République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Dr.Yahia Farès de Médéa
Faculté des Science
Département de Mathématique



MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par :

Ghalem Ahlam

théme

l'existence et l'unicité de solution d'un système aléatoire d'ordre fractionnaire

les membres du jury

Examinateur 1 :	Benaichouche Noureddine	*M.A.A*	Université de Médéa
Examinateur 2 :	Maaloum khaled	*M.A.A*	Université de Médéa
Encadreur :	Mekdache Noureddine	*M.A.A*	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020-2021

Dédicace

Je dédie ce mémoire

À mes très chers parents

À mes chers soeurs et frères

Et ma chère Nourelhoda kabkoub

AHLAM

Remerciements

AVANT toute personne, je tiens à remercier Dieu le tout puissant, qui j'ai donné la force et la patience d'accomplir ce mémoire.

Je tiens à remercier particulièrement à mon encadreur, monsieur " MEKDACHE NOUREDDINE" d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux, et je remercie également tous les membres du jury pour leur évaluation de ce travail.

Je tiens à remercier toutes ma famille, mes amies et mes enseignants, plus particulièrement mes parents pour m'avoir soutenu et aidé jusque là.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de prés ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Merci

Résumé

Dans ce travail, nous utilisons un théorème de point fixe aléatoire(théorème de Schauder) et théorème d'Arzela-Ascoli en espaces métrique vectorielle dus à Nieto et al [4] pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de système aléatoire d'équations différentielles fractionnaires via le type Hadamard dérivé. Enfin, un exemple est donné pour illustrer les principaux résultats.

Table des matières

Introduction **5**

Notation **7**

1 Chapitre 1 **10**
1.1 Calcul fractionnaire 10
1.1.1 L'intégrale de Riemann-Liouville 10
1.1.2 L'intégrale fractionnaire de Hadamard 11
1.1.3 La dérivation fractionnaire de Caputo 11
1.1.4 La dérivation fractionnaire de Hadamard 12
1.1.5 La dérivé fractionnaire de Caputo de Hadamard 13
1.2 Variable aléatoire 15
1.2.1 Fonction Carathéodory 16
1.2.2 Variable aléatoire sur le calcule fractionnaire 16
1.3 Les théorèmes des points fixes 18
1.3.1 Quelques définition sur les opérateurs 18
1.3.2 Théorème d'Arzela-Ascoli 18
1.3.3 Espace métrique vectorielle 21

2 Chapitre 2 **25**
2.1 Existence et unicité 25

Application **37**

Conclusion **40**

Bibliographie **42**

Introduction

Le calcul fractionnaire connait à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliquées. En effet, il est temps les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommer qui voulait généraliser la notion de différence d'ordre entiers à des ordres fractionnaires, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$ soit :

$$(D^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{d t^{\alpha}}$$

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ces origine remonter à la haine du $17^{ième}$ siècle, partant de la réponse de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Son intérêt n'est pas reconnu que durant les deux dernières décennies du $20^{ème}$ siècle où de nombreuses applications ont été développées utilisant ce concept. Un exposé historique détaillé est donné en introduction de [8] ;de plus, cet ouvrage est sans doute l'un des premiers à rassembler des résultats épars.

Le calcul fractionnaire a été intensivement développé depuis la première conférence sur ce domaine en 1974 [9]. Depuis, il a gagné une popularité et une considération importante du principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie, il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut-être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus. Donc, il est très important d'établir une théorie claire et nette pour l'étude et l'analyse des opérateurs et systèmes d'ordres fractionnaires.

Tout d'abord, plusieurs mathématiciens ont apporté des contributions importantes jusqu'à la moitié du dernier siècle : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grünwald (1867-1872), H. Laurent(1884), P. A. Nekrassov (1888), J.Hadamard (1892), O.Heaviside (1892-1912), S.Pincherle (1902),

G.H.Hardy and J.E.Littlewood (1917-1928), H.Weyl (1917), P.Lévy (1923), A.Marchaud (1927), H.T.Davis (1924-1936) , A .Zygmund (1935-1945), E.R.Love (1938-1996), A.Erdélyi (1939-1965), H.Kober (1940), D.V.Widder (1941), M.Riesz (1949)

Ces développements mathématiques obtenus ont été très différents de ceux qui sont utilisés dans le calcul ordinaire. A cette époque, Il n'y avait presque pas d'applications du calcul fractionnaire. depuis longtemps, il a été considéré par certains comme un domaine abstrait ne contenant que des manipulations mathématiques avec peu ou sans d'utilité. Il y a presque 30 ans, ce paradigme a commencé à se passer des mathématiques pures aux applications dans différents domaines. Les opérateurs et les systèmes d'ordres fractionnaires ont été appliqués dans presque tous les domaines de la science. Les divers domaines où le calcul fractionnaire a fait un impact profond comprend la viscoélasticité et la rhéologie, le génie électrique, l'électrochimie, la biologie, la biophysique et le génie biologique, le traitement du signal et d'image, la mécanique, la mécatronique, la physique, et la théorie de la commande.

D'autre part, les équations différentielles fractionnaires avec des paramètres aléatoires ont été étudiées par Lupulescu et al [12], Lupulescu et Ntouyas [11] et Vu et al [10]. Dans ce travail, nous considérons le système d'équations différentielles fractionnaires de type Hadamard comme suit :

$$\begin{cases} {}^{CH}D^{\alpha}x(t,\omega) = f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\alpha<1, t\in[1,b], \\ {}^{CH}D^{\beta}y(t,\omega) = g(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\beta<1, t\in[1,b], \\ x(0,\omega) = x_0(\omega), \omega\in\Omega \\ y(0,\omega) = y_0(\omega), \omega\in\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f,g:[1,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $(\Omega,\mathscr{A})$ est un espace mesurable et $x_0,y_0:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ sont des variables aléatoires. ${}^{CH}D^{\alpha}$ est la Caputo-modification du dérivé fractionnaire d'Hadamard.

Le travail est organisé de la manière suivante. Dans le 1^{er} chapitre, nous introduisons toutes les notions de base nécessaires dans ce travail, tels que le calcul fractionnaire, les variables aléatoires et quelques théorèmes de points fixes. Dans le $2^{ème}$ chapitre, nous donnons l'un de nos principaux résultats d'existence pour les solutions et la compacité des ensembles de solutions du problème 2.1, avec la preuve basée sur les récents théorèmes de points fixes aléatoires récents dans l'espace métrique vectoriel. en dernier lieu ,on a réservé une application pour donner un exemple illustratifs de ce qu'on a présenté ci-dessus.

Notation

$\Gamma(z)$:= la fonction Gamma .

$\mathbb{R}$:= ensemble des réel .

$I^n_{a^+} f$:=l'intégrale fractionnaire de Riemann- Liouville de f d'ordre n .

$\mathbb{N}$:= ensemble des entiers naturel .

$\mathbb{N}^*$:= ensemble des entiers naturel non nuls .

$J^\alpha f$:=l'intégrale fractionnaire de Hadamard de f d'ordre α.

${}^C D^\alpha$:= la dérivé fractionnaire au sens de Caputo.

${}^H D^\alpha$:=la dérivé fractionnaire au sens de Hadamard .

${}^{CH} D^\alpha$:= la dérivé fractionnaire de Caputo de Hadamard .

$\mathbb{R}_+$:= ensemble des réel positifs $[0, +\infty]$.

$\mathbb{C}$:= ensemble des nombre complexe.

$(\Omega, \mathscr{A}), (\Omega, \mathscr{F})$:= espaces Mesurables.

X, Y :=espaces Métriques.

$B(x)$:= sous ensemble Borélien.

A :=Matrice singulière.

$C(x, y)$:=l'espace des fonctions continus.

$E_{\alpha,\beta}$:= la fonction Mittage-Leffer deux paramètre.

E, F := espaces normés.

(E, N_∞) :=espace de Banach.

(K, d) :=espace métrique compact.

(F, δ) :=espace métrique complet.

B := famille équicontinue.

B_x :=les ensemble relativement compact.

(X, d) := espace métrique généralisé.

$B(x_0, r)$:=la boule ouvert .

$\overline{B}(x_0, r)$:= la boule fermé.

M := matrice carrée de nombre réel.

$\rho(M)$:= le rayon spectral de la matrice carrée M.

N := opérateur aléatoire.

$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$:= espace de probabilité complet.

$v, a, \bar{a}$:= des fonctions continus .

γ_1, γ_2 :=fonctions mesurables borneés.

p_1, p_2, p_3, p_4 := variables aléatoires.

$S(x_0, y_0)$:=l'ensemble de solution.

Chapitre 1

1.1 Calcul fractionnaire

Cette section sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relative au calcul fractionnaire telle que : l'intégration de Riemann-Liouville, l'intégration fractionnaire de Hadamard, la dérivation fractionnaire au sens Caputo et Hadamard, qui sont les plus utilisées.

1.1.1 L'intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.1.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur [a,b].*
Notons par $(I^1_{a^+} f)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall\, t \in [a,b]; (I^1_{a^+} f) = \int_a^t f(s)\,ds.$$

*o*ù Γ *est la fonction Gamma d'Euler qui est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp^{-t}\, dt, (z \in \mathbb{C}, \mathbb{R}(z) > 0).$$

avec $t^{z-1} = \exp^{(z-1)\ln t}$.

