RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

KENNOUDI Nour Elouiam

ÉQUATIONS PARABOLIQUES NON LINÉAIRES À DONNÉES MESURES

Soutenue publiquement le 22 Juin 2022 devant le jury composé de :

Président :	Noureddine BENAICHOUCHE.
Examinateur :	Rezak SOUILAH.
Encadreur :	Hocine AYADI.

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021-2022

Table des matières

Résumé **1**

Notation **2**

Introduction **2**

1 Préliminaires et outils de base **5**

1.1 Convergence faible, convergence faible étoile $\star$ 5

1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ 6

1.3 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ 8

1.4 Fonctions à valeurs vectorielles 10

2 Équation de la chaleur **14**

2.1 Un peu de modélisation 14

2.2 Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$: solutions classiques 17

2.3 Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$: solution faible 19

3 Problèmes paraboliques non linéaires à données régulières **30**

3.1 Théorème d'existence 31

3.2 Application au p-Laplacien 36

4 Problèmes paraboliques non linéaires à données mesures **39**

4.1 Première étape : Approximation du problème 41

4.2 Deuxième étape : Estimations uniformes 41

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents, qui ont sacrifié leurs vies pour notre réussite. Nous espérons qu'un jour, nous pourrons leurs rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour nous.

A mes chères soeurs Manel, Rahil et mon frère Mohamed.

A mes meilleures amies et toute ma famille.

Remerciements

*Je remercier **ALLAH** le tout puissant, qui ma donné la volonté et le courage pour compléter ce travail.*

*Je tiens à remercier Monsieur **AYADI Hocine** pour son aide, sa patience, ces conseilles, et pour tout l'attention qu'il a porter à ce travail.*

*Notre profond remerciement à les membres de jury **Mr. BENAICHOUCHE Noureddine** et **Mr. SOUILAH Rezak** d'avoir accepté l'évaluation de ce travail.*

Mes sincère remercient à mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, et leurs encouragements durant ces années d'études.

*Enfin, je tiens à remercier tous les enseignants depuis le primaire jusqu'à l'université, toute ma famille, et tous mes amis, surtout **Marwa, Wahiba, Noudjoud** et **Imane**.*

Merci

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie quelques problèmes d'évolutions à données mesures. En premier temps, on établit l'existence et l'unicité d'une solution faible pour l'équation de chaleur (qui est linéaire) en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Ensuite, on étudie l'existence et l'unicité de quelques problèmes aux limites paraboliques gouvernés par l'opérateur p-Laplacien en employant des techniques basées sur la théorie des opérateurs monotones. Dans un deuxième temps, on s'engage à résoudre le problème p-Laplacien parabolique à donnée mesures en se basant sur la méthode de compacité.

Mots-cles : Problèmes paraboliques, équation de chaleur, p-Laplacien, solutions faibles.

Notation

Dans tout ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes.

Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	La frontière régulière de Ω
Q	$=\Omega\times]0,T[$, avec $T>0$
x	Vecteur de $\mathbb{R}^N, x=(x_1,x_2,\cdots,x_N), x_i\in\mathbb{R}, 1\leq i\leq N$
dx	Mesure de Lebesgue N-dimensionnelle
$\int_\Omega f(x)\mathrm{dx}$	Intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue
p'	L'exposant conjugué de p : $p'=\dfrac{p}{p-1}$ si $p>1$ et $p'=\infty$ si $p=1$
p.p	Presque partout.
$i.e$	C'est-à-dire.
$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$	la dérivée partielle de u par rapport à la variable x_i.
∇u	$=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dfrac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, le gradient de u.
div$u$	$=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, la divergence de u.
$\Delta_p u$	$=\mathrm{div}\left(\lvert\nabla u\rvert^{p-2}\nabla u\right)$, le p-Laplacien de u.
$f_n\to f$	$\{f_n\}$ converge vers f.
$f_n\rightharpoonup f$	$\{f_n\}$ converge faible vers f.
$\lvert.\rvert$	La norme sur l'espace $L^2(\Omega)$.
$C(\Omega)$	L'ensemble des fonctions continues dans Ω.
$C^\infty(\Omega)$	L'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω.
$\mathscr{D}(\Omega):=C_c^\infty(\Omega)$	L'ensemble des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.
supp$u$	$=\overline{\{x\in\Omega : u(x)\neq 0\}}$, le support de la fonction u.
$L^p(\Omega)$	$1\leq p\leq+\infty$, l'espace de Lebesgue.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	L'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

INTRODUCTION

En mathématiques, une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation fonctionnelle qui met en relation une fonction de plusieurs variables et ses dérivées partielles. Résoudre une EDP consiste à trouver toutes les fonctions qui vérifient cette équation. La résolution explicite de la plupart des EDP reste encore une tache difficile ou impossible, alors il ne s'agit pas de résoudre algébriquement ces équations pour obtenir leurs solutions exactes, mais d'étudier l'existence et l'unicité de solutions et décrire parfois certaines propriétés de ces solutions.

Le rôle des équations aux dérivées partielles (elliptiques ou paraboliques) en mathématiques est d'une importance primordiale pour étudier certains phénomènes du monde réel. En particulier, les EDP non linéaires décrivent des phénomènes naturels fondamentaux et nous aident à formuler, modéliser et comprendre un large éventail de problèmes qui se posent dans de nombreux domaines des sciences appliquées. La recherche sur la théorie des EDP a connu d'importants progrès depuis les travaux pionniers de Laplace, Poisson et Helmholtz jusqu'à l'étude moderne des EDP non linéaires, qui peuvent comporter de nombreuses particularités.

On s'intéresse dans ce travail à la résolution des équations aux dérivées partielles de type parabolique à données mesures. En premier temps, on étudie l'existence et l'unicité de quelques problèmes aux limites paraboliques à données régulières. A titre d'exemple, on montre l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation de la chaleur (elle est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique) en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Ensuite, on étudie l'existence et l'unicité de quelques problèmes aux limites paraboliques gouvernés par l'opérateur p-Laplacien en employant des techniques basées sur la théorie des opérateurs monotones. Dans un deuxième temps, on s'engage à résoudre le problème p-Laplacien parabolique à donnée mesure en se basant sur la méthode de compacité.

Le travail que nous allons présenté est composé essentiellement de quatre chapitre :
Dans la première partie du Chapitre 1, on présente quelques définitions de la convergence faible et la convergence faible étoile $\star$. La deuxième et la troisième partie de ce chapitre sont réservées aux rappels sur les espaces fonctionnels (espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, espaces de fonctions à valeurs vectorielles) qui sont bien adaptés à l'étude des EDP.

Dans le deuxième chapitre on parlera de l'équation de la chaleur, on va commencer avec un exemple de modélisation par une équation parabolique. En suite, on utilise la transformée de Fourier pour résoudre explicitement l'équation obtenue (équation de la chaleur). Comme la solution exacte n'est pas toujours connue analytiquement, donc dans notre étude, on montre seulement l'existence et l'unicité de la solution pour cette équation. C'est-à-dire, on s'intéresse à la solution faible du problème modèle suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ u(.,0) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où f et u_0 sont suffisamment régulières. On utilise la méthode de Faedo-Galerkin pour obtenir le résultat d'existence. La démonstration peut être décomposée en quatre étapes qui sont :

- Approximation (Recherche de solutions approchées).
- Estimation à priori.
- Passage à la limite (l'existence d'une solution faible).
- Unicité de la solution faible.

Dans le troisième chapitre, on on s'intéresse aux résultats d'existence et d'unicité de la solution pour un problème aux limites parabolique non linéaire, avec la condition de Dirichlet du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f & \text{sur } \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où A un opérateur monotone, f et u_0 sont suffisamment régulières. À titre d'exemple d'application, on traite le problème (1) dans le cas où A est le p-Laplacien, c'est-à-dire

$$A(u) = \Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \text{ avec } p > 2.$$

Chapitre 1

Préliminaires et outils de base

Nous allons, dans ce chapitre, introduire différents outils nécessaires pour la suite de ce travail. Nous présentons quelques définitions et résultats sur les espaces fonctionnels (notamment les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ et espaces de fonctions à valeurs vectorielles) adaptés à l'étude des équations aux dérivées partielles paraboliques.

1.1 Convergence faible, convergence faible étoile $\star$

Définition 1.1 ([4]) *Soit E un espace de Banach de dual E'.*
On dit qu'une suite $(u_n)_n \in E$ converge faible vers $u \in E$ si

$$\forall f \in E', \quad f(u_n) = \langle f, u_n \rangle_{E',E} \to \langle f, u \rangle_{E',E} = f(u).$$

Une suite $(f_n)_n \in E'$ converge faible $\star$ vers $f \in E'$ si

$$\forall u \in E, \quad f_n(u) = \langle f_n, u \rangle_{E',E} \to \langle f, u \rangle_{E',E} = f(u).$$

Théorème 1.2 ([4])

- *Soit E un espace de Banach réflexif (i.e. E est isomorphe à E''), alors de toute suite bornée de E, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans E.*
- *Soit E un espace de Banach séparable (i.e. qui admet une partie dénombrable dense), alors de toute suite bornée de E', on peut extraire une sous suite qui converge faible $\star$ dans E'.*

1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Dans tout ce qui suit, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue dx.

On définit pour $1 \leq p < +\infty$,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{dx} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{dx} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et pour $p = +\infty$,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \exists M > 0, \ |u(x)| \leq M \text{ p.p. } x \in \Omega \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \mathrm{ess} |u(x)|.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$ et $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv \, \mathrm{dx}.$$

1.2.1 Quelques propriétés des espaces $L^p(\Omega)$ [4]

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, l'exposant conjugué p' de p est défini par :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

1) Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable et réflexif de dual $L^{p'}(\Omega)$. On a alors le résultat suivant :

   Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$, alors

$$\exists (u_{n_k})_k, \exists u \in L^p(\Omega) \text{ telle que } \forall \varphi \in L^p(\Omega), \int_\Omega u_{n_k} \varphi \, \mathrm{dx} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{dx}.$$

2) $L^1(\Omega)$ est séparable, mais n'est pas réflexif de dual $L^\infty(\Omega)$. On a alors le résultat suivant :

   Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$, alors

$$\exists (u_{n_k})_k, \exists u \in L^\infty(\Omega) \text{ telle que } \forall \varphi \in L^1(\Omega), \int_\Omega u_{n_k} \varphi \, \mathrm{dx} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{dx}.$$

3) $L^\infty(\Omega)$ n'est ni séparable, ni réflexif de dual $(L^\infty(\Omega))'$ et contient strictement $L^1(\Omega)$. On peut rien dire sur la convergence d'une suite bornée de $L^1(\Omega)$.

4) $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < +\infty$.
où $\mathscr{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.

5) Inégalité de Young :
Soient $(x_i)_{i=1,n} \geq 0$ et $(p_i)_{i=1,n} \geq 0$ avec

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1,$$

alors

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \frac{x_1^{p_1}}{p_1} + \frac{x_2^{p_2}}{p_2} + \cdots + \frac{x_n^{p_n}}{p_n}.$$

En particulier, on a pour $x \geq 0,\ y \geq 0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{p}} + \dfrac{1}{\mathrm{q}} = 1$

$$xy \leq \frac{1}{p}\varepsilon^p x^p + \frac{1}{q}\frac{y^q}{\varepsilon^q}, \forall \varepsilon > 0.$$

6) Inégalité de Hölder :
Soit $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, pour $i = 1, n$, alors

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_n\|_{L^{p_n}(\Omega)},$$

avec

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}.$$

1.2.2 Convergence dans $L^p(\Omega)$

Théorème 1.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue [5]) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que*

i) $f_n \to f$ p.p. sur Ω,

ii) Il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$.

Théorème 1.4 ([2]) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions et $f \in L^p$ avec $p > 1$. On suppose que*

i) $f_n \to f$ p.p. sur Ω,

ii) f_n *est bornée dans* $L^p(\Omega)$.

Alors f_n *converge vers* f *fortement dans* $L^q(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq q < p$ *et faiblement dans* $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.5 (Vitalli) *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $(h_n)_n$ *une suite de fonctions telle que*

➢ $(h_n)_n$ *est équi-intégrable, i.e,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall E \subset \Omega;\ |E| < \delta, alors \int_E |h_n| dx \leq \varepsilon,\quad \forall n.$$

➢ $h_n \to h$ *p.p dans* Ω.

Alors $h_n \to h$ *fort dans* $L^1(\Omega)$.

