REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Dr. YAHIA FARES De MEDEA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie des Procédés et Environnement

PROJET DE FIN D'ETUDE

Pour l'obtention du diplôme de master en génie des procédés

Option: Pollution Chimique et Gestion Environnementale

THEME

Etude de l'effet de la perméabilité sur le transfert d'un polluant liquide dans un milieu poreux.

Etudié par :

M^{r}. BELGHAZI Abdessalem

M^{r}.MERISSI Omar Elfarouk

Dirigé par :

Dr: HADIDI NOUREDDINE

Promotion: juin 2012/2013

Remerciements

Tout d'abord, Nous tenons à remercier le grand Allah qui nous a donné la volonté et le courage pour parachèvement ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à monsieur HADIDI Nouredine d'avoir d'être l'encadreur de ce travail, ainsi pour les conseils et les remarques qu'il nous a prodigué.

Nous tenons à exprimer notre respectueuse gratitude à monsieur le président de jury et les membres de jury d'avoir accepté de nous faire l'honneur de juger ce travail et de participer au jury.

Nous tenons à remercier tous les responsables de département Génie des Procédés et Environnement, et en particulier tous les enseignants de Génie des Procédés.

Nous remercions tout particulièrement ceux qui se sont déplacés lors de notre soutenance et nous en profitons pour exprimer notre profonde affection à nos parents pour leurs générosités et pour l'ensemble de ce qu'ils nous ont apporté.

Enfin, nos derniers remerciements vont à tous les étudiants et les travailleurs de l'U.Médéa et en particulier Mr Boumahdi Mouloud.

Dédicace

Il me fait le plaisir de dédier ce modeste travail qui ne sera pas réalisé sans l'aide de DIEU le tout puissant.

À la femme la plus importante du monde à celle qui hante mon cœur, mon âme, et ma raison, ma très chère mère que dieu la garde.

A l'homme qui m'a donné son nom mon père que dieu le tout puissant accorde au défunt sa saint miséricorde et l'accueille en son vaste paradis.

A ma grand-mère que j'aime beaucoup.

À mes chers frères.

À mes chères sœurs.

À toute la famille.

À tout mes amis de mon quartier.

À tout mes amis et amies de l' U.Medea

À tout mes amis de la promotion 2012/2013.

Et à tous ceux que j'aime.

Abdessalm

Dédicace

Il me fait le plaisir de dédier ce modeste travail qui ne sera pas réalisé sans l'aide d'Allah le tout puissant.

A celle pour qui je dois toute réussite, à mon adorable mère

A mon très cher père.

A mes merveilleuses sœurs.

A mes frères.

À tout mes amis de mon quartier.

À tout mes amis de la promotion 2013.

A tous mes amis de l'université de Medea.

Et à tous ceux que j'aime.



Sommaire

Introduction générale…….. 1
Chapitre I : Généralités sur les milieux poreux
I.1.Introduction…… 3
I.2. Classification des milieux poreux …… 3
I.2.1. Milieux poreux non consolidés ……..... 3
I.2.2. Milieux poreux consolidés …….. 3
I.3. Caractéristiques géométriques des milieux poreux …… 4
I.3.1. Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R) …….. 4
I.3.2. Notion de Porosité (ε) ……... 5
I.3.3. Notion de Perméabilité (K) …….. 7
I.4. Caractéristiques thermo-physiques des milieux poreux …… 10
I.4.1. Viscosité dynamique effective μ_{ff} …… 10
I.4.2. Conductivité thermique effective …… 11
I.5. Modèles d'écoulements dans les milieux poreux …… 12
I.5.1. Modèle de Darcy ……. 12
I.5.2. Modèle de Brinkman ……..... 13
I.5.3. Modèle de Forchheimer …….. 14
I.6. Conclusion …….. 14

Chapitre II : Formulation mathématique.
II.1. Introduction …… 15
II.2. Le Transfert de masse par diffusion moléculaire …….. 16
II.2.1. Equations de la diffusion massique ……. 18
II.3. Couplage avec la convection thermique …… 19
II.4. Les hypothèses de travail ……... 22
II.4.1. Le modèle physique ……... 22
II.4.2. Equation de continuité ……... 22
II.4.3. Equation de conservation de la quantité de mouvement ……..……. 23
II.4.4. Equation de l'énergie ……. 23
II.4.5. Equation de la concentration ……. 23
II.4.6. Equation de continuité ……... 24
II.4.7. Equation de conservation de la quantité de mouvement …… 24
II.4.8. Equation de l'énergie …….. 24
II.4.9. Equation de concentration ……. 24
II.5. Conclusion ……..... 25

Chpitre.III : Méthode numérique.
III.1. Introduction……... 27
III.2. Principe de la méthode des volumes finis…… 27
III.2.1. Equation différentielle gouvernante …….. 27
III.2.1.1. Equation de continuité …… 27
III.2.2. Maillage et volume de contrôle ……. 28
III.2.3. Discrétisation des équations de conservation …… 28
III.2.3.1. Flux de diffusion -convection …… 30

III.2.3.2. Simplification de l'expression du flux …….. 31
III.2.3.3. Linéarisation du terme source …… 31
III.2.3.4. Equation finale de discrétisation …… 32
III.2.3.5. Méthode de résolution des équations algébriques..…… 34
III.2.4. Considérations pour le champ dynamique …… 34
III.2.4.1. Notion de maillage décalé ……. 34
III.2.5. Discrétisation des équations dynamiques ……. 35
III.2.5.1. Equations du mouvement ……... 35
III.2.5.2. Correction des vitesses et pression..... 36
III.2.5.3. Equation de correction de pression …… 37
III.3. Algorithme de SIMPLER …….. 38
III.4. Technique de sous-relaxation …… 39
III.5. Critère de convergence……... 40
III.6. Schémas d'interpolation……. 40
III.7. Application de la méthode des volumes finis à notre problème…… 41
III.7.1. Discrétisation des équations du mouvement……... 42
III.7.1.1. Equation du mouvement en X……. 42
III.7.1.2. Equation du mouvement en Y……. 43
III.7.2. Equation de correction de pression……. 45
III.7.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie……... 46
III.7.4. Discrétisation de l'équation du soluté……. 47
III.8. Conclusion……. 48

Chapitre IV: Résultats et discussion.
IV.1. Introduction……..…. 49
IV.2. Modélisation numérique ……..... 50
IV.3. Sensibilité du code calcul et validation……... 50
IV.4. Effet du nombre Lewis sur les transferts……... 54
IV.5. Effet du rapport des forces de poussée (N) ……..... 55
IV.6. Conclusion……. 55
Conclusion générale…….. 56

LISTE DES FIGURES

Figure I.1: Exemples de matériaux poreux rencontrés dans la nature……..... 4
Figure I.2: Volume élémentaire représentatif (V .E.R)…… 4
Figure I .3: Porosité résiduelle et porosité utile…… 5
Figure I.4: Mesure de la porosité. [2]……..……..... 6
Figure II.1: Transfert de masse par diffusion dans un mélange gazeux …….. 16
Figure II.2: Couplage thermosolutale le long d'une plaque verticale ……. 20
Figure II.3: Géométrie du problème…….. 22
Figure III.1: Subdivision du domaine d'étude en volumes de contrôle ……... 28
Figure III.2: Volume de contrôle représentatif ……..... 30
Figure III.3: Représentation d'un maillage décalé …….…….... 35
Figure III.4: Volume de contrôle pour U et V……..... 35
Figure III.5: Volume de contrôle lié à P ……..... 37
Figure III.6: Schéma du volume de contrôle pour U ……..... 43
Figure III.7. Schéma du volume de contrôle pour v……..... 44
Figure III.8. Schéma du volume de contrôle pour P…… 45
Figure IV.1: Représente les lignes de courant pour Ra=10^6 et différentes valeurs de K……. 52
Figure IV.2: Représente les isoconcentrations pour Ra=10^6 et différentes valeurs de K……. 52
Figure IV.3: Représente les lignes de courant pour Ra=10^4 et différentes valeurs de K……. 53
Figure IV.4: Représente les isoconcentrations pour Ra=10^4 et différentes valeurs de K……. 53
Figure IV.5: Représente transfert de masse en fonction de la perméabilité pour différentes valeurs de nombre de Rayleigh…… 54
Figure IV.6: Représente transfert de masse en fonction de la perméabilité pour différentes valeurs de nombre de Lewis…… 54
Figure IV.7: Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction de K pour différentes valeurs N……..... 55

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1: Porosités de quelques matériaux, [3]…….. 7

Tableau I.2 Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux…….. 8

Tableau I.3: La valeur de la constante A, selon quelques auteurs …….. 9

Tableau I.4: Modèles de viscosité effective. …….. 10

Tableau III.1: Définition des différents termes des équations de conservation ……... 29

Tableau III.2: Expressions des termes sources linéarisés (Sc et Sp) pour les différentes équations …… 32

Tableau III.3: Les expressions de $A|P|$ selon le schéma d'interpolation…….**.....** 41

Tableau IV.1: Sensibilité du code de calcul au maillage cas horizontale pour $Ra=10^8$, $R_K=0.1$, Pr=7, N=1, Le=10, ε =0.8…… 50

Tableau IV.2: Comparaison des nombres de Nusselt et Sherwood pour N=0, $Da=10^{-7}$……. 51

ملخص:

العمل الحالي يهدف إلى دراسة انتقال الكتلة في تجويف مربع يحتوي على طبقة مسامية تعتبر هذه الطبقة متجانسة، متماثلة ومشبعة بنفس السائل. تخضع الجدران العمودية لشروط درجة حرارة وتركيز منتظمين في حين أن الجدران الأفقية هي ثابتة في درجة الحرارة و غير نفوذه. يتم حل المعادلات الأساسية التي تصف الحمل الحراري مزدوج الانتشار بداخل العلبة عدديا باستخدام طريقة الحجم المحدود .ويتم تحليل النتائج الرقمية من حيث الخطوط الحالية , خطوط ثابتة الحرارة،خطوط ثابتة التركيز, ومتوسط شيروود.

الكلمات الرئيسية : انتقال الكتلة، الحمل الحراري، انتقال مزدوج, تجويف, مسامية

RESUME:

Le présent travail est une étude du transfert de masse dans une cavité carrée renfermant une couche poreuse cette couche est considérée homogène, isotrope et saturée par le même fluide. Les parois verticales sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Les équations de base décrivant la convection double diffusive au sein de l'enceinte sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Les résultats numériques sont analysés en termes de lignes de courant, des isothermes, des isoconcentrations et Sherwood moyen.

Mots clés : Transfert de masse, convection thermosolutale, milieux poreux,cavité poreuse

ABSTRACT:

This paper presents the results of a numerical study of mass transfer in a square enclosure filled with porous layer. The porous medium is considered homogeneous, isotropic and saturated with the same fluid. Two parallel walls are subjected to uniform temperature and concentration whereas the horizontal walls are assumed to be adiabatic and impermeable. The set of equations governing the situation physic in the porous enclosure are solved numerically using the control volume approach. The numerical results are presented and analyzed in terms of streamlines, isoconcentrations lines and average Sherwood number.

Keywords: mass transfer, thermosolutal convection, porous medium, porous cavity

INTODUCTION GENERALE

L'un des objectifs de la recherche scientifique dans les industries de nos jours se rapporte à la résolution des questions relatives aux économies des opérations de transformations et d'énergie pour atteindre l'optimum.

Plusieurs études concernant les milieux poreux ont été effectuées ces dernières années, du fait de leurs importances sans cesse grandissantes dans l'industrie. L'application et l'utilisation de certains procédés industriels nécessitent une maîtrise de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux. Parmi ces applications , l'isolation thermique , le séchage , la récupération de l'énergie géothermique , la déshumidification , la lubrification , la filtration , la séparation des espèces chimiques , convertisseurs catalytiques pour la réduction de la pollution de l'air des produits de combustion , et de nombreux procèdes de l'industrie chimique mettent en œuvre des réacteurs hétérogènes dans lesquels un fluide , gaz ou liquide, traverse un lit fixe de particules solides, avec ou sans réaction à la surface.