Définition 1.1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, L'intégrale à gauche d'ordre n de f que l'on note $(I^n_{a^+} f)$ est définie par :*

$$(I^n_{a^+} f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\Gamma)^{n-1} f(s) d(s).$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler, c'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!, \forall\, n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 1.1.2 de la manière suivant :

Définition 1.1.3. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par :*

$$\forall t \in [a,b]; (I^n_{a^+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :

$$\forall t \in [a,b]; (I^n_{b^-} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

1.1.2 L'intégrale fractionnaire de Hadamard

Soit $[a,b]$ un intervalle fini ou infinie telle que $(0 \le a < b < +\infty)$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Définition 1.1.4. *[1] Soit $\alpha > 0$, L'intégrale fractionnaire de Hadamard à gauche (resp à droit) d'ordre α de f est définie par :*

$$(J^\alpha_{a^+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \ln(\frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds.$$

$$(J^\alpha_{b^+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \ln(\frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds.$$

Proposition 1.1.5. *[1] si $\alpha > 0, \beta > 0$ et $(0 < a < b < +\infty)$, on a :*

$$1.(J^\alpha_{a^+} (\ln \frac{t}{a})^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\ln \frac{t}{a})^{\beta+\alpha-1.}$$

$$2.(J^\alpha_{b^-} (\ln \frac{b}{t})^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\ln \frac{b}{t})^{\beta+\alpha-1.}$$

Proposition 1.1.6. *[1] soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $1 \le p \le \infty$.*
Si $0 < a < b < +\infty$, et $f \in L^p(a,b)$, Alors

$$J^\alpha_{a^+} J^\beta_{a^+} f = J^{\alpha+\beta}_{a^+} f, (c \le 0).$$

$$J^\alpha_{b^-} J^\beta_{b^-} f = J^{\alpha+\beta}_{b^-} f, (c \ge 0).$$

1.1.3 La dérivation fractionnaire de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition 1.1.2 semble aussi raisonnable pour définir une dérivée pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo .

Définition 1.1.7. *Soit $\alpha > 0$, $n=[\alpha]+1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], {}^{C}D^{\alpha}_{a^+} f(t) = I^{n-\alpha}_{a^+} \circ (\frac{d}{dt})^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 1.1.8. *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], {}^{C}D^{\alpha}_{b^-} f(t) = I^{n-\alpha}_{b^-} \circ (-\frac{d}{dt})^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Remarque 1.1.9. *[1] par contre, de telle définitions ne se recollent pas correctement aux dérivée classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; {}^{C}D^{n}_{a^+} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a).$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*; {}^{C}D^{n}_{b^-} f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)).$$

1.1.4 La dérivation fractionnaire de Hadamard

Soit [a,b] un intervalle de $\mathbb{R}$, et on a la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et ($\delta = t\frac{d}{dt}$) le δ-dérivé, et

$$AC^n_\delta [a,b] = \left\{ g : [a,b] \to C : \delta^{n-1} g(t) \in AC[a,b], \delta = t\frac{d}{dt} \right\}$$

Définition 1.1.10. *[1] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha]+1$, les dérivées fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre α, def sont définie par :*

$$\begin{aligned} ({}^{H}D^{\alpha}_{a^+} f)(t) &= \delta^n (J^{n-\alpha}_{a^+} f)(t) \\ &= (t\frac{d}{dt})^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (\ln \frac{t}{s})^{n-\alpha+1} \frac{f(s)}{s} ds, \ (t > a). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ({}^{H}D^{\alpha}_{b^-} f)(t) &= -\delta^n (J^{n-\alpha}_{b^-} f)(t) \\ &= (-t\frac{d}{dt})^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\ln \frac{s}{t})^{n-\alpha+1} \frac{f(s)}{s} ds, \ (t < b). \end{aligned}$$

1.1.5 La dérivé fractionnaire de Caputo de Hadamard

On définie la modification de Caputo des dérivées fractionnaires de Hadamard comme suite :

Définition 1.1.11. *Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $f \in AC^n_\delta$, les dérivées fractionnaires de Caputo de Hadamard à gauche et à droite d'ordre α de f sont définies par :*

$$\begin{aligned} ({}^{CH}D^{\alpha}_{a^+} f)(t) &= J^{n-\alpha}_{a^+} \delta^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (\ln \frac{t}{s})^{n-\alpha+1} (s\frac{d}{ds})^n f(s) \frac{ds}{s}, \ (t > a). \end{aligned} \tag{1.1}$$

et

$$\begin{aligned} ({}^{CH}D^{\alpha}_{b^-} f)(t) &= (-1)^n J^{n-\alpha}_{b^-} \delta^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\ln \frac{s}{t})^{n-\alpha-1} (s\frac{d}{ds})^n f(s) \frac{ds}{s}, \ (t < b). \end{aligned} \tag{1.2}$$

respectivement.
Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors

$${}^{CH}D^{\alpha}_{a^+} f)(t) = \delta^n f(t) \ et \ {}^{CH}D^{\alpha}_{b^-} f)(t) = (-1)^n \delta^n f(t).$$

Théorème 1.1.12. *[2] Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha]+1, si\ f \in AC^n_\delta$, alors*

$${}^{CH}D^{\alpha}_{a^+} f(t) = {}^{H}D^{\alpha}_{a^+} [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(a)}{k!} (\ln \frac{t}{a})^k](t).$$

$${}^{CH}D^{\alpha}_{b^-} f(t) = {}^{H}D^{\alpha}_{b^-} [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta^k f(a)}{k!} (\ln \frac{b}{t})^k](t).$$

En particulière, si $0 < \alpha < 1$, on a :

$${}^{C}D^{\alpha}_{a^+} f(t) = {}^{H}D^{\alpha}_{a^+} [f(t) - f(a)](t).$$

$${}^{C}D^{\alpha}_{b^-} f(t) = {}^{H}D^{\alpha}_{b^-} [f(t) - f(b)](t).$$

Preuve : *Par définition, on a :*

${}^{H}D^{\alpha}_{a^+}[f(t) = \left(t\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha} f(t)$, *et on intègre par partie, en posant :*

$u(t) = f(t)$ *et* $v'(t) = \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \frac{1}{s}$.*ona* :

$$(t\tfrac{d}{dt})^n \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (\ln \tfrac{t}{s})^{n-\alpha-1} f(s) \tfrac{ds}{s}$$

$$= (t\tfrac{d}{dt})^n \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[-\tfrac{1}{n-\alpha} (\ln \tfrac{t}{s})^{n-\alpha} f(s) \right]_a^t + (t\tfrac{d}{dt})^n \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (\ln \tfrac{t}{s})^{n-\alpha} \left[\tfrac{d}{ds} f(s) \right] ds$$

$= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[(t\frac{d}{dt})^n(\ln\frac{t}{s})^{n-\alpha}\right] + (t\frac{d}{dt})^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t(\ln\frac{t}{s})^{n-\alpha}\left[\frac{sd}{ds}f(s)\right]\frac{ds}{s}$

$= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha-n+1)}(\ln\frac{t}{a})^{-}\alpha\right] + (t\frac{d}{dt})^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t(\ln\frac{t}{s})^{n-\alpha}\left[\frac{sd}{ds}f(s)\right]\frac{ds}{s}$

Alors

$(t\frac{d}{dt})^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(\ln\frac{t}{s})^{n-\alpha-1}f(s)\frac{ds}{s}$

$= \frac{f(a)}{\Gamma(1+\alpha)}(\ln\frac{t}{a})^{-\alpha} + (t\frac{d}{dt})^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t(\ln\frac{t}{s})^{n-\alpha}\left[\frac{sd}{ds}f(s)\right]\frac{ds}{s}$

$= \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(\ln\frac{t}{a})^{-\alpha} + \delta I^{n-\alpha+1}(\delta f)(t).$

D'où

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{a^+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{k!}(\ln\frac{t}{a})^k\right] = {}^{CH}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$$

Lemme 1.1.13. *[2] Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$ et $f \in C[a,b]$,*
(i) Si $\alpha \neq 0$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$ {}^{CH}D^{\alpha}_{a^+}(J^{\alpha}_{a^+}f)(t) = f(t), {}^{CH}D^{\alpha}_{b^-}(J^{\alpha}_{b^-}f)(t) = f(t).$$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \neq 0$, alors :

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}(J^{\alpha}_{a^+}f)(t) = f(t) - \frac{J^{\alpha+1-n}_{a^+}f(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(\ln\frac{t}{a})^{n-a}.$$
$$ {}^{C}D^{\alpha}_{b^-}(J^{\alpha}_{b^-}f)(t) = f(t) - \frac{J^{\alpha+1-n}_{b^-}f(b)}{\Gamma(n-\alpha)}(\ln\frac{b}{t})^{n-a}.$$

Preuve :
On a :

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}(J^{\alpha}_{a^+}f)(t) = D^{\alpha}_{a^+}(J^{\alpha}_{a^+}f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k(J^{\alpha}_{a^+}f)(a)}{k!}(\ln\frac{t}{a})^k.$$

Et on a :

$$ D^{\alpha}_{a^+}(J^{\alpha}_{a^+}f)(t) = f(t) \quad et \quad \delta^k(J^{\alpha}_{a^+}f)(t) = J^{\alpha-k}_{a^+}f(t).$$

Alors

$$ \left|J^{\alpha-k}_{a^+}f(t)\right| \leq \frac{\|f\|_c}{|\Gamma(\alpha-k)|(\alpha-k)}(\ln\frac{t}{a})^{\alpha-k}, \quad k = 0,1,.....,n-1.$$

d'où nous concluons que si $\alpha = m + i\beta,\ m \in \mathbb{N},\ \beta \neq 0$, *alors* $n = m + 1 \geq 2$, *et* $\delta^k(J_{a^+}^{\alpha} f(t) = J_{a^+}^{\alpha-k} f(t),\ k = 0, 1, ..., m-1$, *alors on obtient :*

$$\left| J_{a^+}^{\alpha-k} f(t) \right| \leq \frac{\|f\|_c}{|\Gamma(\alpha-k)|(m-k)} (\ln \frac{t}{a})^{m-k}, \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

Lemme 1.1.14. *[2] Soit* $\alpha > 0$ *, et* $f \in AC_{\delta}^{n}[a, b]$ *ou* $C_{\delta}^{n}[a, b]$, *alors :*

$$J_{a^+}^{\alpha}({}^{CH}D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(a)}{k!} (\ln \frac{t}{a})^k.$$

$$J_{b^-}^{\alpha}({}^{CH}D_{b^-}^{\alpha} f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta^k f(b)}{k!} (\ln \frac{b}{t})^k.$$

