0 dans le problème (3.14).

D'une part,On a $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ dans $H_0^1(\Omega)$ implique que $-\text{div}\,(M(x)\nabla w_\varepsilon) \longrightarrow -\text{div}\,(M(x)\nabla w)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

D'autre part , Soit $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.15}$$

Et on montre que

$$\frac{f_n}{\left(|v_\varepsilon| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \longrightarrow \frac{f_n}{\left(|v| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega)$$

En vertu de (3.15), il existe une sous-suite de v_ε notée $v_{\varepsilon'}$, telle que $v_{\varepsilon'} \longrightarrow v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, grâce à l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. en utilisant la réciproque partielle de Lebesgue, on obtient que $v_{\varepsilon'}$ admet une sous-suite, notée encore $v_{\varepsilon'}$ telle que :

$$v_{\varepsilon'} \longrightarrow v \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

donc, on a

$$\frac{f_n}{\left(|v_{\varepsilon'}| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \longrightarrow \frac{f_n}{\left(|v| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \quad \text{p.p. dans } \Omega \tag{3.16}$$

De plus, il existe $g_n \in L^2(\Omega)$ telle que $g_n(x) = n^{\theta+1}$ qui vérifiée

$$\left|\frac{f_n}{\left(|v_{\varepsilon'}| - \frac{1}{n}\right)^\theta}\right| \leq n^{\theta+1} \tag{3.17}$$

Maintenant, en appliquant le théorème de la convergence dominée grâce à (3.16) et (3.17), et on en déduit que

$$\frac{f_n}{\left(|v_{\varepsilon'}| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \longrightarrow \frac{f_n}{\left(|v| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.18}$$

Par suite, en utilisant (3.18) et le fait que l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ est continue, on obtient

$$\frac{f_n}{\left(|v_{\varepsilon'}| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \longrightarrow \frac{f_n}{\left(|v| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega).$$

Et en appliquant le théorème 1.22, on en déduit que la suite $\frac{f_n}{\left(|v_\varepsilon|-\frac{1}{n}\right)^\theta}$ converge fortement vers $\frac{f_n}{\left(|v|-\frac{1}{n}\right)^\theta}$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

.

2-ème Méthode. On va utiliser la méthode de monotonie.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on considère l'opérateur $\mathcal{A}_n : V = H_0^1(\Omega) \longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\mathcal{A}_n(w) = -\text{div}\,(M(x)\nabla w) - \frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\theta}$$

On va démontrer que l'opérateur $\mathcal{A}_n$ satisfait les hypothèses du théorème 1.31. Pour cela, on va procéder en deux étapes.

Étape 1 : L'opérateur $\mathcal{A}_n$ est pseudo-monotone. D'après le théorème 1.30, il suffit de montrer que l'opérateur $\mathcal{A}_n$ est une somme de deux opérateurs dont l'un est pseudo-monotone et l'autre est fortement continu. Pour cela, on pose $\mathcal{A}_n = A + B_n$ où A, $B_n : V = H_0^1(\Omega) \longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega)$ sont deux opérateurs définis par :

$$A(w) = -\text{div}\,(M(x)\nabla w)$$
$$B_n(w) = -\frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\theta}.$$

1. On preuve que A est un opérateur pseudo-monotone

(a) On montre que l'opérateur A est borné :

Soient $w, \varphi \in H_0^1$, en utilisant l'hypothèse (3.2) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle A(w), \varphi \rangle| = |\int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla\varphi\, dx| &\leq \beta \int_\Omega |\nabla w \nabla\varphi|\, dx \\ &\leq \beta \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \beta \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

et on a :

$$\|A(w)\|_{H^{-1}(\Omega)} = Sup\left\{|\langle A(w), \varphi\rangle| \,;\, \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\right\} \leq \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donc $\|A(w)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ est borné si $\|w\|_{H_0^1(\Omega)}$ est borné.

(b) On montre que l'opérateur A est hémicontinu :

(c'est-à-dire on montre que $\forall u, v, \varphi \in H_0^1(\Omega), t \longrightarrow \langle A(u+tv), \varphi \rangle$ est continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

On suppose que $t_n \to t$ dans $\mathbb{R}$ et on montre que :

$$\langle A(u+t_n v), \varphi \rangle \to \langle A(u+tv), \varphi \rangle \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}$$

Soient $u, v, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$|\langle A(u+t_n v), \varphi\rangle - \langle A(u+tv), \varphi\rangle| = |t_n - t|\,|\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx| \to 0 \text{ si } t_n \overset{|.|}{\to} t$$

(c) On montre que A est monotone :

soient $v, w \in H_0^1$, en utilisant l'hypothèse (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}\langle A(v) - A(w), v - w\rangle &= \langle A(v-w), v-w\rangle \\ &= \int_\Omega M(x)\nabla(v-w)\cdot\nabla(v-w) \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla(v-w)|^2 \geq 0\end{aligned}$$