Parmi les problèmes rencontrés lors de la conception et de l'étude du comportement de tels réacteurs, trois apparaissent essentielles :

- L'évaluation de la chute de pression ou de la dégradation d'énergie subie par le fluide lors de la traversée du lit fixe.
- L'établissement d'un modèle d'écoulement permettant d'évaluer avec précision le degré de conversion des réactifs à travers le lit fixe.
- La connaissance de transfert de matière fluide- solide dans le lit fixe.

L'analyse de nombreuses études antérieures nous a montré que la plupart d'entre elles concernent les lits fixes de particules sphériques, de grains, de particules cylindriques de hauteur souvent voisines du diamètre, c'est-à-dire les lits fixes de particules relativement isotropes. Les lits de particules anisotropes ont été beaucoup moins étudiés.

L'étude de la convection massique dans les cavités poreuses a toujours préoccupé les chercheurs. Plusieurs approches ont été investies dans le souci est apporté des méthodes expérimentales ou des modèles théoriques plus élaborés, capable de les estimer de manière simple et à moindre coût.

Mais la complexité et la nature des milieux poreux et l'écoulement des fluides dans ces dernières n'ont fait qu'augmenter le défi.

Quant à l'approche expérimentale, bien qu'elle soit précise et privilégiée' présente l'inconvénient d'être souvent délicate, coûteuse et limitée par moyens technologiques.

L'objectif du présent mémoire est de développer une nouvelle approche basée sur les l'estimation numérique pour étudier la convection massique dans les milieux poreux. Dans ce contexte, nous avons organisé le présent mémoire en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré exclusivement à la présentation des notions générales des milieux poreux et leurs applications dans les différents domaines industriels ou milieu naturel.

Le deuxième chapitre en revanche est dédié aux équations mathématiques qui gouvernent le phénomène physique ainsi que le transfert de masse dans les milieux poreux. **Le troisième chapitre** est réservé à la présentation de la modélisation numérique dans les cavités poreuses basées sur la méthode classique volume fini. On procède à l'estimation du nombre de Sherwood,Quant au **quatrième chapitre**, on y présente l'essentielle des résultats obtenus avec discussion . Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale et des perspectives.

GENERALITES SUR LES MILIEUX POREUX

I.1 Introduction:

Un milieu poreux est un matériau constitué d'une matrice solide et de nombreux espaces vides distribués d'une façon désordonnée dans tout le milieu.

Ces espaces vides qui peuvent être connectés ou déconnectés sont appelés pores. Nombreux sont les exemples de matériaux poreux rencontrés dans la nature ou l'industrie (**Figure I-1**). Il peut s'agir d'empilements de billes, de panneaux de fibres, de béton, du bois, de roches ou bien de structures géologiques comme les bassins sédimentaires, de gisements de pétrole ou de couches aquifères.

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux est possible si la plupart des espaces vides sont interconnectés. Le milieu poreux est généralement supposé saturé par un fluide quand ce dernier est formé d'une seule phase.

I.2 Classification des milieux poreux :

La phase solide d'un milieu poreux peut se présenter sous deux formes différentes, ainsi on distingue deux types de milieux poreux:

- **Milieux poreux non consolidés:**

Un milieu poreux est dit non consolidé si sa phase solide est formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sable, .limons, billes de verre... .etc.).

- **Milieux poreux consolidés :**

Dans ce genre de milieu poreux la matrice est compacte, et formée de grains cimentés (calcaire, grès,... etc.).

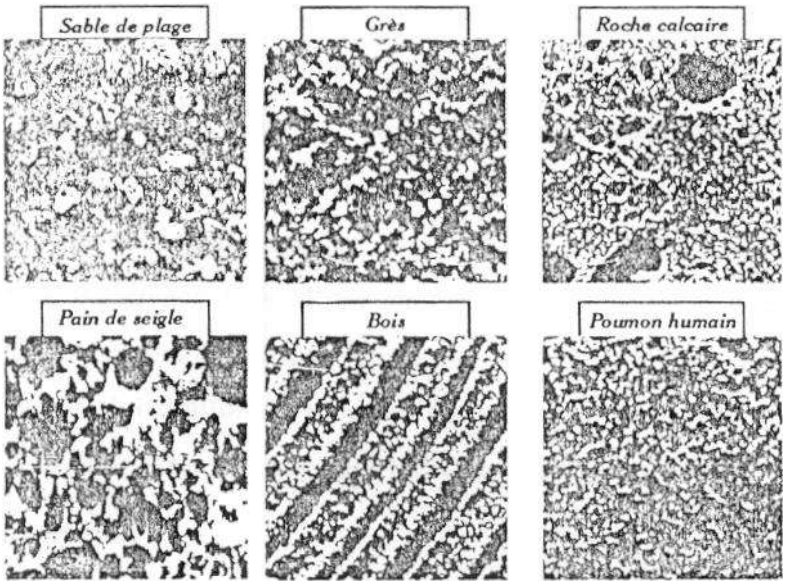


Fig. I.1 : *Exemples de matériaux poreux rencontrés dans la nature*

I.3 Caractéristiques géométriques des milieux poreux:

I.3.1 Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R) :

Par analogie avec la notion de particule fluide, on définit pour les milieux poreux un volume élémentaire représentatif (V.E.R) contenant un grand nombre de cavités. Les dimensions caractéristiques du volume 'élémentaire doivent satisfaire la double inégalité qui dicte que ses dimensions sont très grandes par rapport à l'échelle de la taille des pores, mais très petites devant l'encombrement de la matrice solide.

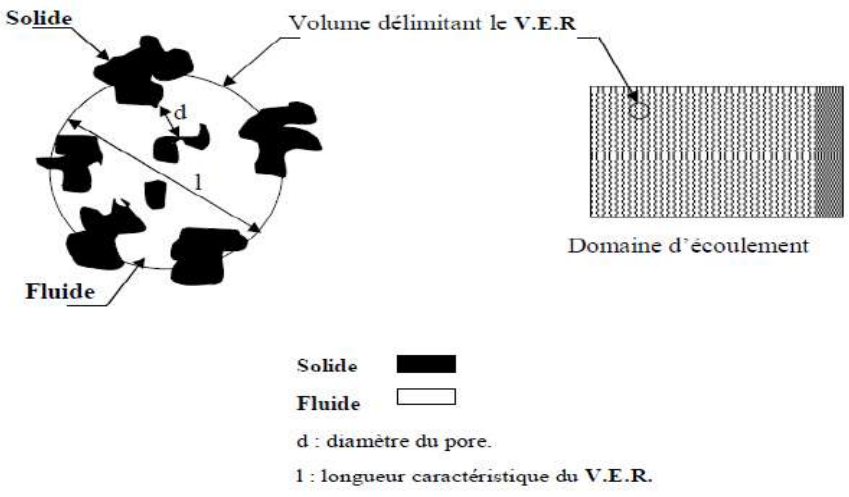


Fig. I.2 : *Volume élémentaire représentatif (V .E.R)*

Généralement, la disposition et la dimension des pores sont irrégulières. De ce fait, la variable dépendante Ø (Vitesse, Pression, Température, Concentration,... etc.), lorsqu'elle est mesurée à l'échelle des pores (échelle microscopique) est aussi irrégulière. Cependant, cette quantité Ø est souvent considérée comme une valeur moyenne mesurée sur un volume élémentaire représentatif (échelle macroscopique) qui renferme un certain nombre de pores. A cette échelle la grandeur moyennée varie d'une manière régulière dans le temps et dans l'espace ; ce qui permet un traitement théorique plus approprie des principes de conservation. Cette approche, permettant l'utilisation de modèles moyennés sur un volume élémentaire représentatif (V.E.R), a été longuement étudiée. [1].

I.3.2 Notion de Porosité (ε) :

La porosité est définie comme étant la fraction du volume occupé par les pores (espaces vides) au volume du milieu poreux (solide + vides).

$$\varepsilon = \frac{V_{Pores}}{V_{Total}} \qquad \text{(I.1)}$$

V_{pores}: Volume des pores.

V_{total} : Volume total de la matrice poreuse.

La porosité est dite totale ou absolue (ε_T) quand le rapport du volume occupé par les pores au volume du milieu poreux prend en compte les pores occlus; alors que la porosité est effective ou utile (ε_{eff}) lorsque le rapport volumique tient compte seulement des pores interconnectés.

La porosité résiduelle (ε_r) par contre, ne tient compte que des pores isolés. Ainsi on définit la porosité totale (ε_T) qui tient compte de tous les pores, comme étant la somme de la porosité effective et de la porosité résiduelle **(Figure I.3)**.

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{eff} + \varepsilon_r \qquad \text{(I.2)}$$

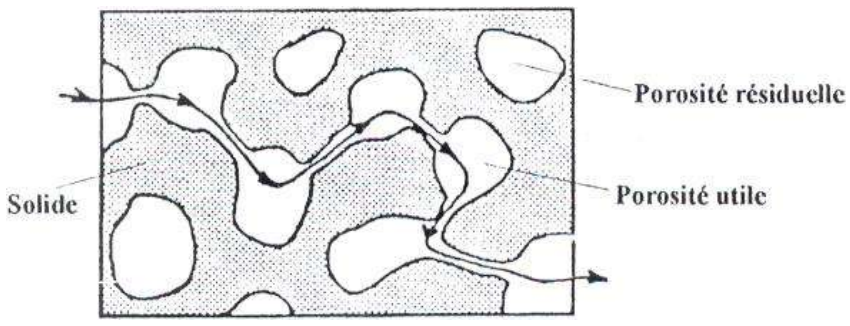


Fig. I.3 : *Porosité résiduelle et porosité utile*

Pour les milieux poreux non consolidés, la porosité effective et la porosité totale sont égales. Par contre pour les milieux poreux consolidés, la différence entre elles peut être significative.

Pour les matrices rigides, la porosité ne change pas en présence d'un gradient de pression. Cependant, pour les matrices déformables, ε varie avec le gradient de pression; cette variation dépend des propriétés structurales et des déformations élastiques de la matrice poreuse.

Comme on l'a déjà cité précédemment, la grandeur moyennée à l'échelle macroscopique varie d'une manière régulière dans le temps et dans l'espace. Ceci est aussi valable pour la mesure de la porosité comme l'indique la **(Figure I.4).**

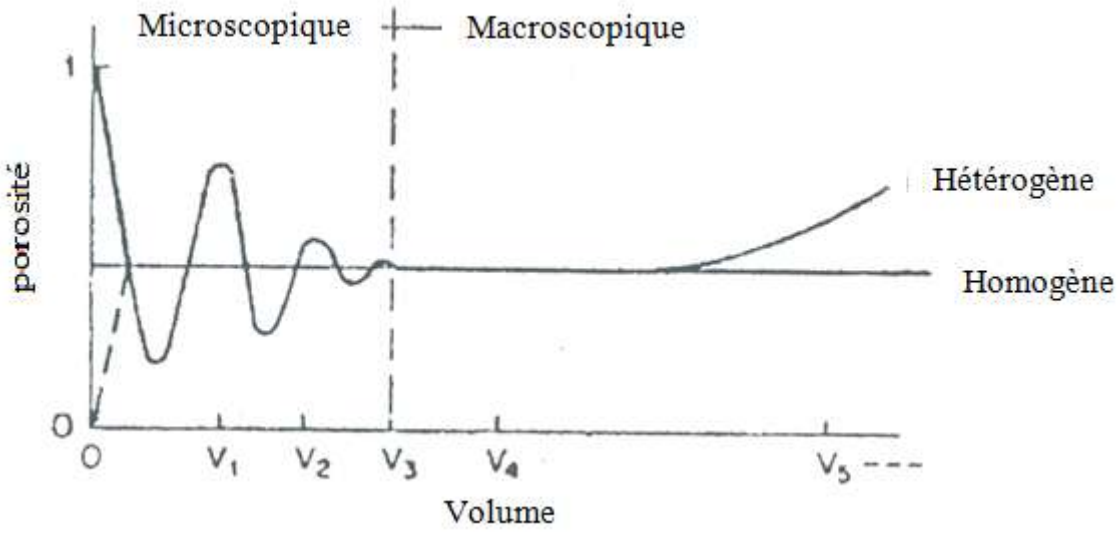


Fig. I.4 : Mesure de la porosité. [2].

Le volume du milieu poreux est plus grand que celui d'un pore; ainsi l'addition de plusieurs pores (échelle macroscopique VER) permet une mesure plus régulière et uniforme de la porosité du milieu poreux.