Proposition 1.1.15. *[2] Soit* $\alpha \geq 0,\ n = [\alpha] + 1$ *et* $\beta > 0$, *alors :*

$${}^{CH}D_{a^+}^{\alpha} (\ln \frac{t}{a})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\ln \frac{t}{a})^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha.$$

$${}^{CH}D_{b^-}^{\alpha} (\ln \frac{b}{t})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\ln \frac{b}{t})^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha.$$

et

$${}^{CH}D_{a^+}^{\alpha} (\ln \frac{t}{a})^k = 0 \ et \ {}^{CH}D_{b^-}^{\alpha} (\ln \frac{b}{t})^k = 0 \ , (k = 0, 1, ..., n-1).$$

Les dérivés fractionnaire de type Caputo-Hadamard peut être définie sur le demi-axe positif $\mathbb{R}_+$ *par remplaçant a par 0 dans la formule 1.1 et b par* ∞ *dans la formule 1.2 à condition que* $f(t) \in AC_{\delta}^{n}(\mathbb{R}_+)$ *ou* $f(t) \in AC_{\delta}^{n}$, *on a*

$$({}^{C}D_{0^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (\ln \frac{t}{s})^{n-\alpha+1} \delta^n f(s) \frac{ds}{s}.$$

$$({}^{C}D_{-}^{\alpha} f)(t) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^{\infty} (\ln \frac{t}{s})^{n-\alpha-1} \delta^n f(s) \frac{ds}{s}.$$

1.2 Variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace mesurable, nous équipons l'espace métrique X être une* σ*- algèbre B(x) des sous-ensembles Boréliens de X, tel que* $(E, \mathscr{B}(X))$ *un espace mesurable,* $A : x : \Omega \to X$ *est appelé une variable aléatoire si*

$$x^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : x(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}.$$

pour tout les ensembles Boréliens $B \in \mathscr{B}(X)$.

Définition 1.2.1. *Étant donné deux espaces métrique X et Y, $A : \Omega \times X \to Y$ est appelé un opérateur aléatoire si $\omega \to A(\omega, x)$ est mesurable pour tous $x \in X$, on note aussi un opérateur aléatoire A sur X par*

$$A(x)(\omega) = A(\omega, x), \omega \in \Omega, x \in X.$$

Définition 1.2.2. *Soient X et Y deux espaces métriques, et $A : \Omega \times X \to X$ variable aléatoire.*

1) A est un variable aléatoire, A est dit continue sur X si $A(\omega, .)$ est continu pour chaque $\omega \in \Omega$

2) A est dit compact si pour chaque $C \subset X$ sous-ensemble borné, $A(\omega, C)$ est sous-ensemble relativement compact de Y pour chaque $\omega \in \Omega$.

soient X,Y deux espaces métriques localement compact et $f : \Omega \times X \to Y$. on note l'espace des fonctions continues par $C(X, Y)$ de X dans Y avec la topologie ouverte compacte.

1.2.1 Fonction Carathéodory

Lemme 1.2.3. *[5] f est une fonction Carathéodory si est seulement si $\omega \to r(\omega)(.) = f(\omega, .)$ est une fonction mesurable de $\Omega \to C(X, Y)$.*

Définition 1.2.4. *Soit $x : [1, b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ est dite fonction Caratéodory si $t \longmapsto x(t, \omega)$ est continue pour chaque $\omega \in \Omega$ et $\omega \longmapsto x(t, \omega)$ est mesurable pour chaque $t \in [1, b]$.on rappelons qu'une fonction Carathéodory est une produit du fonctions mesurables*

Proposition 1.2.5. *Si $x : [1, b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction Carathéodory, alors la fonction $(t, \omega) \longmapsto J^\alpha x(t, \omega)$ est aussi une fonction Carathéodory.*

Preuve : *Clair que $J^\alpha : C([1, b], \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un opérateur continu,*
soit $L : \Omega \longrightarrow C([1, b], \mathbb{R}^m)$ définie par :

$$L(\omega)(.) = x(., \omega).$$

L(.) est mesurable, (D'après lemme 1.2.3), alors l'opérateur $\omega \longrightarrow (J^\alpha \circ L)(\omega)(.)$ est mesurable. puisque $t \to I^\alpha x(t, \omega)$ est fonction continue. Par conséquent $(t, \omega) \longrightarrow J^\alpha x(t, \omega)$ est une fonction Carathéodory.

1.2.2 Variable aléatoire sur le calcule fractionnaire

On dit que $x(\cdot, \cdot)$ est Lebesgue intégrable sur $[1, b]$ si $x : [1, b] \to \mathbb{R}^m$ est Lebesgue intégrable sur $[1, b]$ pour tous $\omega \in \Omega$.
Soit $\alpha > 0$. si $x : [1, b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ est Lebesgue intégrable sur $[0, b]$ alors on considérer l'intégrale

fractionnaire

$$J^{\alpha}x(t,\omega)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}x(s,\omega)ds.$$

qui appelée l'intégrale fractionnaire de x, où Γ *est la fonction Gamma d'Euler.*

Définition 1.2.5. *Soit la fonction* $x:[1,b]\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ *est dite qu' a une dérivée à* $t\in[1,b]$ *si la fonction* $t\longmapsto x(t,\omega)$ *a une dérivée à t pour chaque* $x\in\Omega$. *on note par* $\frac{d}{dt}x(t,\omega)$ *ou par* $x'(t,\omega)$ *la dérivée de* $x(.,\omega)$ *à t. On dit que* $x:[o,b]\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ *est différentiable sur [1,b] si* $x(.,.)$ *a une dérivée pour chaque* $t\in[1,b]$ *et possède d'un coté une dérivée aux extrémités 1 et b.*

Remarque 1.2.6. *Si* $x(.,\omega):[1,b]\to\mathbb{R}^m$ *est intégrable Lebesgue sur [1,b] pour chaque* $\omega\in\Omega$, *alors* $t\longmapsto J^{\alpha}x(t,\omega)$ *est aussi Lebesgue intégrable sur [1,b] pour chaque* $\omega\in\Omega$.

Proposition 1.2.7. *Si* $x:[1,b]\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ *a une dérivée à* $t\in[1,b]$ *est absolument continu sur [1,b] (c'est-à-dire .* $t\longmapsto x(t,\omega)$ *absolument continu sur [1,b] pour chaque* $\omega\in\Omega$*), puis la dérivée de* $x'(t,\omega)$ *existe pour* λ *pour chaque* $t\in[1,b]$.

Quelque propriétés de deux fonctions spéciales. on note $E_{\alpha,\beta}$ *la fonction spéciale généralisée de Mittag-Leffer définie par*

$$E_{\alpha,\beta}:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon}\frac{\lambda^{\alpha-\beta}e^{\lambda}}{\lambda^{\alpha}-z}d\lambda.$$

où Υ *est un contour qui commence et se termine à -*∞ *et encercle le disque* $|\lambda|\leq|z|^{\frac{1}{\alpha}}$ *sens anti-horaire. si* $0<\lambda<1,\beta>0$, *puis l'expansion asymptotique de* $E_{\alpha,\beta}$ *comme* $z\to\infty$ *est donné par*

$$E_{\alpha,\beta}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}z^{1-\beta}\exp(z^{\frac{1}{\alpha}})+\varepsilon_{\alpha,\beta}(z), & pour|arg z|\leq\frac{1}{2}\alpha\pi\\ \varepsilon_{\alpha,\beta}(z), & pour|arg(-z)|\leq(1-\frac{1}{2})\alpha\pi\end{cases}$$

où

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(z)=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta-\alpha n)}+O(|z|^{-n})\ comme\ z\to\infty.$$

telle que

$$E_{\alpha}=E_{\alpha,1},e_{\alpha}=E_{\alpha,\alpha}.$$

1.3 Les théorèmes des points fixes

Si, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ...y_n)$, *par* $x \leq y$ *soit* $x_i \leq y_i$ *pour tous* $i = 1, ..., n$, *aussi* $|x| = (|x_1|, ..., |x_n|)$, $\max(x, y) = (\max(x_1, y_1), ..., \max(x_n, y_n))$ *et* $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\}$. *si* $c \in \mathbb{R}$, *alors* $x \leq c$ *signifier* $x_i \leq c$ *pour chaque* $i = 1, ..., n$.

1.3.1 Quelques définition sur les opérateurs

Définition 1.3.1. *Soient E et F deux espaces normé, un opérateur linéaire N défini sur un sous ensemble* $G \subset E$ *dans F est dit continu au point* x_0 *de G si, on a la propriété suivante :*

Pour toute suite x_0 *de G converge vers* x_0, *la suite* $N(x_n)$ *converge vers* $N(x_0)$ *c'est à dire*

$$\lim_{n\to\infty} N(x_n) = N(\lim_{n\to\infty} x_n) = N(x_0).$$

Définition 1.3.2. *Un opérateur linéaire N définie sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive* $c > 0$ *telle que*

$$\|N(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \forall x \in E$$

Définition 1.3.3. *Un opérateur N définie sur E dans F est compact s'il transforme toute partie bornée de E en une partie relativement compact de F, autrement dit, N est compact si est seulement si pour toute suite* $(x_n)_n$ *bornée dans E la suite* $(Nx_n)_n$ *admet une sous suite convergente. Un opérateur compact est nécessairement continue car sinon il existerait une suite* $(x_n)_n$ *bornée tel que* $\|Nx_n\| \to \infty$ *, ce qui contredit la compacité .*

Définition 1.3.4. *Un opérateur N définie sur E dans F est contractant (ou contraction) s'il existe une constante* $0 \leq k < 1$ *telle que*

$$\forall x, y \in E \ \|N(x) - N(y)\|_F \leq k\|x - y\|_F$$

Proposition 1.3.5. *N un opérateur contractant, alors l'opérateur N admet un point fixe unique* $x \in E$, *De plus si* $x_0 \in E$ *et* $x_n = Nx_{n-1}$ $(n \geq 1)$ *alors :*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

1.3.2 Théorème d'Arzela-Ascoli

Soit (E, N_∞) *l'espace de Banach des application continues d'un espace métrique compact à valeurs dans un espace de Banach, le théorème d'Arzela-Ascoli que nous allons démontrer ici*

assure qu'il convient d'ajouter la propriété d'équicontinuité pour qu'un ensemble $B \subset E$ soit fermé et borné pour être compact. on se donne :

- *(K,d) un espace métrique compact ,*
- *(F,δ) un espace métrique complet,*
- *$E := C^0(K,F)$ muni de $D(f,g) := \sup_{x\in K}\delta(f(x),g(x))$.*

Définition 1.3.6. *Une famille $B \subset E$ est dite (uniformément) équicontinue lorsque pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall f \in B, \forall x, y \in K, d(x,y) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Théorème 1.3.7. ***(Arzela -Ascoli)****[6]*
Une partie $B \subset E$ est relativement compacte si et seulement si

(i) B est équicontinue ;

(ii) $\forall x \in K, B_x := \{f(x) | f \in B\}$ est relativement compact dans F

Rappelons qu'une partie B est dite relativement compact si elle est d'adhérence compact .