2. On preuve que B_n est un opérateur fortement continu.

Soit $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.19}$$

On va démontrer que la suite $B_n(w_\varepsilon)$ converge fortement vers $B_n(w)$ dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$. Soit $w_{\varepsilon'}$ une sous-suite de w_ε. En vertu de (3.19), la suite $w_{\varepsilon'}$ admet une sous-suite, notée encore $w_{\varepsilon'}$, telle que :

$$w_{\varepsilon'} \longrightarrow w \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

et

$$w_{\varepsilon'} \longrightarrow w \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Donc, on a

$$-\frac{f_n}{\left(|w_{\varepsilon'}| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \longrightarrow -\frac{f_n}{\left(|w| - \frac{1}{n}\right)^\theta} \quad \text{p.p. dans } \Omega \tag{3.20}$$

De plus, il existe $g_n \in L^2(\Omega)$ telle que $g_n(x) = n^{\theta+1}$ qui vérifiée $|B_n(w_{\varepsilon'})| \leq n^{\theta+1}$. donc en appliquant le théorème de la convergence dominée, on en déduit que

$$B_n(w_{\varepsilon'}) \longrightarrow B_n(w) \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.21}$$

En utilisant (3.21) et le fait que l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ est continue, on en déduit que

$$B_n(w_{\varepsilon'}) \longrightarrow B_n(w) \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega).$$

Donc en appliquant le théorème 1.22, on en déduit que la suite $B_n(w_\varepsilon)$ converge fortement vers $B_n(w)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Étape 2 : L'opérateur $\mathcal{A}_n$ est coercif. Soit $w \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant (3.2), le fait que $\frac{f_n}{\left(|w|+\frac{1}{n}\right)^\theta} \leq n^{1+\theta}$,

et l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_n(w), w \rangle &= \int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla w \, dx - \int_\Omega \frac{f_n w}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\theta} \, dx \\
&\geq \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx - n^{\theta+1} \int_\Omega w \, dx \\
&\geq \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx - n^{\theta+1} \left(\int_\Omega |w|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx - C\, n^{\theta+1} \left(\int_\Omega |\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \left(\int_\Omega |\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha \left(\int_\Omega |\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx - C\, n^{\theta+1} \right)
\end{aligned}$$

De l'inégalité ci-dessus, il découle que

$$\lim_{\|w\| \to +\infty} \frac{\langle \mathcal{A}_n(w), w \rangle}{\|w\|_{H_0^1(\Omega)}} = +\infty.$$

Ce qui prouve bien que l'opérateur $\mathcal{A}_n$ est coercif.

Partie 2 : L'estimation $L^\infty(\Omega)$ sur la solution approchée (3.8).

On pose $B_n : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ défini par :

$$B_n(u_n) = \frac{f_n}{(|u_n| + \frac{1}{n})^\theta}$$

On remarque que $B_n \in L^\infty(\Omega)$ car on a $f_n \in L^\infty(\Omega)$ $(f_n = T_n(f))$, et comme l'hypothèse (3.2) est satisfaite alors on peut appliquer le théorème 2.3 pour obtenir que u_n appartient l'espace $L^\infty(\Omega)$.

Partie 3 : Positivité de u_n.

On remarque que $f_n \geq 0$ (car $f \geq 0$). par conséquent $\frac{f_n}{(|u_n|+\frac{1}{n})^\theta} \geq 0$ et en appliquant le théorème 2.5 pour obtenir la positivité de u_n.

□

Maintenant, on va prouver que la suite de solutions du problème approché (3.8) est croissante. Ceci est l'objet du lemme prochain.

Lemme 3.2. *La suite $(u_n)_n$ de solutions du problème approché (3.8) est croissante.*

Démonstration. Soit $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ et $\theta > 0$, on a

$$-\text{div}\,(M(x)\nabla u_n) = \frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\theta} \leq \frac{f_{n+1}}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\theta}$$

D'où

$$-\text{div}\,(M(x)\nabla(u_n - u_{n+1})) = \frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\theta} - \frac{f_{n+1}}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\theta}$$

$$\leq \frac{f_{n+1}}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\theta} - \frac{f_{n+1}}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\theta}$$

$$\leq f_{n+1}\left(\frac{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\theta - (u_n + \frac{1}{n+1})^\theta}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\theta (u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\theta}\right)$$

On pose

$$(u_n - u_{n+1})^+ = \begin{cases} u_n - u_{n+1} & \text{si} \quad u_n \geq u_{n+1} \\ 0 & \text{si} \quad u_n \leq u_{n+1} \end{cases}$$

On remarque que

$$\left((u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\theta - (u_n + \frac{1}{n+1})^\theta\right)(u_n - u_{n+1})^+ \leq 0$$

Et comme $f_{n+1} \geq 0$, on a

$$f_{n+1}\left(\frac{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\theta - (u_n + \frac{1}{n+1})^\theta}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\theta (u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\theta}\right)(u_n - u_{n+1})^+ \leq 0 \tag{3.22}$$

Par suite, en prenant $(u_n - u_{n+1})^+$ comme une fonction test dans (3.8), en utilisant l'hypothèse(3.2) et l'inégalité (3.22), on obtient

$$0 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u_{n+1})^+|^2 \leq 0$$

Donc, on déduit que $(u_n - u_{n+1})^+ = 0$, par conséquent $u_n \leq u_{n+1}$. □

Dans démonstration du théorème (3.1), on aura besoin que la solution approchée u_n est strictement positive sur tout ensemble $\omega \Subset \Omega$.