On rapporte dans le tableau I-1, les porosités moyennes de certaines substances mesurées. [3]. Ces mesures ont été élaborées par utilisation de plusieurs techniques.

Tableau. I.1 : *Porosités de quelques matériaux. [3].*

Matériau	Porosité
Sable	0.37 -0.50
Brique	0.12 -0..34
Terre (argile)	0.43 -054
Poudre d'ardoise noire	0.57 -0.66
Poudre de silice	0.37 -0.49
Grains de silice	0.65
Charbon	0.02 -0.12
Cuir	0.56 -0.59
Filtre de cigarettes	0.17 -0.49
Empilements de sphères	0.36 -0.43
Fibre de verre	0.88 -0.93
Fibre à tisser	0.68 - 0.76
Matériaux mousseux	0.98
Béton	0.02 -0.07

On dit souvent que la porosité est:

-faible si $\varepsilon < 5\%$.

-médiocre si $5\% < \varepsilon < 10\%$.

-moyenne si $10\% < \varepsilon < 20\%$.

-bonne si $20\% < \varepsilon < 30\%$.

-excellente si $\varepsilon > 30\%$.

Plusieurs modèles de variation de porosité sont disponibles dans la littérature. La plus connue est la variation sinusoïdale proposée par plusieurs chercheurs. [4] et. [5]. qui ont montré que le modèle sinusoïdal est plus représentatif près des parois de confinement.

I.3.3 Notion de Perméabilité (K) :

La notion de conductance de l'écoulement dans une matrice poreuse est appelée perméabilité. Autrement dit, c'est l'aptitude de circulation qu'offre un milieu poreux à un

fluide lors de son écoulement à travers les pores de ce milieu sous l'effet d'un gradient de pression.

La perméabilité est définie à partir de la loi de Darcy [6]:

$$K = -\frac{\mu U_D}{\frac{dp}{dx}} \qquad \text{(I.3)}$$

μ: Viscosité dynamique du fluide.

U_D : Vitesse Darcienne.

dP/dx : Gradient de pression.

La dimension de la perméabilité est le carré d'une longueur. On utilise également comme unité le Darcy qui est égal à 9.87 10^{-13} m^2.

Le tableau I-2 représente certaines valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux.

Tableau. I.2 : *Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux. [7,8].*

SUBSTANCE	**PERMEABILITE [m^2]**
Briques	4,8 10^{-15} à 2,2 10^{-13}
Cuir	9,5 10^{-14} à 1,2 10^{-13}
Poudre d'ardoise noire	8,9 10^{-14} à 1,2 10^{-13}
Terre	2,9 10^{-13} à 1,4 10^{-11}
Fibre de verre	2,4 10^{-11} à 5,1 10^{-11}
Sable	2,0 10^{-11} à 1,8 10^{-08}
Fibre à tisser	3,8 10^{-09} à 1,0 10^{-08}
Cigarette	1,0 à 10^{-09}

Il n'existe pas de relations générales liant la perméabilité à la porosité effective, néanmoins plusieurs relations empiriques et semi-empiriques ont été adoptées en se basant sur des corrélations. Elles ne sont toutefois utilisées qu'en prenant compte des restrictions pour lesquelles elles ont été développées.

Pour évaluer la perméabilité d'un milieu poreux, plusieurs modèles de variation ont été proposés tels que les modèles capillaires et le modèle du rayon hydraulique.

En supposant un écoulement établi et un régime permanent, ces modèles reposent sur les lois de Darcy et de Hagen -Poiseuille.

La perméabilité dépend essentiellement de la porosité et du diamètre des particules.

Ainsi, à partir d'un modèle capillaire formé de conduits parallèles. [9]. ont proposé une formulation mathématique qui leur a permis d'établir l'expression suivante:

$$K = \frac{\varepsilon^3 d^2}{36C(1-\varepsilon)^2} \quad \text{(I.4)}$$

Où d est le diamètre de la conduite et C le coefficient de Kozeny. Ce dernier paramètre prend la valeur 5 dans le cas de particules entassées ou bien l'expression suivante dans le cas de fibres:

$$C = \frac{62.3\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{1-\varepsilon}-2.5\right](1-\varepsilon)+107.4}{16\varepsilon^3(1-\varepsilon)^4} \quad \text{(I.5)}$$

[10]. ont proposé, pour des particules sphériques très entassées, l'expression suivante du coefficient de Kozeny :

$$c = \varepsilon^{5.5}\frac{d^2}{5.6} \quad \text{(I.6)}$$

Plusieurs modèles empiriques ont été développés, mais basés sur le même type d'expression, soit :

$$k = \frac{dp^2\varepsilon^3}{A(1-\varepsilon)^2} \quad \text{(I.7)}$$

A étant une constante empirique qui a pris différentes valeurs selon les études entreprises.

On peut citer quelques exemples:

Tableau. I.3 : *La valeur de la constante A, selon quelques auteurs.*

Auteur	**A**
Carman & Kozeny (1937). [9].	180
Ergun (1952). [11].	150
Rohsenow & Hernett (1973). [12].	175

I.4 Caractéristiques thermo-physiques des milieux poreux:

I.4.1 Viscosité dynamique effective μ_{eff}:

Lorsque l'approche des modèles moyennés sur un VER est adoptée, il est nécessaire de définir les propriétés thermo-physiques évaluées sur le VER incluant les deux phases fluide et solide. Ainsi, la viscosité effective a été introduite. [13]. afin de mettre en évidence la discontinuité des contraintes aux interfaces fluide-poreux et d'obtenir une expression pour la perméabilité. En combinant l'écoulement de Stokes avec celui de Darcy, il a obtenu l'équation suivante:

$$\overrightarrow{\nabla p} = -\frac{\mu}{K}\vec{v} + \mu_e \nabla^2 \vec{v} \qquad \text{(I.8)}$$

Brinkman a considéré la viscosité dynamique effective égale à la viscosité du fluide considéré. [14]. a donné des justifications à l'équation de Brinkman.et a trouvé, de plus, que le rapport entre la viscosité dynamique μ_{eff} et celle du fluide n'est pas toujours égal à l'unité. Lundgren démontrera aussi que la viscosité effective est une fonction de la viscosité du fluide et de la porosité.

Le tableau I-4 résume quelques corrélations trouvées dans la littérature. Cependant, la plupart des travaux prennent un rapport de viscosité unitaire.

Tableau. I.4 : *Modèles de viscosité effective.*

Modèle	Corrélation	Limite de validité
Einstein	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = 1 + 2.5\varepsilon$	Cas de sphères ε
Neale & Nader	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \alpha^2$	α déterminé expérimentalement
Guth & Simba	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \frac{1 + 0.5(1-\varepsilon) - 0.5(1-\varepsilon)^2}{1 - 2(1-\varepsilon) - 9.6(1-\varepsilon)^2}$	μ_{eff} pour ε = 0.766
Mooney	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \exp\left[\frac{2.5(1-\varepsilon)}{1 - k(1-\varepsilon)}\right]$	0.75 < K < 1.5
Frankel & Akivos	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = C\left[1 - \left(\frac{(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)_{max}}\right)^{1/3}\right]^{-1}$ C = 9/8 pour (1-ε) → $(1-\varepsilon)_{max}$	Suspension concentrée
Happel	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \exp[4.58\varepsilon]$	Particules sphériques ε ≤ 0 5

I.4.2 Conductivité thermique effective:

Les phases fluides et solides en présence dans le milieu poreux contribuent généralement, avec des proportions différentes, au mode de conduction. De ce fait, la modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective. Cette dernière est fortement dépendante de la porosité et des conductivités thermiques des phases solide et fluide de la matrice poreuse. D'une manière générale les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles en série et parallèle basés sur l'analogie électrique.

- **Modèle série:**

Dans le modèle série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide.

La résistance thermique du fluide est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases.

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{(1+\varepsilon)}{k_s} \tag{I.9}$$

- **Modèle parallèle:**

Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse les deux phases fluide et solide en même temps. La conductivité thermique effective est alors la somme pondérée des taux d'occupation d'espace des conductivités phasiques.

$$k_{eff} = \varepsilon . k_f + (1-\varepsilon) k_s \tag{I.10}$$

Plusieurs modèles pour le calcul de la conductivité effective ont été proposés à commencer. [15]. basé sur une analogie électrique. Ce modèle est développé pour des sphères solides dans le cas où la porosité est suffisamment élevée, dans des particules moins concentrées, ce qui réduit les interférences entre elles, ce modèle est représenté par l'expression suivante:

$$\frac{k_{eff}}{k_f} = \frac{2\varepsilon + (3-2\varepsilon)\frac{k_s}{k_f}}{(3-\varepsilon) + \varepsilon\frac{k_s}{k_f}} \tag{I.11}$$

En 1952 Devries propose une extension du modèle de Maxwell en introduisant l'effet des gradients de températures dans les phases continues et dispersées sous forme d'un rapport dépendant des facteurs de forme de chaque particule.

D'autres discussions de la conductivité effective des structures périodiques sont exposées. [16]. et [17].

[18]. ont proposé une corrélation pour les arrangements en ligne de tubes à section carrée avec un écoulement moyen et un gradient de température oblique et perpendiculaire à l'écoulement. La liste des modèles présentés est loin d'être exhaustive.

[19]. ont présenté une corrélation tenant compte du rayonnement en introduisant dans leur modèle l'émissivité, la température et le diamètre des particules.

[20]. se basant sur la supposition d'un contour convexe arbitraire autour des particules et des contacts entre les différentes particules dans la direction de propagation de la conduction, ont proposé un modèle, ainsi que le modèle [19]. a été vérifié. [21] pour des valeurs de k_s / k_f allant jusqu'à 1000. Pour des valeurs plus élevées, le modèle. [22] semble être celui qui donne la meilleure concordance avec l'expérimentation.

I.5 Modèles d'écoulements dans les milieux poreux:

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, les équations régissant les principes de conservation de quantité de mouvement, d'énergie ou de masse ne peuvent être mises en application qu'après passage à une échelle macroscopique qui permet de faire une équivalence entre un milieu réel désordonné et un milieu continu fictif. La formulation des équations macroscopiques de conservation est obtenue à partir d'équations microscopiques auxquelles sont appliquées des procédures de changement d'échelle.

Nous présenterons, dans ce qui suit, les différents modèles (ces régimes d'écoulements construits à partir du modèle de Darcy avec les différentes extensions tenant compte de certains effets existant dans les milieux poreux.

I.5.1 Modèle de Darcy:

La dynamique des fluides homogènes dans les milieux poreux est décrite par la loi de Darcy établie en 1856 sur des fondements expérimentaux, mise en évidence à partir d'écoulements unidirectionnels sur des colonnes de sables, fait apparaître la proportionnalité entre le gradient de pression appliqué et le débit d'eau traversant la colonne de sable. Depuis, les sciences hydrogéologiques se sont basées, même pour les écoulements multidirectionnels, sur la loi de Darcy. Elle s'écrit:

$$\overrightarrow{\nabla p} = \frac{\mu}{K}\vec{v} + p\vec{g} \qquad \text{(I.12)}$$

Où $\vec{v}$ est la vitesse de filtration, ρ et μ sont, respectivement, la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide ; K la perméabilité du milieu poreux, P le gradient de pression appliqué et $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

La loi de Darcy généralisée est valable pour les écoulements laminaires à faible nombre de Reynolds basé sur le diamètre des pores. Cette loi, qui reste largement utilisée, se trouve cependant insuffisante. D'une part elle ne pas traduire l'influence de la nature du fluide saturant sur l'écoulement, notamment dans ses zones avec ce modèle la condition de glissement du fluide sur les solides est revenue quelle que soit la nature du fluide. D'autre part cette loi ne tient pas compte de l'effet des forces visqueuses dans le cas de milieux poreux fortement perméables et être prend pas compte, non plus, l'effet d'inertie dans le cas où les vitesses sont importantes. Des termes additionnels ont donc été apportés au modèle de Darcy pour remédier aux insuffisances de ce dernier.