Corollaire 1.3.8. *Soit (K,d) un espace métrique relativement compacts. une partie $B \subset C^0(K,\mathbb{R}^n)$ est compacte si est seulement si elle est fermée, bornée et équicontinue .*

Preuve : Observons que les ensembles relativement compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles bornés, les ensembles

$$B_x := \{f(x), f \in B\} \subset F = \mathbb{R}^n$$

sont donc ralativement compacts si est seulement si sont bornés .
Or B est borné s'il est compact et, réciproquement, B borné signifie qu'il existe $M > 0$ tel que $N_\infty(f) \leq M$ pour tout $f \in B$, donc B_x est inclus dans la boule (centrée à l'origine) de rayon M, quelque soit $x \in K$.
Les condition du corollaire, en apparence plus forte, sont donc bien équivalentes à celles du théorème.
Démonstration : *Nous commençons par l'implication la plus facile : supposons que B est relativement compacte et montrons que les conditions (i),(ii) sont bien satisfaites, Si B n'est pas équicontinue, c'est qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in K^{\mathbb{N}}$, $f_j \in B$ tels que*

$$d(x_j, y_j) < 1/j \text{ et } \delta(f_j(x_j), f_j(y_j)) \geq \epsilon_0.$$

Comme K et $\overline{B}$ sont des espace métriques compacts, on peut quitte à extraire et renuméroter supposer que $x_j, y_j \to a \in K$ et $f_j \to g \in E$ (cette dernière convergence signifie "convergence uniforme sur K"). Mais alors

$\delta(f_j(x_j), f_j(y_j)) \to \delta(g(a), g(a)) = 0$ *contredit l'information* $\delta(f_j(x_j), f_j(y_j)) \geq \epsilon_0$. *C'est donc que B est équicontinue.*

Montrons à présent que les ensembles B_x *sont ralativement compacts dans F, soit* $(y_j) = (f_j(x)) \in B_x^{\mathbb{N}}$, *il s'agit de montrer que* $\overline{B}_x$ *est compact, i.e. qu'on peut extraire une sous-suite* f_{jk} *qui converge uniformément, celle-ci converge en particulier au point* x.

Nous supposons à présent que les conditions (i), (ii) sont satisfaites et nous allons montrer que B est ralativememt compacte. Etant donnée $(f_{\varphi(j)})_j$ *qui converge uniformément vers une fonction* $g \in E$. *fixons* (x_j) *une suite de point dense dans K. Comme* B_{x_0} *est relativement compact, on peut extraire une sous-suite convergente de* $(f_j(x_0)) \in B_{x_0}^{\mathbb{N}}$. *On obtient ainsi une injection strictement croissante* $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *et* $y_0 \in F$ *tels que*

$$f_{\varphi_0(j)}(x_0) \longrightarrow y_0 \ lorseque \ j \to +\infty.$$

La suite $f_{\varphi_0(j)}(x_1) \in B_{x_1}^{\mathbb{N}}$ *admet également une sous-suite convergente car* B_{x_1} *est ralativement compact. On construit ainsi* $y_1 \in F$ *est* $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une injection strictement croissante tels que*

$$f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(j)}(x_1) \longrightarrow y_1 \ lorsque \ j \to +\infty.$$

Notons que $(f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(j)}(x_0))$ *est une suite-extraite de* $(f_{\varphi_0(j)}(x_0))$, *elle converge donc encore vers* y_0.

On procède ensuite par récurrence pour construire ,$\forall p \in \mathbb{N}$, *une injection croissante* $\varphi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *et* $y_p \in F$ *tels que*

$$f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(j)}(x_1) \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} y_l, \forall 0 \leq l \leq p.$$

Extraction diagonale. posons à présent

$$\psi : j \in \mathbb{N} \mapsto \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_j(j) \in \mathbb{N}.$$

ψ *est une injection croissante telle que la suite* $(f_{\psi(j)}(x_1))$ *est une suite extraite de* $(f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(j)}(x_1))$, *lorsque l'on se restreint aux indices* $j \geq l$. *En particulier*

$$f_{\psi(j)}(x_l) \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} y_l, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Soit $C := \{x_j, j \in \mathbb{N}\} \subset K$. *On ainsi défini une application* $g : c \to F$ *qui à* x_j *associe* y_j *.il résulte de l'équicontinuité de B que g est uniformément continue sur C. En effet soit* $\epsilon > 0$ *et* $\alpha > 0$ *de l'équicontinuité de B ,*

$$\forall f \in B, \forall x, y \in K, d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \epsilon.$$

En appliquant ceci à $x, y \in C$ *et* $f = f_{\psi(j)}$ *et en faisait tendre j vers* $+\infty$ *,il vient*

$$\forall x, y \in C, d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(g(x), g(y)) \leq \epsilon.$$

ce qui signifie bien que g est uniformément continue sur C .
Un résultat classique stipule qu'une application $g : C \to F$ uniformément continue sur un sous-ensemble C d'un espace métrique K s'étend de façon unique à l'adhérence $\overline{C}$ en une application uniformément continue $\overline{g} : \overline{C} \to F$.Notez qu'ici $\overline{C} = K$.
Nous allons, pour conclure, montrer que $(f_{\psi(j)})$ converge uniformément sur K vers $\overline{g}$. comme B est équicontinue, il suffit de montrer que $(f_{\psi(j)})$ converge simplement vers f sur K. par construction ,en tout point de C Si $a \in K \setminus C$,on fixe $(b_j) \in C^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a et on décompose

$$\delta(f_{\psi(j)}(a), \overline{g}(a)) \leq \delta(f_{\psi(j)}(a), f_{\psi(j)}(b_k)) + \delta(f_{\psi(j)}(b_k), \overline{g}(b_k)) + \delta(\overline{g}(b_k), \overline{g}(a)).$$

Étant donné $\epsilon > 0$, on commence par fixer k très grand de sorte que $\delta(\bar{g}(b_k), \overline{g}(a)) < \epsilon/3$ (continuité de $\overline{g}$) et $\delta(f_{\psi(j)}(a), f_{\psi(j)}(b_k)) < \epsilon/3$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ (équicontinuité de B). On utilise enfin la convergence simple de $f_{\psi(j)}$ vers $\overline{g}$ au point b_k pour trouver $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$j \geq J \Rightarrow \delta(f_{\psi(j)}(b_k), \overline{g}(b_k)) < \epsilon/3 \Rightarrow \delta(f_{\psi(j)}(a), \overline{g}(a)) < \epsilon,$$

se qui clôt la démonstration.

1.3.3 Espace métrique vectorielle

Définition 1.3.9. *soit X un ensemble non vide, par une métrique à valeur vectorielle sur X, soit $d : X \times Y \to R^n$ avec les propriétés suivantes :*
(i) $d(u, v) \geq 0$ pour tous $u, v \in X$; si $d(u,v)=0$ alors $u=v$;
(ii) $d(u,v)=d(v,u)$ pour tous $u,v \in X$;
(iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ pour tous $u, v, w \in X$.
On appelle l'espace (X,d) un espace métrique généralisé avec $d(x,y) := \begin{pmatrix} d_1(x, y) \\ \vdots \\ d_n(x, y) \end{pmatrix}$.

notez que d est un espace métrique généralisé sur X si et seulement si d_i, $i = 1, ..., n$ sont des métriques sur X.
pour $r=(r_1, ..., r_n) \in R^n_+$,on note par :

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\} = \{x \in X : d_i(x_0, x) < r_i, i = 1, ..., n\}$$

la boule ouverte centrée en x_0 de rayon r et

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\} = \{x \in X : d_i(x_0, x) \leq r_i, i = 1, ..., n\}$$

la boule fermée centrée en x_0 de rayon r. on mentionne que pour l'espace métrique généralisé, la notation des sous ensembles ouverts, ensembles fermés, convergence, la séquence et l'exhaustivité de cauchy sont similaires à celles des espaces métrique habitueles.

Définition 1.3.10. *Une matrice carrée de nombres réels est convergente vers zéro si et seulement si son rayon spectral $\rho(M)$ est strictement inférieur à 1, autrement dit, cela signifie que toutes les valeurs propres de M sont dans le disque unitaire ouvert i.e : $|\lambda| < 1$, pour chaque $\lambda \in C$ avec $det(M - \lambda I) = 0$, où I est la matrice unitaire de $M \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

un résultat classique en analyse matricielle est que les assertions suivants sont équivalentes :

Théorème 1.3.11. *soit $M \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) M est convergent vers zéro ;
(ii) $M^k \to 0$,telle que $k \to \infty$;
(iii) La matrice $(I - M)$ est non singulière et

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + ... + M^k + ...$$

(iv) La matrice (I-M) est non singulière et $(I - M)^{-1}$ a des éléments non négatifs.