Lemme 1.6 (Lemme de Fatou [5]) *Soit* Ω *un ouvert,* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions mesurables, à valeurs dans* $[0, +\infty]$, *on a*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Théorème 1.7 (Fubini [5]) *Soit* Ω *et* Ω' *deux ouverts de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $f : \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}$. *Alors*

- *La fonction* $x \mapsto \int_{\Omega'} f(x,y)\ \mathrm{dy}$ *est définie pour presque tout* x *et est dans* $L^1(\Omega)$.
- *La fonction* $y \mapsto \int_{\Omega} f(x,y)\ \mathrm{dx}$ *est définie pour presque tout* y *et est dans* $L^1(\Omega')$.

Alors

$$\int \int_{\Omega\times\Omega'} f(x,y)\mathrm{dx}\ \mathrm{dy} = \int_\Omega \mathrm{dx} \int_{\Omega'} f(x,y)\mathrm{dy} = \int_{\Omega'} \mathrm{dy} \int_\Omega f(x,y)\mathrm{dx}.$$

1.3 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, m un entier naturel et p un réel de $[1, +\infty[$.
On définit les espaces de Sobolev par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\},$$

muni de la norme naturelle

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\right),\ \text{si } p < \infty,$$

et pour $p=\infty$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \sup \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Pour $p=2$, on note $W^{1,2}(\Omega)= H^1(\Omega)$ i.e. l'espace des classes de fonctions de carré intégrable dont la dérivée partielle est aussi de carré intégrable. L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^1(\Omega)}= (u,v)_{L^2(\Omega)}+(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

est un espace de Hilbert.

On note

$$W_0^{1,p}(\Omega)= \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}, \text{ pour } 1 \leq p < \infty.$$

Le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est noté par $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Théorème 1.8 (Inégalité de Poincaré [4]) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1,\infty[$. Il existe une constante $C>0$ indépendante de u telle que :*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Par conséquent, l'application $u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle.

Injections de Sobolev

Le théorème suivant résume les injections de Sobolev. On distingue trois cas différents, selon que la puissance est inférieure strictement, égale, ou supérieure strictement à la dimension de l'espace N.

Théorème 1.9 (Injections de Sobolev [5]) *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien.*

- *Si $p < N$ et $p' \in [1, p^\star]$, on a l'injection continue $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$ avec l'injection compacte si $p' < p^\star$, où $\dfrac{1}{p^\star} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$;*
- *Si $p = N$ et $p' \in [1, +\infty[$, on a l'injection compacte $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$;*
- *Si $p > N$, on a l'injection continue et compacte $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

En particulier $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ avec injection compacte pour tout p.

1.4 Fonctions à valeurs vectorielles

Dans la théorie des équations d'évolution, il y a lieu de faire jouer en général des rôles distincts à la variable temporelle et aux variables d'espace, et donc on rencontre en particulier des espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On donnera des propriétés essentielles dont les démonstrations sont présentes dans [4, 6, 8, 12, 16].

1.4.1 Intégration à valeurs vectorielles

Définition 1.10 *Soit E un espace de Banach, T un réel strictement positif et μ une mesure complète sur $]0,T[$. On dit qu'une fonction f de $]0,T[$ dans E est étagée si*

$$\exists\, k \in \mathbb{N}, \forall i = 1,2,\cdots,k \quad \exists\, x_i \in E, \exists\, A_i \in \mathscr{B}([0,T]),\ \text{telle que } f = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{A_i}$$

où $\mathbf{1}_{A_i}$ est l'indicatrice de l'ensemble A_i.
On dit qu'une fonction f de $]0,T[$ dans E est :

i) mesurable si pour tout borélien $\mathscr{B}$ de E, $f^{-1}(B)$ est un borélien de $]0,T[$.

ii) fortement mesurable si f est la limite p.p d'une suite de fonctions étagées.

iii) faiblement mesurable si pour tout $x^\star$ de E' (le dual topologique de E), la fonction $\langle x^\star, f\rangle$ est mesurable.

Le théorème suivant affirme que si E est un espace de Banach séparable, les trois notions définies ci-dessus coïncident et on parle de mesurabilité. Par contre, si E n'est pas séparable, il est nécessaire d'avoir des informations sur la séparabilité de $f(]0,T[)$.

Théorème 1.11 (B.-J. Pettis) *Soit (X,M,μ) un espace mesuré et E un espace de Banach. La fonction $f : X \to E$ est mesurable si et seulement si f est à valeurs séparables et f est faiblement mesurable. En particulier, si X est un espace de Banach séparable, alors f est fortement mesurable si et seulement si elle est faiblement mesurable.*

1.4.2 Espaces $L^p(0,T;E)$

Définition 1.12 *Soit E un espace de Banach et T un réel strictement positif. Pour $p \in [1,+\infty[$, on note $L^p(0,T;E)$ l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables définies sur $]0,T[$ et à valeurs*

dans E, telle que $t \to \|f(t)\|_E^p$ *est intégrable sur* $]0,T[$. *C'est un espace de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{L^p(0,T;E)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_E^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

De même façon, pour $p = +\infty$, *on définit un espace de Banach* $L^\infty(0,T;E)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;E)} = \sup_{t \in]0,T[} ess \|u(t)\|_E$$

Théorème 1.13 (Convergence dominée) *Soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* (f_n) *une suite de fonctions mesurables de* $]0,T[$ *dans E. Si la suite* (f_n) *vérifie*

i) $f_n \to f$ *presque partout sur* $]0,T[$,

ii) Il existe une fonction $g \in L^p(]0,T[)$ *tel que pour tout* $n, \|f\|_E \leq g$ *presque partout sur* $]0,T[$.

Alors $f_n \to f$ *dans* $L^p(0,T;E)$.

Proposition 1.14 *Si* $p < +\infty$, *l'ensemble des fonctions étagées est dense dans* $L^p(0,T;E)$.

Proposition 1.15 *Si* $p < +\infty$, *l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans E est dense dans* $L^p(0,T;E)$.

Proposition 1.16 *Pour* $p \in [1,\infty[$, *on a les résultats suivants :*

i) Si E est séparable, alors $L^p(0,T;E)$ *est aussi séparable.*

ii) Si E est réflexif (respectivement de Hilbert), alors $L^p(0,T;E)$ *est aussi réflexif (respectivement de Hilbert).*

On a alors $L^2(0,T;E)$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition 1.17 (Dualité) *Soient p et* p' *deux exposants conjugués avec* $p \in [1,+\infty[$.

i) Le dual de $L^p(0,T;E)$ *s'identifie à* $L^{p'}(0,T;E')$.

ii) $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ *est naturellement identifiable à* $L^p(Q)$.

Lemme 1.18 (Condition de Continuité) *Soit E un espace de Banach et F un espace de Hilbert tels que* $E \subset F$, *avec injection continue, et E dense dans F. On identifie F avec* F' *(de sorte que*

$E \subset F = F' \subset E'$). Soit $u \in L^2(0,T;E)$, on suppose que $\partial_t u \in L^2(0,T;E')$. Alors $u \in C([0,T],F)$ et, pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ on a

$$\|u(t_1)\|_F^2 - \|u(t_2)\|_F^2 = 2\int_{t_2}^{t_1} \langle \partial_t u, u\rangle_{E',E} \, \mathrm{dt}. \tag{1.1}$$

Lemme 1.19 *Soit $u \in L^1_{loc}(]0,T[,E)$, on suppose que $\int_0^T u(t)\varphi(t)\mathrm{dt} = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$. Alors $u = 0$ p.p.*

Lemme 1.20 *Soient E un espace de Banach réflexif et H un espace de Hilbert tels que E s'injecte continûment et dense dans H. On se donne $f \in L^p(0,T;E)$ telle que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}(0,T;E')$ où E' est le dual de E et p' le nombre conjugué de p. Alors f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $]0,T[$, continue de $]0,T[$ dans H.*

1.4.3 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

Soit E un espace de Banach et T un réel strictement positif.

Définition 1.21 *On note $\mathscr{D}'(0,T;E)$ l'espace des applications linéaires et continues de $\mathscr{D}(]0,T[)$ à valeurs dans E, i.e. pour f de $\mathscr{D}'(0,T;E)$,*

i) la fonction $\varphi \in \mathscr{D}(]0,T[) \mapsto \langle f, \varphi\rangle$ est linéaire,

ii) pour tout φ_n de $\mathscr{D}(]0,T[)$ tel que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(]0,T[)$, alors $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ dans E.

La convergence des suites dans $\mathscr{D}'(0,T;E)$ est définie par :

$$f_n \to f \text{ dans } \mathscr{D}'(0,T;E) \Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(0,T;E), \quad \langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$$

La dérivée au sens de $\mathscr{D}'(0,T;E)$ est définie par : si $f \in \mathscr{D}'(0,T;E)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ opère de $\mathscr{D}(0,T)$ dans E par la formule de transposition :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(0,T;E), \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle \text{ égalité dans } E.$$

On montre alors que $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in \mathscr{D}'(0,T;E)$.

1.4.4 Espace $W^{1,p}(0,T;E)$

Définition 1.22 *Soit E un espace de Banach et T un réel strictement positif.*
Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace

$$W^{1,p}(0,T;E) = \{u \in L^p(0,T;E), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;E)\}$$

que l'on munit de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;E)} = \|u\|_{L^p(0,T;E)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^p(0,T;E)}$$

ou de la norme équivalente, si p est fini, définie par :

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;E)} = \left(\|u\|^p_{L^p(0,T;E)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^p_{L^p(0,T;E)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 1.23 *Pour $p \in [1,+\infty]$, l'espace $W^{1,p}(0,T;E)$ est de Banach.*

Proposition 1.24 *Si E est séparable et $p < +\infty$, alors l'espace $W^{1,p}(0,T;E)$ est séparable.*

Proposition 1.25 *Si $1 < p < +\infty$ et E est séparable réflexif alors l'espace $W^{1,p}(0,T;E)$ est réflexif.*

Proposition 1.26 *Pour $p = 2$, on note $H^1(0,T;E) = W^{1,2}(0,T;E)$, on a alors $H^1(0,T;E)$ est de Hilbert.*

Dans l'étude des équations d'évolution non linéaires, le lemme d'Aubin-Lions est un outil puissant permettant de manipuler les termes non linéaires lorsqu'il s'agit d'une méthode d'approximation

Théorème 1.27 (Aubin-Lions) *Soient E_0, E et E_1 trois espaces de Banach avec $E_0 \subset E \subset E_1$. On suppose que l'injection $E_0 \hookrightarrow E$ est compacte et que l'injection $E \hookrightarrow E_0$ est continue. Pour $1 \leq p,q \leq \infty$, soit $W = \{u \in L^p(0,T;E_0) : \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0,T;E_1)\}$.*

- ➢ *Si $p < \infty$, Alors l'injection de W dans $L^p(0,T;E)$ est compacte.*
- ➢ *Si $p = \infty$ et $q > 1$, Alors l'injection de W dans $C([0,T];E)$ est compacte.*

