République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche opérationnelle

Par

ZELLAG HICHAM

Étude des superclasses de graphes sans griffe

Soutenu publiquement le 29 juin 2025, devant le jury composé de

Hamza BIBI	Maitre de conférence Univ. Médéa	Président
Abdelkader SAHRAOUI	Maitre de conférence Univ. Médéa	Encadreur
Rachid LEMDANI	Maitre de conférence Univ. Médéa	Examinateur

Année universitaire 2024/2025

Résumé

La griffe est un graphe d'ordre 4 et composé d'un sommet de degré trois adjacent à trois sommets deux à deux non adjacents entre eux. Un graphe sans griffe est un graphe qui ne contient aucun sous-graphe induit isomorphe à la griffe.Un graphe est dit presque sans griffe si car ensemble de centres de griffes est un stable (ensemble indépendant) et pour chaque centre de griffe u il existe deux sommets x et y vérifiant $N_G(u) \subseteq N[x] \cup N[y]$. Un graphe G est quasi sans griffe s'il satisfait la propriété suivante : $d(x,y) = 2$ il existe $u \in N(x) \cap N(y)$ tel que $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$. A travers ce mémoire, on essaie de donner certains résultats sur le nombre chromatique $\chi(G)$ pour certain graphes presque sans griffe.

Mots clés : Griffe, graphe sans griffe, graphe presque sans griffe et graphe quasi sans griffe.

Abstract

The claw is a graph of order 4 and composed of a vertex of degree three adjacent to three vertices two to two not adjacent to each other. A claw-free graph is a graph that contains no induced sub-graphs that are isomorphic to the claw. A graph is said to be almost claw-free if because the set of claw centers is a stable (independent set) and for each claw center u there are two vertices x and y verifying $N_G(u) \subseteq N[x] \cup N[y]$. A graph G is almost claw-free if it satisfies the following property : $d(x,y) = 2$ there exists $u \in N(x) \cap N(y)$ such that $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$. Through this memory, we try to give some results of the chromatic number $\chi(G)$ for some graphs almost claw-free graphs.

Key words : Claw, claw-free graph, almost claw-free graph and quasi claw-free graph.

الملخص

المخلب هو رسم بياني من الرتبة الرابعة يتكون من رأس درجته ثلاثة ومرتبط بثلاثة رؤوس أخرى، وهذه الرؤوس الثلاثة غير مرتبطة فيما بينها.

الرسم البياني الخالي من المخلب هو رسم لا يحتوي على أي رسم جزئي يكون مخلبا. يقال عن رسم بياني انه شبه خال من المخلب إذا كانت المجموعة المتكونة من مراكز المخالب مستقلة وكل رأس مخلب1 يوجد رأسان 2 و 3 يحققان

$$N_G(1) \subseteq N[2] \cup N[3]$$

نقول عن رسم بياني انه يكاد يكون خال من المخلب إذا حقق الشرط التالي:

$$d_G(1,3) = 2 \Rightarrow \exists 4 \in N_G(1) \cap N_G(3),\ N[4] \subseteq N[1] \cup N[3]$$

خلال هذه المذكرة نعطي بعض النتائج للعدد اللوني للعديد من البيانات الشبه الخالية من المخلب.

Remerciements

Je rend Allah le tout puissant de nous avoir donne le courage et la volonté ainsi que la patience pour bien mener ce travail.

Je tiens, avant tout, à remercier chaleureusement notre promoteur Monsieur **Sahraoui Abdelkader**, Maître de conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour avoir accepte de nous encadrer. Ainsi de nous avoir orientés, aidés et conseillés.

Je remercie également Monsieur **Hamza Bibi** , Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour l'honneur qu'il m'as fait en accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur **Rachid Lemdani**, Maître de Conférences à l'université YAHIA FARES de Médéa, pour avoir accepté juger notre travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département Mathématique et Informatique de l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa.

Enfin, il est important pour moi de remercier nos parents d'avoir fait de leur mieux pour que nous puissions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions.

Je remercie mes frères et soeurs, sans oublier mes chers amis qui étaient toujours présents.

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma très chère mère et mon très cher père Pour leur soutien, leur présences, leur amour qui m'a encouragé dans mes études.

A Mes frères et sœurs

A toute la famille ZELLAG sans exception. A tous les professeurs et enseignants qui ont collaboré à ma formation depuis mon premier cycle d'étude jusqu'à la fn de mes études universitaires. A mes chers amis Pour leur encouragement, leur soutien et l'ambiance que nous avons vécu pendant toute notre carrière d'étudiant a cet eet, je tiens à remercier tous mes collègues tous mes amis et aussi a tous ceux qui ont une relation de proche ou de loin avec la réalisation du présent rapport.

Table des matières

Résumé i

Abstract ii

Résumé iii

Remerciements iv

Dédicace v

Introduction 1

1 Notions générales sur les graphes 2
1.1 Graphe et graphe simple . . . 2
1.1.1 Voisinages et degrés . . . 3
1.1.2 Graphes isomorphes . . . 4
1.1.3 Graphes particuliers . . . 4
1.1.4 Graphes complet . . . 5
1.2 Stable et Clique . . . 5
1.2.1 Stable . . . 5
1.2.2 Clique . . . 6
1.2.3 Chaîne et cycle . . . 6
1.3 Graphe connexe . . . 6
1.4 Graphe localement connexe . . . 7
1.5 Graphe biparti et étoile . . . 8
1.6 Graphe complémentaire . . . 10
1.7 Graphe Roue . . . 10
1.8 Graphe régulier . . . 11
1.9 Graphe carré . . . 11
1.9.1 Arbre . . . 12
1.9.2 Distance et excentricité et diamètre . . . 12
1.10 Couplage . . . 12
1.11 Graphe Hamiltonien . . . 13
1.11.1 Chaîne Hamiltonienne et cycle Hamiltonien . . . 13
1.11.2 Graphe semi-Hamiltonien . . . 13
1.11.3 Graphe Hamiltonien . . . 14
1.11.4 Graphe Hamiltonien connexe . . . 14
1.12 Coloration dans les graphes . . . 15
1.12.1 Coloration des sommets . . . 15

1.12.2 nombre chromatique 15
1.13 Domination 15

2 Super-classes de graphes sans griffe **16**
2.1 Graphe sans griffe 16
2.2 Graphes ligne 17
2.3 Graphe presque sans griffe 17
2.3.1 Propriétés des graphes presque sans griffe 19
2.4 Graphe quasi sans griffe 20
2.4.1 Propriétés dans graphe quasi sans griffe 20

3 Coloration dans les super-classes de graphe sans griffe **21**
3.1 Coloration des graphe presque sans griffe 21
3.2 Graphe quasi sans griffe 24

Conclusion **26**

Table des figures

1.1 Graphe simple . . . 2
1.2 Voisinages et degrés . . . 4
1.3 G et H sont isomorphes . . . 4
1.4 H_1 graphe partiel et H_2 un sous-graphe de G . . . 4
1.5 Graphe complet K_n . . . 5
1.6 Graphe P_5 . . . 5
1.7 Clique . . . 6
1.8 Le cycle C_8 et la chaîne P_5. . . . 6
1.9 Exemples d'un graphe connexe G_1, d'un graphe non connexe G_2 . . . 7
1.10 Graphe localement connexe . . . 7
1.11 Graphe biparti et graphe biparti complet . . . 8
1.12 Graphe étoile et griffe . . . 8
1.13 Exemples d'un graphe double étoile . . . 9
1.14 Le cycle C_5 et son complémentaire $\overline{G}$. . . . 10
1.15 $C_5 \cup \overline{C}_5 = K_5$ . . . 10
1.16 W5 . . . 10
1.17 Graphe 3-régulier . . . 11
1.18 Graphe carré . . . 11
1.19 Arbre . . . 12
1.20 couplage . . . 13
1.21 Graphe semi-Hamiltonien . . . 13
1.22 Graphe Hamiltonien . . . 14
1.23 Graphe Hamiltonien connexe et Hamiltonien . . . 14
1.24 Le graphe K_4. . . . 15

2.1 Graphe G . . . 17
2.2 $N[x]$ quelque soit $x \in V$ . . . 17
2.3 Graphe G' . . . 18
2.4 $N[x]$ quelque soit $x \in V'$ . . . 18
2.5 graphe localement sans griffe . . . 19
2.6 Graphe quasi sans griffe . . . 20

3.1 Graphe G . . . 21
3.2 Graphe G . . . 22
3.3 Graphe quasi sans griffe . . . 24

Introduction

La recherche opérationnelle est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la recherche opérationnelle s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la recherche opérationnelle a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

Confronté à un problème donné et pour en faciliter la compréhension, on recourt souvent au schéma. Ce dernier est composé exclusivement de points et de traits les reliant. Les points représentent les différents objets du problème. Quant aux traits, ils représentent les relations existant entre ces différents objets.