Définition 1.3.12. *Soit (X,d) un espace métrique généralisé. un opérateur $N : X \to X$ est contractant s'il existe une matrice M convergente vers zéro telle que*

$$d(N(x), N(y)) \leq Md(x, y) \ pour \ tous \ x, y \in X.$$

pour n=1 on récupère le résultat du point fixe de la contraction de Banach classique.

Théorème 1.3.13. *[3] Soit (X,d) un espace métrique généralisé complet et $N : X \to X$ un opérateur contractant avec la matrice Lipschitz M. alors N a un point fixe unique x_* et pour chaque $x_0 \in X$, on a*

$$d(N^k(x_0), x_*) \leq M^k(I - M)^{-1}d(x_0, N(x_0)), \quad pour \ tous \ k \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.3.14. *On dit qu'une matrice singulière $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ a la propriété de valeur absolue si*

$$A^{-1}|A| \leq I,$$

où

$$|A| = (|a_{i,j}|)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$$

Quelques exemples des matrices convergentes vers zéro $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, qui satisfait également la propriété $(I - A)^{-1}|I - A| \leq I$ sont :

1) $A=\begin{pmatrix} a & o \\ 0 & b \end{pmatrix}$ *où* $a,b \in \mathbb{R}_+$ *et* $\max(a,b)<1$.

2) $A=\begin{pmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ *où* $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ *et* $a+b<1,\ c<1$.

3) $A=\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$ *où* $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ *et* $|a-b|<1\ ,\ a>1,\ b>0$.

Définition 1.3.15. *Soit* $Q \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *on dit que l'ordre est sélectionnée (ou positif) si* $p_1 \geq p_0,\ q_1 \geq q_0$ *impliquer*

$$Q\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \leq Q\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

au sens de composants.

Lemme 1.3.16. *soit*

$$Q=\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

où $a,b,c,d \geq 0$ *et* $det(Q)>0$. *alors* Q^{-1}*préserve l'ordre .*

Théorème 1.3.17. *[4] Soit* $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ *un espace de probabilité complet, X un espace de Banach généralisé séparable réel et* $F:\Omega\times X\to X$ *un opérateur aléatoire continu, et soit* $M(\omega)\in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *une matrice de variable aléatoire telle que* $M(\omega)$ *converge vers zéro et*

$$d(F(\omega,x_1),F(\omega,x_2)) \leq M(\omega)d(x_1,x_2)\ pour\ chaque\ x_1,x_2\in X,\omega\in\Omega.$$

alors il existe une variable aléatoire $x:\Omega\to X$ *qui est le point fixe aléatoire unique de F.*

Théorème 1.3.18. *[4] Soit* $(\Omega,\mathscr{F})$ *un espace mesurable X un espace de Banach généralisé séparable réel et* $F:\Omega\times X\to X$ *un opérateur aléatoire continu, et soit* $M(\omega)\in\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *une matrice de variable aléatoire telle que pour tous* $\omega\in\Omega$ *la matrice* $M(\omega)$ *converge vers zéro et*

$$d(F(\omega,x_1),F(\omega,x_2)) \leq M(\omega)d(x_1,x_2)\ pour\ chaque\ x_1,x_2\in X,\omega\in\Omega.$$

alors il existe une variable aléatoire $x:\Omega\to X$ *qui est le point fixe aléatoire unique de F.*

Théorème 1.3.19. *[4] Soit X un espace de Banach généralisé séparable et soit $F : \Omega \times X \to X$ un opérateur aléatoire complètement continu. alors, soit*

(i) L'équation aléatoire $F(\omega, x) = x$ a une solution aléatoire ,i.e, il existe une fonction mesurable $x : \Omega \to X$ telle que $F(\omega, x(\omega)) = x(\omega)$ pour tous $\omega \in \Omega$ ou

(ii) l'ensemble $\mathcal{M} = \{x : \Omega \to X$ est mesurable $|\lambda(\omega)F(\omega, x) = x\}$ est non lié pour certains mesurables $\lambda : \Omega \to X$ avec $0 < \lambda(\omega) < 1$ sur Ω.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous prouvons l'existense de solution et la compacité des ensembles de solutions d'un système aléatoire d'équations diférentielles fractionnaires par le dérivé de type Hadamard. L'existence.
Nous cosidérons le système d'equation différentielle fractionaire de type Hadamard :

$$\begin{cases} {}^{CH}D^{\alpha}x(t,\omega) = f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\alpha<1, t\in[0,b], \\ {}^{CH}D^{\beta}y(t,\omega) = g(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\beta<1, t\in[0,b], \\ x(0,\omega) = x_0(\omega), \omega\in\Omega \\ y(0,\omega) = y_0(\omega), \omega\in\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f, g : [1,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(\Omega,\mathscr{A})$ *est un espace mesurable et* $x_0, y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *sont des variables aléatoires.* ${}^{CH}D^{\alpha}$ *est la Caputo-modification du dérivé fractionnaire d'Hadamard.*

On dit que $x(\cdot,\cdot) : [1,b]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est Lebesgue intégrable sur* $[1,b]$ *si* $x(\cdot,\cdot) : [1,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est Lebesgue intégrable sur* $[1,b]$ *pour chaque* $\omega\in\Omega$,
Soit $\alpha > 0$. *si* $x : [1,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est le chemin d'échantillon Lebesgue integrable sur* $[1,b]$, *alors on peut considérer l'intégrale fractionnaire*

$$J^{\alpha}x(t,\omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}x(s,\omega)\frac{ds}{s}. \tag{2.2}$$

qui sera appelée l'intégrale fractionnaire de x, *où* Γ *est la fonction Gamma d'Euler.*

2.1 Existence et unicité

Dans cette section, nous prouvons quelques résultats d'existences et la compacité de l'ensemble de solutions. on ne sait pas d'abord que si : $x, y : \Omega \longrightarrow C([1,b],\mathbb{R}^m)$ *sont des fonctions satisfaisant le systéme 2.1, alors*

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}f(t,x(t,\omega),y(t\omega),\omega)\frac{ds}{s}, t\in[1,b].$$

et

$$y(t,\omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\beta-1} g(t,x(t,\omega),y(t\omega),\omega)\frac{ds}{-s}, t \in [1,b].$$

Définition 2.1.1. *une fonction* $f : [1,b]\times\mathbb{R}^m\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est dite Carathéodory aléatoire si les condition suivant sont satisfait :*

(i) l'application $(t,\omega) \longrightarrow f(t,x,\omega)$ *est mesurable conjointement pour tous* $x \in \mathbb{R}^m$,

(ii) l'application $x \longrightarrow f(t,x,\omega)$ *est continue pour tout* $t \in [0,b]$ *et* $\omega \in \Omega$.

Définition 2.1.2. *Une fonction Carathéodory* $f : [0,b]\times\mathbb{R}^m\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est dite Carathéodory-*L^1 *aléatoire si pour chaque nombre réel* $r > 0$ *est mesurable et* $h_r \in L^1([1,b],\mathbb{R}_+)$ *fonction borné, telle que :*

$$\|f(t,x,\omega)\| \leq h_r(t,\omega), \quad pour\ chaque\ t \in [0,b].$$

pour tous $\omega \in \Omega$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *avec* $\|x\| \leq r$.

Lemme 2.1.3. *On considére le problème :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t,\omega) = f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0 < \alpha < 1, \\ x(0,\omega) = x_0(\omega), \omega \in \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

Si $(t,\omega) \longmapsto f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)$ *est produit mesurable et* $t \longmapsto f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)$ *est Lebesgue integreble sur* $[1,b]$ *pour tous* $\omega \in \Omega$ *alors, la fonction* $x : [1,b]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est un solution de 2.3 si et seulement si :*

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)\frac{ds}{s}.$$

pour tous $t \in [1,b]$ *et pour chaque* $\omega \in \Omega$, $\quad 0 < \alpha < 1$.

Preuve :
On a :

$${}^{CH}D^\alpha x(t,\omega) = f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega).$$

Alors

$$J^\alpha D^\alpha x(t,\omega) = J^\alpha f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)$$

d'aprés lemme 1.1.14 qui dit

$$J^{\alpha CH}D^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{k!}(\ln\frac{t}{a})^k.$$

pour $k = 0$

$$J^{\alpha CH}D^{\alpha}x(t,\omega) = x(t,\omega) - \frac{\delta^0 x(a,\omega)}{0!}(\ln\frac{t}{x(a,\omega)})^0.$$

Alors pour $a = 0$*, on obtient*

$$J^{\alpha CH}D^{\alpha}x(t,\omega) = x(t,\omega) - x(0,\omega).$$

Donc

$$x(t,\omega) - x(0,\omega) = J^{\alpha}f(t, x(t,\omega), y(t,\omega), \omega)$$

En suite, la définition de J^{α} *, on a :*

$$(J^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \ln(\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s)}{s}ds$$

Alors

$$x(t,\omega) - x(0,\omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}f(t, x(t,\omega), y(t,\omega), \omega)\frac{ds}{s}.$$

par conséquent

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}f(t, x(t,\omega), y(t,\omega), \omega)\frac{ds}{s}.$$

Notre premier résultat principale est l'existence et l'unicité de solution aléatoire du problème 2.1

Théorème 2.1.4. *soient* $f, g; [1,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *deux fonction Carathéodory, supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*
(H_1) *Il existe* $p_1, p_2, p_3, p_4 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *des varaiables aléatoires telle que :*

$$\|f(t,x,y,\omega) - f(t,\tilde{x},\tilde{y},\omega)\| \leq p_1(\omega)\|x-\tilde{x}\| + p_2(\omega)\|y-\tilde{y}\|, \forall x,y,\tilde{x},\tilde{y} \in \mathbb{R}^m, \omega \in \Omega$$

et

$$\|g(t,x,y,\omega) - g(t,\tilde{x},\tilde{y},\omega)\| \leq p_3(\omega)\|x-\tilde{x}\| + p_4(\omega)\|y-\tilde{y}\|, \forall x,y,\tilde{x},\tilde{y} \in \mathbb{R}^m, \omega \in \Omega$$

si pour chaque $\omega \in \Omega$, $\widetilde{M}$ *converge vers 0, où*

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \frac{(\ln b)^{\alpha} p_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{(\ln b)^{\alpha} p_2(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{(\ln b)^{\beta} p_3(\omega)}{\Gamma(\beta+1)} & \frac{(\ln b)^{\beta} p_4(\omega)}{\Gamma(\beta+1)} \end{pmatrix}$$

alors le problème 2.1 a une unique solution aléatoire.