Chapitre 2

Équation de la chaleur

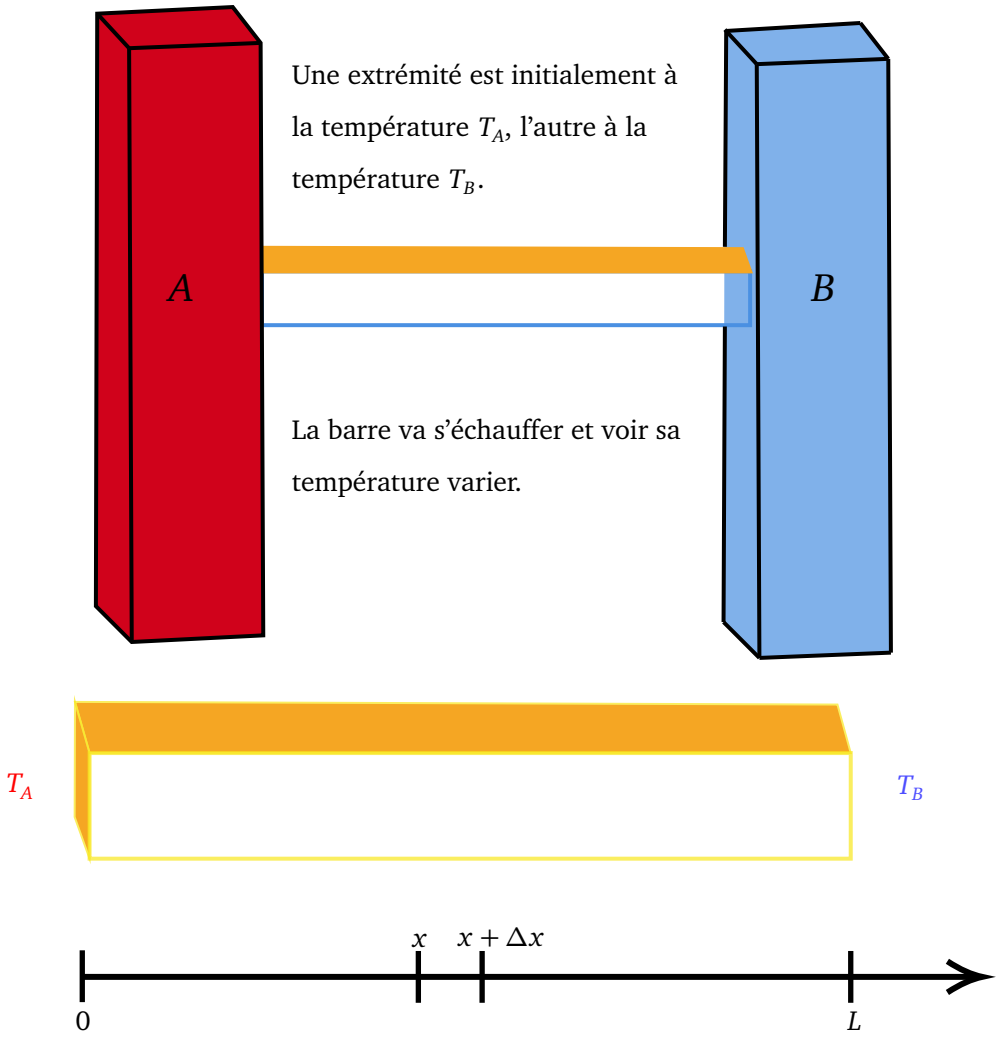
L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Joseph Fourier modélisent initialement en 1807 les fondements de la thermodynamique sur l'évolution de la température avec séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, u_0 une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega\times]0,T[$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation de la chaleur

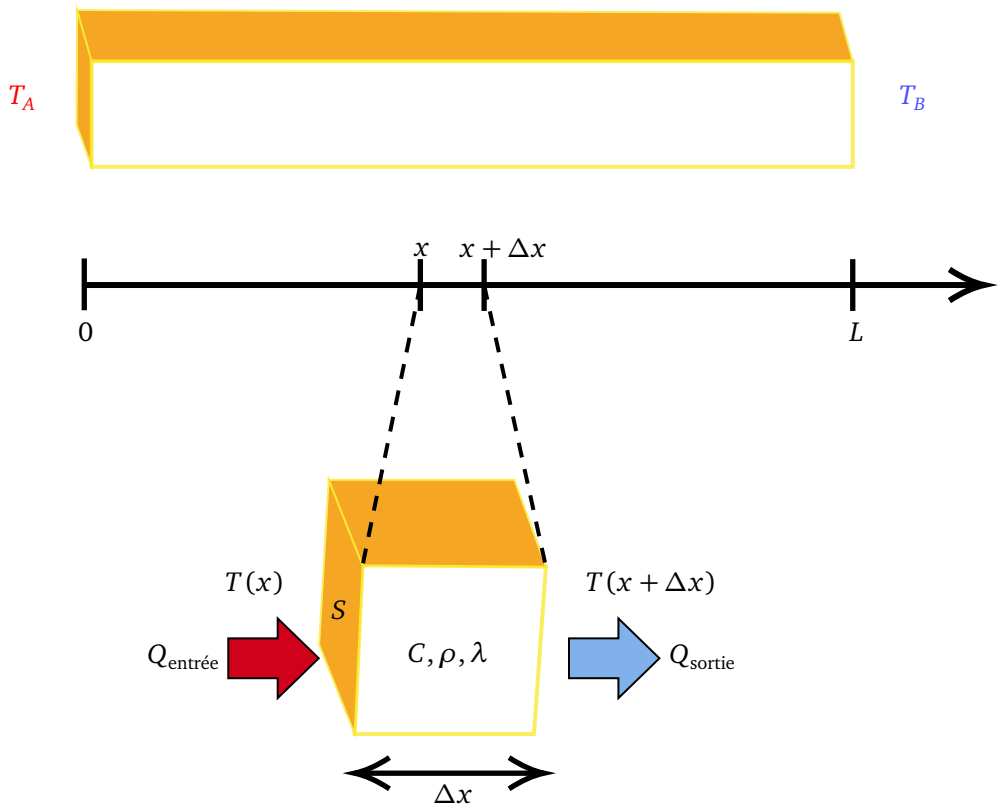
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{sur } \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

2.1 Un peu de modélisation

- On considère une barre de longueur "L".
- Nous allons à la placier cette barre entre deux corps telle que le corps A est chaud et sa température sera T_A, et l'autre corps B est froid et sa température sera T_B.



- Comment évolue la température T en fonction du temps t, et de la position x ?
- Nous allons raisonner sur une petite tranche de la barre d'épaisseur Δx, de section S et située à la position x.
- Une extrémité est initialement à la température $T(x)$, l'autre à la température $T(x+\Delta x)$.
- Le matériau est caractérisé par sa masse volumique ρ, sa conductivité thermique λ et son coefficient de chaleur massique C.



D'après la loi de Fourier :

$$\frac{dQ_{\text{entrée}}}{dt} = -\lambda\, S\, \mathrm{dt} \frac{dT}{dx}\Big|_x \quad \text{(telle que : } \frac{dT}{dx}\Big|_x \text{ est le gradient de température en x)}$$

$$\frac{dQ_{sortie}}{dt} = -\lambda\, S\, \mathrm{dt} \frac{dT}{dx}\Big|_{x+\Delta x} \quad \text{(telle que : } \frac{dT}{dx}\Big|_{x+\Delta x} \text{ est le gradient de température en } x+\Delta x\text{).}$$

► La différence entre la chaleur entrante et sortante est pour un temps dt :

$$\begin{aligned} dQ &= dQ_{\text{entrée}} - dQ_{sortie} \\ &= -\lambda\, S\, \mathrm{dt} \frac{dT}{dx}\Big|_x - \left(-\lambda\, S\, \mathrm{dt} \frac{dT}{dx}\Big|_{x+\Delta x}\right) \\ &= \lambda\, S\, \mathrm{dt} \left[\frac{dT}{dx}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{dT}{dx}\Big|_x\right] \end{aligned}$$

On peut montrer que :

$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x+\Delta x} \simeq \frac{dT}{dx}\Big|_x + \Delta x \frac{d^2T}{dx^2}\Big|_x ; \quad \text{(développement limité à l'ordre 1)}$$

Alors

$$\begin{aligned} dQ &= \lambda\, S\, \mathrm{dt} \left[\frac{dT}{dx}\Big|_x + \Delta x \frac{d^2T}{dx^2}\Big|_x - \frac{dT}{dx}\Big|_x\right] \\ &\simeq \lambda\, S\, \mathrm{dt}\, \Delta x\, \frac{d^2T}{dx^2} \end{aligned}$$

La différence chaleur sur Δx :

$$dQ \simeq \lambda\ S\ \text{dt}\ \Delta x \frac{d^2T}{dx^2}$$

Cette chaleur sert à chauffer un petit morceau de masse dm :

$$dQ = C\ \text{dT}\ \text{dm}$$

La masse dm considérée est :

$$\text{dm} = \rho\ \text{dV} = \rho\ S\ \Delta x$$

Alors

$$dQ = C\ \rho\ S\ \Delta x\ \text{dT}$$

D'où

$$C\ \rho\ S\ \Delta x\ \text{dT} = \lambda\ S\ \text{dt}\ \Delta x \frac{d^2T}{dx^2}$$

$$C\ \rho\ \text{dT} = \lambda\ \text{dt}\ \frac{d^2T}{dx^2}$$

$$\frac{\text{dT}}{dt} = \frac{\lambda}{C\ \rho} \frac{d^2T}{dx^2}$$

Donc l'équation de la chaleur est :

$$\frac{\text{dT}}{dt} = D \frac{d^2T}{dx^2} \quad \text{avec } D = \frac{\lambda}{C\ \rho}$$

2.2 Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$: solutions classiques

Soit $N \geq 1$ et $u_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On s'intéresse ici à chercher des solutions classiques au problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = 0, x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ∂_tu désigne la dérivée partielle de u par rapport au temps t, et Δu désigne le laplacien de u :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Une solution classique de (2.1) est une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifie (2.1) au sens de la dérivation usuelle. On commence par un petit calcul formel (le terme "formel" signifient souvent en mathématiques "non nécessairement justifié"). On suppose qu'on peut utiliser pour la condition initiale et pour la solution la transformée de Fourier (en espace). On retient comme formule pour la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^N$ la formule suivante :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Si u est solution de (2.1), on obtient ainsi (si on est autorisé à utiliser la transformée de Fourier)

$$\widehat{\partial}_t u(\xi,t) + |\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t) = 0, \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0, \text{et } \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi), \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui donne

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^2 t}\widehat{u}_0(\xi), \text{pour} \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t \geq 0.$$

En choisissant $\widehat{g(t)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$, on a donc $\widehat{u}(.,t) = \widehat{g(t)}\widehat{u}_0$ pour tout $t \geq 0$ et donc (en utilisant le fait que la transformée de Fourier transforme la convolution en produit),

$$\widehat{u}(.,t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \widehat{g(t) \star u_0} \text{pour } t \geq 0.$$

ou encore

$$u(.,t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} g(t) \star u_0 \text{ pour } t \geq 0.$$

Il reste à calculer $g(t)$. Comme $\widehat{g(t)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour $t > 0$, le théorème d'inversion de Fourier nous donne $g(t) = \widehat{\widehat{g(t)}}(-\cdot)$, c'est-à-dire

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix\cdot\xi} e^{-|\xi|^2 t} d\xi \text{pour } x \in \mathbb{R}^N \text{et } t > 0.$$

Le changement de variable $\xi = \eta/\sqrt{2t}$ donne alors

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix\cdot\frac{\eta}{\sqrt{2t}}} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} d\eta \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.$$

Finalement, on obtient

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0, \quad \left(\text{car} \int e^{ix\cdot\frac{\eta}{\sqrt{2t}}} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} d\eta = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \exp^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right).$$

Ce qui donne

$$u(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0(y)\,\mathrm{dy}\ \text{pour}\ x\in\mathbb{R}^N\text{et}\ t>0. \tag{2.2}$$

Il est maintenant possible de donner des conditions sur u_0 pour lesquelles (2.2) donne une solution classique de (2.1).

2.3 Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$: solution faible

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème suivant :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T\in\mathbb{R}_+^\star$, f une fonction de $\Omega\times]0,T[$ dans $\mathbb{R}$ et u_0 une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

On cherche u tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta_p u=f & \text{sur } \Omega\times]0,T[,\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[,\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On va donner pour ce problème linéaire un résultat d'existence par la méthode de Faedo-Galerkin et d'unicité de solution faible.

Théorème 2.1 (Faedo-Galerkin [10]) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T>0$ et $u_0\in L^2(\Omega)$, on identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Alors, il existe un et un seul u tel que*

$$\begin{cases} u\in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))\ \text{et}\ \forall v\in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)):\\ \displaystyle\int_0^T\langle\frac{\partial u}{\partial t}(s),v(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,\mathrm{ds}+\int_0^T\int_\Omega\nabla u(s)\cdot\nabla v(s)\mathrm{dx}\,\mathrm{ds}=\int_0^T\langle f(s),v(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1}\mathrm{ds},\\ u(0)=u_0\ p.p. \end{cases} \tag{2.3}$$

On rappelle que $u(s)$ (resp. $v(s)$) désigne la fonction $x\mapsto u(x,t)$ (resp. $v(x,t)$). On a de plus les estimations suivantes sur u et $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}\le\|u_0\|_2+\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))},\\ &\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\le\|u_0\|_2+2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))},\\ &\|u(t)\|_2^2\le\|u_0\|_2^2+\|\partial_t u\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}+\|u\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))},\text{pour tout } t\in[0,T[. \end{aligned}$$

Démonstration: On rappelle que l'on a identifié $L^2(\Omega)$ avec $(L^2(\Omega))'$, de sorte que $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset H^{-1}(\Omega)$. Comme on cherche u telle que $u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on a nécessairement $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$, (d'après le lemme (1.18)). La fonction u est donc définie en tout $t \in [0,T]$, ce qui permet de donner un sens à la condition $u(0) = u_0$ p.p. dans Ω.