I.5.2 Modèle de Brinkman :

Brinkman (1947) a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de dissipation visqueuse dans la loi de Stokes :

$$\overrightarrow{\nabla p} = \frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_{eff}\,\vec{\nabla}^2\,\vec{V} + p\vec{g} \qquad \text{(I.13)}$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy-Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation est le terme de Darcy et le deuxième est appelé le terme de Brinkman. Ce dernier, qui représente les forces visqueuses causées par le cisaillement macroscopique le long des frontières est très significatif dans les régions près des parois solides.

Poulikakos & Renken ont montré l'influence du terme de Brinkman sur le champ dynamique et sur le transfert de chaleur. Pour l'aspect dynamique, ce terme permet de mettre en évidence l'effet « channeling» près des parois solides et aussi de satisfaire la condition d'adhérence aux parois. Quant à l'aspect thermique, l'omission de ce terme influe considérablement sur la valeur du nombre de Nusselt.

La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_{eff}.

Plusieurs auteurs [14], [23].montrent que le terme de Brinkman n'est valable que pour de faibles valeurs de porosité.

Cependant ce terme est retrouvé par la méthode de prise de moyennes en milieu homogène.

I.5.3 Modèle de Forchheimer:

Dans le cas d'un écoulement où les vitesses sont élevées, l'effet d'inertie non linéaire devient important et l'équation de Darcy devient insuffisante pour décrire l'écoulement. Un terme quadratique en vitesse a donc été apporté au modèle de Darcy, par Ward, 1964 :

$$\overrightarrow{\nabla p} = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + fK^{1/2}\rho_f \left|\vec{V}\right|\vec{V} + \rho\vec{g} \qquad \text{(I.14)}$$

Le second terme de la partie droite de cette équation est le terme de Forchheimer, f étant une constante adimensionnelle. Le régime de Darcy est dominant pour un nombre, de Reynolds très faible devant 1. A partir d'un nombre de Reynolds de l'ordre de l'unité commence la transition du régime de Darcy vers le régime de Darcy-Forcheimer pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds.

I.6 Conclusion :

Dans ce premier chapitre les notions relatives aux milieux poreux ont été présentées, le prochain chapitre sera consacré à la formulation mathématique

.

METHODE NUMERIQUE

III.1 Introduction

La procédure numérique retenue pour la résolution du système d'équations couplées cité précédemment, gouvernant la convection thermosolutale dans une cavité carrée par remplie d'une couche poreuse saturée par un fluide binaire avec les conditions limites écrites précédemment, est basée sur la méthode des volumes finis. Cette méthode classique est due à [25].

III.2. Principe de la méthode des volumes finis

III.2.1. Equation différentielle gouvernante

Les phénomènes physiques impliquant l'écoulement d'un fluide, le transfert de chaleur et le transfert de masse, sont gouvernés par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'énergie, des espèces chimiques,... etc. Ces principes sont exprimés par des équations différentielles. Si on note par ϕ la variable dépendante, les équations de conservation possèdent une forme commune, qui est donnée par:

$$\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)=\nabla.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right)+S \qquad \text{(III.1)}$$

Avec:

$\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)$: Terme convectif.

$\nabla.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right)$: Terme de diffusion.

S : Terme source.

Γ : Coefficient de diffusion.

ϕ : EST la variable dépendante généralisée (vitesse, température, Concentration).

III.2.1.1. Equation de continuité

La difficulté majeure dans le calcul du champ de vitesse, réside dans le champ de pression, qui est inconnu. Cependant, ce champ de pression est implicitement spécifié dans l'équation de continuité.

Quand ce champ de pression est substitué dans les équations du mouvement, le champ de vitesse résultant satisfait l'équation de continuité. Le couplage entre le champ de pression et le champ de vitesse est utilisé dans l'élaboration d'une procédure de calcul pour le champ dynamique.

III.2.2. Maillage et volume de contrôle

La méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre de volumes de contrôle. Il existe plusieurs types de maillage, on peut citer le maillage uniforme, le maillage non uniforme et aussi le maillage à zones ; et c'est pour le maillage à zones que nous avons opté dans notre travail avec des pas très petits. La figure III-1 indique la subdivision d'un domaine en volume de contrôle.

La variable dépendante considérée est calculée en ces points. Les équations algébriques définies en ces noeuds, sont obtenues par intégration des équations de conservation à travers les volumes de contrôle, pour chaque noeud.

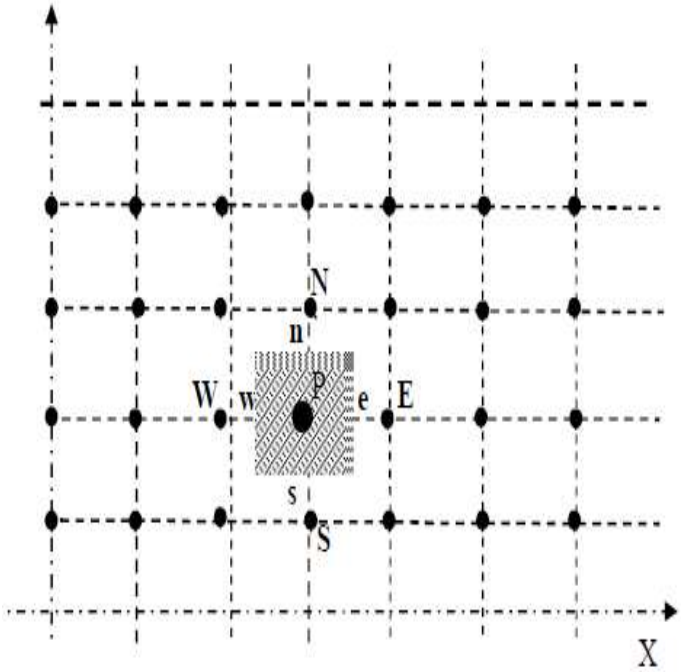


Fig. III.1 : *Subdivision du domaine d'étude en volumes de contrôle.*

III.2.3. Discrétisation des équations de conservation

Pour une situation bidimensionnelle, en régime permanent, l'équation différentielle (III.1) peut s'écrire, en considérant une direction i, sous la forme suivante:

$$\rho.u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \qquad \text{(III.2)}$$

En combinant les flux convectifs et diffusifs (III.1), le flux total (convection-diffusion) J_i s'écrit alors:

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S \tag{III.3}$$

Avec :

$$J_i = \rho . u_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{III.4}$$

Les différents termes des équations de conservation obtenues dans notre cas sont rapportés dans le tableau (III-1).

Tableau. III.1 : *Définition des différents termes des équations de conservation.*

Equation	ϕ	Γ	S
Continuité	1	0	0
Mouvement/X	U	$R_v \Pr$	$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\Pr}{Da} U + Ra \Pr[\theta + NS] \sin\alpha$
Mouvement/Y	V	$R_v \Pr$	$-\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\Pr}{Da} V + Ra \Pr[\theta + NS] \cos\alpha$
Energie	θ	R_k	0
Concentration	S	$1/Le$	0

En intégrant l'équation (III.3) à travers le volume de contrôle représenté dans la figure (III.2), on obtient:

$$J_W A_W - J_e A_e + J_S A_S - J_n A_n = \overline{S} \Delta V = \overline{S} \Delta X \Delta Y \tag{III.5}$$

Dans l'équation (III.5), les quantités Je, w, n, s représentent les flux totaux sur les faces des volumes de contrôle; S est le terme source, et ΔV le volume. Les $A_{e,w,n,s}$ sont les aires de chaque face du volume de contrôle.

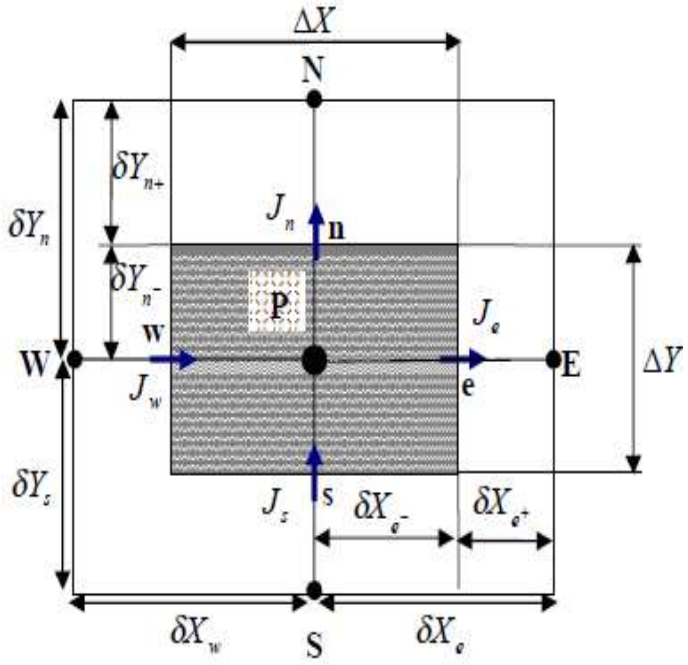


Fig. III.2 : *Volume de contrôle représentatif.*

Avec :

$$J_e = \int_n^s (J_X)_e dY = \left[U\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right]_e \Delta Y \quad \text{(III.6)}$$

$$J_w = \int_n^s (J_X)_w dY = \left[U\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right]_w \Delta Y \quad \text{(III.7)}$$

$$J_n = \int_w^e (J_Y)_n dY = \left[V\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right]_n \Delta X \quad \text{(III.8)}$$

$$J_s = \int_w^e (J_Y)_S dX = \left[V\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right]_s \Delta X \quad \text{(III.9)}$$

III.2.3.1. Flux de diffusion -convection:

Considérons la région entre les points P et E de la figure (III.2).Si un problème unidimensionnel de convection - diffusion est résolu entre les points P et E, un profil exponentiel de ϕ est obtenu comme solution exacte. La solution exponentielle conduit à:

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_E)}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad \text{(III.10)}$$

Où le nombre de Peclet, P_e est donné par:

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \tag{III.11}$$

$F_e = \rho U_e A_e$ est le débit d'écoulement, et D_e la conductance de diffusion.

Le coefficient de diffusion Γ_e est évalué par une moyenne harmonique [24] à travers le volume de contrôle. L'expression de D_e est alors:

$$D_e = A_e\left(\frac{(\delta X_{e^-})}{\Gamma_P} + \frac{(\delta X_{e^+})}{\Gamma_E}\right)^{-1} \tag{III.12}$$

Les distances δX_{e^-} et δX_{e^+} [24] sont représentées sur la figure (III.2).

III.2.3.2. Simplification de l'expression du flux:

L'équation (III.12) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$J_e = F_e\phi_p + \{D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]\}(\phi_P - \phi_E) \tag{III.13}$$

Avec

$$A(|P_e|) = \frac{|P_e|}{(\exp(|P_e|) - 1)} \tag{III.14}$$

Le calcul des exponentielles est assez long, de plus il n'est pas exact pour les situations bidimensionnelles et tridimensionnelles avec terme source. Pour ces raisons, des approximations pour l'expression du flux ont été utilisées [24].

III.2.3.3. Linéarisation du terme source:

Souvent le terme source S dépend de la variable ϕ. Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_P. La méthode de la tangente [24] est recommandée dans la linéarisation du terme source; elle consiste à écrire:

$$\overline{S} = \overset{*}{S} + \left[\frac{dS}{d\phi}\right]^* (\phi_P - \phi_E) \tag{III.15}$$

la formule de linéarisation peut s'écrire alors:

$$\overline{S} = Sc + S_P\phi_P \tag{III.16}$$

S_P est le coefficient de ϕ_P est Sc est la partie de S qui ne dépend pas explicitement de ϕ_P .Le symbole * est utilisé pour noter la valeur de ϕ_P à une itération donnée. Il est souhaitable lors de la linéarisation que SP soit négatif, car un SP positif peut causer une divergence.

Les valeurs des termes sources linéarisés (Sc et S_P) pour les différentes équations sont résumées dans le tableau (III.2).