Preuve : *On considère l'opérateur*
$N : C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m) \times \Omega \longrightarrow C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$

$$N(x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega), \omega)(t) \mapsto (N_1(\cdot(t,\omega), y(\cdot,\omega), \omega), N_2(\cdot(t,\omega), y(\cdot,\omega), \omega))$$

où

$$N_1(x(t,\omega), y(t,\omega), \omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) \frac{ds}{s}$$

et

$$N_2(x(t,\omega), y(t,\omega), \omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\beta-1} g(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) \frac{ds}{s}.$$

D'abord on montre que N *est un opérateur aléatoire sur* $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$ *. Puisque* f *et* g *sont des fonctions de Carathéodory, ensuite* $\omega \longrightarrow f(t,x,y,\omega)$ *sont des applications mesurables au vu de la proposition1.2.5 nous conclurons que ,les applications*

$$\omega \longrightarrow N_1(x(t,\omega), y(t,\omega), \omega), \omega \longrightarrow N_2(x(t,\omega), y(t,\omega), \omega)$$

sont mesurables. Par conséquent, N *est un opérateur aléatoire sur* $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m) \times \Omega$ *dans* $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$.

On montre que N satisfait toutes les conditions du théorème 1.3.19 sur $C([1,b],\mathbb{R}^m)\times C([1,b],\mathbb{R}^m)$. soit $(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)),(\tilde{x}(\cdot,\omega),\tilde{y}(\cdot,\omega),\omega))\in C([1,b],\mathbb{R}^m)\times C([1,b],\mathbb{R}^m)$, alors

$\|N_1(t,x(t),y(t),\omega)-N_1(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t),\omega)\|$

$= \|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}(f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)-f(s,\tilde{x}(s,\omega),\tilde{y}(s,\omega))\frac{ds}{s}\|$

$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\|(f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)-f(s,\tilde{x}(s,\omega),\tilde{y}(s,\omega))\|\frac{ds}{s}$

$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}p_1(\omega)\|x(s,\omega)-\tilde{x}(s,\omega)\|\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}p_2(\omega)\|y(s,\omega)-\tilde{y}(s,\omega)\|\frac{ds}{s}$

$\leq \frac{p_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\|x(\cdot,\omega)-\tilde{x}(\cdot,\omega)\|_\infty+\frac{p_2(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\|y(\cdot,\omega)-\tilde{y}(\cdot,\omega)\|_\infty$

Remarque : on a calculer l'intégrale de cette manière,

on pose :

$$T_1=\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}$$

On fait un changement de variable telle que ,

$$u=\ln\frac{t}{s}\implies du=\frac{-dt}{s}.$$
$$s=1\implies u=\ln t$$
$$s=t\implies u=\ln 1$$

Alors

$$T_1=-\int_{\ln t}^0 u^{\alpha-1}du=\int_0^{\ln t}u^{\alpha-1}du=\big[\frac{u^\alpha}{\alpha}\big]_0^{\ln t}=\frac{1}{\alpha}\big[(\ln t)^\alpha-0\big].$$

Donc $T_1=\frac{(\ln t)^\alpha}{\alpha}$, Alors on obtient :

$\|N_1(t,x(t),y(t),\omega)-N_1(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t),\omega)\|$

$\leq \frac{p_1(\omega)(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x(\cdot,\omega)-\tilde{x}(\cdot,\omega)\|_\infty+\frac{p_2(\omega)(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y(\cdot,\omega)-\tilde{y}(\cdot,\omega)\|_\infty$

En conséquence,

$$\|N_1(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)-N_1(\tilde{x}(\cdot,\omega),\tilde{y}(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \leq \|x(\cdot,\omega)-\tilde{x}(\cdot,\omega)\|_\infty p_1(\omega)\frac{(\ln b)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$+\|y(\cdot,\omega)-\tilde{y}(\cdot,\omega)\|_\infty p_2(\omega)\frac{(\ln b)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

De même ,

$$\|N_2(t,x(t),y(t),\omega)-N_2(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t),\omega)\|$$

$$= \|\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}(g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)-g(s,\tilde{x}(s,\omega),\tilde{y}(s,\omega))\frac{ds}{s}\|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}\|(g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)-g(s,\tilde{x}(s,\omega),\tilde{y}(s,\omega))\|\frac{ds}{s}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}p_3(\omega)\|x(s,\omega)-\tilde{x}(s,\omega)\|\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}p_4(\omega)\|y(s,\omega)-\tilde{y}(s,\omega)\|\frac{ds}{s}$$

$$\leq \frac{p_3(\omega)}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\|x(\cdot,\omega)-\tilde{x}(\cdot,\omega)\|_\infty+\frac{p_4(\omega)}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\|y(\cdot,\omega)-\tilde{y}(\cdot,\omega)\|_\infty$$

Remarque : on a calculer l'intégrale de cette manière,
on pose :

$$T_2=\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}$$

On fait un changement de variable telle que ,

$$v=\ln\frac{t}{s} \implies dv=\frac{-dt}{s}.$$
$$s=1 \implies v=\ln t$$
$$s=t \implies v=\ln 1$$

Alors

$$T_2=-\int_{\ln t}^0 v^{\beta-1}dv=\int_0^{\ln t}v^{\alpha-1}dv=\Big[\frac{v^\alpha}{\beta}\Big]_0^{\ln t}=\frac{1}{\beta}\big[(\ln t)^\beta-0\big].$$

Donc $T_2=\frac{(\ln t)^\beta}{\beta}$ *, Alors :*

$$\|N_2(t,x(t),y(t),\omega)-N_2(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t),\omega)\|$$

$\leq \frac{p_3(\omega)(\ln t)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|x(\cdot,\omega) - \tilde{x}(\cdot,\omega)\|_\infty + \frac{p_4(\omega)(\ln t)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|y(\cdot,\omega) - \tilde{y}(\cdot,\omega)\|_\infty$

On obtient,

$$\|N_2(x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega), \omega) - N_2(\tilde{x}(\cdot,\omega), \tilde{y}(\cdot,\omega), \omega)\|_\infty \leq \|x(\cdot,\omega) - \tilde{x}(\cdot,\omega)\|_\infty p_3(\omega) \frac{(\ln b)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$$

$$+ \|y(\cdot,\omega) - \tilde{y}(\cdot,\omega)\|_\infty p_4(\omega) \frac{(\ln b)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Par conséquence ,

$$d(N(x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega), \omega), N(\tilde{x}(\cdot,\omega), \tilde{y}(\cdot,\omega), \omega)) \leq \tilde{M}(\omega) d((x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega)), (\tilde{x}(\cdot,\omega), \tilde{y}(\cdot,\omega))),$$

*o*ù

$$d(x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega)) = \begin{pmatrix} \|x(\cdot,\omega) - y(\cdot,\omega)\|_\infty \\ \|x(\cdot,\omega) - y(\cdot,\omega)\|_\infty \end{pmatrix}.$$

puis pour chaque $\omega \in \Omega$, $\tilde{M}(\omega) \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}_+)$ converge vers 0,alors d'aprés theoréme 1.3.18, il exsiste un point fixe aléatoire unique de N qui est la solution du problème 2.1

Nous rappelons le lemme de Gronwall pour les noyaux singuliers, dont la preuve peut être trouvée dans le lemme 7.1.1 de [7].

Lemme 2.1.5. *soit $v, a, \bar{a} : [1,b] \longrightarrow [0,\infty[$ sont des fonctions continues. Pour tout $t \in [1,b]$,*

$$v(t) \leq a(t) + \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{v(s)}{s} ds,$$

alors, il existe une constante $K = k(\beta)$ tel que

$$v(t) \leq a(t) + \bar{a}(t) \int_1^t [\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{a}(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} a(s)] \frac{ds}{s},$$

pour chaque $t \in [1,b]$.