L'idée, pour démontrer ce théorème, est de résoudre d'abord le problème dans des espaces de dimension finie ; on pourrait le faire par exemple avec des espaces d'éléments finis, mais c'est plus simple en utilisant une base hilbertienne formée de fonctions propres du Laplacien. D'après le **Théorème 8.5**(voir S. Salsa [14], page 451-452), il existe une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ t.q. e_n est (pour tout n) une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Étape 1 : Approximation.

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega e_n v \, dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, on a, pour tout $w \in L^2(\Omega), w = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (w|e_n)_2 e_n$ au sens de la convergence $L^2(\Omega)$ (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n (w|e_i)e_i \to w$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$).

On montre maintenant que la famille $(\lambda_n^{-1/2} e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, la norme de u dans $H_0^1(\Omega)$ est définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ et donc le produit scalaire de u et v dans $H_0^1(\Omega)$ est donnée par

$$(u|v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

On remarque tout d'abord que pour tout $n, m \geq 1$, on a

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m \, dx = \lambda_n \int_\Omega e_n e_m \, dx = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit que $(e_n|e_m)_{H_0^1(\Omega)}=0$ si $n\neq m$ et

$$\left\|\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}=\int_\Omega \frac{\nabla e_n\cdot\nabla e_n}{\lambda_n}\mathrm{dx}=1.$$

Puis, on remarque que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, noté $vect\,\{e_n, n\in\mathbb{N}^\star\}$, est dense dans $H_0^1(\Omega)$. En effet soit $v\in H_0^1(\Omega)$ tel que $(v|e_n)_{H_0^1(\Omega)}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$. Ce qui donne, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$

$$0=(v|e_n)_{H_0^1(\Omega)}=\int_\Omega \nabla e_n\cdot\nabla v\ \mathrm{dx}=\lambda_n\int_\Omega e_n v\ \mathrm{dx}.$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (et $\lambda_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$), on en déduit que $v=0$ p.p. Ceci montre que l'orthogonal dans H_0^1 de $vect\,\{e_n, n\in\mathbb{N}^\star\}$ est réduit à $\{0\}$ et donc que $vect\,\{e_n, n\in\mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Finalement, on obtient ainsi que la famille $(\lambda_n^{-1/2}e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

Solutions approchées :

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On pose $E_n=vect\left\{e_p, p=1,\cdots n\right\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t)=\sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$ avec $\alpha_i\in C([0,t],\mathbb{R})$. En supposant que les α_i sont dérivables pour tout t (ce qui n'est pas vrai, en général), on a donc

$$u_n'(t)=\sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)e_i,$$

de sorte que, pour tout $\varphi\in H_0^1(\Omega)$ et tout $t\in]0,T[$, on a (compte tenu de l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$),

$$\langle u_n'(t),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}=\sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)\int_\Omega e_i\varphi\ \mathrm{dx}.$$

D'autre part, pour tout $t\in[0,T]$ on a

$$-\Delta u_n(t)=-\sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\Delta e_i=\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i(t)e_i \text{ dans } \mathscr{D}^\star(\Omega) \text{ et dans } H^{-1}(\Omega),$$

c'est-à-dire, pour tout $\varphi\in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle -\Delta u_n(t),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}=\int_\Omega \nabla u_n(t)\cdot\nabla\varphi\ \mathrm{dx}=\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i(t)\int_\Omega e_i\varphi\ \mathrm{dx}.$$

Enfin, comme $f\in L^2(]0,T[,H^{-1})$, on a pour tout $\varphi\in H_0^1(\Omega)$, $\langle f(.),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\in L^1_{\mathbb{R}}(]0,T[)$. La quantité $\langle f(t),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ est donc définie pour presque tout t et on obtient finalement,

pour presque tout t et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u_n'(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i'(t) + \lambda_i \alpha_i(t)) \int_\Omega e_i \varphi \, dx - \langle f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Pour obtenir u_n, une idée naturelle est de choisir les fonctions α_i pour que

$$\langle u_n'(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0,$$

pour tout $\varphi \in E_n$. En posant $f_i(t) = \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$, ceci est équivalent à demander pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\alpha_i'(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = f_i(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0 | e_i)_2$, ceci suggère donc de prendre

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s) \, \mathrm{ds}. \tag{2.4}$$

Les fonctions α_i ainsi définies appartiennent à $C(]0,T[, \mathbb{R})$ et on a donc $u_n \in C(]0,T[, E_n) \subset C(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ avec $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$.

Précision sur la dérivée en temps :

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et u_n la solution approchée donnée par l'étape précédente. Les fonctions α_i ne sont pas nécessairement dérivables. On va préciser ici ce que vaut la dérivée (par transposition) de u_n. On va noter cette dérivée $(u_n)_t$. Par définition de la dérivation par transposition, $(u_n)_t$ est un élément de $\mathscr{D}_E^\star$ avec $E = H_0^1(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[, \mathbb{R})$ on a

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathscr{D}_E^\star, \mathscr{D}} = -\int_0^T u_n(t) \varphi'(t) \, \mathrm{dt} \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, on a donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathscr{D}_E^\star, \mathscr{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \alpha_i(t) e_i \varphi'(t) \, \mathrm{dt} = -\sum_{i=1}^n \left(\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) \, \mathrm{dt} \right) e_i.$$

On utilise maintenant (2.4),

$$\int_0^T \alpha_i(t) \varphi' \, \mathrm{dt} = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t} \varphi'(t) \mathrm{dt} = \int_0^T \alpha_i^{(0)} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \varphi(t) \, \mathrm{dt}.$$

$$S_i = \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s) \mathrm{ds} \right) \varphi'(t) \, \mathrm{dt}.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
S_i &= \int_0^T \left(\int_0^T 1_{[0,t]}(s) e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s) \mathrm{d}s \right) \varphi'(t) \ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \left(\int_0^T 1_{[s,T]}(t) e^{-\lambda_i (t-s)} \varphi'(t) \mathrm{d}t \right) f_i(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^T \left(\int_s^T e^{-\lambda_i (t-s)} \varphi'(t) \ \mathrm{d}t \right) f_i(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^T \left(\int_s^T \lambda_i e^{-\lambda_i (t-s)} \varphi(t) \ \mathrm{d}t \right) f_i(s) \mathrm{d}s - \int_0^T \varphi(s) f_i(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^T \left(\int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s) \mathrm{d}s \right) \varphi(t) \mathrm{d}t - \int_0^T f_i(t) \varphi(t) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On en déduit que $T_i + S_i = \displaystyle\int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) \varphi(t) \mathrm{d}t - \int_0^T f_i(t) \varphi(t) \mathrm{d}t$, et donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) e_i \varphi(t) \ \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t) e_i \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[, \mathbb{R})$, on a finalement

$$(u_n)_t = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0,T[, E_n).$$

Ce qui peut aussi s'écrire, avec $f^{(n)} = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

$$(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0,T[, E_n) \subset L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)).$$

Soit maintenant $v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$. Comme $(u_n)_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on a $\langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \in L^1(]0,T[)$ et

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v \ dx \ dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega f_i e_i v \ dx \ dt.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v \ dx \ dt & \\
= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \left(\int_\Omega e_i v \ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t & \\
= \int_0^T \langle f(t), \sum_{i=1}^n \big(v | e_i \big)_2 e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \ \mathrm{d}t. &
\end{aligned}$$

On note P_n l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v E_n. L'opérateur P_n peut donc être vu comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $E_n \subset H_0^1(\Omega)$). On note alors P_n^t l'opérateur transposé qui est donc un opérateur de $H^{-1}(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))'$ qui est lui même identifié à $L^2(\Omega)$ et est aussi un s.e.v de $H^{-1}(\Omega)$.
On obtient alors (pour tout $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)))$

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle (u_n)_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t &= \int_0^T \langle f, P_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \langle P_n^t f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.5}$$

On a aussi $u_n \in C([0,T],H_0^1(\Omega))$ et $u_n(0) = P_n u_0$.

Étape 2 : Estimations à priori.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $u_n \in C([0,T],H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$.
D'après le lemme (1.18), on a donc

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 = \int_0^T \langle (u_n)_t, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}t.$$

En prenant $v = u_n$ dans (2.5), on en déduit

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, P_n u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}t,$$

et donc

$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} = \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, P_n u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}t.$$

On en déduit, en remarquant que $P_n u_n = u_n$,

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} &\leq \tfrac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}t \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \tfrac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} + \tfrac{1}{2}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

On a donc

$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2^2 + \|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Ce qui donne aussi

$$\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Comme $(u_n)_t = \Delta u_n + P_n^t f$ (égalité (2.5)) et que $\|P_n w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, on obtient aussi une borne sur $(u_n)_t$:

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}$$

et donc

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bornée dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$.

Étape 3 : Passage à la limite. Grâce aux estimations obtenues à l'étape précédente, on peut supposer , après extraction éventuelle d'une sous suite, que , quand $n \to +\infty$,

$$u_n \to u \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)),$$
$$(u_n)_t \to w \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$$

et les estimations sur $u_n \; et \; (u_n)_t$ donnent aussi les estimations suivantes sur u et w :

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))},$$
$$\|w\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Nous allons montrer tout d'abord que $w = \partial_t u$ (puis nous montrerons que u est solution de $\partial_t u = \Delta u + f$ au sens demander par (2.3))

Par définition de $\partial_t u$, on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t)\varphi(t)\mathrm{dt} = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\mathrm{dt}.$$

Pour démontrer que $\partial_t u = w$, il suffit donc de montrer que l'on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\mathrm{dt} = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\mathrm{dt}. \tag{2.7}$$

On rappelle que le terme de gauche de l'égalité (2.7) est dans $H^{-1}(\Omega)$, alors que le terme de droite est dans $H_0^1(\Omega)$. Cette égalité utilise donc le fait que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, cette inclusion étant due au fait que nous avons identifié $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$.

Soit donc $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$, nous allons donc montrer (2.7) pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on considère l'application S de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$S(v) = \int_\Omega \left(-\int_0^T v(t)\varphi'(t)\mathrm{dt} \right) \psi(x)\mathrm{dx} \text{ pour } v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)).$$

L'application S est linéaire continue de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, on a donc $S(u_n)\to S(u)$ quand $n \to +\infty$. Or, pour $v = u_n$ et pour $v = u$, on a

$$S(v)=-\left(\int_0^T v(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t|\psi\right)_2=-\left\langle\int_0^T v(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc, quand $n \longrightarrow +\infty$,

$$-\left\langle\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}\longrightarrow-\left\langle\int_0^T u(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On utilise maintenant le fait que $-\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ (par définition de $(u_n)_t$). On a donc

$$\left\langle\int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}\longrightarrow-\left\langle\int_0^T u(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On considère maintenant l'application $\overline{S}$ de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\overline{S}(v)=\left\langle\int_0^T v(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}\text{ pour } v\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

L'application $\overline{S}$ est linéaire continue de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $(u_n)_t\to w$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a donc $\overline{S}((u_n)_t)\to\overline{S}(w)$ quand $n\to+\infty$, c'est-à-dire

$$\left\langle\int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}\longrightarrow\left\langle\int_0^T w(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On en déduit que pour tout $\psi\in H_0^1(\Omega)$, on a

$$-\left\langle\int_0^T u(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}=\left\langle\int_0^T w(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc bien montré que $-\int_0^T u(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_0^T w(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ pour tout $\varphi\in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\partial_t u = w$.

Nous savons donc que $u_n\to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $\partial_t u_n\to\partial_t u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Pour montrer que u est solution de $\partial_t u=\Delta u+f$ au sens demandé

par (2.3), il suffit maintenant de passer à la limite dans (2.5). Soit $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, selon (2.5),

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T (u_n|v)_{H_0^1} dt = \int_0^T \langle f, P_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Les deux termes de gauche de cette égalité passent à limite quand $n \to +\infty$ grâce aux convergences de u_n et $(u_n)_t$. Pour le terme de droite, on utilise l'étape préliminaire. On remarque que $P_n v(t) \to v(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour presque tout t et $\|P_n v(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour presque tout t. Cela permet de passer à la limite dans le terme de droite, Par le théorème de convergence dominée. On obtient ainsi

$$\int_0^T \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T (u|v)_{H_0^1} dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien le sens souhaité dans la formulation (2.3).

Condition initiale :

Comme $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u \in C(]0,T[,L^2(\Omega))$ (voir la section "rappel"1). Pour terminer la démonstration du fait que u est solution de (2.3), il reste donc seulement à montrer que $u(0) = u_0$ p.p. (c'est-à-dire $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$).