Tableau. III.2 : *Expressions des termes sources linéarisés (Sc et Sp) pour les différentes équations.*

Equation	ϕ	*Sc*	*Sp*
Continuité	1	0	0
Mouvement/X	U	$-\frac{\partial P}{\partial X}+Ra\,\mathrm{Pr}[\theta+NS]$	$-\frac{\mathrm{Pr}}{Da_i}$
Mouvement/Y	V	$-\frac{\partial P}{\partial Y}+Ra\,\mathrm{Pr}[\theta+NS]$	$-\frac{\mathrm{Pr}}{Da_i}$
Energie	θ	0	0
Concentration	S	0	0

III.2.3.4. Equation finale de discrétisation:

L'intégration de l'équation de continuité donne :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \qquad \text{(III.17)}$$

Où F_e, F_w, F_n et F_s sont les débits volumiques à travers les faces du volume de contrôle.
Multiplions l'équation (III-10) par ϕ_p elle devient :

$$F_e\phi_P - F_w\phi_P + F_n\phi_P - F_s\phi_P = 0 \qquad \text{(III.18)}$$

D'autre part, la linéarisation du terme source donne :

$$\overline{S} = Sc + S_P\phi_P \qquad \text{(III.19)}$$

La combinaison entre les équations (III-5) et (III-11) donne :

$$\left(J_e - F_e\phi_P\right) - \left(J_w - F_w\phi_P\right) + \left(J_n - F_n\phi_P\right) - \left(J_s - F_s\phi_P\right) = \left(Sc + S_P\phi_P\right)\Delta X\Delta Y \qquad \text{(III.20)}$$

Sachant que :

$$J_e - F_e\phi_P = \phi_E\left(\phi_P - \phi_E\right) \qquad \text{(III.20a)}$$

$$J_w - F_w\phi_P = \phi_W\left(\phi_W - \phi_P\right) \qquad \text{(III.20b)}$$

$$J_n - F_n\phi_P = \phi_N\left(\phi_P - \phi_N\right) \qquad \text{(III.20c)}$$

$$J_S - F_s\phi_P = \phi_S(\phi_S - \phi_E) \quad \text{(III.20d)}$$

On obtient l'équation discrétisée:

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + b \quad \text{(III.21)}$$

Avec:

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad \text{(III.21a)}$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [-F_w, 0] \quad \text{(III.21b)}$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [-F_s, 0] \quad \text{(III.21c)}$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad \text{(III.21d)}$$

$$b = Sc\Delta X\Delta Y \quad \text{(III.21e)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P\Delta X\Delta Y \quad \text{(III.21f)}$$

Le symbole [a, b] représente le miximum entre a et b et $A(|P_i|)$ la fonction d'interpolation qui diffère d'un schéma à un autre.

Avec :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta X_e}\Delta Y \quad , F_e = U_e\Delta Y \quad , \quad P_e = \frac{F_e}{D_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta X_w}\Delta Y \quad , F_w = U_w\Delta Y \quad , \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad \text{(III.22)}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta Y_n}\Delta X \quad , F_n = V_n\Delta X \quad , \quad P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta Y_s}\Delta X \quad , F_s = V_s\Delta X \quad , \quad P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

D_i, F_i et P_i représentent respectivement la diffusion, le débit volumique et le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion.

L'équation (III.14) peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b \quad \text{(III.23)}$$

L'indice nb note les noeuds voisins de P, et la sommation est faite à travers tous les noeuds voisins (e, w, n, s).

III.2.3.5.Méthode de résolution des équations algébriques:

La méthode de résolution adopté dans la présente étude est la technique ligne par ligne; qui combine entre une méthode directe (algorithme de Thomas) et une méthode itérative (Gauss Seidel) [24-27], est utilisée pour la résolution des équations algébriques. Elle consiste à appliquer l'algorithme de Thomas pour trouver les valeurs de S pour une direction et une position données. Les valeurs de ϕ des noeuds des positions avoisinantes sont estimées lorsque toutes les positions seront considérées, une itération est accomplie par la technique ligne par ligne. Le processus peut être répété en choisissant les positions dans l'autre direction.

III.2.4. Considérations pour le champ dynamique

L'analyse des équations gouvernantes pour les composantes de vitesse u_i révèle que ces dernières ne peuvent être obtenues directement par la résolution des équations du mouvement. En effet, ces équations contiennent le gradient de pression $-\frac{\partial P}{\partial x_i}$ qui est un terme source important, lequel n'est pas exprimé en terme de u_i ou d'autres variables. Cependant, la pression est indirectement spécifiée à travers l'équation de continuité. Une autre difficulté surgit aussi pour les équations du mouvement et de continuité. Si les vitesses et les pressions sont calculées aux même noeuds, plusieurs champs physiques irréels peuvent être considérés comme solutions. L'un des remèdes pour cet inconvénient est le maillage décalé proposé ; [25].

III.2.4.1.Notion de maillage décalé:

La figure (III.3) montre une partie d'un maillage adapté au cas bidimensionnel. Dans le maillage décalé, les composantes de vitesse sont portées sur les faces des volumes de contrôle. Toutes les autres variables ϕ, y compris la pression, sont calculées aux nœuds principaux.

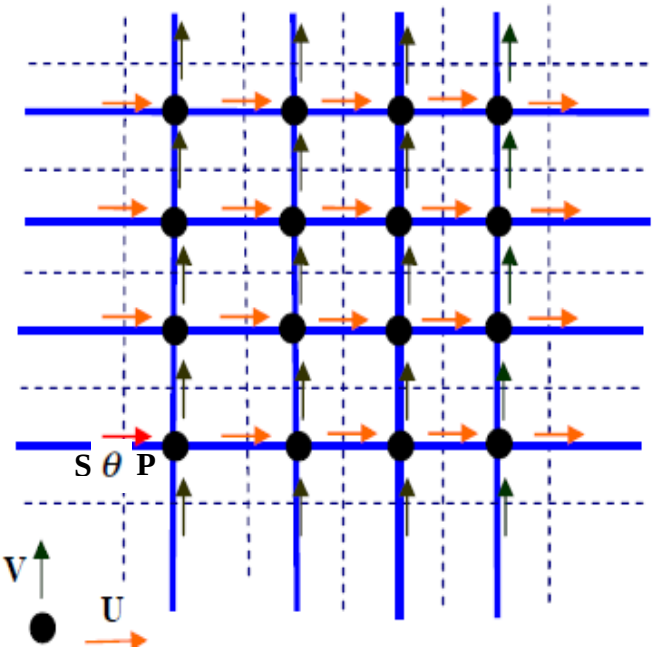


Fig. III.3 : *Représentation d'un maillage décalé.*

III.2.5. Discrétisation des équations dynamiques

III.2.5.1. Equations du mouvement:

Les volumes de contrôle correspondant à U et V sont mentionnés dans la figure (III.4) l'équation du mouvement discrétisée au noeud (e) s'écrit alors:

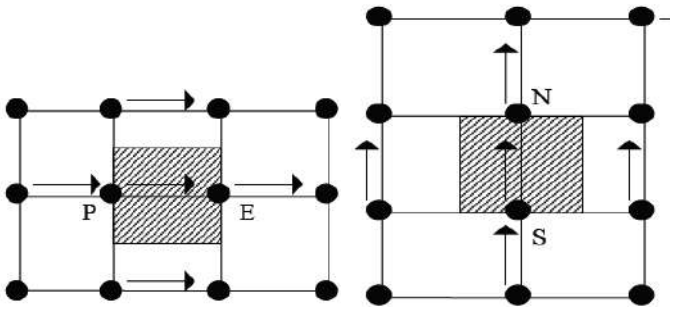


Fig. III.4 : *Volume de contrôle pour U et V.*

L'intégration des deux équations de quantité de mouvement suivant les directions X et Y donne :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e \qquad \text{(III.24)}$$

$$a_n V_n = \sum a_{nb} V_{nb} + b + (P_P - P_n) A_n$$

A_e, A_n représentent les surfaces sur les quelles agissent les forces de pression.

$(P_P - P_E)A_e$, $(P_P - P_E)A_n$: Sont les forces de pression agissant sur les deux faces verticale et horizontale.

La résolution nécessite la connaissance de la pression.

Le champ de vitesse obtenu ne satisfera l'équation de continuité que si la pression est correcte.

Au choix initial $P*$ correspond la solution $U*, V*$

$$a_e U_e^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*)A_e$$

$$a_n V_n^* = \sum a_{nb} V_{nb}^* + b + (P_P^* - P_N^*)A_n \quad \text{(III.25)}$$

III.2.5.2.Correction des vitesses et pression

L'objectif est de corriger la pression estimée P^* telle que la vitesse obtenue U^*, V^* s'approchera progressivement de la valeur qui satisfera l'équation de continuité.

Soit P la pression exacte :

$$\begin{aligned} P &= P^* + P' \\ U &= U^* + U' \\ V &= V^* + V' \end{aligned} \quad \text{(III.26)}$$

P': Correction de pression et U', V' :correction des vitesses.

Nous avons:

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E)A_e \quad \text{(III.27)}$$

$$a_e U_e^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*)A_e \quad \text{(III.28)}$$

Faisons la soustraction entre ces deux équations :

$$a_e U_e' = \sum a_{nb} U_{nb}' + (P_P' - P_E')A_e \quad \text{(III.29)}$$

L'une des hypothèses simplificatrices introduites par Patanker est de supposer que le terme $\sum a_{nb} U'_{nb\,e}$ est négligeable.

$$a_e U_e' = (P_P' - P_E')A_e \quad \text{(III.30)}$$

Où: encore $U_e' = (P_P' - P_E')d_e$ (III.31)

L'équation (III-26) représente la formule de correction de vitesse, avec $d_e = \frac{A_e}{a_e}$

Donc : $U_e = U_e^* + (P'_P - P'_E)d_e$ (III.32)

De la même manière $V_e = V_e^* + (P'_P - P'_N)d_n$ (III.33)

Avec: $d_n = \frac{A_n}{a_n}$

III.2.5.3.Equation de correction de pression

Le problème maintenant est comment trouver la correction de pression P' ?

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad \text{(III.34)}$$

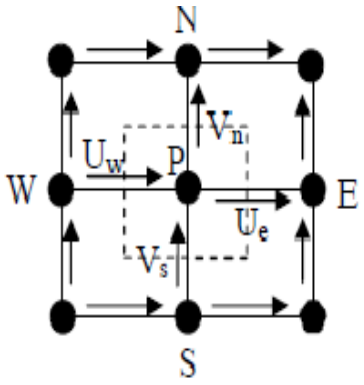


Fig. III.5 : *Volume de contrôle lié à P.*

Intégration sur un volume de contrôle autour de P donne :

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_s)\Delta X = 0 \quad \text{(III.35)}$$

Substitution des vitesses par $U = U^* + U'$, $V = V^* + V'$

D'où :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad \text{(III.36)}$$

$$a_E = d_e \Delta Y \quad \text{(III.36a)}$$

$$a_W = d_w \Delta Y \quad \text{(III.36b)}$$

$$a_N = d_n \Delta X \quad \text{(III.36c)}$$

$$a_S = d_s \Delta X \quad \text{(III.36d)}$$

$$b = (U_w^* - U_e^*)\Delta Y + (V_s^* - V_n^*)\Delta X \quad \text{(III.36f)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{(III.36e)}$$

Le terme b devrait tendre vers zéro à la convergence.

III.3.Algorithme SIMPLER

(SIMPLER: Semi **I**mplicit **M**ethod for **P**ressure **L**inked equation **R**evised), l'algorithme est développé pour permettre d'améliorer la vitesse de convergence.

- **Equation de pression**

Equation du mouvement :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e \tag{III.37}$$

Où

$$U_e = \left(\frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e} \right) + (P_P - P_E) d_e \tag{III.38}$$

On définit $\hat{U}_e$ pseudo vitesse comme :

$$\hat{U}_e = \left(\frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e} \right)_e \tag{III.39}$$

Donc $$U_e = \hat{U}_e + (P_P + P_E) d_e \tag{III.40}$$

D'une manière similaire:

$$V_e = \hat{V}_e + (P_P - P_N) d_n \tag{III.41}$$

- **L'équation de continuité :**

L'intégration de l'équation de continuité sur un volume de contrôle donne lieu à :

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_s)\Delta X = 0 \tag{III.42}$$

Substitutions U_i et V_i par $\hat{U}_i + (P_P - P_E) d_i$ et $\hat{V}_i + (P_P - P_N) d_i$ tel que i représente e, w, n, et s. D'où l'équation de pression :

$$a_P P_P = a_W P_W + a_E P_E + a_S P_S + a_N P_N + b \tag{III.43}$$

Avec:

$$a_E = d_e \Delta Y \tag{III.43a}$$

$$a_W = d_w \Delta Y \tag{III.43b}$$

$$a_N = d_n \Delta X \tag{III.43c}$$

$$a_S = d_s \Delta X \tag{III.43d}$$

$$b = \left(\hat{U}_w - \hat{U}_e\right)\Delta Y + \left(\hat{V}_s - \hat{V}_n\right)\Delta X \quad \text{(III.43e)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{(III.43f)}$$

Remarque :

Aucun terme n'a été négligé pour aboutir à l'équation de pression.