Ensuite, nous présentons le résultat d'existence sans conditions de Lipschitz. Nous considérons les hypothèses suivantes :

(H_2) *Pour chaque* $\omega \in \Omega$, *les fonctions* $f(\cdot,\cdot,\cdot,\omega)$ *et* $g(\cdot,\cdot,\cdot,\omega)$ *sont continues et* $\omega \to f(\cdot,\cdot,\cdot,\omega), \omega \to g(\cdot,\cdot,\cdot,\omega)$ *sont mesurables .*

(H_3) *Il existe des fonctions mesurables et bornées* $\gamma_1, \gamma_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$\|f(t,x,y,\omega)\| \leq \gamma_1(\omega)(\|x\| + \|y\|), \|g(t,x,y,\omega)\| \leq \gamma_2(\omega)(\|x\| + \|y)\|,$$

pour tous $t \in [1,b], \omega \in \Omega$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Maintenant, nous donnons la preuve du résultat d'existence du problème 2.1 en utilisant le type de théorème de point fixe aléatoire de Leary-Schauder dans l'espace de Banach généralisé

Théorème 2.1.6. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *soient vérifiées. Alors le problème 2.1 a une solution aléatoire dénie sur* $[1,b]$. *De plus, l'ensemble de solutions*

$S(x_0,y_0) = \{(x,y) : \Omega \longrightarrow C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m) : (x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega)), \omega \in \Omega$ *est la solution de (2.1)}*
est compact (i.e.pour chaque $(x_n,y_n)_{n\in N} \subset S(x_0,y_0)$ *il existe une sous-suite de* $(x_n,y_n)_{n\in N}$ *convergent d'un élément* $(x,y) \in S(x_0,y_0)$)

Preuve : *soit* $N : C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m) \times \Omega \longrightarrow C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$ *être un opérateur aléatoire*

Pour appliquer le théorème 1.3.19, nous montrons d'abord que N est complètement continu. La preuve sera donnée en plusieurs étapes

•***Étape 1*** $N(\cdot,\cdot,\omega) = (N_1(\cdot,\cdot,\omega), N_2(\cdot,\cdot,\omega))$ *est continue.*
Soit (x_n,y_n) *être une suite telle que* $(x_n,y_n) \longrightarrow (x,y) \in C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$ *telle que* $n \to \infty$, *alors*

$$\|N_1(x_n(\cdot,\omega), y_n(\cdot,\omega),\omega) - N_1(x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \leq \frac{(\ln b)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot, x_n(\cdot,\omega), y_n(\cdot,\omega),\omega) - f(\cdot, x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty.$$

Puisque f est une fonction continue, on obtient

$$\|N_1(x_n(\cdot,\omega), y_n(\cdot,\omega),\omega) - N_1(x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \to 0 \ telle \ que \ n \to \infty.$$

De même

$$\|N_2(x_n(\cdot,\omega),y_n(\cdot,\omega),\omega)-N_2(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \le \frac{(\ln b)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|g(\cdot,x_n(\cdot,\omega),y_n(\cdot,\omega),\omega) - g(\cdot,x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty.$$

Puis

$$\|N_2(x_n(\cdot,\omega),y_n(\cdot,\omega),\omega)-N_2(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \to 0 \ telle\ que\ n\to\infty.$$

Ainsi N est continu.

•***Étape 2*** *N transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans* $C([1,b],\mathbb{R}^m)\times C([1,b],\mathbb{R}^m)$. *En effet, il suffit de montrer que pour tout* $q>0$ *il existe une constante positive l telle que pour chaque*
$(x,y)\in B_q=\{(x,y)\in C([1,b],\mathbb{R}^m)\times C([1,b],\mathbb{R}^m):\|x\|_\infty\le q,\|y\|_\infty\le q\}$, *on a*

$$\|(x,y,\omega)\|_\infty \le l=(l_1,l_2).$$

Alors pour chaque $t\in[1,b]$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\|N_1(x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)\| &= \|x_0(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)ds\|\\ &\le \|x_0(\omega)\|+\frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_1^b\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|ds\end{aligned}$$

De (H_2), *nous obtenons*

$$\|N_1(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \le \|x_0(\omega)\|+\frac{2(\ln b)^\alpha q}{\Gamma(\alpha+1)}\gamma_1(\omega)=l_1.$$

De même,

$$\begin{aligned}\|N_2(x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)\| &= \|y_0(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)ds\|\\ &\le \|y_0(\omega)\|+\frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}\int_1^b\|g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|ds\end{aligned}$$

nous avons

$$\|N_2(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \le \|y_0(\omega)\|+\frac{2(\ln b)^\beta q}{\Gamma(\beta+1)}\gamma_2(\omega)=l_2.$$

•***Étape 3*** *N transforme les ensembles bornés en ensembles équicontinus de* $C([1,b],\mathbb{R}^m)\times$

$C([1,b],\mathbb{R}^m)$. *Soit* B_q *un ensemble borné dans* $C([1,b],\mathbb{R}^m)\times C([1,b],\mathbb{R}^m)$ *comme à l'étape 2. Soit* $r_1,\ r_2 \in J,\ r_1 < r_2$ *et* $u \in B_q$. *Ainsi nous avons*

$$\begin{aligned}&\|N_1(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega),\omega)-N_1(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega),\omega)\|\\ &\leq \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_{r_1}^{r_2}(\ln\frac{r_2}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}+\int_1^{r_1}(\ln\frac{r_2}{s})^{\alpha-1}-(\ln\frac{r_2}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\Big].\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\|N_1(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega),\omega)-N_1(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega),\omega)\|\\ &\leq \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)}(\ln r_2-\ln r_1)^{\alpha}+\frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[(\ln r_2)^{\alpha}-(\ln r_1)^{\alpha}\Big].\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\|N_2(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega),\omega)-N_2(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega),\omega)\|\\ &\leq \frac{2q\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}\Big[\int_{r_1}^{r_2}(\ln\frac{r_2}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}+\int_1^{r_1}(\ln\frac{r_2}{s})^{\beta-1}-(\ln\frac{r_2}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\Big].\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\|N_2(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega),\omega)-N_2(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega),\omega)\|\\ &\leq \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\beta+1)}(\ln r_2-\ln r_1)^{\beta}+\frac{2q\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta+1)}\Big[(\ln r_2)^{\beta}-(\ln r_1)^{\beta}\Big].\end{aligned}$$

Le terme de droite tend vers zéro comme $|r_2-r_1|\to 0$. *Suite aux étapes 1 à 3 on a montré dans l'étape 1 que* N *est continu*

$$\|N_1(x_n(\cdot,\omega),y_n(\cdot,\omega),\omega)-N_1(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \to 0\ telle\ que\ n\to\infty.$$

$$\|N_2(x_n(\cdot,\omega),y_n(\cdot,\omega),\omega)-N_2(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \to 0\ telle\ que\ n\to\infty.$$

et dans l'étape 2 que N *est borné*

$$\|N_1(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \leq \|x_0(\omega)\|+\frac{2(\ln b)^{\alpha}q}{\Gamma(\alpha+1)}\gamma_1(\omega)=l_1.$$

$$\|N_2(x(\cdot,\omega),y(\cdot,\omega),\omega)\|_\infty \leq \|y_0(\omega)\|+\frac{2(\ln b)^{\beta}q}{\Gamma(\beta+1)}\gamma_2(\omega)=l_2.$$

et dans l'étape 3 que N *est équicontinu*

avec Arzela-Ascoli (théorème 1.3.7), nous concluons que N transforme B_q en un ensemble précompact dans $C([0,b],\mathbb{R})\times C([0,b],\mathbb{R})$.

•***Étape 4*** *Il reste à montrer que*

$$\mathscr{A}(\omega)=\{(x(\cdot,\omega)y(\cdot,\omega))\in C([1,b],\mathbb{R}^m)\times C([1,b],\mathbb{R}^m):$$
$$(x(\cdot,\omega)y(\cdot,\omega))=\lambda(\omega)N(x(\cdot,\omega),y(.,\omega),\omega),\lambda(\omega)\in(0,1)\}$$

est borné.
soit $(x,y)\in\mathscr{A}$. alors $x=\lambda(\omega)N_1(x,y)$ et $y=\lambda(\omega)N_2(x,y)$ pour $0<\lambda<1$. Ainsi, pour $t\in[1,b]$, on a

$$\begin{aligned}\|x(t,\omega)\|&\leq\|x_0(\omega)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|\frac{ds}{s}\\&\leq\|x_0(\omega)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\gamma_1(\omega)(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}(\|x(s,\omega)\|+\|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

D'où

$$\|x(t,\omega)\|\leq\|x_0(\omega)\|+\frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}(\|x(s,\omega)\|+\|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s}$$

et

$$\begin{aligned}\|y(t,\omega)\|&\leq\|y_0(\omega)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}\|g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|\frac{ds}{s}\\&\leq\|y_0(\omega)\|+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\gamma_2(\omega)(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}(\|x(s,\omega)\|+\|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

D'où

$$\|y(t,\omega)\|\leq\|y_0(\omega)\|+\frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\beta-1}(\|x(s,\omega)\|+\|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s}$$

Par conséquent

$$\|x(t,\omega)\|+\|y(t,\omega)\|\leq c+c\int_1^t(\ln\frac{t}{s})^{\gamma-1}(\|x(s,\omega)\|+\|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s}$$

où

$$c=\|x_0(\omega)\|+\|y_0(\omega)\|+\frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)},\gamma=\min(\alpha,\beta).$$

D'après le lemme 2.1.5, nous avons

$$\begin{aligned}\|x(t,\omega)\| + \|y(t,\omega)\| &\leq c + c\int_1^t \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(c\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (\ln \frac{t}{s})^{k\gamma-1}\Big]\frac{ds}{s} \\ &\leq c + c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(c\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma+1)} (\ln t)^{k\gamma} \\ &\leq c\Big[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(c\Gamma(\gamma)(\ln t)^{\gamma})^k}{\Gamma(k\gamma+1)}\Big] \\ &\leq c\Big[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(c\Gamma(\gamma)(\ln b)^{\gamma})^k}{\Gamma(k\gamma+1)}\Big] \\ &= cE_{\gamma}(c\Gamma(\gamma)(\ln b)^{\gamma}).\end{aligned}$$

D'où

$$\|x(\cdot,\omega)\|_{\infty} + \|y(\cdot,\omega)\|_{\infty} \leq cE_{\gamma}(c\Gamma(\gamma)(\ln b)^{\gamma}) := K_*$$

En conséquence

$$\|x\|_{\infty} \leq K_* \ et \ \|y\|_{\infty} \leq K_*$$

Cela montre que $\mathscr{A}$ est borné. Comme conséquence du théorème 1.3.19, nous en déduisons que N a un point fixe aléatoire $\omega \longrightarrow (x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega))$ qui est une solution au problème 2.1.