On sait que $u(t) \to u(0)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to 0$. On sait aussi que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} e_i \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Pour en déduire que $u(0) = u_0$, il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T],H^{-1}(\Omega))$. En effet, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T],H^{-1}(\Omega))$, il existe $w \in C([0,T],H^{-1}(\Omega))$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $u_n(t) \to w(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$ (et donc aussi dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$). En particulier, on a donc $w(0) = u_0$. Mais on sait déjà que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et donc aussi faiblement dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Par unicité de la limite, on a donc $u = w$ p.p. sur $]0,T[$ et donc $u(t) = w(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ car u et w sont continues sur $[0,T]$. On obtient ainsi, finalement, $u(0) = w(0) = u_0$.

Il reste à montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T],H^{-1}(\Omega))$. Par le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que

1) Pour tout $t \in [0,T]$, $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.
2) $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^\star$ (et pour tout $t \in [0,T]$).

Pour démontrer le deuxième item, on utilise le fait que $(u_n)_t \in L^1([0,T],H^{-1}(\Omega))$. on a pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 > t_2$, et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a (dans $H^{-1}(\Omega)$)

$$u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} (u_n)_t(s)ds,$$

et donc

$$\begin{aligned}\|u_n(t_1) - u_n(t_2)\|_{H^{-1}} &\leq \int_{t_2}^{t_1} \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}} ds \\ &\leq \left(\int_0^T \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t_1 - t_2} \\ &\leq \|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \sqrt{t_1 - t_2}.\end{aligned}$$

Comme la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on en déduit que

$$\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \to 0 \text{ quand } s \to t,$$

uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^\star$ (et pour tout $t \in [0,T]$).

Pour démontrer le premier item, on utilise encore le lemme (1.18). Comme $u_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a, pour tout $t,s \in [0,T]$,

$$\|u_n(t)\|_2^2 = \|u_n(s)\|_2^2 + 2\int_s^t \langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi)\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}\xi,$$

et donc

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\|_2^2 &= \|u_n(s)\|_2^2 + 2\int_s^t |\langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi)\rangle_{H^{-1},H_0^1}| \mathrm{d}\xi \\ &\leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}.\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité par rapport à s sur $[0,T]$, on en déduit

$$T\|u_n(t)\|_2^2 \leq \|u_n\|_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))}^2 + 2T\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}.$$

Ceci montre que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$ (et même uniformément par rapport à t). On en déduit que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et conclure, comme cela est indiqué au début de cette étape, que $u(0) = u_0$ p.p. Ceci termine la démonstration du fait que u est solution de (2.3) et donc la démonstration de la partie "existence" du théorème (2.1). Dans la démonstration, nous avons obtenu les estimations suivantes

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}, \\ &\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))},\end{aligned}$$

Enfin, comme $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, le lemme (1.18) donne, pour tout t,

$$\|u(t)\|_2^2 = \|u_0\|_2^2 + 2\int_0^t \langle \frac{\partial u}{\partial t} u(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{ds},$$

on en déduit que

$$\|u(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \|\partial_t u\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}, \text{ pour tout } t \in [0,T[.$$

Étape 4 : L'unicité de solution. On montre maintenant la partie "unicité" du théorème (2.1).

Soit u_1 et u_2 deux solution de (2.3).

On pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et en prenant, pour $t \in [0,T]$, $v = u1_{]0,T[}$ comme fonction test, on obtient

$$\int_0^t \langle \frac{\partial u}{\partial t}(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{ds} + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\cdot\nabla u(s)\ \mathrm{dx}\ \mathrm{ds} = 0.$$

Comme $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a, d'après le lemme (1.18),

$$\frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2\right) = \int_0^t \langle \frac{\partial u}{\partial t}(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{ds}.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\left(\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2\right) + 2\int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\cdot\nabla u(s)\ \mathrm{dx}\ \mathrm{ds} = 0.$$

Enfin, comme $u(0) = 0$, on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ p.p. dans Ω, pour tout $t \in [0,T]$.

Ce qui montre la partie "unicité" du théorème (2.1). ∎

Chapitre 3

Problèmes paraboliques non linéaires à données régulières

On s'intéresse à l'étude d'un problème d'évolution gouverné par le p-Laplacien qui est un opérateur aux dérivées partielles elliptique quasi-linéaire du second ordre, il correspond à une généralisation non linéaire de l'opérateur de Laplace.

Dans toute la suite, V désigne un espace de Banach réflexif, V' son dual topologique et A est un opérateur défini par :

$$\begin{aligned} A: \quad & V \to V' \\ & u \mapsto Au. \end{aligned}$$

On s'attache à montrer l'existence d'une solution faible pour le problème (3.33) en utilisant la méthode des opérateurs monotones qui a initiée par G. Minty en 1962. On rappelle tout d'abord quelques définitions.

Définition 3.1 ([12]) *Un opérateur $A : V \to V'$ est dit :*

- *monotone si :*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0, \forall u, v \in V. \tag{3.1}$$

- *strictement monotone si*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0, \forall u, v \in V \qquad u \neq v.$$

Définition 3.2 *Un opérateur $A : V \to V'$ est dit borné, s'il envoie tout borné de V dans un borné de V'. Autrement dit, pour tout $\rho > 0$, il existe $R > 0$, tel que*

$$\forall u \in V : \|u\|_V \leq \rho \Rightarrow \|Au\|_{V'} \leq R.$$

Définition 3.3 ([12]) *Un opérateur$A : V \to V'$ est dit hémicontinu si pour tout $u, v, w \in V$, la fonction*

$$\lambda \mapsto (A(u + \lambda v), w),$$

est continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 3.4 *L'opérateur défini sur $L^p(\Omega)$ par :*

$$u \mapsto |u|^{p-2}u,$$

est à valeurs dans $L^{p'}(\Omega)$, de plus il est continu.

3.1 Théorème d'existence

Soit V espace de Banach réflexif et séparable V' son dual et H espace de Hilbert H tels que $V \subset H$ avec injection continue et dense. Le théorème de Riesz permet d'identifier H à son dual. On peut alors identifier H à un sous-espace de V' de sorte qu'on a le schéma suivante :

$$V \subset H \subset V'. \tag{3.2}$$

Si on donne alors une fonction $u \in L^p(0, T; V)$ telle que $u' \in L^{p'}(0, T; V')$, l'application $u : [0, T] \to H$ définie par $u \to u(0)$ est continue et surjective. Le résultat principal de ce chapitre est :

Théorème 3.5 (Cas général [12]) *Soient V, H comme dans (3.2). Soit A un opérateur non linéaire de $V \to V'$ ayant les propriétés suivantes :*

i) A est hémicontinu de $V \to V'$,

ii) A est borné et $\|A(v)\|_* \leq c\|v\|^{p-1}$,

iii) A est monotone de $V \to V'$,

iv) $(A(v), v) \geq \alpha\|v\|^p$, $\alpha > 0$, $\forall v \in V$ $(1 < p < \infty)$.

Soient $f \in L^{p'}(0,T;V')$ et $u_0 \in H$. Alors il existe une seule fonction $u \in L^p(0,T;V)$ solution de

$$\begin{cases} u' + A(u) = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

3.1.1 Démonstration de l'existence

Étape 1 : Solution approchée.

On utilise la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à approcher l'espace V par une suite d'espaces de dimensions finies et donc approcher le problème par une suite de problèmes posés dans des espaces de dimensions finies. On pose :

$E_m = \langle w_1, \cdots, w_m \rangle$ l'espace engendré par les vecteurs $(w_1, \cdots, w_m)$, on introduit $u_m(t)$ « solution approchée » du problème de la façon suivante :

On cherche $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) \cdot w_j$, vérifiant :

$$\begin{cases} (u_m'(t), w_j) + (A(u_m(t)), w_j) = (f(t), w_j), \quad 1 \le j \le m, \\ u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, \cdots, w_m], u_{0m} \to u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.4}$$

où $(,)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Étape 2 : Estimation à priori.

En multipliant (3.4) par $u_j(t)$ en faisant la somme sur j et en intégrant de 0 à t, on obtient :

$$\int_0^t (u_m'(\sigma), u_m(\sigma)) \mathrm{d}\sigma + \int_0^t (A(u_m(\sigma)), u_m(\sigma)) \mathrm{d}\sigma = \int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma)) \mathrm{d}\sigma.$$

Cela définit $u_m(t)$ dans un intervalle $[0, t_m]$, tel que $t_m > 0$. Mais on note que

$$(A(u), u) \ge \alpha \|u\|^p, \alpha > 0, \tag{3.5}$$

et

$$(u_m'(\sigma), u_m(\sigma)) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} |u_m(\sigma)|^2.$$

Alors on déduit de (3.4) que

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \int_0^t (A(u_m(\sigma)), u_m(\sigma)) \mathrm{d}\sigma = \int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma)) \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}|u_{0m}|^2 \tag{3.6}$$

D'après l'inégalité de Poincaré (1.8). Donc l'opérateur A vérifie :

$$\langle A(u), u \rangle_{V' \times V} \ge \alpha \|u\|^p, \alpha > 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.7}$$

Et donc,

$$\int_0^t \langle A(u_m(\sigma)), u_m(\sigma)\rangle \mathrm{d}\sigma \geq \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \mathrm{d}\sigma \tag{3.8}$$

D'autre part, on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma))\mathrm{d}\sigma &\leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_* \cdot \|u_m(\sigma)\|\mathrm{d}\sigma \\ &\leq \left(\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^{p'}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Remarquons que d'après l'inégalité de Young (5)) :

$$ab = (\varepsilon a)\frac{b}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon^p}{p}a^p + \frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}b^{p'}, \forall \varepsilon > 0 \tag{3.9}$$

On aura alors

$$\int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma))\mathrm{d}\sigma \leq \frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^{p'}\mathrm{d}\sigma + \frac{\varepsilon^p}{p}\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \mathrm{d}\sigma.$$

En choisissant ε de sorte que $\frac{\varepsilon^p}{p} = \frac{\alpha}{2}$, on a alors :

$$\int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma))\mathrm{d}\sigma \leq c_1 \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^{p'}\mathrm{d}\sigma + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \mathrm{d}\sigma. \tag{3.10}$$

De plus, comme $u_{0m} \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ alors :

$$\exists\, c_2 > 0 : \|u_{m0}\|_{L^2(\Omega)} \leq\ c_2.\ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

De (3.8), (3.10) et (3.11) on déduit que :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \alpha\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p\mathrm{d}\sigma \leq c_1\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^{p'}\mathrm{d}\sigma + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p\mathrm{d}\sigma + c_2. \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p\mathrm{d}\sigma \leq c_1\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^{p'}\mathrm{d}\sigma + c_2 = c_3. \\ &\leq c_1\int_0^T \|f(\sigma)\|_*^{p'}\mathrm{d}\sigma + c_2 = c_4\end{aligned}$$

On déduit alors :

$$\sup_{t\in[0,T]} |u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_3 \text{ et } \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p\mathrm{d}\sigma \leq c_3 \qquad \forall t \in [0,T].$$

Et donc

$$\int_0^T \|u_m(\sigma)\|^p\mathrm{d}\sigma \leq c_3.$$

D'où, l'on déduit alors $t_m = T$ et que : La suite (u_m) demeure dans un borné de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^p(0,T;V)$. De plus, l'hypothèse ii) implique que la suite (Au_m) est bornée dans $L^{p'}(0,T;V')$.

Étape 3 : Passage à la limite.

Du fait que les espaces $L^2(\Omega)$, $L^p(0,T;V)$ et $L^{p'}(0,T;V')$ sont réflexifs et que l'espace $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ ne l'est pas, alors on peut extraire une sous-suite (u_μ) telle que :

$$u_\mu \to u \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile}, \tag{3.12}$$

$$u_\mu \to u \quad \text{dans} \quad L^p(0,T;V) \text{ faible}, \tag{3.13}$$

$$u_\mu(T) \to \xi \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \text{ faible}, \tag{3.14}$$

$$A(u_\mu) \to \chi \quad \text{dans} \quad L^{p'}(0,T;V') \text{ faible}. \tag{3.15}$$

Vérification des conditions initiales.