Dans le cas de la convection naturelle, le champ dynamique est couplé avec le champ thermique. Les différentes étapes de l'algorithme Simpler, dans ce cas, sont les suivants :

1- Choix initial des vitesses U^* ,V^* et de température θ^* de soluté S^* .

2- Calculer les coefficients des équations du mouvement et obtenir les pseudo vitesses

$$\hat{U}_e = \frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e}$$

3- Calculer les coefficients dans les équations de pression et résoudre celles-ci pour obtenir P.

4- Utiliser cette pression comme choix initial P^* et résoudre les équations du mouvement pour obtenir U^*, V^*.

5-Calculer le terme b et résoudre l'équation de correction de pression pour obtenir P'.

6- Corriger les vitesses $U_i = U_i^* + \left(P_P' - P_i'\right)$mais non pas la pression.

7-Résoudre les équations d'énergie et solutale pour obtenirθ, S.

8- Prendre ces valeurs comme nouveau choix initial et retourner à l'étape 2.

9- Répéter le processus jusqu'à convergence.

III.4 Technique de sous-relaxation

Les coefficients de sous relaxation sont utilisés dans les équations algébriques pour éviter la divergence du système fortement non linéaire.

Elle consiste à diminuer la variation de la grandeur physique ϕ d'une itération à une autre par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α_ϕ .

Toutes les équations de conservation sont écrites après discrétisation sous la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad \text{(III.44)}$$

Si nous notons ϕ_P^* la valeur de ϕ_P à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$\phi_P = \phi_P^* + \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} \right] - \phi_P^* \qquad \text{(III.45)}$$

Le terme entre parenthèses de cette équation représente le changement survenu à ϕ_P pendant une itération. Cette variation peut être alors amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation α_ϕ de la manière suivante :

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha_\phi \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} \right] - \phi_P^* \qquad \text{(III.46)}$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre 0 et 1. Plus ils sont faibles, plus la sous relaxation est forte et la convergence lente. Mais plus ils sont élevés, plus la sous relaxation est faible avec des risques d'instabilités et divergence du processus itératif.

Il n'existe pas de règles pour choisir les coefficients de sous relaxation, cela peut dépendre de la nature du problème, du nombre et de la taille des volumes de contrôle ainsi que de la procédure itérative choisie. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour aboutir à la convergence du processus itératif.

III.5 Critère de convergence

On dit qu'un processus itératif atteint la convergence lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif sur les variables dépendantes ϕ. Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif appelé critère de convergence qui dépend de la nature du problème et des objectifs du calcul.
Un critère de convergence est imposé en terme d'erreur relative pour les variables U, V, P, et θ . Et qui décrit pour chaque variable :

$\max\left|\frac{\phi-\phi^*}{\phi^*}\right| \le 10^{-4}$,ainsi que pour le terme b, avec $|b| \le 10^{-5}$

III.6 Schémas d'interpolation

Dans les coefficients de l'équation algébrique (III-15), nous avons rencontré le terme $A(|P_i|)$qui représente la fonction d'interpolation utilisée pour l'évaluation de la variable dépendante ϕ à une interface du volume de contrôle.

$A(|P|)$ Prendra une fonction selon le schéma choisi et qui est récapitulée dans le tableau III-3.

Tableau. III.3 : *Les expressions de* $A|P|$ *selon le schéma d'interpolation.*

Schéma	$A\|P\|$
Centré	1-0.5$\|P\|$
Upwind	1
Hybride	$[0,(1-0.5\|P\|)]$
Power-Law	$[0,(1-0.5\|P\|)^5]$
Exponentiel	$\frac{P}{\exp\|P\|-1}$

Limitations :

- ☒ **Le schéma centré :** il est limité aux problèmes à faible nombre de Peclet, $|P| \leq 2$
- ☒ **Le schéma Upwind :**

- non approprié pour le faibles nombre de $|P|$
- Pour les grandes valeurs de $|P|$**,** la diffusion est surestimée (normalement $\frac{d\phi}{dX} \to 0$).

- ☒ **Schéma hybride :** Le schéma hybride est une combinaison de deux schémas précédents, il se réduit à l'approximation centrée lorsque $|P| < 2$, et devient identique au schéma Upwind lorsque $|P| > 2$. L'erreur maximale est pour $|P| \approx 2$
- ☒ **Schéma Power-law** : Ce schéma est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion, il s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte. Dans notre cas, nous avons utilisé le schéma Power-law.

III.7 Application de la méthode des volumes finis à notre problème

On rappelle les équations qui régissent le mouvement:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \qquad \text{(III.47)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left[U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{P_r}{D_a}U + R_v P_r\left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right] + R_a P_r[\theta + NS] \qquad \text{(III.48)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left[U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{P_r}{D_a}V + R_v P_r\left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right] + R_a P_r[\theta + NS] \qquad \text{(III.49)}$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \qquad \text{(III.50)}$$

$$U\frac{\partial S}{\partial X}+V\frac{\partial S}{\partial Y}=1/\mathrm{Le}.\left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\right) \qquad \text{(III.51)}$$

III.7.1 Discrétisation des équations du mouvement

III.7.1.1. Equation du mouvement en X

Comme on l'a déjà signalé, l'équation du mouvement dans la direction X sera intégrée dans le volume de contrôle décalé vers la droite, figure (III.6). D'après cette figure, on peut noter que les nœuds w', P' et e' correspondent respectivement aux noeuds P, e et E. L'intégration de l'équation du mouvement dans la direction X à travers le volume de contrôle de la figure (III.6) et après arrangement donne:

$$a_{P'}U_{P'}=a_{E'}U_{E'}+a_{W''}U_{W'}+a_{N'}U_{N'}+a_{S'}U_{S'}+\left(P_P-P_E\right)\Delta Y'+b' \qquad \text{(III.52)}$$

Les coefficients a_i sont définis dans les équations (III.14), alors que les expressions des conductances diffusives et les débits volumiques sont donnés par:

$$\left.\begin{aligned} D_{e'}&=\left(\frac{\Gamma}{\delta X'}\right)_{e'}\Delta Y' & F_{e'}&=U_{e'}\Delta Y' \\ D_{w'}&=\left(\frac{\Gamma}{\delta X'}\right)_{w'}\Delta Y' & F_{w'}&=U_{w'}\Delta Y' \\ D_{n'}&=\left(\frac{\Gamma}{\delta Y'}\right)_{n'}\Delta X' & F_{n'}&=V_{n'}\Delta X' \\ D_{s'}&=\left(\frac{\Gamma}{\delta Y'}\right)_{s'}\Delta X' & F_{s'}&=V_{s'}\Delta X' \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.53)}$$

Avec $\Gamma=R_v\,\mathrm{Pr}$, $b'=Sc\Delta X'\Delta Y'$ et les valeurs de Sc et Sp sont données dans le tableaux (III.2)

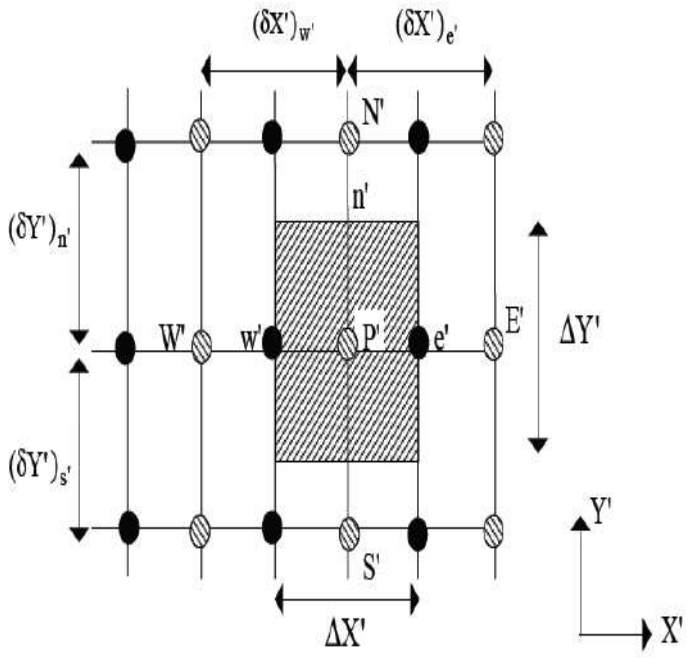


Fig. III.6 : *Schéma du volume de contrôle pour U.*

III.7.1.2. Equation du mouvement en Y

L'intégration de l'équation du mouvement dans la direction Y est faite dans le volume de contrôle décalé vers le haut, figure (III.7), et les nouveaux noeuds seront désignés par P", E", W" et N" et les interfaces par e",w", n" et s". D'après cette figure, on peut noter que les noeuds s", P", et n" correspondent respectivement aux noeuds P, n et N.

En utilisant les mêmes démarches d'intégration qu'en X, la discrétisation de l'équation du mouvement dans la direction Y est obtenue comme suit:

$$a_{P''}U_{P''} = a_{E''}U_{E''} + a_{W''}U_{W''} + a_{N''}U_{N''} + a_{S''}U_{S''} + (P_P - P_N)\Delta Y'' + b'' \qquad \text{(III.54)}$$

Où les coefficients a_i " sont définis dans les équations (III.14), et les expressions des flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} D_{e''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X''}\right)_{e''} \Delta Y'' & F_{e''} &= U_{e''}\Delta Y'' \\ D_{w''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X''}\right)_{w''} \Delta Y'' & F_{w''} &= U_{w''}\Delta Y'' \\ D_{n''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y''}\right)_{n''} \Delta X'' & F_{n''} &= V_{n''}\Delta X'' \\ D_{s''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y''}\right)_{s''} \Delta X'' & F_{s''} &= V_{s''}\Delta X'' \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.55)}$$

Avec $\Gamma = R_v \Pr$, et le terme source est donné par:

$$b'' = Sc\Delta X''\Delta Y'' \quad \text{(III.56)}$$

La valeur de $\theta_{P''}$ et $S_{P''}$ aux interfaces sera calculée de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} \theta_{P''} &= fe\,\theta_P + (1-fe)\theta_N \\ S_{P''} &= feS_P + (1-fe)S_N \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.57)}$$

et fe est un facteur d'interpolation [24] définis par:

$$fe = \frac{(\delta X'')_{n''}}{2(\Delta Y'')} \quad \text{(III.58)}$$

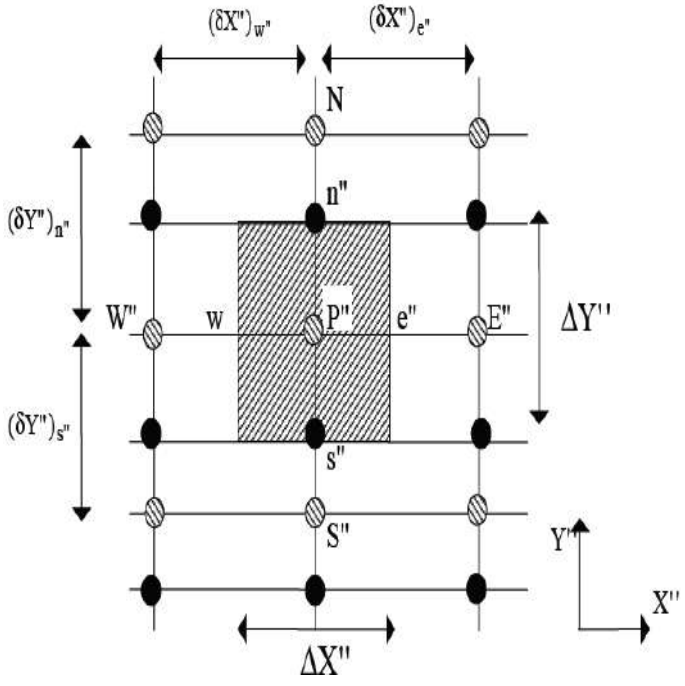


Fig. III.7 : *Schéma du volume de contrôle pour V.*

III.7.2. Equation de correction de pression

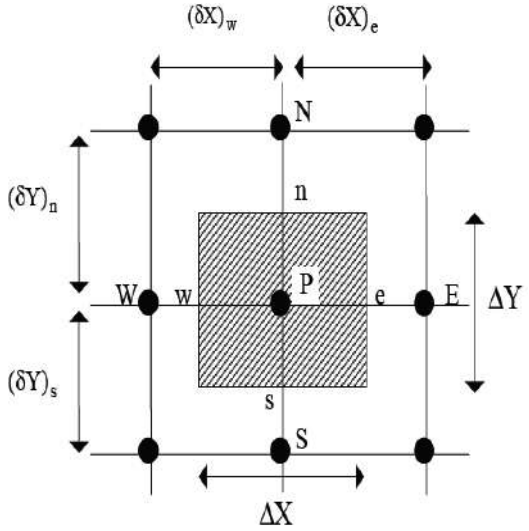


Fig. III.8 : *Schéma du volume de contrôle pour P.*

L'intégration de l'équation de continuité pour le volume de contrôle de la figure (III.8) donne:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial U}{\partial X} dXdY + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial V}{\partial Y} dXdY = 0 \qquad \text{(III.60)}$$

soit après intégration et simplification, et en utilisant les mêmes démarches que celles faites dans c), l'équation précédente prend la forme:

$$a_P P'_P = a_E P'_P + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b_{P'} \qquad \text{(III.61)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \qquad \text{(III.62)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta Y \\ a_W &= d_w \Delta Y \\ a_N &= d_n \Delta X \\ a_S &= d_S \Delta Y \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.63)}$$

Avec:

$$\left.\begin{aligned} d_e &= \frac{A_e}{a_e} = \frac{\Delta Y}{a_e} \\ d_w &= \frac{A_w}{a_w} = \frac{\Delta Y}{a_w} \\ d_n &= \frac{A_n}{a_n} = \frac{\Delta X}{a_n} \\ d_s &= \frac{A_s}{a_s} = \frac{\Delta X}{a_s} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.64)}$$

Avec

$$b_{P'} = \left(U_w^* - U_e^*\right)\Delta Y + \left(V_s^* - V_n^*\right)\Delta X \quad \text{(III.65)}$$

L'indice (*) désigne la valeur des variables de l'itération précédente. On fait le même raisonnement pour obtenir le champ de pression, on obtient alors :

$$a_P P_P = a_W P_W + a_E P_E + a_S P_S + a_N P_N + b_P \quad \text{(III.66)}$$

Avec :

$$\left.\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta Y \\ a_W &= d_w \Delta Y \\ a_N &= d_n \Delta X \\ a_S &= d_s \Delta X \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.67)}$$

Avec :

$$b_P = \left(\hat{U}_w - \hat{U}_e\right)\Delta Y + \left(\hat{V}_s - \hat{V}_n\right)\Delta X \quad \text{(III.68)}$$

Avec:

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{(III.69)}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_{P'} &= \frac{\sum_{nb'} a_{nb'} U_{nb'}}{a_{P'}} \\ \hat{V}_{P''} &= \frac{\sum_{ab''} a_{nb''} V_{nb''}}{a_{p''}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.70)}$$

III.7.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'intégration de l'équation de l'énergie est faite dans le volume de contrôle correspondant aux noeuds principaux, figure (III.8).

$$\int_s^n \int_w^e U \frac{\partial \theta}{\partial X} dX dY + \int_s^n \int_w^e V \frac{\partial \theta}{\partial Y} dX dY = R_k \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) dX dY \quad \text{(III.71)}$$

Après intégration et arrangement des termes, l'équation de l'énergie discrétisée s'écrit comme:

$$a_P \theta_P = a_W \theta_W + a_E \theta_E + a_S \theta_S + a_N \theta_N \quad \text{(III.72)}$$

Où les coefficients a_i sont définis dans les équations (III.14), les flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} D_e &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_e \Delta Y & F_{e'} &= U_{e'}\Delta Y \\ D_w &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_w \Delta Y & F_w &= U_w \Delta Y \\ D_n &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_n \Delta X & F_n &= V_n \Delta X \\ D_s &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_s \Delta X & F_s &= V_s \Delta X \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.73)}$$

$$\Gamma = R_k$$

III.7.4. Discrétisation de l'équation du soluté

L'intégration de l'équation du soluté est faite dans le volume de contrôle correspondant aux noeuds principaux, figure (III.8).

$$\int_s^n \int_w^e U \frac{\partial S}{\partial X} dXdY + \int_s^n \int_w^e V \frac{\partial S}{\partial Y} dXdY = \frac{1}{Le} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \right) dXdY \qquad \text{(III.74)}$$

Après intégration et arrangement des termes, l'équation de l'énergie discrétisée s'écrit comme:

$$a_P S_P = a_W S_W + a_E S_E + a_S S_S + a_N S_N \qquad \text{(III.75)}$$

Où les coefficients a_i sont définis dans les équations (III.14), les flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} D_e &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_e \Delta Y & F_{e'} &= U_{e'}\Delta Y \\ D_w &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_w \Delta Y & F_w &= U_w \Delta Y \\ D_n &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_n \Delta X & F_n &= V_n \Delta X \\ D_s &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_s \Delta X & F_s &= V_s \Delta X \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.76)}$$

$$\Gamma = \frac{1}{Le}$$

III.2. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons exposé la procédure numérique choisie afin de calculer les transferts couplés de chaleur et de soluté dans la cavité. Pour cela, on exploite la méthode de volume finis, avec un schéma en loi de puissance (Power Law). L'algorithme SIMPLER est adopté pour résoudre le système d'équations algébriques et traiter le couplage pression-vitesse. Dans le prochain chapitre nous présentons la validation du code de calcul ainsi que les résultats obtenus avec leurs descriptions et leurs discussions.

Formulation Mathématique

II.1. Introduction :

Le transport d'un constituant d'une solution fluide d'une région de haute concentration à une région de concentration plus faible est appelé transfert de masse. On peut comprendre son mécanisme en faisant une analogie avec la transmission de chaleur. La masse est diffusé dans une direction ou le gradient de concentration existant va en diminuant et cesse lorsque le gradient de concentration s'annule. Dans ce chapitre, nous présentons brièvement les notions de base du transfert de masse utilisées dans notre étude.

Le transfert de masse peut s'effectuer en phase gazeuse ou en phase liquide, soit par diffusion moléculaire dans des fluides au repos (la diffusion solutale), soit par des courants dans des fluides en écoulement (la convection solutale).

Les mouvements de convection de double- diffusion ou convection thermosolutale sont générés par les gradients de densité qui sont dus à la fois au champ de température, et au champ de concentration peut apparaître dans un fluide ayant deux (ou plusieurs) composants diffusant dans le mélange à différentes vitesses et qui contribuent au gradient vertical de densité. Ce phénomène de convection double diffusive apparaît dans des situations réelles diverses : croissance de cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, processus de séchage, processus de fusion-solidification de mélanges binaires, stockage des gaz liquide ou oxydation des surfaces métalliques, diffusion souterraines des polluants, enfouissement souterrain des déchets radioactifs, stockage de certains produits agricoles, extraction de pétrolières… On estime actuellement que ce phénomène des transferts convectifs de masse et de chaleur constitue un domaine très actif et d'importants travaux ont été effectués encore très récemment tant au nivaux expérimental que numérique. La diversité des configurations et le nombre important de paramètre qui interviennent dans ce type d'écoulement nous donne un grand choix de domaine d'études.

La plupart des études existantes traitent de la convection d'origine thermique et sont basées sur le modèle de Darcy. De plus ces études supposent le caractère isotrope et homogène des matériaux poreux. Dans beaucoup de cas, la loi de Darcy se trouve inadéquate et l'anisotropie géométrique des grains ou des fibres est rencontrée dans de nombreux milieux poreux, comme les formations rocheuses, les sols sédimentaires, les matériaux d'isolation thermique et les structures dendritiques formes lors de la solidification de mélanges à

plusieurs composants. La majorité des travaux antérieurs qui se sont intéressés à la description des phénomènes de convection double diffusive traitent de la convection naturelle thermosolutale dans les milieux formes de couches poreuses horizontales ou verticales thermiquement et/ou hydrauliquement anisotropes. Des études thermiquement et/ou hydrauliquement anisotropes récentes prennent en compte le caractère anisotrope et hétérogène des milieux poreux. L'absence d'études qui traitent de la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte constitué de milieux poreux multi-couches avec différentes perméabilités dans des cavités carrée inclinée nous a motivé pour rechercher des résultats concernant ce type de cavité. Notre étude porte plus particulièrement sur l'influence, à des nombres de Rayleigh modérés, de certains paramètres géométriques et physiques, nombre de Lewis sur la structure de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse.

Dans un premier temps nous donnons quelques notions fondamentales sur le transfert de masse et son couplage avec la convection thermique. Nous présentons par la suite notre modèle mathématique et la méthode numérique de résolution.

Nous nous intéressons à la convection double diffusive générée dans une cavité carrée inclinée, infiniment longue, constituée d'un milieu poreuses multi-couches (deux couches de milieu poreux), de propriétés physiques différents. Avec des conditions limites classiques (conditions de Dirichlet en température et concentration sur les parois verticales) ; et en régime stationnaire.

II.2. Le Transfert de masse par diffusion moléculaire :

Le transfert de masse par diffusion moléculaire est analogue à la transmission de chaleur par conduction. Il peut avoir lieu dans un fluide au repos mais également dans un fluide en écoulement. Si l'on considère par exemple une cavité contenant deux gaz A et B à la même température, même pression et séparés initialement par une cloison Figure II.1 :

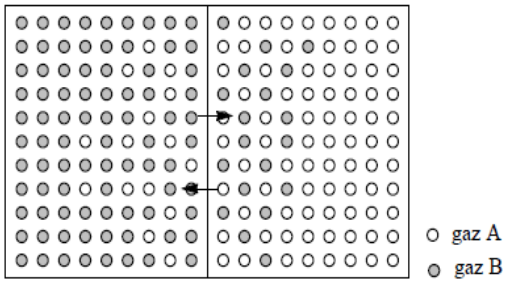


Fig. II.1 : *Transfert de masse par diffusion dans un mélange gazeux.*

Un transfert de masse s'effectue, dés qu'on met ces deux gaz en contact, dans le sens décroissant de la concentration.

En régime permanent, la concentration en chaque point ne varie pas avec le temps, et suivant la loi de Fick :

$$\overrightarrow{\dot{m}_A} = -D_{AB}\overrightarrow{grad}C_A \qquad \text{(II.1)}$$

Où $\overrightarrow{\dot{m}_A}$ est la densité de flux massique en kg/s m_2.

Cette loi est appelée la loi de Fick et relie la densité du flux massique m_A échangé par diffusion solutale au gradient de concentration et à la diffusivité massique D_{AB} du composant A dans B.