Ce schéma est conventionnellement nommé **graphe**. Les points et les traits sont appelés respectivement **sommets** et **arêtes**. Ce type de problème appartient à un très vaste domaine appelé la **théorie des graphes**, qui s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la sociologie, l'économie, ...

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux du mathématicien suisse **Euler** au 18^{e} siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des ponts de Königsberg, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'une île quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et revenir à son point de départ.

Dès le début du 20^{e} siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de **König**, **Menger**, **Cayley** puis de **Berge** et **Erdös**.

Parmi les problèmes en la théorie des graphes, le problème de graphes sans griffe et devenus un champ de recherche pour plusieurs auteurs on théorie des graphes. Ce problème s'est évolué à l'étude d'autres classes de graphes plus larges comme celui des graphes presque sans griffe, graphes quasi sans griffe.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres autre que l'introduction et la conclusion,

- Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations des principales notions utilisées dans ce mémoire. Pour chacune d'entre elles, nous essayerons de donner une définition formelle ainsi qu'une définition intuitive.
- Dans la deuxième chapitre, nous donnons les définitions et Quelques résultats concernant des super-classes des graphes sans griffe.
- Dans la troisième chapitre, Nous avons étudié coloration des graphes presque sans griffe.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

Ce premier chapitre est consacré aux définitions des principales notions utilisées dans ce mémoire. Pour chacune d'entre elles, nous essayerons de donner une définition formelle ainsi qu'une définition intuitive.

1.1 Graphe et graphe simple

Définition 1.1.1 *Un graphe, noté $G = (V, E)$ ou $G = (V(G), E(G))$ s'il y a une confusion, est une paire d'ensembles tels que V est un ensemble fini appelé ensemble des sommet du graphe G et $E = [V]^2$ est une partie des combinaisons de 2 éléments de V appelé ensembles des arêtes du graphe G ; ainsi, les arêtes sont des sous-ensembles à 2 éléments de V. Pour une arête $e = \{u, v\}$ qui sera notée $e = uv$, les sommets u et v sont les extrémités de e et sont dits adjacents entre eux. Deux arêtese et f sont dites incidentes si elles ont une même extrémité. En particulier, l'arête uu est appelée boucle. Des arêtes sont dites multiples si elles ont les deux mêmes extrémités.*

Un graphe est dit simple s'il est sans boucles est sans arêtes multiples. les graphes considêrês à travers ce mémoire sont simple et finis.

Exemple 1 $G = (V(G), E(G))$ *avec* $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ *et* $E(G) = \{ab, bc, bd, be, cf, fe\}$

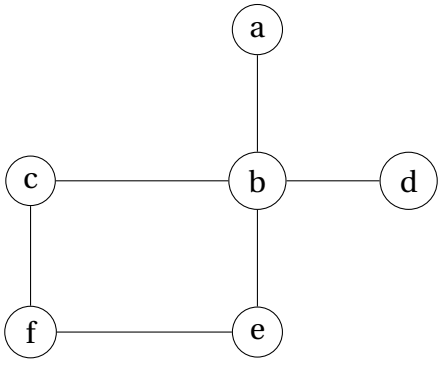


FIGURE 1.1: Graphe simple

1.1.1 Voisinages et degrés

- Si $uv \in E(G)$, alors u et v sont dits voisins ;
- Le voisinage ouvert du sommet v de G, noté $N_G(v)$, est l'ensemble de tous les voisins de v. Formellement,

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

- Le voisinage fermé du sommet v , noté $N[v]$ est défini par :

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

- Pour un ensemble de sommet S, $S \subseteq V$ le voisinage ouvert de S est définie par :

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$$

  et l'ensemble,

$$N[S] = N_G(S) \cup S$$

  est son voisinage fermé.
  Le voisinage à distance k d'un sommet x, noté $N_k(x)$, est l'ensemble

$$N_k(x) = \{y \in V,\ d_G(x,y) = k\}$$

  En particulier $N_1(x) = N_G(x)$.
- S'il n'y a pas confusion, les voisinages ouvert et fermé seront par $N(v)$ et $N(S)$ au lieu de $N_G(v)$ et $N_G(S)$ respectivement.
- Le degré du sommet v de G , noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v. Dans un graphe simple, $d_G(v) = |N_G(v)|$.
- Un sommet de degré nul est dit sommet isolé et un sommet de degré un est dit sommets pendant et le sommet adjacent à un sommet pendant est dit support.
- On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum de G respectivement, qui sont définis par

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$$

  et

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}.$$

- S'il n'y a pas de confusion, on écrit $d(v)$, Δ et δ désignent respectivement $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$.

Dans le graphe illustré dans la figure 1.1, le tableau suivant résume des exemples $N_G(v)$, $N[v]$ et $d_G(v)$

Le degré minimum de G est $\delta(G) = 1$, el le degré maximum est $\Delta(G) = 4$.

sommet : v	$N_G(v)$	$N[v]$	$d_G(v)$
a	$\{b\}$	$\{a,b\}$	1
b	$\{a,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	4
c	$\{b,f\}$	$\{b,c,f\}$	2
d	$\{b\}$	$\{b,d\}$	1
e	$\{b,f\}$	$\{b,e,f\}$	2
f	$\{c,e\}$	$\{c,e,f\}$	2

FIGURE 1.2: Voisinages et degrés

1.1.2 Graphes isomorphes

On dit que deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont isomorphes s'il y a une bijection $f : V_1 \longrightarrow V_2$ qui préserve l'adjacence, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in V_1,\ xy \in E_1 \iff f(x)f(y) \in E_2$$

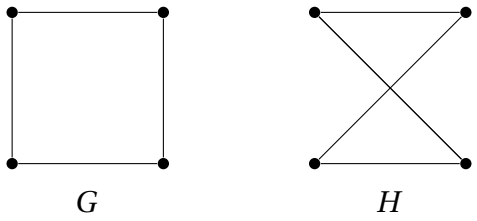


FIGURE 1.3: G et H sont isomorphes

1.1.3 Graphes particuliers

Graphe partiel , sous-graphe et graphe induit

Pour un graphe $G = (V, E)$,

- Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble des sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(H) \subseteq E(G)$.
- On appelle sous-graphe de G, un graphe $H = (U, F)$ tels que $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$.