Introduisons $\tilde{u}_m(t), A(\tilde{u}_m(t)), \tilde{f}(t)$, prolongement à $\mathbb{R}$ de $u_m(t), A(u_m(t)), f(t)$ par 0 hors de $[0,T]$; alors (3.4) donne

$$\left(\frac{d}{dt}\tilde{u}_m(t), w_j\right) + (A\tilde{u}_m(t), w_j) = \left(\tilde{f}(t), w_j\right) + (u_{0m}, w_j)\delta(t-0) - (u_m(T), w_j)\delta(t-T). \tag{3.16}$$

On peut maintenant passer à la limite dans (3.16) avec $m = \mu$ et j fixé, d'où l'on déduit :

$$\left(\frac{d}{dt}\tilde{u}, w_j\right) + (\tilde{\chi}, w_j) = (\tilde{f}, w_j) + (u_0, w_j)\delta(t-0) - (\xi, w_j)\delta(t-T), \quad \forall j \tag{3.17}$$

Et par conséquent

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \tilde{\chi} = \tilde{f} + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \tag{3.18}$$

Restreignant (3.18) à $]0,T[$, on en déduit que

$$u' + \chi = f, \tag{3.19}$$

d'où $u' \in L^{p'}(0,T;V')$, donc d'après (3.2), $u(0)$ et $u(T)$ ont un sens.

Comparant à (3.18) on en déduit que $u(0) = u_0$ et $u(T) = \xi$.

On aura donc démontré l'existence d'une solution si l'on montre (c'est le point crucial de la démonstration) que

$$\chi = A(u). \tag{3.20}$$

De la propriété de monotonie de A, (3.1) résulte que

$$\chi_\mu = \int_0^T (A(u_\mu(t)) - A(v(t)), u_\mu(t) - v(t))\mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall v \in L^p(0,T;V). \tag{3.21}$$

Or de (3.6) résulte que

$$\int_0^T (A(u_\mu), u_\mu)\mathrm{d}t = \int_0^T (f, u_\mu)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(T)|^2$$

et donc

$$\chi_\mu = \int_0^T (f, u_\mu)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(T)|^2 - \int_0^T (A(u_\mu, v)\mathrm{d}t - \int_0^T (A(v), u_\mu - v)\mathrm{d}t \qquad (3.22)$$

D'après (3.12) - (3.15) on a :

$$\int_0^T (f, u_\mu)\mathrm{d}t \to \int_0^T (f, u)\mathrm{d}t, \qquad (3.23)$$

$$\int_0^T (A(u_\mu), v)\mathrm{d}t \to \int_0^T (\chi, v)\mathrm{d}t, \qquad (3.24)$$

$$\int_0^T (A(v), u_\mu)\mathrm{d}t \to \int_0^T (A(v), u)\mathrm{d}t, \qquad (3.25)$$

Comme $\liminf |u_\mu(T)|^2 \geq |u(T)|^2$, Alors, en prenant la $\limsup \chi_\mu$ on obtient :

$$\int_0^T (f, u)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \int_0^T (\chi, v)\mathrm{d}t - \int_0^T (A(v), u - v)\mathrm{d}t \geq 0. \qquad (3.26)$$

En multipliant (3.19) par u et par des intégrations par parties sur $[0, T]$, on obtient

$$\int_0^T (f, u)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \int_0^T (\chi, u)\mathrm{d}t. \qquad (3.27)$$

En passant à la limite ($\mu \to +\infty$) dans (3.22) et en utilisant (3.23) - (3.27), on obtient

$$\int_0^T (\chi - A(v), u - v)\mathrm{d}t \geq 0, \qquad \forall v \in L^p(0, T; V) \qquad (3.28)$$

En prenant $v = u - \lambda w, \lambda > 0$, avec $w \in L^p(0, T; V)$ quelconque ; alors (3.28) donne

$$\lambda \int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w)\mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall w \in L^p(0, T; V).$$

donc (comme $\lambda > 0$)

$$\int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w)\mathrm{d}t \geq 0; \qquad \forall w \in L^p(0, T; V). \qquad (3.29)$$

Faisant $\lambda \to 0$ dans (3.29) d'après l'hémicontinuité de A (définition (3.3)) et d'après le théorème de Lebesgue, on en déduit que

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\mathrm{d}t \geq 0 \qquad \forall w \in L^p(0, T; V). \qquad (3.30)$$

Prenant maintenant $v = u + \lambda w$ dans (3.28), on aboutit, avec les mêmes arguments, à :

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\mathrm{d}t \leq 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V). \tag{3.31}$$

De (3.30) et (3.31) on a :

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\mathrm{d}t = 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V), \tag{3.32}$$

donc $\chi - A(u) = 0$ dans $L^q(0,T;V')$ et on déduit alors que

$$\chi = A(u).$$

Ce qui prouve l'existence d'une solution u pour le problème (3.3).

3.1.2 L'unicité de la solution

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème. Alors $w = u_1 - u_2$ vérifie

$$w' + A(u_1) - A(u_2) = 0, w(0) = 0,$$

En multipliant par w on a :

$$(w', w) + (A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2) = 0$$

Et grâce à la monotonie :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq 0,$$

d'où $w = 0$, ce qui preuve l'unicité de la solution du problème (3.3).

3.2 Application au p-Laplacien

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $t \in]0,T[$ avec $T > 0$ et $p > 2$. On considère le problème parabolique nonlinéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = f & \text{sur } \Omega \times]0,T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.33}$$

où

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Théorème 3.6 *Soit* $f \in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$ *et* $u_0 \in L^2(\Omega)$. *Le problème* (3.33) *admet une solution unique* $u \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right) \cap \mathscr{C}\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.

Démonstration: On vérifie les conditions du théorème 3.5. Soit $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme de gradient. Comme $p > 2$, alors l'injection de Sobolev donne

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega).$$

On considère l'opérateur p-Laplacien : $A = -\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ défini pour $u,\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ par

$$\langle Au, \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \ \mathrm{dx}$$

➤ L'opérateur A est borné. On a d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi\rangle| &\leq \int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\right| \ \mathrm{dx} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p'}=\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

ce qui montre que, pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, Au est bien défini et que A est borné. De plus

$$\|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}.$$

➤ L'opérateur A est hémicontinu. En effet, soient $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\lambda \mapsto \langle \Delta_p(u+\lambda v), w\rangle,$$

est continue. Soit fixé $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $\{\lambda_n\}$ une suite de $\mathbb{R}$ convergeant vers λ. Posons

$$f_n = |\nabla u + \lambda_n v|^{p-2}\nabla(u+\lambda_n v)\cdot\nabla w.$$

Comme l'application $u \mapsto |u|^{p-2}u$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, on a

$$|\nabla u + \lambda_n v|^{p-2}\nabla(u+\lambda_n v)\cdot\nabla w \to |\nabla u + \lambda v|^{p-2}\nabla(u+\lambda v)\cdot\nabla w \text{ p.p. dans } \Omega,$$

et comme

$$\begin{aligned} |f_n| &= |\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-1}|\nabla w| \\ &\leq M\left(|\nabla u|^{p-1} + |\lambda_n|^{p-1}|\nabla v|^{p-1}\right)|\nabla w| \\ &\leq C\left(|\nabla u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}\right)|\nabla w|, \end{aligned}$$

puisque la suite $\{\lambda_n\}$ est bornée ; il résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \Delta_p(u+\lambda_n v), w\rangle = \langle \Delta_p(u+\lambda v), w\rangle,$$

d'où l'hémicontinuité de A.

➤ L'opérateur A est strictement monotone : Soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $u \neq v$, on a

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)(\nabla u - \nabla v)\,\mathrm{dx} \\ &\geq \frac{1}{2^p}\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \mathrm{dx} \\ &> 0. \end{aligned}$$

➤ Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle Av, v\rangle = \int_\Omega |\nabla v|^p \mathrm{dx} = \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

En vertu le théorème 3.5, le problème (3.33) admet une solution unique $u \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$. De plus, comme A applique $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, alors $A(u) \in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$.

Il résulte que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$$

Ceci implique en particulier que u est continue de $[0,T] \to W^{-1,p'}(\Omega)$. Puisque $u \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ et $p > 2$, alors $u \in \mathscr{C}\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ et donc la condition $u(x,0) = u_0$ a un sens. ■

Chapitre 4

Problèmes paraboliques non linéaires à données mesures

Dans ce chapitre on étudie les problèmes aux limites non linéaires du type paraboliques associés à des opérateurs monotones mais avec un second membre non régulier, c'est-à-dire, n'appartenant pas à un espace dual. Nous considérons des seconds membres dans l'espace des mesures de Radon bornées. Comme dans les chapitres précédents, nous sommes principalement intéressés par la question d'existence de solutions faibles.

Commençons par rappeler que nous travaillons sur un domaine Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, i.e. un ouvert connexe $\mathbb{R}^N$; sa frontière sera désignée par $\partial\Omega$ et son adhérence par $\overline{\Omega}$. Pour $T>0$, notons par Q le cylindre $\Omega\times(0,T)$, et par Γ la surface latérale $\partial\Omega\times(0,T)$.

Nous désignons par $\mathscr{M}(Q)$ l'espace des mesures de Radon bornées sur Q. Par définition,

$$\mathscr{M}(Q)=\left(\mathscr{C}_c(Q)\right)',$$

le dual topologique de l'espace des fonctions continues à support compact dans Q muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|u\|_{\mathscr{C}_c(Q)}=\max_{(x,t)\in Q}|u(x,t)|.$$

Pour préparer le train à notre étude, donnons la propriété générale des mesures suivante, qui nous permettra d'approcher un problème à donnée mesure par une suite de problèmes à données régulières.

Théorème 4.1 (Théorème de densité) *Soit $\mu \in \mathscr{M}(Q)$. Alors, il existe une suite $\{\mu_n\} \subset \mathscr{D}(Q)$ telle que*

- $\mu_n \to \mu$ *au sens vague des mesures, i.e* $\forall \varphi \in \mathscr{C}_c(Q)$, $\langle \mu_n, \varphi \rangle \to \langle \mu, \varphi \rangle$ *(dans* $\mathbb{R}$*),*
- $\|\mu_n\|_{L^1(Q)} \leq \|\mu\|_{\mathscr{M}(Q)}$.

Nous allons considérer le problème parabolique non linéaire de Cauchy-Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = \mu & \text{dans } Q, \\ u(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{4.1}$$

où μ appartient à $\mathscr{M}(Q)$.

Rappelons que le problème (4.1) a fait l'objet de plusieurs études [1, 3, 7] qui ont montré les résultats d'existence et de régularité pour des problèmes paraboliques gouvernés par un opérateur plus général.

Définition 4.2 *On dira qu'une fonction u dans $L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ est une solution faible de (4.1) si $|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in (L^1(Q))^N$ et*

$$-\int_Q u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{dx}\, \mathrm{dt} + \int_Q |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{dx}\, \mathrm{dt} = \int_Q \varphi \, \mathrm{d}\mu, \tag{4.2}$$

pour tout $\varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ qui est nul au voisinage de $\Gamma \cup (\Omega \times \{T\})$.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 4.3 *Soit $\mu \in \mathscr{M}(Q)$ et $p > 2$. Alors le problème (4.1) possède une solution u appartenant à $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout q telle que*

$$1 \leq q < p - \frac{N}{N+1}, \tag{4.3}$$

Démonstration: Elle se fait en trois étapes.

- **Première étape**. On approche le problème par une suite de problèmes à données régulières :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{dans } Q, \\ u_\varepsilon(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où μ_n est une suite de $\mathscr{D}(Q)$ telle que $f_\varepsilon \to \mu$ dans $\mathscr{D}'(Q)$ et $\|f_\varepsilon\|_{L^1(Q)} \leq \|\mu\|_{\mathscr{M}(Q)}$.

- **Deuxième étape**. On cherche des estimations uniformes des solutions approchées dans $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ avec $1 \leq q < p - \frac{N}{N+1}$.
- **Troisième étape**. On passe à la limite dans le problème approché sur n en utilisant la convergence presque partout du gradient dans Q.

4.1 Première étape : Approximation du problème

Soit $\mu \in \mathscr{M}(Q)$, d'après le théorème 4.1, il existe une suite $\{f_\varepsilon\}$ de $\mathscr{D}(Q)$ telle que

$$f_\varepsilon \to \mu \text{ dans } \mathscr{D}'(Q) \text{ et } \|f_\varepsilon\|_{L^1(Q)} \leq C = \|\mu\|_{\mathscr{M}(Q)}.$$

Comme $f_\varepsilon \in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$, d'après le théorème 3.6, il existe une fonction $u_\varepsilon \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right) \cap \mathscr{C}\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{dans } Q, \\ u_\varepsilon(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{4.4}$$

dont la formulation faible équivalente est :

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, \phi \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} dt + \int_Q |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \phi \, dt dx = \int_Q f_\varepsilon \phi \, dt dx, \tag{4.5}$$

pour tout $T > 0$, $\phi \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$.