Lemme 3.3. *La suite u_n satisfait la condition suivante :*

$$u_n(x) \geq c_\omega > 0, \quad \forall x \in \omega \Subset \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.23}$$

Démonstration. Comme la suite (u_n) est croissante, alors pour démontrer le lemme précédent, il suffit de prouver que (3.23) est vraie pour la fonction u_1. On sait que u_1 est solution du problème

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u_1) = \dfrac{f_1}{(|u_1| + 1)^\theta} & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

Comme $u_1 \in L^\infty(\Omega)$, alors u_1 est une sur-solution (voir (2.1)) du problème :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla v) = \dfrac{f_1}{(C+1)^\theta} & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.25}$$

où $C = \|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}$. Comptant sur le fait que $\frac{f_1}{(C+1)^\theta} \geq 0$, et non identiquement nulle, en appliquant le théorème (2.7), donc on déduit que $v > 0$ dans Ω, et par conséquent

$$v(x) \geq c_\omega > 0, \quad \forall x \in \omega \Subset \Omega. \tag{3.26}$$

Par le principe de comparaison, on a $u_1 \geq v$, et par suite la condition (3.26) est satisfaite par u_1. □

Remarque 17. *En fait, si on suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $v(x_0) = 0$, alors, par le théorème (2.6), la fonction v est nécessairement identiquement nulle. Ceci est impossible car v est une solution d'un problème avec un deuxième membre non identiquement nulle.*

Lemme 3.4. *Soit $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$, On suppose que u_n est une suite de solution du problème (3.8). Alors u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Pour $k > 0$, on prend $v_n = G_k(u_n)$ comme une fonction test dans (3.8).
D'une part,l'hypothèse (3.2) implique

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla G_k(u_n)\,dx = \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n \chi_{\{u_n>k\}}\,dx &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \chi_{\{u_n>k\}}\,dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2\,dx \end{aligned} \tag{3.27}$$

D'autre part, comme $f_n \leq f$ (car $f_n = T_n(f)$ et $f > 0$), on a

$$\int_\Omega \frac{f_n G_k(u_n)}{(u_n + \frac{1}{n})^\theta}\,dx \leq \int_\Omega f G_k(u_n)\,dx \tag{3.28}$$

En combinant (3.27) et (3.28), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2\,dx \leq \int_\Omega f G_k(u_n)\,dx \tag{3.29}$$

La remarque 11 implique l'existence d'une constante positive C, tel que :

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \tag{3.30}$$

Maintenant, on prend u_n comme une fonction test dans (3.8) ,en utilisant l'hypothèse (3.2) et (3.30), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \leq \int_\Omega f u_n\,dx \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)}$$

D'où ∇u_n est bornée dans $L^2(\Omega)$ donc u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. □

On peut maintenant prouver le théorème d'existence de cette section.

Démonstration. On démontre le théorème (3.1) par passage à la limite dans le problème approché (3.8). Pour cela on divise la preuve en deux étapes :

Étape 1 : Soit u_n une suite de solution du problème (3.8), alors d'après le lemme 3.4, u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est réflexif, donc, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, à une sous-suite prés. Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)$, alors $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$, La réciproque partielle de Lebesgue implique que $u_n \longrightarrow u$ p.p. dans Ω.

On a aussi u_n est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, la semi-continuité inférieure de $\|.\|_{L^\infty(\Omega)}$ implique que $u \in L^\infty(\Omega)$.

Étape 2 : Maintenant, il suffit de démontrer que la limite u est une solution du problème (3.1).

D'une part, Comme $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \tag{3.31}$$

D'autre part, Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, On a u_n satisfait la condition (3.23), alors

$$\left|\frac{f_n\varphi}{(u_n+\frac{1}{n})^\theta}\right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty}(\Omega)f}{c_\omega}, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

De plus, on a $\frac{f_n\varphi}{(u_n+\frac{1}{n})^\theta} \longrightarrow \frac{f\varphi}{u^\theta}$ p.p. dans Ω. donc, en appliquent le théorème de convergence dominée pour déduire que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega \frac{f_n\varphi}{(u_n+\frac{1}{n})^\theta} = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\theta}, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \tag{3.32}$$

En combinant (3.31) et (3.32), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\theta}, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

□

3.3 Existence des solutions faibles non bornées

Dans cette section, on va prouver l'existence des solutions non bornées dans l'espace d'énergie $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 3.2. *On suppose que les hypothèses (3.2)-(3.4) sont satisfaites, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec m vérifie*

$$\frac{2N}{N+2+\theta(N-2)} \leq m < \frac{N}{2}. \tag{3.33}$$

Alors le problème (3.1) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ où $s = \frac{Nm(\theta+1)}{N-2m}$.