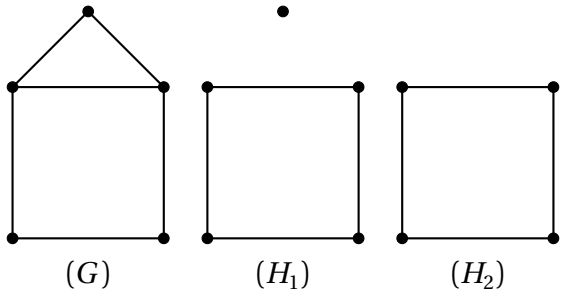


FIGURE 1.4: H_1 graphe partiel et H_2 un sous-graphe de G

• Pour un sous-ensemble de sommets $A \subseteq V$, le sous-graphe induit par A, noté $G[A]$ ou $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Étant donné un graphe H, on dit que G est sans H si H n'est isomorphe à aucun sous-graphe induit de G.

Le graphe illustré dans la figure 1.4 contient un graphe partiel et un sous-graphe.

1.1.4 Graphes complet

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets. un graphe complet d'ordre n noté K_n.Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$ (voir Figure 1.5).

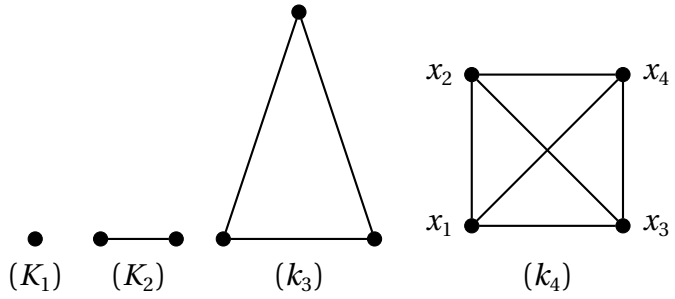


FIGURE 1.5: Graphe complet K_n

1.2 Stable et Clique

1.2.1 Stable

Un stable de G est un sous-ensemble de sommets S deux à deux non adjacents.

Le nombre de stabilité de G, noté $\alpha(G)$, est le cardinal maximal d'un stable de G. C'est-à-dire :

$$\alpha(G) = \max\{|S|; S \text{ est un stable de } G\}$$

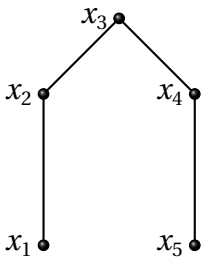


FIGURE 1.6: Graphe P_5

Dans le figure1.6

$\alpha(P_5) = |\{x_1, x_3, x_5\}| = 3$

1.2.2 Clique

Une clique de G est un sous-ensemble de sommets deux-à-deux adjacents entre eux. Autrement dit : une clique est un sous-graphe complet de G. Une clique de p sommets est notée K_p. La taille d'une clique est égale au nombre de ses sommets. La taille d'une clique maximale est appelée nombre de clique, notée $\omega(G)$.

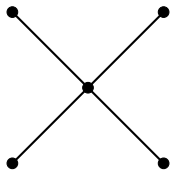


FIGURE 1.7: Clique

Par le figure 1.7, $\omega(G) = 2$

1.2.3 Chaîne et cycle

Soit un graphe $G = (V, E)$. Une chaîne, notée P_k, de G est une séquence finie de k sommets $u_1, u_2, \ldots, u_k$, où pour tout $1 \leq i < k-1$, $(u_i\, u_{i+1}) \in E$.

•Les sommets u_1 et u_k sont les extrémités de la chaîne P_k et les sommets $u_2, \ldots, u_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de P_k.

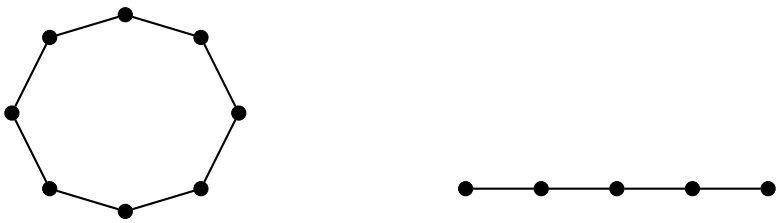
• Une chaîne P_k est simple si toutes ses arêtes sont distinctes.

•Une chaîne P_k est élémentaire si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

• La chaîne P_k est dite fermée si u_1 et u_k sont confondues.

Toute chaîne fermée d'un graphe $G = (V, E)$ est appelée cycle.Le cycle élémentaire sur un sommets est noté C_n.

• Un cycle d'ordre$n \geq 3$, noté C_n,est une chaîne dont les extrémités sont confondues.Un cycle élémentaire C_n est un cycle qui contient n sommets distincts.



C_8 P_5

FIGURE 1.8: Le cycle C_8 et la chaîne P_5.

1.3 Graphe connexe

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre chaque paire de sommets. Autrement dit, pour tous $u, v \in V$, il existe une suite de sommets

$$u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$$

telle que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ pour tout $i = 0, \ldots, k-1$.

Dans un graphe connexe, tous les sommets sont accessibles les uns des autres.

• Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe maximal connexe.

• Une arête e est appelée un *isthme* si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Exemple 2 *Le graphe G admet l'arête u v comme isthme, car G − u v est non connexe, u v est un isthme et w u ne l'est pas. Voir la figure 1.9*

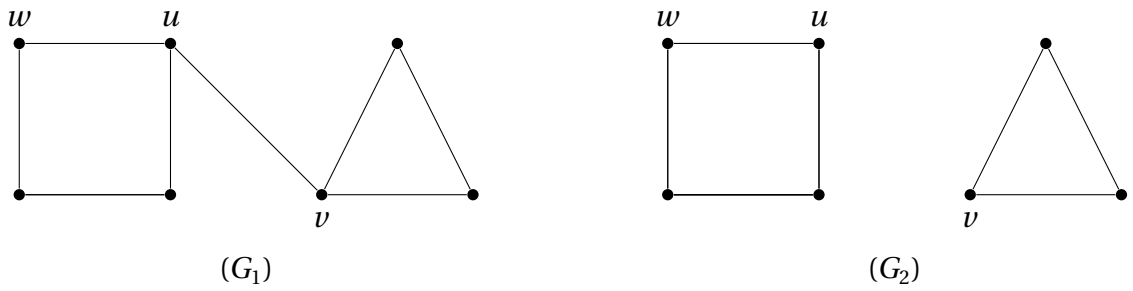


FIGURE 1.9: Exemples d'un graphe connexe G_1, d'un graphe non connexe G_2

1.4 Graphe localement connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **localement connexe** si, pour tout sommet $v \in V$, le sous-graphe induit par l'ensemble des voisins de v, noté $N(v)$, est connexe.

Un graphe G est localement connexe si, pour tout sommet v de G, il existe un voisinage de v, noté U tel que le sous-graphe induit par U est connexe. Un voisinage de v est un sous-ensemble de sommets contenant v.

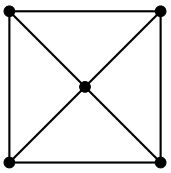


FIGURE 1.10: Graphe localement connexe

1.5 Graphe biparti et étoile

• Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** si V peut être partitionné en deux ensembles stables V_1 et V_2, tels qu'une arête e relie un sommet de V_1 et un sommet de V_2.

• Un **graphe biparti complet** est un graphe biparti dans lequel chaque sommet de V_1 est relié à tous les sommets de V_2 et inversement.

• Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

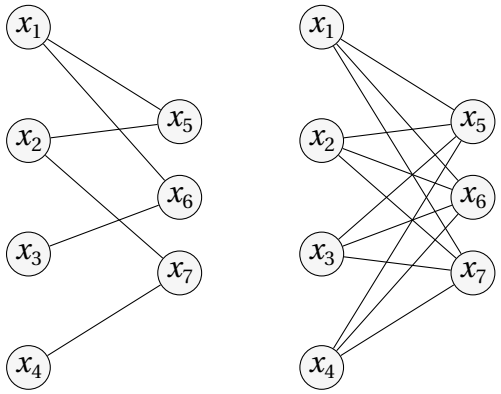


FIGURE 1.11: Graphe biparti et graphe biparti complet

• Plus généralement, un graphe $G = (V, E)$ est dit *k-parti* (avec $k \geq 2$) si V peut être partitionné en k ensembles stables $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Il est dit **multiparti-complet** si, pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j.