4.2 Deuxième étape : Estimations uniformes

Proposition 4.4 *Il existe C_0, C_1 dépendant uniquement de $\|\mu\|_{M(Q)}$, $|\Omega|$ et T telles que la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ solution de (4.4) satisfait :*

$$\sup_{t \in (0,T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_0, \tag{4.6}$$

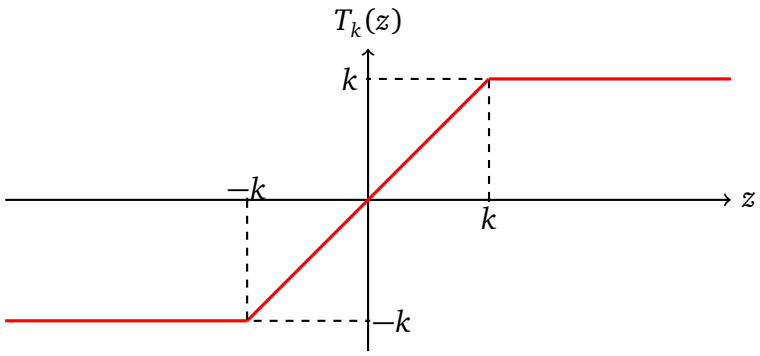
$$\int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq C_1, \tag{4.7}$$

avec $B_n = \{(t,x) \in Q;\ n \leq |u_\varepsilon(t,x)| \leq n+1\}$.

Démonstration: Pour obtenir des estimations indépendantes de ε, on est amené à prendre des fonctions tests dans $L^\infty(Q)\cap L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$

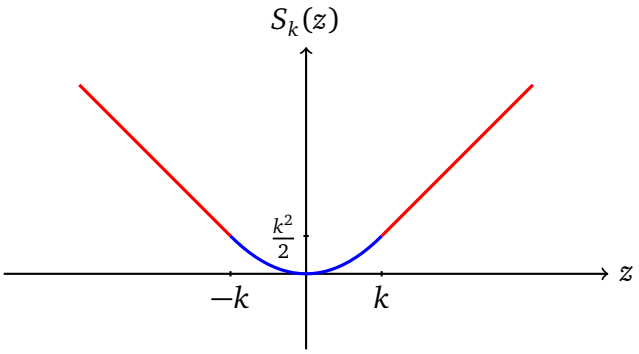
On note T_k la fonction troncature à la hauteur $k\geq 0$ définie par

$$T_k(z)=\begin{cases} z, & |z|\leq k \\ k, & z>k \\ -k, & z<k \end{cases}$$



T_k est Lipschitzienne, si $u\in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ alors $T_k(u)\in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$.

On note $S_k(z)=\int_0^z T_k(\tau)d\tau$.



$$S_k(z)=\begin{cases} \frac{z^2}{2}, & |z|\leq k \\ -\frac{k^2}{2}+kz, & z>k \\ -\frac{k^2}{2}-kz, & z<k \end{cases}$$

En particulier, on a $|z|\leq S_1(z)+\frac{1}{2}$.

En effet,

$$\begin{array}{lll} \text{Si } |z|\leq 1 & \text{implique que} & |z|\leq \frac{1}{2}|z|^2+\frac{1}{2}=S_1(z)+\frac{1}{2} \text{ (Young)} \\ \text{Si } |z|>1 & \text{implique que} & z=|z|=(z-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=S_1(z)+\frac{1}{2} \\ \text{Si } |z|<-1 & \text{implique que} & |z|=-z=(-z-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=S_1(z)+\frac{1}{2} \end{array}$$

Soit $\phi = T_k(u_\varepsilon) \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ comme fonction test, il vient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega S_k(u_\varepsilon)dx + \underbrace{\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla T_k(u_\varepsilon)dx}_{\geq 0} = \int_\Omega f_\varepsilon T_k(u_\varepsilon)dx,$$

et par intégration en temps, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega S_k(u_\varepsilon(t,x))dx &\leq k\int_0^t\int_\Omega f(t,x)dtdx,\\ &\leq k\|f_\varepsilon\|_{L^1(Q)}.\end{aligned}$$

Donc, pour $k=1$

$$\int_\Omega S_1(u_\varepsilon(t,x))dx \leq \|f_\varepsilon\|_{L^1(Q)}.$$

Enfin, pour conclure, on a

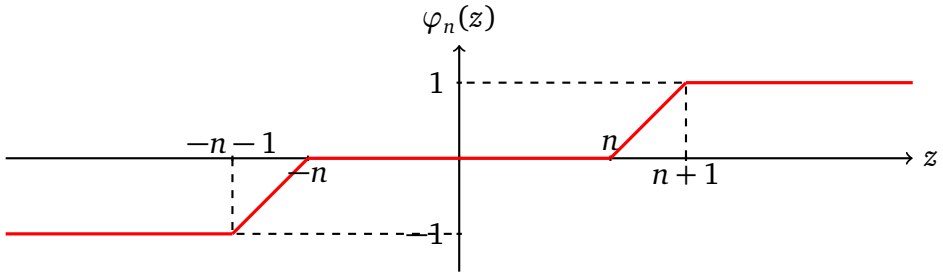
$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon(t,x)|dx &\leq \int_\Omega S_1(u_\varepsilon(t,x))dx + \frac{1}{2}|\Omega|\\ &\leq \|f_\varepsilon\|_{L^1(Q)} + \frac{1}{2}|\Omega|.\end{aligned}$$

Finalement,

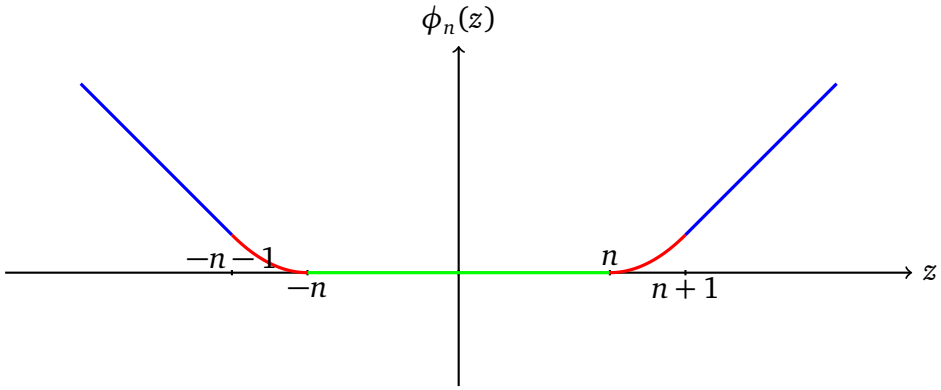
$$\sup_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_0.$$

On montre maintenant l'estimation sur les rondelettes :

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} 0, & |z| \leq n,\\ z-n, & n\leq z\leq n+1,\\ z+n, & n\leq z\leq n+1,\\ 1, & z\geq n+1,\\ -1, & z\leq -n-1.\end{cases}$$



Soit $\phi_n(z)=\int_0^z \varphi_n(\tau)d\tau$, on a $|\phi_n(z)| \leq |z|$.



Soit $\phi = \varphi_n(u_\varepsilon) \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ comme fonction test, il vient

$$\underbrace{\int_\Omega \phi_n(u_\varepsilon(t,x))dx}_{\geq 0} + \int_Q |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla \varphi_n(u_\varepsilon)dtdx = \int_Q f\,\varphi_n(u_\varepsilon)dtdx,$$

donc

$$\int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^p dtdx \leq \|f_\varepsilon\|_{L^1(Q)}$$

d'où l'estimation (4.7). ■

Proposition 4.5 *Soit $u_\varepsilon \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ satisfaisant :*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty\left(0,T,L^1(\Omega)\right)} \leq C_0, \tag{4.8}$$

$$\int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq C_1, \tag{4.9}$$

avec $B_n = \{(t,x)\in Q :\ n \leq |u_\varepsilon(t,x)| \leq n+1\}$. Alors, pour tout $1 \leq q < p - \frac{N}{N+1}$, il existe $C>0$ dépendant de C_0, C_1, $|\Omega|$ et q telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^q\left(0,T,W_0^{1,q}(\Omega)\right)} \leq C. \tag{4.10}$$

Démonstration: On aimerait faire comme en cas elliptique et obtenir une estimation sur ∇u_ε dans $L^q(Q)$.

Soit $1 \leq q < p$, on a

$$\int_Q |\nabla u_\varepsilon|^q dtdx = \sum_{n\geq 0} \int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^q dtdx,$$
$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} \int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^q dtdx + \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^q dtdx.$$

Pour $\frac{1}{\frac{p}{q}} + \frac{1}{q'} = 1$, i.e $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{p}{q}$, on applique l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^q dtdx \leq \left(\int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^{q.\frac{p}{q}} dtdx \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{B_n} (1)^{q'} dtdx \right)^{1-\frac{q}{p}},$$
$$\leq \left(\int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^p dtdx \right)^{\frac{q}{p}} |B_n|^{1-\frac{q}{p}},$$
$$\leq C_1^{\frac{q}{p}} |B_n|^{1-\frac{q}{p}},$$
$$\leq C_1^{\frac{q}{p}} |Q|^{1-\frac{q}{p}}.$$

Alors,

$$\int_Q |\nabla u_\varepsilon|^q dtdx \leq C_3(n_0) + C_4 \sum_{n=n_0}^{\infty} |B_n|^{1-\frac{q}{p}}, \tag{4.11}$$

où $C_3(n_0) = C_1^{\frac{q}{p}} n_0 |Q|^{1-\frac{q}{p}}$ et $C_4 = C_1^{\frac{q}{p}}$.

On utilise à présent l'injection de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^\star}(\Omega)$ (injection continue) avec $q^\star$ est l'exposant de Sobolev, c-à-d, $\frac{1}{q^\star} = \frac{1}{q} - \frac{1}{N}$ ($q^\star = \frac{qN}{N-q}$) et $q < p \leq N$.

Donc, il existe une constante C_Ω dépend de Ω telle que

$$C_\Omega \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx \right)^{\frac{q}{q^\star}} \leq \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^q dx, \tag{4.12}$$

et par intégration en temps de (4.12), on obtient

$$C_\Omega \int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx \right)^{\frac{q}{q^\star}} dt \leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^q dtdx, \tag{4.13}$$

on remarque ensuite, $\forall r \geq 1$, on a $\int_{B_n} |u_\varepsilon|^r dtdx \geq n^r |B_n|$ car $|u_\varepsilon| \geq n$ sur B_n et ainsi

$$|B_n| \leq \frac{1}{n^r} \int_{B_n} |u_\varepsilon|^r dtdx.$$

De l'estimation (4.11) , (4.12) et (4.13), on déduit que

$$C_\Omega \int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx \right)^{\frac{q}{q^\star}} dt \leq C_3(n_0) + C_4 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{r(1-\frac{q}{p})}} \left(\int_{B_n} |u_\varepsilon|^r dt dx \right)^{1-\frac{q}{p}}.$$

On utilise l'inégalité de Hölder sur la série avec

$$\alpha = \frac{1}{1-\frac{q}{p}} = \frac{p}{p-q} \text{ donc, } \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{q}{p}$$

$$\frac{1}{\alpha'} = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{q}{p},$$

ainsi

$$\begin{aligned} C_\Omega \int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx \right)^{\frac{q}{q^\star}} dt &\leq C_3(n_0) + C_4 \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{r(1-\frac{q}{p})\frac{p}{q}}} \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\int_{B_n} |u_\varepsilon|^r dt dx \right)^{(1-\frac{q}{p})\frac{1}{1-\frac{q}{p}}} \right)^{\frac{p-q}{p}}, \\ &\leq C_3(n_0) + C_4 \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{r(\frac{p-q}{q})}} \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B_n} |u_\varepsilon|^r dt dx \right)^{\frac{p-q}{p}}. \end{aligned}$$

Pour que la série à droite converge, il faut

$$r\left(\frac{p-q}{q}\right) > 1. \tag{4.14}$$

Le reste de la série convergente, donc tend vers 0, i.e

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{r(\frac{p-q}{q})}} = \delta(n_0) \underset{n_0 \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$C_\Omega \int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx \right)^{\frac{q}{q^\star}} dt \leq C_3(n_0) + \delta(n_0) \left(\int_0^T \int_\Omega |u_\varepsilon|^r dt dx \right)^{\frac{p-q}{p}}, \tag{4.15}$$

avec $\delta(n_0) \underset{n_0 \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $C_3(n_0) \underset{n_0 \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il faut faire apparaitre $\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx$, pour cela on choisit $1 < r < q^\star$, on a $u_\varepsilon(t,.) \in L^1(\Omega) \cap L^{q^\star}(\Omega)$ et par interpolation