•***Étape 5*** *Compacité de l'ensemble de solutions. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S(x_0, y_0)$ une suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour fixe $\omega \in \Omega$ on obtient*

$$x_n(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x_n(s,\omega), y_n(s,\omega), \omega)ds.$$

et

$$y_n(t,\omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\beta-1} g(s, x_n(s,\omega), y_n(s,\omega), \omega)ds.$$

Comme dans les étapes 3, 4 qu'on montrer que N est équicontinu et $\mathscr{A}$ est borné, nous pouvons prouver que la sous-suite $\{(x_{nk}, y_{nk})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers certains $(x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega)) \in C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$, tels que

$$\omega \to x(t,\omega), \omega \to y(t,\omega).$$

sont des fonctions mesurables. Puisque $f(.,.,.,\omega)$ *et* $g(\cdot,\cdot,\cdot,\omega)$ *sont des fonctions continues, alors*

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) ds, t \in [0, b]$$

et

$$y(t,\omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (\ln \frac{t}{s})^{\beta-1} g(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) ds, t \in [0, b]$$

Donc $S(x_0, y_0) = \{(x, y) : \Omega \longrightarrow C([1, b], \mathbb{R}^m) \times C([1, b], \mathbb{R}^m) : (x(\cdot,\omega), y(\cdot,\omega)), \omega \in \Omega$ *est la solution de 2.1*$\}$ *est compact.*

Application

Soit $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la σ-algèbre usuelle constituée des sous ensembles mesurables de Lebesgue de $(-\infty, 0)$.
Considérons le système d'équations différentielles aléatoires suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}} x(t,\omega) = \frac{t\omega^2 x^2(t,\omega)}{(1+\omega^2)(1+x^2(t,\omega)+y^2(t,\omega))}, t \in [0,2], \\ D^{\frac{1}{2}} y(t,\omega) = \frac{t\omega^2 y^2(t,\omega)}{(1+\omega^2)(1+x^2(t,\omega)+y^2(t,\omega))}, t \in [0,2], \\ x(0,\omega) = \sin\omega, \omega \in \Omega \\ y(0,\omega) = \cos\omega, \omega \in \Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

Où

$$f(t,x,y,\omega) = \frac{t\omega^2 x^2 \sin\omega t}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)},$$
$$g(t,x,y,\omega) = \frac{t\omega^2 y^2 \cos\omega t}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)}$$

Clairement, les applications $(t,\omega) \mapsto f(t,x,y,\omega)$ et $(t,\omega) \mapsto g(t,x,y,\omega)$ sont conjointements continues pour tout $t \in [0.2]$ et $\omega \in \Omega$.
Et de même les applications $x \mapsto f(t,x,y,\omega)$ et $y \mapsto f(t,x,y,\omega)$ sont continus pour tout $t \in [0,2]$ et $\omega \in \Omega$,
Et de même pour les applications correspondant à la fonction $g, x \mapsto g(t,x,y,\omega)$ et $y \mapsto g(t,x,y,\omega)$ sont continus pour tout $t \in [0,2]$ et $\omega \in \Omega$.
Ainsi les fonctions f et g sont Carathéodory sur $[0,2] \times [1,\infty) \times [1,\infty) \times \Omega$.
Premièrement, nous montrons que f et g sont des fonctions Lipschitz. En effet,
soit $x, y \in \mathbb{R}$, et $\omega \in \Omega$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
|f(t,x,y,\omega)-f(t,\tilde{x},\tilde{y},\omega)| &= \Big|\frac{t\omega^2 x^2\sin\omega t}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)}-\frac{t\omega^2\tilde{x}^2\sin\omega t}{10(1+\omega^2)(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)}\Big| \\
&= \Big|\frac{(t\omega^2\sin\omega t(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)x^2)-(t\omega^2\sin\omega t(1+x^2+y^2)\tilde{x}^2)}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)}\Big| \\
&= \Big|\frac{t\omega^2\sin\omega t((1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)x^2-(1+x^2+y^2)\tilde{x}^2)}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)}\Big| \\
&= \frac{t\omega^2\sin\omega t}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}|x^2+\tilde{y}^2x^2-\tilde{x}^2-y^2\tilde{x}^2|,\ t\in[0,2] \\
&\leq \frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}|x-\tilde{x}|+\frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}|y-\tilde{y}|
\end{aligned}$$

Alors

$$|f(t,x,y,\omega)-f(t,\tilde{x},\tilde{y},\omega)| \leq \frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}|x-\tilde{x}|+\frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}|y-\tilde{y}|$$

De la même manière pour la fonction g, on obtient

$$\begin{aligned}
|g(t,x,y,\omega)-g(t,\tilde{x},\tilde{y},\omega)| &= \Big|\frac{t\omega^2 y^2\cos\omega t}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)}-\frac{t\omega^2\tilde{y}^2\cos\omega t}{10(1+\omega^2)(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)}\Big| \\
&= \Big|\frac{(t\omega^2\cos\omega t(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)y^2)-(t\omega^2\cos\omega t(1+x^2+y^2)\tilde{y}^2)}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)}\Big| \\
&= \Big|\frac{t\omega^2\cos\omega t((1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)y^2-(1+x^2+y^2)\tilde{y}^2)}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)}\Big| \\
&= \frac{t\omega^2\cos\omega t}{10(1+\omega^2)(1+x^2+y^2)(1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}|x^2+\tilde{y}^2x^2-\tilde{x}^2-y^2\tilde{x}^2|,\ t\in[0,2] \\
&\leq \frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}|x-\tilde{x}|+\frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}|y-\tilde{y}|
\end{aligned}$$

Alors

$$|g(t,x,y,\omega)-g(t,\tilde{x},\tilde{y},\omega)| \leq \frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}|x-\tilde{x}|+\frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}|y-\tilde{y}|$$

si pour chaque $\omega\in\Omega$, $\widetilde{M}(\omega)$ converge vers 0, où

$$\widetilde{M}(\omega)=\begin{pmatrix} \frac{(\ln b)^\alpha p_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{(\ln b)^\alpha p_2(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{(\ln b)^\beta p_3(\omega)}{\Gamma(\beta+1)} & \frac{(\ln b)^\beta p_4(\omega)}{\Gamma(\beta+1)} \end{pmatrix}$$

Et pour $\alpha=\beta=1/2$ et $t\in[0,2]$, on obtient

$$\widetilde{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{(\ln 2)^{1/2} p_1(\omega)}{\Gamma(1/2+1)} & \frac{(\ln 2)^{1/2} p_2(\omega)}{\Gamma(1/2+1)} \\ \frac{(\ln 2)^{1/2} p_3(\omega)}{\Gamma(1/2+1)} & \frac{(\ln 2)^{1/2} p_4(\omega)}{\Gamma(1/2+1)} \end{pmatrix}$$

On prend

$$p_1(\omega) = p_2(\omega) = p_3(\omega) = p_4(\omega) = \frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}$$

Alors

$$\widetilde{M}(\omega) = \frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$|\rho((M)(\omega))| = \frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)} < 1$$

Donc d'aprés théorème 1.3.11, $\widetilde{M}(\omega)$ *converge vers 0 si* $(\widetilde{M}(\omega))^k$ *converge vers 0, telle que* $k \to \infty$

$$(\widetilde{M}(\omega))^k = \left(\frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}\right)^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k, k \in \mathbb{N}$$

on pose :

$$m^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } m^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ m^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$m^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}, \ m^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix},$$

Alors :

$$(m(\omega))^k = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}$$

pour tous $\omega \in \Omega$*, la matrice*

$$(\widetilde{M}(\omega))^k = \left(\frac{\omega^2}{5(1+\omega^2)}\right)^k \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \ converge \ vers \ 0, \ k \to +\infty$$

Alors $\widetilde{M}(\omega)$ *converge vers 0. Donc, toutes les conditions du théorème 1.3.17 sont satisfaites. D'où le problème 2.4 a une unique solution aléatoire.*

Conclusion

Notre but principal, dans ce mémoire, est de prouver l'existence et l'unicité de solution de systéme aléatoire d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.
Nous présentons certains travaux sur le calcul fractionnaire. et ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de Schauder en espace métrique vectorielle.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Diferential Equations, Elsevier B.V, Amsterdam, Netherlands, 2006.

[2] F. Jarad, Thabet and B. Dumitru, Caputo-type modication of the Hadamard fractional derivatives, Advances in Di↵erence Equations, 2012, page 2 - 8

[3] A.I. Perov, On the Cauchy problem for a system of ordinary dierential equations, Pribliz. Met. Reshen. Dier. Uravn., 2, 1964, 115-134 (in Russian).

[4] M.L. Sinacer, J. J Nieto and A. Ouahab, Random xed point theorem in generalized Banach space and applications, Random Oper. Stoch. Equ. 24 (2016), 93–112.

[5] N.S. Papageorgiou, random xed point theorems for measurable multifunctions in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 507–514

[6] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, 2e tirage, M assorn, Paris, page 72, 1983

[7] S.-Y. Lin, Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional dierential equations, J. Inequal. Appl., 2013 (2013), 9 pages.

[8] B.Ross,Fractional Calculus and its Applications,Springer-Verlag,Berlin,1975.

[9] S.Samko,A.Kilbas,and O.Marichev,Fractional integrals and derivatives :Theory and Applications,Gordon and Breach,London,1993.

[10] H. Vu, N.N. Phung and N. Phuong, On fractional randomdierential equations with delay, Opuscula Math. 36 (2016), 541-556.

[11] V. Lupulescu, S.K. Ntouyas, Random fractional dierential equations, Int. Elec- tron. J. Pure Appl. Math. 4 (2012), 119-136.

[12] V. Lupulescu, D. O'Regan and G. Rahman, Existence results for random fractional dierential equations, Opuscula Math. 34 (2014), 813825.

[13] Sinacer, M. L., Nieto, J. J., Ouahab, A. (2016). Random fixed point theorem in generalized Banach space and applications. Random Operators and Stochastic Equations, 24(2), 93-112.

[14] S.Itoh,Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces,J.Math. Anal.Appl.67(1979),261–273.