• Une **étoile** est un graphe biparti complet $K_{1,S}$, où le sommet de degré S est le centre de l'étoile. Cas particulier : si $S = 3$, $K_{1,3}$ est appelé *griffe*.

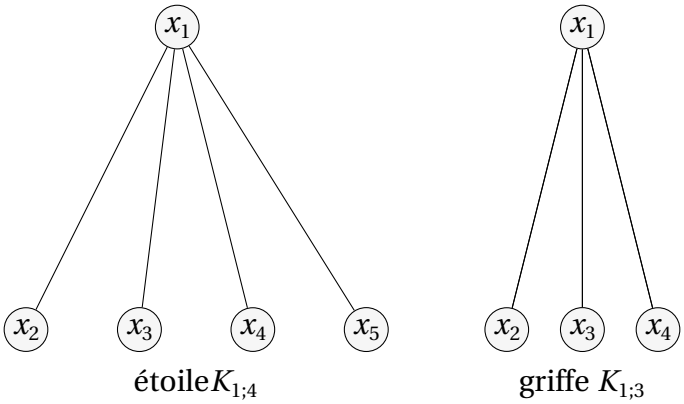
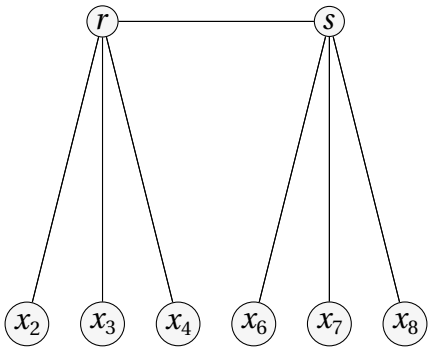


FIGURE 1.12: Graphe étoile et griffe

•Une **étoile double** est le graphe formé par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$, reliées par une arête entre leurs deux centre



double étoile $S_{r,s}$

FIGURE 1.13: Exemples d'un graphe double étoile

1.6 Graphe complémentaire

• Le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est un graphe vérifiant $V = V$ et $\overline{E} = \{e = uv \mid e \notin E\}$.



FIGURE 1.14: Le cycle C_5 et son complémentaire $\overline{G}$.

• Autrement dit, deux sommets sont adjacents dans G si et seulement s'ils ne le sont pas dans $\overline{G}$.

Remarque

L'union de G et $\overline{G}$ est un graphe complet. Voir la Figure 1.14 qui illustre un C_5, $\overline{C}_5$ et K_5.

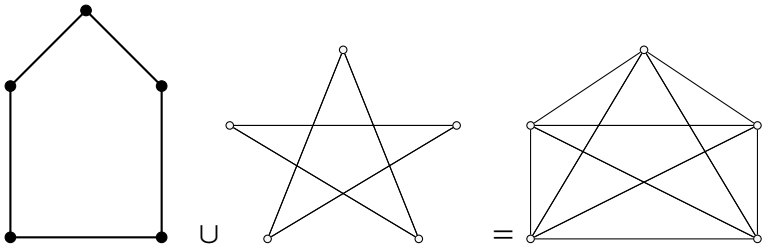


FIGURE 1.15: $C_5 \cup \overline{C}_5 = K_5$

1.7 Graphe Roue

Une roue, notée W_n, est formée d'un cycle C_{n-1} et un sommet supplémentaire, appelé centre, adjacent à tous les sommets du cycle C_{n-1}.

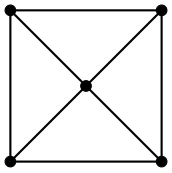


FIGURE 1.16: W5

1.8 Graphe régulier

• Un graphe G est dit **k-régulier** si tous ses sommets ont le même degré k.

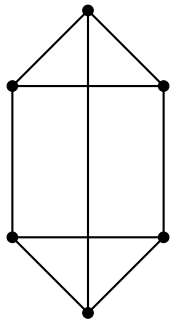


FIGURE 1.17: Graphe 3-régulier

1.9 Graphe carré

Définition 1.9.1 *Le **carré d'un graphe** G est un graphe G^2 ayant les mêmes sommets que G, mais où deux sommets sont reliés par une arête dans G^2 s'il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à 2 entre eux dans G.*

Autrement dit, dans G^2, deux sommets sont adjacents s'ils sont voisins dans G ou s'ils ont un voisin commun dans G.

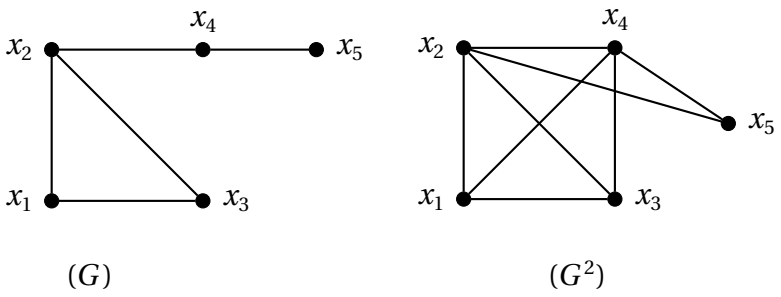


FIGURE 1.18: Graphe carré

1.9.1 Arbre

• Un **arbre d'ordre** n est un graphe connexe sans cycles. Il contient exactement $n-1$ arêtes.

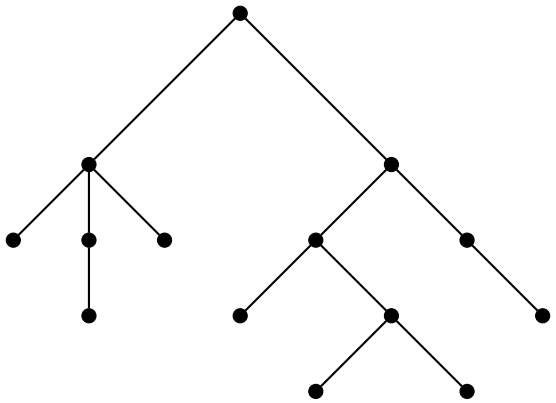


FIGURE 1.19: Arbre

1.9.2 Distance et excentricité et diamètre

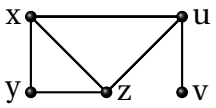
Dans un graphe connexe G :

— La distance entre deux sommets u et v, notée $d_G(u,v)$, est le nombre d'arêtes d'une plus courte chaîne entre u et v.

— excentricité est un distance maximale d'un sommet à tous les autres sommets du graphe.

— Le diamètre du graphe G, noté Diam(G), est Diam(G) = $\max_{u,v\in V}(d(u,v))$.

Exemple 3 *Un graphe simple* $G=(V,E)$ *avec* $V(G)=\{x,y,z,u,v\}$ *et* $E(G)=\{xy,yz,zx,zx,zu,xu,uv\}$.



Pour le graphe G on a : $d_G(x,v)$*=2, exc(u)=2 et diam(G)=3.*

1.10 Couplage

Étant donné un graphe $G=(V,E)$, on appelle couplage du G un sous-ensemble d'arêtes de E deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. on désigne par $\alpha(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G. Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est instauré par ce couplage. Un couplage qui sature tous les sommets de G est dit parfait.

— Le cardinal d'un couplage du graphe d'ordre n est au plus $\frac{n}{2}$, ceci est dû au fait que chaque arête du couplage sature deux sommets.

— Un couplage est parfait si et seulement si $\alpha(G) = \frac{n}{2}$.

— Tout graphe d'ordre impair ne contient pas de couplage parfait. Également, un graphe d'ordre pair ne possède pas nécessairement un couplage parfait.