Remarque 18. *La condition (3.33) et $0 < \theta < 1$, implique que $s > 2$.*

Remarque 19. *On remarque que le résultat du théorème 3.2 coïncide avec le résultat du théorème 2.4 quand* $\theta \to 0$.

Pour prouver le théorème 3.2, on suit la méthode utilisée pour la démonstration du théorème 3.1. Pour cela, on considère le problème approché (3.8), et on montre le lemme suivant :

Lemme 3.5. *On suppose que les hypothèses (3.2)-(3.4) sont vraies, et que* $f \in L^m(\Omega)$ *avec* m *vérifie la condition (3.33). Alors la suite de solutions* u_n *du problème (3.8) est bornée dans l'espace* $H_0^1(\Omega) \cap L^s(\Omega)$, *avec* s *est comme dans le théorème 3.2.*

Démonstration. Soit $\delta > 1$, on prend $v_n = u_n^{2\delta-1}$ comme une fonction test dans (3.8).
D'une part, en utilisant l'hypothèse (3.2) et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n^{2\delta-1} &= (2\delta-1)\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n\, u_n^{2\delta-2} \\
&\geq \alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, u_n^{2\delta-2} \\
&\geq \alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n\, u_n^{\delta-1}|^2 \\
&\geq \frac{\alpha}{\delta^2}(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n^{\delta}|^2 \\
&\geq \frac{\alpha(2\delta-1)}{S_2^2\delta^2}\int_\Omega |u_n^{2^*\delta}|^{\frac{2}{2^*}}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $f_n \leq f$ et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{(u_n - \frac{1}{n})^\theta} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\theta)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{3.35}$$

En combinant (3.34) et (3.35), on obtient

$$\int_\Omega |u_n^{2^*\delta}|^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{S_2^2\delta^2}{\alpha(2\delta-1)} \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\theta)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}$$

On choisit δ de tel sorte que $2^*\delta = (2\delta-1-\theta)m'$, on trouve que $2^*\delta = s$. et on remarque que $\delta > 1$ si et seulement si $m > \frac{2N}{N+2\theta(N-2)}$.
Comme $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$(car $m < \frac{N}{2}$), alors en utilisant l'inégalité de Young, et on en déduit que u_n est bornée dans $L^s(\Omega)$.
Maintenat, on prend u_n comme une fonction test dans (3.8).
D'une part, en utilisant l'hypothèse (3.2) et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \geq \frac{\alpha}{S_2^2}\left(\int_\Omega |u_n|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \tag{3.36}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $f_n \leq f$ et l'inégalité de Hölder avec les exposants $\sigma = \frac{2N}{N+2+\theta(N-2)}$ et $\sigma' = \frac{2^*}{1-\theta}$, on obtient

$$\int_\Omega \frac{f_n u_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\theta} \leq \int_\Omega f u_n^{1-\theta} \leq \|f\|_{L^\sigma(\Omega)} \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} \right)^{\frac{1-\theta}{2^*}} \tag{3.37}$$

Maintenant, en combinant (3.36) et (3.3) , on obtient

$$\frac{\alpha}{S_2^2} \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \|f\|_{L^\sigma(\Omega)} \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} \right)^{\frac{1-\theta}{2^*}} \tag{3.38}$$

Comme $2 > 1 - \theta$ (étant $0 < \theta < 1$), alors en utilisant l'inégalité de Young sur le côté droit de (3.38), il découle que u_n est bornée dans $L^{2^*}(\Omega)$. donc, on en déduit que la suite u_n est bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. □

On peut maintenant prouver le théorème d'existence de cette section.

Démonstration. On utilise même technique de celle de la démonstration du théorème 3.1 pour obtenir que $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^s(\Omega)$. □

3.4 Existence des solutions distributionnelles

Dans cette section, on étudie l'existence de solutions distributionnelles au problème (3.1).

Théorème 3.3. *Si les hypothèses (3.2)-(3.4) sont satisfaites, et $f \in L^m(\Omega)$ avec m vérifie*

$$1 \leq m < \frac{2N}{N+2+\theta(N-2)}, \tag{3.39}$$

alors le problème (3.1) admet au moins une solution $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $q = \frac{Nm(\theta+1)}{N-m(1-\theta)}$.

Remarque 20. *La condition (3.39) et $0 < \theta < 1$, implique que $1 < q < 2$.*

Remarque 21. *On remarque que le résultat du théorème 3.3 coïncide avec les résultats de théorèmes 2.8 et 2.9 quand $\theta \to 0$.*

Lemme 3.6. *On suppose que les hypothèses (3.2)-(3.4) sont satisfaites, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec m satisfait la condition (3.39). Alors la suite de solutions approchées u_n du problème (3.8) est bornée dans l'espace $W_0^{1,q}(\Omega)$ avec q est comme le théorème 3.3.*

Démonstration. Pour n fixé, on choisit $\varepsilon < \frac{1}{n}$ et on prend $v_n = (u_n + \varepsilon)^{2\delta-1} - \varepsilon^{2\delta-1}$ comme une fonction test dans (3.8).
D'une part, l'hypothèse (3.2) implique