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{q^\star}.$$

On a

$$\|u_\varepsilon(t,.)\|_{L^r(\Omega)}^r \leq \|u_\varepsilon(t,.)\|_{L^1(\Omega)}^{r\theta} . \|u(t,.)\|_{L^{q^\star}(\Omega)}^{r(1-\theta)},$$

or u_ε vérifie (4.8), donc

$$\|u_\varepsilon(t,.)\|^r_{L^r(\Omega)} \leq C_0^{r\theta}.\|u_\varepsilon(t,.)\|^{r(1-\theta)}_{L^{q^\star}(\Omega)}.$$

Soit encore, par intégration en temps,

$$\int_0^T\int_\Omega |u_\varepsilon|^r dtdx \leq \int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx\right)^{\frac{r(1-\theta)}{q^\star}} dt.$$

Pour estimer le terme à gauche de (4.15), on prend

$$\frac{r(1-\theta)}{q^\star} = \frac{q}{q^\star}, \tag{4.16}$$

ce qui donne :

$$C_\Omega \int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx\right)^{\frac{q}{q^\star}} dt \leq C_3(n_0)+\delta(n_0)\left[\int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx\right)^{\frac{q}{q^\star}} dt\right]^{\frac{p-q}{p}}, \tag{4.17}$$

Comme $\frac{p-q}{p} \leq 1$, alors pour n_0 assez grand , c'est à dire, $\delta(n_0)$ assez petit pour que $C_\Omega - \delta(n_0) = \frac{C_\Omega}{2} > 0$, on conclut que

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx\right)^{\frac{q}{q^\star}} dt = \|u_\varepsilon\|_{L^q(0;T,L^{q^\star}(\Omega))} \leq C.$$

Et donc de l'estimation (4.11) et le choix de r,

$$\begin{aligned}\int_Q |\nabla u_\varepsilon|^q dtdx &\leq C_3(n_0)+\delta(n_0\left[\int_0^T \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q^\star} dx\right)^{\frac{q}{q^\star}} dt\right]^{\frac{p-q}{p}} \\ &\leq C\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^q(0;T,L^q(\Omega))} \leq C.$$

Revenons maintenant aux conditions sur q, on a

La condition (4.16) **:** donne $r(1-\theta) = q$ et $\frac{1}{r} = \theta + \frac{1-\theta}{q^\star} = \theta\left(1-\frac{1}{q^\star}\right) - \frac{1}{q^\star}$.

on a $1 = r\theta + \frac{r(1-\theta)}{q^\star}$, donc $r\theta = 1 - \frac{q}{q^\star}$, et finalement,

$$\begin{aligned} r &= q + r\theta \\ &= q + 1 - \tfrac{q}{q^\star} \\ &= q + 1 - \tfrac{q}{\frac{qN}{N-q}} \\ &= q + 1 - \tfrac{N-q}{N} \\ &= q\tfrac{N+1}{N} \end{aligned}$$

La condition C1 : s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} & q\tfrac{N+1}{N}\tfrac{p-q}{q} > 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{N+1}{N}(p-q) > 1, \\ \Leftrightarrow \quad & p\tfrac{N+1}{N} - 1 > q\tfrac{N+1}{N}, \\ \Leftrightarrow \quad & q < p - \tfrac{N}{N+1}. \end{aligned}$$

Conclusion Sous la condition $1 \leq q < p - \frac{N}{N+1}$,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^q\left(0;T,W_0^{1,q}(\Omega)\right)} \leq C.$$

■

Proposition 4.6 (Estimation sur $(\partial_t u_\varepsilon)$) .
$(\partial_t u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^1\left(0,T;W^{-1,s}(\Omega)\right)$ indépendamment de ε avec $s < \min\left(\frac{q}{p-1}, \frac{N}{N-1}\right)$.

Démonstration: Soient $\sigma = \frac{q}{p-1}$ et $\varphi \in L^\infty(Q) \cap L^{\sigma'}\left(0;T,W_0^{1,\sigma'}(\Omega)\right)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle \partial_t u_\varepsilon, \varphi\rangle| &\leq |\int_Q |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla\varphi dtdx| + \int_Q |f_\varepsilon||\varphi| dtdx \\ &\leq \|\nabla u_\varepsilon\|^{p-1}_{L^q(0;T,L^q(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L^{\sigma'}(0;T,L^{\sigma'}(\Omega))} + \|f_\varepsilon\|_{L^1(Q)}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C\left(\|\nabla\varphi\|_{L^{\sigma'}(0;T,L^{\sigma'}(\Omega))} + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Donc $(\partial_t u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $\left(L^\infty(Q)\cap L^{\sigma'}\left(0;T,W_0^{1,\sigma'}(\Omega)\right)\right)' = L^1(Q)\cap L^\sigma\left(0;T,W^{-1,\sigma}(\Omega)\right)$, d'où le résultat désiré. ■

Convergence presque partout du gradient : La suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans

$$E = \left\{u_\varepsilon \in L^q\left(0;T,W_0^{1,q}(\Omega)\right),\ \partial_t u_\varepsilon \in L^1\left(0;T,W^{-1,s}(\Omega)\right)\right\}$$

et $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec injection compacte. Alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans $L^q(0;T,L^q(\Omega)) = L^q(Q)$. Ainsi, quitte à extraire une sous suite noté $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} & u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ fort dans } \ L^q(Q), \\ & u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ p.p dans } Q, \\ \text{et } \ & u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faible dans } \ L^q\left(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)\right). \end{aligned}$$

En procédant comme dans [3], on montre que

$$\nabla u_\varepsilon \to \nabla u \text{ p.p dans } Q.$$

La continuité de $u \in \mathscr{C}^0\left(0,T;L^1(\Omega)\right)$:

Proposition 4.7 *La suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est de Cauchy dans $\mathscr{C}^0\left(0,T;L^1(\Omega)\right)$.*

Démonstration: Soient $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ solution de (4.5) associe à f_ε et $(u_{\varepsilon'})_{\varepsilon'}$ solution de (4.5) associe à $f_{\varepsilon'}$. Soit $w_{\varepsilon,\varepsilon'} = u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}$ vérifiant :

$$\partial_t w_{\varepsilon,\varepsilon'} - \operatorname{div}\left(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon - |\nabla u_{\varepsilon'}|^{p-2}\nabla u_{\varepsilon'}\right) = F_{\varepsilon,\varepsilon'} = f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}.$$

En multipliant par $T_1(w_{\varepsilon,\varepsilon'})$,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega S_1(w_{\varepsilon,\varepsilon'})dx + \underbrace{\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon - |\nabla u_{\varepsilon'}|^{p-2}\nabla u_{\varepsilon'}\right)\left(\nabla u_\varepsilon - \nabla u_{\varepsilon'}\right)T_1'(w_{\varepsilon,\varepsilon'})dx}_{\geq 0} = \int_\Omega F_{\varepsilon,\varepsilon'}T_1(w_{\varepsilon,\varepsilon'})dx,$$

on intégration en temps,

$$\int_\Omega S_1(w_{\varepsilon,\varepsilon'})dx \leq \int_Q |F_{\varepsilon,\varepsilon'}|dx.$$

On a $S_1(z) = \int_0^z T_1(\tau)d\tau$ donc $S_1(z) \leq |z|$, donc

$$\int_\Omega S_1(w_{\varepsilon,\varepsilon'})dx \leq \int_Q |f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}|dx.$$

La suite $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $L^1(Q)$ donc elle est de Cauchy, donc

$$\int_\Omega S_1(w_{\varepsilon,\varepsilon'})dx \underset{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w_{\varepsilon,\varepsilon'}|dx &= \int_{|w_{\varepsilon,\varepsilon'}|\leq 1} |w_{\varepsilon,\varepsilon'}|dx + \int_{|w_{\varepsilon,\varepsilon'}|>1} |w_{\varepsilon,\varepsilon'}|dx \\ &\leq \left(\int_{|w_{\varepsilon,\varepsilon'}|\leq 1} |w_{\varepsilon,\varepsilon'}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|w_{\varepsilon,\varepsilon'}|\leq 1} dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_{|w_{\varepsilon,\varepsilon'}|>1} |w_{\varepsilon,\varepsilon'}|dx.\end{aligned}$$

On a

$$\frac{|z|}{2}\mathbb{1}_{|z|>1} \leq \left(\frac{|z|}{2} + \frac{|z|-1}{2}\right)\mathbb{1}_{|z|>1} = S_1(z)\mathbb{1}_{|z|>1},$$

et

$$\frac{|z|}{2}\mathbb{1}_{|z|\leq 1} = S_1(z)\mathbb{1}_{|z|\leq 1},$$

ainsi,

$$\int_\Omega |w_{\varepsilon,\varepsilon'}|dx \leq \sqrt{|\Omega|}\left(\int_{|w_{\varepsilon,\varepsilon'}|\leq 1} 2S_1(w_{\varepsilon,\varepsilon'})dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_{|w_{\varepsilon,\varepsilon'}|>1} 2S_1(w_{\varepsilon,\varepsilon'})dx \underset{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi u_ε converge fortement vers u dans $\mathscr{C}^0\left(0,T;L^1(\Omega)\right)$, ce qui donne un sens à la condition initiale.

Passage à la limite dans le problème approché :

On part de la formulation faible du problème approché (4.4) :

$$-\int_Q u_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} dtdx + \int_Q |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \phi dtdx = \int_Q f_\varepsilon \phi dtdx, \tag{4.18}$$

pour tout $\phi \in C^\infty(\overline{Q})$ qui est nul au voisinage de $\Gamma \cup (\Omega \times \{T\})$. Comme u_ε converge fortement vers u dans $L^1(Q)$, on passe à la limite facilement dans la première intégrale. La dernière intégrale tend vers $\int_Q \phi d\mu$ grâce aux hypothèses sur la suite f_ε.

Maintenant, en utilisant les estimations uniformes et le résultat de convergence presque partout du gradient, on obtient

- $|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon$ est bornée dans $L^{\frac{q}{p-1}}(Q)$.
- $|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ p.p dans Q.

Il résulte alors, en vertu du Théorème 1.4 que $|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ dans $L^1(Q)$. Ainsi, il est possible de passer à la limite en (4.18), pour obtenir (4.2). ■■

Bibliographie

[1] L. Boccardo, T. Gallouet, Non linear elliptic and parabolic equations involving measure data, Jour.Funct.Anal. 87(1989), 149-169.

[2] L. Boccardo, G. Croce, Elliptic Partial Differential Equations. Existence and Regularity of Distributional Solutions, De Gruyter, Berlin, 2014.

[3] L. Boccardo, A. Dall'aglio, T. Gallouet, L. Orsina, Nonlinear parabolic equations with measure data, J. Funct. Anal. 147(1997), 237-258.

[4] F. Boyer, P. Fabrie, Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles, Mathématiques & Applications 52, Springer, Berlin, 2006.

[5] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, masson, Paris, 1987.

[6] T. Cazenave, A. Haraux. Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, 1990.

[7] A. Dall'Aglio, L. Orsina, Existence results for some nonlinear parabolic equations with nonregular data, Differ. Integral Equ., 5(1992), 1335-1354.

[8] J. Droniou, Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles, 2001.

[9] E. DiBenedetto, Degenerate Parabolic Equations, Springer-Verlag, New York, 1993.

[10] T. Gallouët, R. Herbin, Equations aux dérivées partielles, cours Master 2, Université Aix Marseille, 2011.

[11] H. Le Dret, Nonlinear elliptic partial differential equations. An introduction, Springer, Berlin, 2018.

[12] J.-L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires. Dunod, 1969.

[13] S. Meslem, Problème parabolique fortement non linéaire pour les équations p-Laplaciennes. Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département des Mathématiques, 2020.

[14] S. Salsa. Partial differential equations in action : from modelling to theory. volume 99, Springer, 2016.

[15] N. Seam, Études de problèmes aux limites non linéaires de type pseudo-parabolique. Thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2010.

[16] R.-E. Showalter, Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. volume 49, American Mathematical Soc, 2013.

[17] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Ann. Math. Pura. Appl. 146(1987), 65-96.