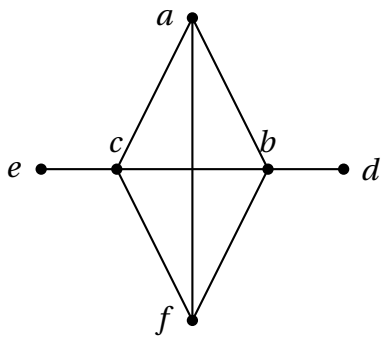


FIGURE 1.20: couplage

— $C_1 = \{ac, bf\}$ est un couplage du graphe G.

— $C_2 = \{bd, af, ce\}$ est un couplage parfait du graphe G.

— $C_3 = \{bd, af, ac\}$ ce n'est pas un couplage du graphe G.

1.11 Graphe Hamiltonien

1.11.1 Chaîne Hamiltonienne et cycle Hamiltonien

— Une chaîne Hamiltonienne est une chaîne qui passe par tous les sommets du graphe une et une seule fois.

— Un cycle passant par tous les sommets une et une seule fois d'un graphe est appelé cycle Hamiltonien.

1.11.2 Graphe semi-Hamiltonien

Un graphe G est dit semi-Hamiltonien s'il contient une chaîne Hamiltonienne.

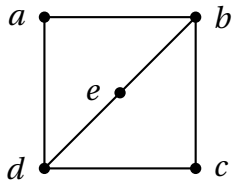


FIGURE 1.21: Graphe semi-Hamiltonien

La chaine $< a, b, e, d, c >$ est Hamiltonien, donc le graphe G est semi-Hamiltonien.

1.11.3 Graphe Hamiltonien

Un graphe G est dit Hamiltonien s'il contient un cycle Hamiltonien.

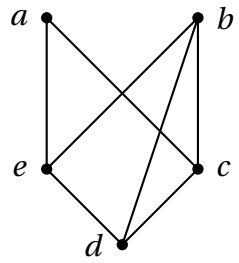


FIGURE 1.22: Graphe Hamiltonien

Le cycle $< a, e, b, d, c, a >$ est Hamiltonien, donc G est Hamiltonien. le graphe illustré de la figure 1.21 n'est pas Hamiltonien car il n'admet aucun cycle Hamiltonien.

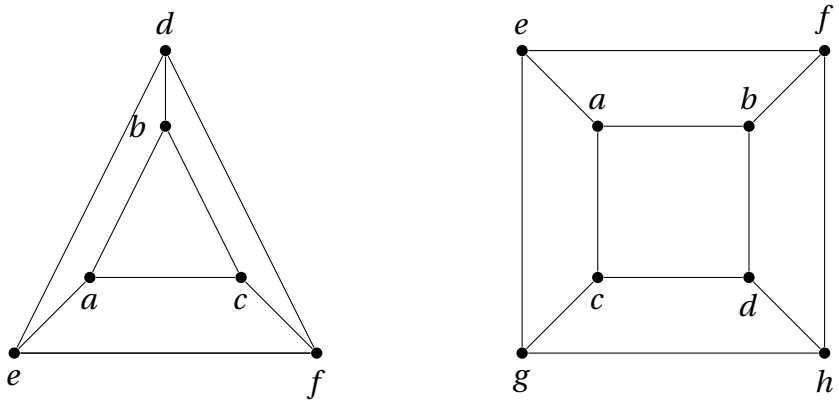
Remarque

tout graphe Hamiltonien est un graphe semi-Hamiltonien mais l'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre les graphes illustrés dans les figures 1.22 et 1.21

1.11.4 Graphe Hamiltonien connexe

Pour un graphe donné $G = (V, E)$, G est dit hamiltonien connexe s'il contient une chaîne hamiltonienne partant de tout sommet $x \in V$ vers tout sommets $y \in V - \{x\}$.

Exemple 4 *:*



(G_1) (G_2)

FIGURE 1.23: Graphe Hamiltonien connexe et Hamiltonien

G_1 Hamiltonien connexe et Hamiltonien on a la chaîne <d,e,f,c,a,b>,chaque de sommets sont reliés par une chaîne Hamiltonien.

G_2 Hamiltonien et non Hamiltonien connexe.

1.12 Coloration dans les graphes

La coloration est un thème central en théorie des graphes du fait de ses nombreuses applications pratiques.

1.12.1 Coloration des sommets

On appelle coloration des sommets d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque sommet. Une coloration utilisant K couleur est appelée une K-coloration. Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes. Étant donné un graphe $G = (V, E)$. Une K-coloration propre des sommets de G peut être vue comme une partition de V en K stables. Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une n-coloration.Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G. D'oú la définition du nombre chromatique de G.

1.12.2 nombre chromatique

Le **nombre chromatique** d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour une *coloration propre* de G. Autrement dit : le plus petit entier k d'une k-coloration de G.

Une *classe de couleur* i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i.

1.13 Domination

Définition 1.13.1 *Soit G un graphe simple et soit D un sous-ensemble de V. On dit que D est un ensemble dominant de G, si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D. Le nombre de domination, noté par $\gamma(G)$, est le cardinal d'un ensemble dominant minimum de G.*

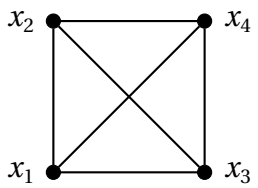


FIGURE 1.24: Le graphe K_4.

Le nombre de domination du graphe K_4 est $\gamma(K_4) = 1$.

Définition 1.13.2 *Soit G un graphe. Un sous ensemble D de V est un 2-dominant de G si tout sommet de $V - D$ a au moins 2 voisins dans D.*

Définition 1.13.3 *G est localement K-dominé si $\gamma(N_G(x)) \leq K$ pour $x \in V$*

Chapitre 2

Super-classes de graphes sans griffe

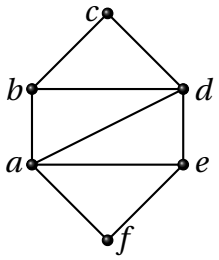
2.1 Graphe sans griffe

Les graphes sans griffe ont suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années. Dans cette section , nous essayons de résumer les résultats connus concernant cette famille de graphes.

Définition 2.1.1 *Un graphe sans griffe ne contient aucun sous graphe induit isomorphe au graphe* $K_{1,3}$

Résultat 2.1.1 *x est un centre de griffe si* $\alpha G[(N_G(x))] \leq 2$

Exemple 5



n	$N_G(x)$	$\alpha(N_G(x))$
a	b,d,e,f	2
b	a,c,d	2
c	b,d	1
d	a,b,c,e	2
e	a,d,f	2
f	a,e	1

Théorème 2.1.1 *(Fouquet, [3])*

Soit G un graphe connexe sans griffe avec $\alpha(G) \geq 4$. *Alors G ne contient aucun cycle impair de taille supérieur à 5*

Théorème 2.1.2 *(Shepherd, [7])*

Un graphe G connexe sans griffe Seulement si, pour tout ensemble de coupe minimal S et pour tout $v \in S, < N(v) \setminus S >$ *est l'union disjointe de deux graphes complets.*

Théorème 2.1.3 *(OberlySumner, [5])*

Si G est un graphe sans griffe, connexe et localement connexe, avec $n \geq 3$ sommets, alors G est hamiltonien.

Théorème 2.1.4 *Si G est un graphe connexe, localement connexe et sans griffe ayant au moins trois sommets, alors G est entièrement extensible par cycles.*

Il existe plusieurs familles bien connues et importantes de graphes qui sont également sans griffe. comme par exemple les Graphe ligne.

2.2 Graphes ligne

— Si G est un graphe, alors le graphe ligne de G, généralement noté $L(G)$, est obtenu en associant un sommet à chaque arête de G, et deux sommets de $L(G)$ sont adjacentes par une arête si et seulement si les arêtes correspondantes dans G sont incidentes.