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \left((u_n+\varepsilon)^{2\delta-1} - \varepsilon^{2\delta-1} \right) &= (2\delta-1) \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \\ &\geq \alpha(2\delta-1) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2(u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} &= \frac{\alpha(2\delta-1)}{\delta^2}\int_\Omega \left|\nabla[(u_n+\varepsilon)^\delta-\varepsilon^\delta]\right|^2 \\ &\geq \frac{\alpha(2\delta-1)}{S_2^2\delta^2}\left(\int_\Omega \left|(u_n+\varepsilon)^\delta-\varepsilon^\delta\right|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}\end{aligned} \tag{3.41}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $f_n \leq f$ et $\varepsilon < \frac{1}{n}$, on obtient

$$\int_\Omega \frac{f_n[(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1}-\varepsilon^{2\delta-1}]}{(u_n+\frac{1}{n})^\theta} \leq \int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\theta} \tag{3.42}$$

En combinant (3.40) et (3.42), on obtient

$$\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2(u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \leq \int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\theta} \tag{3.43}$$

Et en combinant (3.41) et (3.42), on obtient

$$\left(\int_\Omega \left|(u_n+\varepsilon)^\delta-\varepsilon^\delta\right|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{S_2^2\,\delta^2}{\alpha(2\delta-1)}\int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\theta} \tag{3.44}$$

Pour tout $\varepsilon < \frac{1}{n}$, en passant à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans l'inégalité (3.44) pour obtenir

$$\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{S_2^2\,\delta^2}{\alpha(2\delta-1)}\int_\Omega f\,u_n^{2\delta-1-\theta} \tag{3.45}$$

Si $m = 1$:

En prenant $\delta = \frac{\theta+1}{2}$, on trouve que u_n est bornée dans $L^s(\Omega)$ tel que $s = \frac{N(\theta+1)}{N-2}$ pour $m = 1$.

Si $m > 1$:

En appliquant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m dans l'inégalité (3.45), on obtient

$$\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\,\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{m'(2\delta-1-\theta)}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{3.46}$$

On choisit $2^*\delta = m'(2\delta-1-\theta)$, donc on trouve que $2^*\delta = s$,Comme $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$ (car $m < \frac{N}{2}$),on utilise l'inégalité de Young et on obtient que u_n est bornée dans $L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{Nm(\theta+1)}{N-2m}$.

Ensuite, en utilisant l'estimation de u_n dans $L^s(\Omega)$ et l'inégalité (3.43), donc pour $\delta < 1$ on a

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(u_n+\varepsilon)^{2-2\delta}} = \int_\Omega |\nabla u_n|^2(u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \leq C \tag{3.47}$$

Soit $q < 2$, En utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{2}{q}$ et l'inégalité (3.47), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^q &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(u_n+\varepsilon)^{(1-\delta)q}} (u_n+\varepsilon)^{(1-\delta)q} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(u_n+\varepsilon)^{(2-2\delta)}} \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega (u_n+\varepsilon)^{\frac{(2-2\delta)q}{2-q}} \right)^{1-\frac{q}{2}} \\ &\leq C \left(\int_\Omega (u_n+\varepsilon)^{\frac{(2-2\delta)q}{2-q}} \right)^{1-\frac{q}{2}}\end{aligned}$$

En prenant $\frac{(2-2\delta)q}{2-q} = s$ donc on trouve que $q = \frac{Nm(\theta+1)}{N-m(1-\theta)}$, par conséquent, on en déduit que u_n est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$.

□

On peut maintenant prouver le théorème d'existence de cette section.

Démonstration. On utilise la même technique de celle de démonstration du théorème 3.1 pour obtenir que $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$. □

Chapitre 4

Équations elliptiques singulières avec des sources de mesure

4.1 Position du problème

Dans ce chapitre on va étudier le problème suivant

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u) = \dfrac{f}{u^\theta} + \mu & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, M est une matrice elliptique bornée ; c'est-à-dire, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)| \leq \beta, \tag{4.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $x \in \Omega$ presque partout. On suppose en outre que

$$0 < \theta < 1, \tag{4.3}$$

$$f \geq 0, \quad f \not\equiv 0, \tag{4.4}$$

$$f \in L^1(\Omega), \tag{4.5}$$

et

$$\mu \in \mathrm{M}_b^+(\Omega) \quad \text{c-à-d } \mu \text{ est une mésure de Radon bornée et positive.} \tag{4.6}$$

Définition 4.1. *Une solution du problème* (4.1) *est une fonction* $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ *telle que*

$$\forall \omega \Subset \Omega,\ \exists c_\omega > 0 : \quad u(x) \geq c_\omega > 0 \text{ dans } \omega, \tag{4.7}$$

et

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega \frac{f\,\varphi}{u^\theta}\,dx+\int_\Omega \varphi d\mu,\quad \forall\varphi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega). \tag{4.8}$$

Remarque 22. *L'égalité* (4.8) *a bien un sens, en effet :*
D'une part, en utilisant l'hypothèse (4.2) *et l'inégalité de Hölder, on obtient*

$$|M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx|\leq\beta\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

D'autre part, on a u satisfait la condition (4.7)*, donc* $\forall\varphi\in\mathcal{C}_0^1$ *l'inégalité de Hölder donne*

$$\int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\theta}+\int_\Omega\varphi d\mu\leq\left(\frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{c_w}+C\right)\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Théorème 4.1. *Si les hypothèses* (4.2)-(4.6) *sont satisfaites, alors le problème* (4.1) *admet au moins une solution u au sense de la définition 4.1.*

Démonstration. La preuve se fait en trois étapes.

4.2 Approximation

On considère le problème approché suivant

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u_n)=\dfrac{f_n}{\left(|u_n|+\frac{1}{n}\right)^\theta}+\mu_n & \text{dans }\Omega,\\ u_n=0 & \text{sur }\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.9}$$

où $f_n=T_n(f)$ (T_n c'est la fonction de troncature), et μ_n est une suite de fonctions régulières bornée dans $L^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers μ au sens des mesures [1].

Lemme 4.1. *Le problème approché* (4.9) *admet une solution positive* $u_n\in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder 1.24
Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé, soit $v\in V=L^2(\Omega)$, On définit l'application

$$\begin{aligned} S:V&\longrightarrow V\\ v&\mapsto S(v)=w \end{aligned} \tag{4.10}$$

où w est la solution unique du problème linéaire suivant [2] :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla w)=\dfrac{f_n}{\left(|v|+\frac{1}{n}\right)^\theta}+\mu_n & \text{dans }\Omega,\\ w=0 & \text{sur }\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.11}$$

1. La suite μ_n existe d'après le théorème 1.12.
2. 1 Le problème (4.11) admet une unique solution via le théorème (2.1).

On va maintenant vérifier que l'application S satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder 1.24.

(a) On doit prouver que S fixe une certaine boule K.

Tout d'abord, en prenant w comme une fonction test et en utilisant l'hypothèse (4.2), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \leq \int_\Omega \frac{f_n w}{(|v| + \frac{1}{n})^\theta} + \int_\Omega \mu_n w \leq \left(n^{(\theta+1)} + C(n)\right) \int_\Omega |w|$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Poincaré sur le côté gauche et l'inégalité de Hölder sur le côté droit, on obtient

$$\int_\Omega |w|^2 \leq C' \left(n^{(\theta+1)} + C(n)\right) \left(\int_\Omega |w|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C' \left(n^{(\theta+1)} + C(n)\right) = R \tag{4.12}$$

De (4.12),on en déduit que $w \in K$ tel que K est la boule fermée dans $L^2(\Omega)$ de centre 0 et de rayon $R = C' \left(n^{(\theta+1)} + C(n)\right)$.

(b) On doit prouver que S est continue dans $L^2(\Omega)$ (c'est-à-dire si v_ε converge fortement vers v dans $L^2(\Omega)$ alors $S(v_\varepsilon)$ converge fortement vers $S(v)$ dans $L^2(\Omega)$).

On a

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_\varepsilon \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(|v_\varepsilon| + \frac{1}{n}\right)^\theta} + \int_\Omega \mu_n \varphi \tag{4.13}$$

$$\int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\theta} + \int_\Omega \mu_n \varphi \tag{4.14}$$

En prenant $\varphi = w_\varepsilon - w$, et en faisant la différence de (4.13) et (4.14), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla(w_\varepsilon - w) \cdot \nabla(w_\varepsilon - w) = \int_\Omega \left(\frac{f_n}{\left(|v_\varepsilon| + \frac{1}{n}\right)^\theta} - \frac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\theta}\right)(w_\varepsilon - w)$$

En utilisant l'hypothèse (4.2) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(w_\varepsilon - w)|^2 \leq \| \frac{f_n}{\left(|v_\varepsilon| + \frac{1}{n}\right)^\theta} - \frac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\theta} \|_{L^2(\Omega)} \|w_\varepsilon - w\|_{L^2(\Omega)}$$

Par suite, l'inégalité de Poincaré implique

$$0 \leq \alpha \|w_\varepsilon - w\|_{L^2(\Omega)} \leq \| \frac{f_n}{\left(|v_\varepsilon| + \frac{1}{n}\right)^\theta} - \frac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\theta} \|_{L^2(\Omega)} \tag{4.15}$$

Maintenant, on passe à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans (4.15), et on applique le théorème de convergence

dominée grâce à le fait que $v_\varepsilon \longrightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient que

$$\frac{f_n}{\left(|v_\varepsilon| + \frac{1}{n}\right)^\theta} \longrightarrow \frac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\theta} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$

Alors, on conclut que $w_\varepsilon \longrightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$,c'est-à-dire $S(v_\varepsilon) \longrightarrow S(v)$ dans $L^2(\Omega)$.