— Tout graphe ligne est sans griffe.

2.3 Graphe presque sans griffe

Ryjáček dans [6] a défini la classe de graphes presque sans griffe comme suit :

Définition 2.3.1 *Un graphe est dit presque sans griffe si son ensemble de centres de griffes est un stable (ensemble indépendant) et pour chaque centre de griffe u il existe deux sommets x et y vérifiant $N_G(u) \subseteq N[x] \cup N[y]$.*

Exemple 6 — *Le graphe $G = (V, E)$ d'ensemble de sommets $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ et E tel que :*

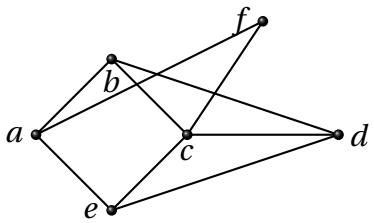


FIGURE 2.1: Graphe G

— *Le tableau suivant résume les voisinages fermés des sommets du graphe G :*

x	a	b	c	d	e	f
$N[x]$	a,b,e,f	a,b,c,d	b,c,d,e,f	b,c,d,e	a,c,d,e	a,c,f

FIGURE 2.2: $N[x]$ quelque soit $x \in V$

— *L'ensemble des centres de griffes du graphe $G = (V, E)$ est $A = \{a, c\}$ est bien un ensemble independent. Reste à vérifier que pour chaque centre de griffe u il existe deux sommets $x, y \in v$ tels que $N_G(u) \subset N_G[x] \cup N[y]$.*

Cas 1 *Pour* $u = a$, $N_G(a) = \{b, e, f\} \Longrightarrow N_G(a) \subset N[f] \cup N[c]$

Cas 2 *Pour* $u = c$, $N_G(c) = \{b, d, e, f\} \Longrightarrow N_G(c) \subset N[d] \cup N[f]$

Donc

$$\forall u \in A, \exists x, y \in V, N_G(u) \subset N[x] \cup N[y]$$

ce qui montre que G est un graphe presque sans griffe.

Exemple 7 *Étant donné les graphes suivants :*

— *Le graphe* $G' = (V, E)$ *d'ensemble de sommets* $V' = \{a, b, c, d, e, f\}$ *et* E' *tel que :*

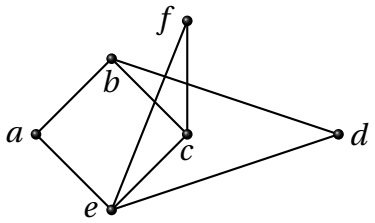


FIGURE 2.3: Graphe G'

— *Le tableau suivant résume les voisinage fermés des sommets du graphe G,*

x	a	b	c	d	e	f
$N[x]$	a,b,e	a,b,c,d	b,c,e,f	b,d,e,	a,c,d,e,f	c,e,f

FIGURE 2.4: $N[x]$ quelque soit $x \in V'$

— *L'ensemble des centres de griffes du graphe* $G' = (V', E')$ *est* $A = \{a, c\}$ *qui est bien un ensemble indépendant. Reste à vérifier que pour chaque centre de griffe u il existe deux sommets* $x, y \in V'$ *tels que* $N_{G'}(u) \subset N[x] \cup N[y]$.

Cas 1 *Pour* $u = b$, $N_{G'}(a) = \{a, c, d\} \Longrightarrow N_{G'}(b) \subset N[a] \cup N[c]$

Cas 2 *Pour* $u = e$, $N_{G'}(c) = \{a, c, d, f\} \Longrightarrow \forall x, y \in N_{G'}(e)$; $N_G(e) \nsubseteq N[x] \cup N[y]$

Donc

$$\exists u \in A, \forall x, y \in V', N_{G'}(u) \subset N[x] \cup N[y]$$

ce qui montre que G' *n'est pas un graphe presque sans griffe.*

En 1994, dans [6], Ryjáček a donné le résultat suivant sur la classe de graphes presque sans griffe :

Théorème 2.3.1 *(Ryjáček, [6])*

Tout graphe connexe d'ordre pair et presque sans griffe admet un couplage parfait.

2.3.1 Propriétés des graphes presque sans griffe

Il est facile de voir que G est sans griffe si, et seulement si,$\alpha(N(x, G)) \leq 2$ pour chaque $x \in V(G)$.Ce fait motive la définition suivante.

On dit qu'un graphe G est presque sans griffe s'il existe un ensemble indépendant (éventuellement vide), $A \subset V(G)$ tel que $\alpha(N(x,G)) \leq 2$ pour $x \notin A$ et $\gamma(N(x,G)) \leq 2 < \alpha(N(x,G))$ pour $x \in A$.

De manière équivalente, G est presque sans griffe si G est localement 2-dominé et si l'ensemble de tous les centres des griffes induites est indépendant. Puisque $\gamma(H) \leq \alpha(H)$ Pour tout graphe H, sans griffe est presque sans griffe. Ryjáček,dans [6], a donné les résultats suivants :

Proposition 1 *Tout graphe presque sans griffe est localement sans griffe.*

Corollaire 1 *Si G est presque sans griffe, alors $\gamma(N(x,G)) = 2$ pour tout $x \in A$.*

Corollaire 2 *Tout graphe presque sans griffe est sans $K_{1,5}$.*

Deux bornes sur le nombre de sommets pour qu'un graphe G presque sans griffe soit hamiltonien sont donnés. La première borne a été donnée par Broersma, Ryjaček effet dans [2] en 1996 :

Théorème 2.3.2 *Soit G un graphe 2-connexe, presque sans griffe, d'ordre n, $n \leq 3\delta + 2$, alors G est hamiltonien. Soit J L'ensemble des graphes définis comme soit : Un graphe G est dans J si G peut-être décompose en composantes connexes G_1, G_2, G_3 tel que $E_G(G_i, G_j) = u_i v_j, v_i u_j$ pour $i \neq j$ et $i, j = 1,2,3 (u_i \in V(G_i))$, $u_i \neq v_j$ pour $i = 1,2,3$*

La deuxième borne à été donnée par Mingchu Li dans [4] et qui améliore la borne précédente :

Théorème 2.3.3 *Soit G un graphe 2-connexe, presque sans griffe $G \neq J$, d'ordre n, $n \leq 4\delta$, alors G est Hamiltonien.*

MingChu Li dans [4] a conjecturé que :

Conjecture 1 *Soit G un graphe 5-connexe, presque sans griffe, alors G est Hamiltonien.*

Définition 2.3.2 *(Ryjáček, [6]) G est dit localement sans griffe si le voisinage $N_G(x)$ de chaque x est sans griffe.*

Exemple 8 *(Ryjáček, [6])*

Les graphes sont des exemples de graphes localement sans griffe qui ne sont pas presque sans griffe.voir la figure 2.5

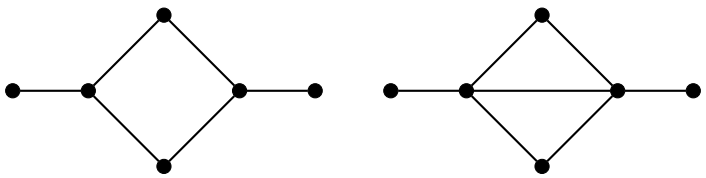


FIGURE 2.5: graphe localement sans griffe

Car $< N_G(x) >$ est sans griffe pour tout $x \in V$.