(c) On doit prouver que S est relativement-compact dans $L^2(\Omega)$

Tout d'abord, on a l'image de S est dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ (car $\int\limits_\Omega |\nabla S(v)|^2 \leq C(n,\theta)$) et dans un compact dans $L^2(\Omega)$ grâce à le théorème de Rellich-Kondrachov .en prenant R assez grand, l'application S envoie $K = \{v \in L^2(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq R\}$ dans K. et $\{S(v),\ v \in K\}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$.

Finalement, on applique le théorème du point fixe de Schauder pour obtenir qu'il existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$ tel que $u_n = S(u_n)$ ce qui bien prouve que u_n solution du problème (4.9).

□

Lemme 4.2. *La suite u_n satisfait la condition suivante :*

$$u_n(x) \geq c_\omega > 0, \quad \forall x \in \omega \Subset \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.16}$$

Démonstration. On considère le problème approché suivant

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla v_n) = \dfrac{f_n}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\theta} & \text{dans } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.17}$$

En vertu du lemme 3.3, la suite v_n satisfait la condition suivante :

$$v_n(x) \geq c_\omega > 0, \quad \forall x \in \omega \Subset \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

en faisant la différence de (4.9) et (4.17), et en prenant $(u_n - v_n)^-$ comme une fonction test, on obtient

$$\int\limits_\Omega M(x)\nabla(u_n - v_n)\cdot\nabla(u_n - v_n)^- = \int\limits_\Omega \left(\frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\theta} - \frac{f_n}{(v_n + \frac{1}{n})^\theta}\right)(u_n - v_n)^- + \int\limits_\Omega \mu_n(u_n - v_n)^-$$

Par suite, en utilisant l'hypothèse (4.2), on trouve

$$0 \geq -\alpha \int\limits_\Omega |\nabla(u_n - v_n)^-|^2 \geq \int\limits_\Omega f_n \frac{(v_n + \frac{1}{n})^\theta - (u_n + \frac{1}{n})^\theta}{(u_n + \frac{1}{n})^\theta (v_n + \frac{1}{n})^\theta}(u_n - v_n)^- + \int\limits_\Omega \mu_n(u_n - v_n)^- \geq 0$$

Donc, on déduit que $(u_n - v_n)^- = 0$, par conséquent $u_n \geq v_n$ p.p. dans ω, et par suite la condition (4.16) est satisfaite par u_n. □

4.3 Estimation à priori

Lemme 4.3. *Si les hypothèses (4.2)-(4.6) sont vraie, alors suites u_n est uniformément bornée dans l'espace $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.*

Démonstration. On divise la démonstration en trois étapes.

Étape 1 : On prouve que la suite $T_1(u_n)$ est uniformément bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Pour n fixé, on choisit $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$, et on prend $(T_1(u_n)+\varepsilon)^\theta - \varepsilon^\theta$ comme fonction test dans (4.9). D'une part, en utilisant l'hypothèse (4.2) et le fait que $T_1(u_n) \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\left((T_1(u_n)+\varepsilon)^\theta - \varepsilon^\theta\right) &= \theta \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla T_1(u_n)(T_1(u_n)+\varepsilon)^{\theta-1} \\ &\geq \theta\alpha \int_\Omega \frac{|\nabla T_1(u_n)|^2}{(T_1(u_n)+\varepsilon)^{1-\theta}} \\ &\geq \theta\alpha \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1-\theta}} \int_\Omega |\nabla T_1(u_n)|^2\end{aligned} \tag{4.18}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $\varepsilon < \frac{1}{n}$ qui donne $\frac{\left((T_1(u_n)+\varepsilon)^\theta - \varepsilon\right)}{(u_n+\frac{1}{n})^\theta} \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{f_n\left((T_1(u_n)+\varepsilon)^\theta - \varepsilon\right)}{(u_n+\frac{1}{n})^\theta} + \int_\Omega \mu_n\left((T_1(u_n)+\varepsilon)^\theta - \varepsilon\right) &\leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + (1+\varepsilon)^\theta \|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C\left(1+(1+\varepsilon)^\theta\right)\end{aligned} \tag{4.19}$$

En combinant (4.18) et (4.19), et en utilisant le fait que $T_1(u_n) \leq 1$, on obtient

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{1-\theta}} \int_\Omega |\nabla T_1(u_n)|^2 \leq C\left(1+(1+\varepsilon)^\theta\right) \tag{4.20}$$

Faisant tendre ε vers 0 dans l'inégalité (4.20), on en déduit que la bornitude de la suite $T_1(u_n)$ dans l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Étape 2 : On prouve que la suite $v_n = G_1(u_n)$ est uniformément bornée dans l'espace $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$. Il suffit d'utiliser la même technique que dans la preuve du lemme 2.2, En prenant $\psi_\eta(v_n)$ comme fonction test avec v_n à la place de u_n.

Étape 3 : Comme $u_n = G_1(u_n) + T_1(u_n)$ et les suites $G_1(u_n)$ et $T_1(u_n)$ sont uniformément bornées dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, alors la suite u_n est également bornées dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

□

4.4 Passage à la limite

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans le problème approché (4.9). Grâce au lemme 4.3, la suite u_n est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ qui est réflexif, donc il existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, à une sous-suite

prés.

D'une part, Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, comme $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi. \tag{4.21}$$

D'autre part, comme $W_0^{1,q}(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\Omega)$, alors $u_n \longrightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$, la réciproque partielle de Lebesgue dominée implique que $u_n \longrightarrow u$ p.p. dans Ω.

De plus, Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, la suite u_n satisfait la condition (4.16), alors

$$\left| \frac{f_n\varphi}{(u_n + \frac{1}{n})^\theta} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty}(\Omega) f}{c_\omega}, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

Donc, en appliquent le théorème de convergence dominée pour déduire que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega \frac{f_n\varphi}{(u_n + \frac{1}{n})^\theta} = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\theta}, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \tag{4.22}$$

En utilisant le fait que la suite μ_n converge faiblement vers μ au sens des mesures, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega \varphi\, d\mu_n = \int_\Omega \varphi\, d\mu \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \tag{4.23}$$

En combinant (4.21), (4.23) et (4.22) , on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\theta} + \int_\Omega \varphi\, d\mu \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

□

Conclusion

Dans ce mémoire de Master on a étudié l'existence et régularité de solutions pour quelques problèmes elliptiques semi-linéaires avec un terme d'ordre zéro ayant un comportement singulier. Une extension naturelle de ce travail, est d'étudier ces problèmes en remplaçant l'opérateur linéaire $Au = -\mathrm{div}(M(x)\nabla u)$ par un opérateur non linéaire de type Leray-lions, c'est à dire $Au = -\mathrm{div}(M(x, \nabla u))$ où $M : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant pour presque partout $x \in \Omega$, et pour tout ξ, $\xi' \in \mathbb{R}^N$, avec $\xi \neq \xi'$,

$$M(x, \xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p, \tag{4.24}$$

$$|M(x, \xi)| \leq \beta \left[j(x) + |\xi|^{p-1}\right], \tag{4.25}$$

$$[M(x, \xi) - M(x, \xi')] \cdot [\xi - \xi'] > 0, \tag{4.26}$$

avec j est une fonction positive appartient à $L^{p'}(\Omega)$, $\alpha > 0$, et $\beta > 0$. Pour un exposé plus détaillé sur ce sujet, voir [17] et [7].

Bibliographie

[1] R. A.Adams et J. J.F.Fournier : *Sobolev spaces.* Elsevier, 2003.

[2] M. A. Al-Gwaiz : *Theory of distributions.* CRC Press, 1992.

[3] L. Boccardo et G. Croce : *Elliptic partial differential equations : existence and regularity of distributional solutions*, vol. 55. Walter de Gruyter, 2013.

[4] L. Boccardo et L. Orsina : Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities. *Calculus of Variations*, (37):363–380, 2010.

[5] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[6] L. C. Evans et R. F. Gariepy : *Measure theory and fine properties of functions.* Chapman and Hall/CRC, 2015.

[7] L. M. D. Cave : Nonlinear elliptic equations with singular nonlinearities. *Asymptotic Analysis 84.3-4*, p. 181–195, 2013.

[8] W. Fulks et J. S.Maybee : A singular non-linear equation. *Osaka Math. J., 12*, p. 1–19, 1960.

[9] D. Gilbarg et N. S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 1998.

[10] J. Kinnunen : *Sobolev Spaces.* Aalto University, 2017.

[11] H. K.Pathak : *an introduction to nonlinear analysis and fixed point theory.* springer, 2018.

[12] H. Le Dret : *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations.* Springer International Publishing, 2018.

[13] G. Leoni : *A first course in Sobolev spaces.* American Mathematical Soc, 2017.

[14] L. Lions, Jacques : *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* 1969.

[15] S. Migorski, A. Ochal et M. Sofonea : *Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities : models and analysis of contact problems*, vol. 26. Springer Science and Business Media, 2012.

[16] A. Nachman et A. Callegari : A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids. *SIAM Journal on Applied Mathematics 38.2*, p. 275–281, 1980.

[17] F. Oliva et F. Petitta : On singular elliptic equations with measure sources. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 22.1*, p. 289–308, 2016.

[18] L. Orsina : Elliptic equations with measure data. *in Lecture notes of the course Analisi Superiore*, 2012. http://www1.mat.uniroma1.it/people/orsina/.

[19] W. Perry : A monotone iterative technique for solution of pth order (p<0) reaction-diffusion problems in permeable catalysis. *Journal of computational chemistry 5.4*, p. 353–357, 1984.

[20] P. Pucci et J. Serrin : The strong maximum principle revisited. *Journal of Differential Equations*, p. 1–66, 2004.

[21] N. S.Papageorgiou, V. D.Radulescu et D. D.Repovs : *Nonlinear Analysis : Theory and Methods*. Springer Monographs in Mathematics, 2019.

[22] E. Zeidler : *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : II/B : Nonlinear Monotone Operators*. Springer Science and Business Media, 2013.