2.4 Graphe quasi sans griffe

En 1998, dans [1], Ainouche a définie la classe de graphes quasi sans griffe par :

Définition 2.4.1 *Un graphe G est quasi sans griffe s'il satisfait la propriété suivante : $d(x,y) = 2$ il existe $u \in N(x) \cap N(y)$ tel que $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$.*

Exemple 9

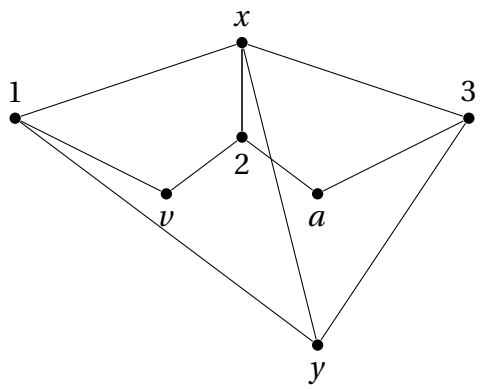


FIGURE 2.6: Graphe quasi sans griffe

Le graphe G illustré dans la figure 2.1 est un quasi sans griffe, car il vérifie la propriété suivante : $d(x,y)=2$ *il existe* $u \in N(x) \cap N(y)$ *tel que* $N[x] \cup N[y]$.

2.4.1 Propriétés dans graphe quasi sans griffe

- La reconnaissance d'un graphe quasi sans griffe peut être évidemment réalisée en temps polynomial.

Ainouche dans [1] a démontré les propriétés suivants :

P_1 : Un graphe quasi sans griffe n'est pas nécessairement sans $K_{1,r}$ (i,e. sans étoile).

P_2 : La classe des graphe sans griffe est différente de la classe des graphes presque sans griffe.

P_3 : Un graphe connexe, quasi sans griffe de degré maximum au moins 3, contient un Triangle C_3. Soit a et b deux sommets d'un graphe G, tel que $d(a,b)=2$, au associe aux sommets a et b l'ensemble J tel que : $J(a,b)=\{u \in N_G(a) \cap N_G(b) N[u] \subset N[a] \cup N[b]\}$

P_4 : Un graphe G est quasi sans griffe si pour toute paire de sommets $S(x,y)$ de distance 2, $J(x,y) \neq \emptyset$.

Ainouche dans [1] a démontré les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.4.1 *Tout graphe pair, connexe et quasi-sans-griffe possède un couplage parfait.*

Chapitre 3

Coloration dans les super-classes de graphe sans griffe

3.1 Coloration des graphe presque sans griffe

Soit $G=(V,E)$ un graphe presque sans griffe et A son ensemble de centres de griffe.

Exemple 10 *Étant donné le graphe suivant :*

— $G=(V,E)$ *Le graphe d'ensemble de sommets* $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ *et représenté par :*

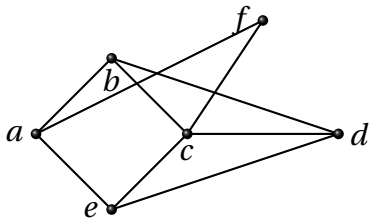


FIGURE 3.1: Graphe G

— *L'ensemble des centres de griffes de graphe* G *est* $A=\{a,c\}$ *est bien un ensemble indépendant. On a dé ja vérifie que pour chaque centre de griffe* u *il existe deux sommets* $x,y\in v$ *tels que* $N_G(u)\subset N[x]\cup N[y]$ *(Voir le graphe illustré dans la figure 2.1). On a*

$$\begin{cases} N_G(A)=\{b,d,e,f\} \\ et \\ S=V-(A\cup N_G(A)=\emptyset \end{cases}$$

— *Le sous graphe induit* $\langle c,b,d\rangle\cong K_3$ *est une clique maximale du graphe* G*. Donc* $\chi(G)=3$.

Exemple 11 *Considérons le graphe suivant :*

— $G=(V,E)$ *Le graphe d'ensemble de sommets* $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ *et représenté par :*

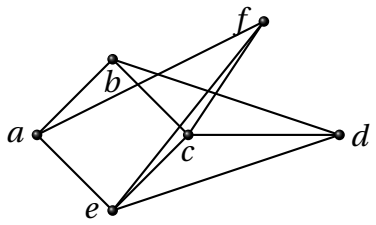


FIGURE 3.2: Graphe G

— *L'ensemble des centres de griffes de graphe G est $A=\{c\}$ est bien un ensemble indépendant. Reste à vérifier que pour chaque centre de griffe u il existe deux sommets $x, y \in v$ tels que $N_G(u) \subset N_G[x] \cup N[y]$. On a*

$$\begin{cases} N_G(A)=\{b,d,e,f\} \\ \text{ et} \\ S=V-(A\cup N_G(A)=\{a\} \end{cases}$$

— *Le sous graphe induit $\langle c,b,d\rangle \cong K_3$ est une clique maximale du graphe G. Donc $\chi(G)=3$.*

Théorème 3.1.1 *Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe et presque sans griffe et A son ensembles de centres de griffe tel que $V=(A\cup N_G(A))$. Si $N_G(A))$ est un ensemble indépendant, alors*

— *Pour toute paire de sommets $u, v \in A$, $|N_G(u)\cap N_G(v)|\geq 2$;*

— *$N_G(u)\cap N_G(v)$n'est pas un couplage de G.*

Preuve.

Posons $\langle u,a,b,c\rangle$ et $\langle v,r,s,t\rangle$ deux griffes de centres u et v respectivement.

— Par absurde, supposons $|N_G(u)\cap N_G(v)|<2$. Alors pour tout sommet centre de griffe u et pour tout tous sommets $x, y \in V-\{u\}$,

Cas 1 supposons $N_G(u)\cap N_G(v)=\emptyset$

$$N[x]=\begin{cases} \{x,u\}\ si\ x\in N_G(u) \\ \{x,v\}\ si\ x\in N_G(v)-N_G(u) \\ \{v,r,s,t\}\ si\ x=v \end{cases}$$

De même,

$$N[y]=\begin{cases} \{y,u\}\ si\ y\in N_G(u) \\ \{y,v\}\ si\ y\in N_G(v)-N_G(u) \\ \{y,r,s,t\}\ si\ y=v \end{cases}$$

Donc,

$$N[x]\cup N[y]=\begin{cases}\{x,y,u\}\ si\ x,y\in N_G(u)\\ \{x,y,v\}\ si\ x,y\in N_G(v)-N_G(u)\\ \{y,u,r,s,t\}\ si\ x=v\ et\ y\in N_G(u)\\ \{y,v,r,s,t\}\ si\ x=v\ et\ y\in N_G(v)-N_G(u)\end{cases}$$

Par conséquent, $\forall x,y\in V,\ N_G(u)\nsubseteq N[x]\cup N[y]$ et le graphe G ne serait pas presque sans griffe, contradiction.

Cas 2 supposons $N_G(u)\cap N_G(v)=\{w\}$

$$N[x]=\begin{cases}\{x,u\}\ si\ x\in N_G(u)-N_G(u)-\{w\}\\ \{x,v\}\ si\ x\in N_G(v)-\{w\}\\ \{x,u,v\}\ si\ x=w\\ \{v,r,s,t\}\ si\ x=v\end{cases}$$

De même,

$$N[y]=\begin{cases}\{y,u\}\ si\ y\in N_G(u)-\{w\}\\ \{y,v\}\ si\ y\in N_G(v)-\{w\}\\ \{y,u,v\}\ si\ x=w\\ \{v,r,s,t\}\ si\ y=v\end{cases}$$

Donc,

$$N[x]\cup N[y]=\begin{cases}\{x,y,u\}\ si\ x,y\in N_G(u)-\{w\}\\ \{x,y,v\}\ si\ x,y\in N_G(v)-\{w\}\\ \{x,y,u,v\}\ si\ x=w\ et\ y\in N_G(u)-\{w\}\\ \{x,y,u,v\}\ si\ x=w\ et\ y\in N_G(v)-\{w\}\\ \{u,v,r,s,t,y\}\ si\ x=v\ et\ y\in N_G(u)-\{w\}\\ \{v,r,s,t,y\}\ si\ x=v\ et\ y\in N_G(v)-\{w\}\end{cases}$$

Par conséquent, $\forall x,y\in V,\ N_G(u)\nsubseteq N[x]\cup N[y]$ et le graphe G ne serait pas presque sans griffe, contradiction.

— $N_G(u)\cap N_G(v)$ n'est pas un couplage de G. Par absurde, supposons que $N_G(u)\cap N_G(v)$ est un couplage de $N_g(A)$.

cas 1 Si $x\in N_G(u)$ et $y\in N_G(v)$ (ou inversement)

$$N_G(u)\nsubseteq N[x]\cap N[y]$$

Cas 2 Si $x \in N_G(u)$ et $y = v$

$$N_G(u) \nsubseteq N[x] \cap N[y]$$

Cas 3 $x, y \in N_G(u)$

$$N_G(u) \nsubseteq N[x] \cap N[y]$$

Cas 3 $x, y \in N_G(v)$

$$N_G(u) \nsubseteq N[x] \cap N[y]$$

Alors pour tous $x, y \in V$, $N_G(u) \nsubseteq N[x] \cap N[y]$ et G serait non presque sans griffe, une contradiction.

□

Corollaire 3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et presque sans griffe et A son ensemble de griffe. Si $V = (A \cup N_G(A))$ et $N_G(A))$ est indépendant, alors le nombre chromatique est $\chi(G) = 2$.*

Preuve.

D'après le théorème précédent, $N_G(u) \cap N_G(v) \geq 2$ pour tous deux sommets centres de griffe u et v. Donc de A et $N_G(A)$ indépendants, $\chi(G) = 2$.

□

3.2 Graphe quasi sans griffe

Exemple 12 *Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe tel que :*

$$\begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d, e, f\} \\ e\,t \\ E(G) = \{ab, bc, bd, cf, fa, ec, cd, ed, fe\} \end{cases}$$

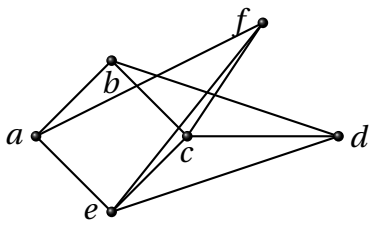


FIGURE 3.3: Graphe quasi sans griffe

Il suffit de vérifier la condition de graphes quasi sans griffe : pour deux sommets x et y vérifiant $d(x, y) = 2$ il existe $u \in N(x) \cap N(y)$ tel que $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$. Dans le graphe proposé,

Cas 1 *Pour* $x=a$, $N_G(a)=\{b,e,f\}$ *et* $N_2(a)=\{c,d\}$

Sous-Cas 1-1 $:y=c$,$N_G(c)=\{b,d,e,f\}$,$N_G(a)\cap N_G(c)=\{b,e,f\}$ *Pour* $u=b$ $\begin{cases} N[b]=\{a,b,c,d\} \\ N[a]=\{a,b,e,f\} \\ N[c]=\{b,c,d,e,f\} \end{cases}$

$N[u]\subset N[x]\cup N[y]$

Sous-Cas 1-2 $:y=d$, $N_G(a)=\{b,e,f\}$, $N_G(d)=\{b,c,e\}$, $N_G(a)\cap N_G(d)=\{b,e\}$

$$\text{Pour } u=b \begin{cases} N[b]=\{a,b,c,d\} \\ N[a]=\{a,b,e,f\} \\ N[d]=\{b,c,d,e\} \end{cases} \Rightarrow N[u]\subset N[x]\cup N[y]$$

Cas 2 : $x=b$, *on a* $N_2(b)=\{e,f\}$

Sous-Cas 2-1 $:y=e$, $N_G(e)=\{a,c,d,f\}$,$N_G(b)=\{a,c,d\}$,$N_G(b)\cap N_G(e)=\{a,c,d\}$

$$\text{Pour } u=a \begin{cases} N[a]=\{a,b,e,f\} \\ N[e]=\{a,c,d,e,f\} \\ N[b]=\{a,b,c,d,\} \end{cases} \Rightarrow N[a]\subset N[e]\cup N[b]$$

Sous-Cas 2-2 $:y=f$,$N_G(f)=\{a,c,e\}$,$N_G(b)=\{a,c,d\}$,$N_G(b)\cap N_G(f)=\{a,c\}$

$$\text{Pour } u=a \begin{cases} N[a]=\{a,b,e,f\} \\ N[b]=\{a,b,c,d\} \\ N[f]=\{a,c,e,f\} \end{cases} \Rightarrow N[a]\subset N[b]\cup N[f]$$

Cas 3 : $x=c$, *on a* $N_2(c)=\{a\}$

Sous-Cas 3-1 $:y=a$, $N_G(a)=\{b,e,f\}$,$N_G(c)=\{b,d,e,f\}$,$N_G(a)\cap N_G(c)=\{b,e,f\}$

Cas4 : $x=d$, *on a* $N_2(d)=\{a,f\}$

Sous-Cas 4-1 $:y=a$, $N_G(a)=\{b,e,f\}$,$N_G(d)=\{b,c,e\}$,$N_G(a)\cap N_G(c)=\{b,e\}$

$$\text{Pour } u=e \begin{cases} N[e]=\{a,c,d,e,f\} \\ N[d]=\{b,c,d,e\} \\ N[a]=\{a,b,e,f\} \end{cases} \Rightarrow N[e]\subset N[a]\cup N[d]$$

Cas5 : $x=e$, *on a* $N_2(e)=\{b\}$

Sous-Cas 5-1 $:y=b$, $N_G(e)=\{a,c,d,f\}$,$N_G(b)=\{a,c,d\}$,$N_G(e)\cap N_G(b)=\{a,c,d\}$

Cas 6 : $x=f$, *on a* $N_2(f)=\{b,d\}$

Sous-Cas 6-1 $:y=b$, $N_G(f)=\{a,c,e\}$,$N_G(b)=\{a,c,d\}$,$N_G(e)\cap N_G(b)=\{a,c\}$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous sommes intéressés à l'étude de la super-classe des graphes sans griffe.

Note contribution sont des résultat sur certains graphes presque sans griffe. Ces résultat sont prometteuse qui nous ouvre la porte à d'autres future résultats générale sur toutes les super-classes des graphes sans griffe.

Nous avons étudié la coloration de certains graphes particulier de la classe des graphes presque sans griffe.

Comme perspective, on peut citer :

— Donner plus de résultats sur nombre chromatique sur la même classe de graphe presque sans griffe.

— Caractériser la coloration des graphes quasi sans griffe.

— D'étudier la coloration des graphes partiellement sans griffe la plus large super-classe de graphe sans griffe et contienne les deux classe de graphes presque sans griffe et graphes quasi sans griffe.

Bibliographie

[1] A. Ainouche, Quasi-claw-free graphs, Discrete Mathematics,179, 13-26, 1998.

[2] H.T Broersma, Z.Ryjáček and I. Scheirmeyer, Torgnness and Hamiltonicity in almost claw- free graphs, Journal of Graph theory, 21(4) : 431-439,1996.

[3] J.L. Fouquet,A strengthening of Ben Rebea's lemma, J. Combin. Theory Ser, 59, 1993, 35-40.

[4] MingChu Li, M.Xin and C.Xiaodong, vertex pancylicity of quadrangularly connected claw- free graphs, Graphs and Combinatorics,2015.

[5] D.J. Oberly and D.P. Sumner,Every connected,locally connected nontrivial graph with no induced claw is hamiltonian,J. Graph Theory, 3, 1979, 351-356.

[6] Zdeněk Ryjáček,Almost Claw-free Graphs,Journal of Graph Theory,18,5,469-477,1994.

[7] F.B. Shepherd,Hamiltonicity in claw-free graphs,J. Combin.Theory Ser, 53, 1991, 173-194.