Remarquons que la loi de Fick est analogue à celle de Fourrier qui détermine la densité du flux thermique transféré par conduction dans un milieu homogène de conductivité λ:

$$\vec{q} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}T \qquad \text{(II.2)}$$

$\vec{q}$: est la densité du flux thermique exprimée en W/m^2

λ : est la conductivité thermique exprimé en W/m.K

T : est la température exprimée en K

La diffusion solutale peut être influencée par des paramètres extérieurs, tel que les gradients de température (effets de Soret, effet Dufour), les gradients de pression ou les réactions chimiques. Dans notre étude, nous supposerons que ces effets extérieurs sont négligeables et En diffusion solutale, on travaille généralement sur le concept de concentration d'un élément dans un mélange. Cette concentration représente la masse de l'élément e dans le mélange de volume V_d et elle est exprimée en kg de solvant (l'élément e) par m^3 de solution (le mélange).

$$C_e = \frac{m_e}{V_d} = \rho_e \qquad \text{(II.3)}$$

La densité de flux massique locale d'un élément e dans un mélange s'exprime.

$$\vec{\dot{m}}_e = \rho_e \vec{V}_e \quad \text{(II.4)}$$

Ou V_e représente la vitesse des particules du composante dans un système de coordonnées fixes. La vitesse moyenne massique $\vec{V}$ est alors définie comme le rapport de la somme des flux massiques élémentaires à la densité totale du mélange.

$$\rho.\vec{V} = \vec{\dot{m}} = \sum \vec{\dot{m}} = \rho_e \vec{V}_e \quad \text{(II.5)}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum \rho_e \vec{V} \quad \text{(II.6)}$$

On définit alors le flux massique de l'élément e relativement par rapport à un repère se déplaçant à la vitesse massique moyenne par :

$$\vec{\dot{M}}_e = \rho_e \left(\vec{V}_e - \vec{V}\right) \quad \text{(II.7)}$$

Si $\vec{\dot{m}}$ est le flux absolu de l'élément e, $\vec{\dot{M}}$ est le flux diffus ; il représente le mouvement de l'élément relativement au mouvement moyen du mélange et on peut écrire :

$$\vec{\dot{m}}_e = \vec{\dot{M}}_e + \rho_e \vec{V} \quad \text{(II.8)}$$

L'équation(II.8) nous montre qu'il ya deux contributions pour le flux absolu de l'élément e, l'une due à la diffusion (mouvement de l'élément e par rapport au mouvement moyen du mélange) et l'autre due au mouvement moyen du mélange.

II.2.1 Equations de la diffusion massique

L'équation de conservation de la masse globale du mélange s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e \vec{V}\right) = 0 \quad \text{(II.9)}$$

Soit, encore, en distinguant la contribution de chacun des éléments : l'équation relative à l'ensemble des éléments du mélange s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\sum \rho_e \vec{V}_e\right) = 0 \quad \text{(II.10)}$$

L'équation de la conservation de la masse pour chaque élément e du mélange sur volume de contrôle est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e \vec{V}_e\right) = 0 \quad \text{(II.11)}$$

En tenant compte de l'équation (II.7), l'équation (II.11) s'écrira :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e \vec{V}\right) = -\nabla \vec{M}_e \quad \text{(II.12)}$$

En remplaçant le flux massique M_e par son expression donnée par la loi de FicK (II.1) et en introduisant le concept de la concentration défini par l'équation (II.3), on obtient l'équation de la diffusion de chaque constituant e du mélange.

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \vec{V}.\nabla C_e = D\Delta C_e \quad \text{(II.13)}$$

Dans notre étude le mélange ne contient qu'un seul élément, dans tout ce qui va suivre on omettra l'indice e pour la concentration (II.4) comme suit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V}.\nabla C = D\Delta C \quad \text{(II.14)}$$

Lorsque l'écoulement du fluide est assez faible pour contribuer au transfert de mase, l'équation (II.15) s'écrit sous la forme réduite suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla T \quad \text{(II.15)}$$

De même cette diffusivité est analogue à la conductivité thermique (exprimée en kj/kg.K), si on compare la loi de Fick (II.1) et la loi Fourrier (II.2) donnant respectivement la densité du flux solutal et la densité du flux thermique.

II.3. Couplage avec la convection thermique :

Pour expliquer le comportement de deux écoulements dus simultanément à la diffusion thermique et à la diffusion solutale, prenons l'exemple simple d'une plaque plane verticale maintenu à une température T_P et baignant dans un fluide à une température $T\infty$. Si $Tp > T\infty$, le fluide prés de la paroi s'échauffe ce qui entraine une diminution de sa densité, et par conséquent un mouvement ascendant s'établit le long de la paroi, du fait de la poussée d'Archimède. C'est le cas de la convection thermique pure. Supposons maintenant que ce même fluide contient un constituant d'une concentration $C\infty$ et que la plaque est soumise à une concentration Cp de ce même constituant, quatre cas peuvent intervenir suivant la nature

de fluide et des conditions aux limites, en effet le comportement du fluide le long de la paroi est influencé par le signe d'expansion solutal du constituant (soluté) β_C et par le taux de concentration de la paroi par rapport à la solution. Selon ces paramètres les forces de volumes thermiques et solutales peuvent coopérer ou s'opposer suivant les configurations suivantes :

- Le cas le fluide prés de la paroi est moins concentré ($Cp<C\infty$), sa densité plus faible entrainement un mouvement ascendant, cet écoulement solutal qui est du à un gradient de concentration coopère thermique si $\beta_C>0$ et s'oppose $\beta_C<0$.
- Le cas le fluide prés de la paroi est plus concentré ($C_P>C\infty$), il devient plus lourd et descend le long de la plaque, cet écoulement se trouve confronté à écoulement thermique si $\beta_C>0$ mais s'entraident si $\beta_C<0$.

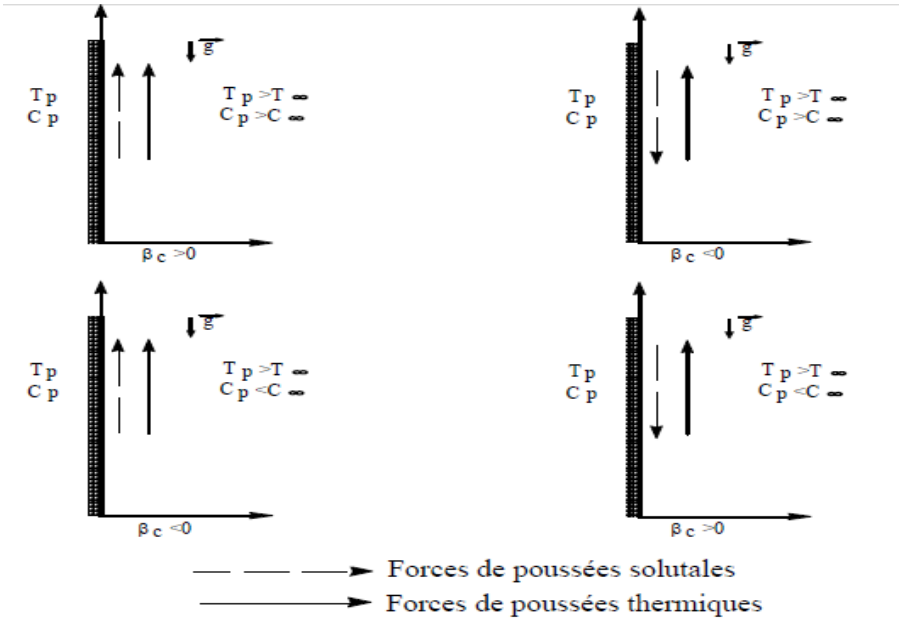


Fig. II.2 : *Couplage thermosolutale le long d'une plaque verticale.*

Bejan présente des résultats concernant ce même type d'écoulement naturel d'un fluide le long d'une plaque verticale soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration.

Nous considérons dans notre étude que le transfert de chaleur et de masse ne sont couplé que par la vitesse de l'écoulement et n'interagissent pas entre eux directement. Dans le cas contraire nous serons en présence de l'effet de Soret et Dufour. Ce phénomène apparaît lorsque les gradients de température et de concentration sont élevés.

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées.

Le travail qui fait l'objet de cette étude concerne justement la convention double diffusive générée dans une cavité carrée remplie par deux couches de milieux poreux disposées soit horizontalement ou verticalement. Par une modélisation numérique, les résultats des calculs sont présentés et commentes en termes de lignes de courant, des isothermes,des isoconcentrations et des transferts thermiques moyens.

II.4 Les hypothèses de travail:

Le modèle physique étudie est présenté dans la **(figure. II.3)**.La couche poreuse occupe l'espace formé par cavité carrée.

Quelque hypothèse sont considérées pour l'étude de modèle physique.

- Ecoulement laminaire 2D et stationnaire.
- La couche poreuse est considéré homogène isotrope est saturée par le même fluide.
- Les propriétés thermo-physiques sont considérés constantes
- Hypothèse de Boussineq admise.
- Un équilibre thermodynamique local a lieu entre le fluide et le milieu poreux.
- Le modèle de Darcy-Brinkman est adapte.les parois inferieure et supérieure de la cavité adiabatiques et imperméables alors que les faces latérales sont maintenues à des conditions de températures et de concentrations constantes.

II.4.1 Le modèle physique :

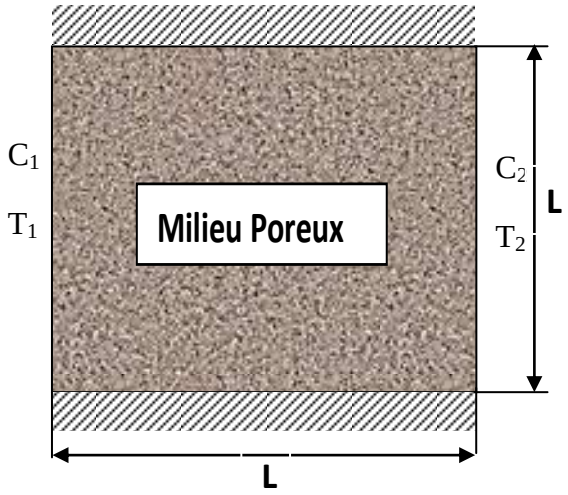


***Fig. II.3* :** *Géométrie du problème.*

Compte tenu des hypothèses citées précédemment, les équations gouvernantes s'écrivent :

II.4.2 Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{(II.16)}$$

II.4.3 Equation de conservation de la quantité de mouvement.

- **Suivant l'axe x :**

$$\rho_f\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial x}-\varepsilon^2\frac{\mu_f}{k}u+\varepsilon^2\mu_f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right).\varepsilon^2\left(\beta_T\left(T-T_{ref}\right)+\beta_c\left(C-C_{ref}\right)\right)\rho_f.g \quad \text{(II.17)}$$

- **Suivant l'axe y :**

$$\rho_f\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\varepsilon^2\partial p}{\partial y}-\varepsilon^2\frac{\mu_f}{k}v+\varepsilon^2\mu_f\left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}\right)+\varepsilon^2\left(\beta_T\left(T-T_{ref}\right)+\beta_c\left(C-C_{ref}\right)\right)\rho_f.g \quad \text{(II.18)}$$

II.4.4 Equation de l'énergie :

$$(\rho.g)_f\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}\right] \quad \text{(II.19)}$$

II.4.5 Equation de la concentration :

$$\left[u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}\right]=D\left[\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}\right] \quad \text{(II.20)}$$

Les conditions aux limites se traduisent sous forme mathématique comme suit :

$$Pour\ y\ =\ 0\ et\ 0\ \leq\ x\ \leq\ L \qquad u=v=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0 \quad et \quad \frac{\partial C}{\partial y}=0 \quad \text{(II.21)}$$

$$Pour\ y\ =\ 1\ et\ 0\ \leq\ x\ \leq\ L \qquad u=v=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0 \quad et \quad \frac{\partial C}{\partial y}=0 \quad \text{(II.22)}$$

$Pour\ x\ =\ 0\ et\ 0\ \leq\ y\ \leq\ L\ u=v=0$ et

$$T\ =\ T1 \quad et\ C\ =\ C1 \quad \text{(II.23)}$$

Pour x = L :

$$0\ \leq\ x\ \leq\ L \qquad u=v=0$$

$$T\ =\ T2 \quad et\ C\ =\ C2 \quad \text{(II.24)}$$

En procédant à une mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes celles-ci s'écrivent :

II.4.6 Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \qquad \text{(II.25)}$$

II.4.7 Equation de conservation de la quantité de mouvement :

- **Suivant l'axe de X :**

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left[U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{P_r}{D_a}U + R_v P_r\left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right] + R_a P_r[\theta + NS] \qquad \text{(II.26)}$$

- **Suivant l'axe de Y :**

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left[U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{P_r}{D_a}V + R_v P_r\left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right] + R_a P_r[\theta + NS] \qquad \text{(II.27)}$$

II.4.8 Equation de l'énergie :

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) \qquad \text{(II.28)}$$

II.4.9 Equation de concentration :

$$U\frac{\partial S}{\partial X} + V\frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{1}{L_e}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\right) \qquad \text{(II.29)}$$

Les paramètres apparaissant dans les équations sont définis dans la nomenclature

Conditions aux limites adimensionnelles :

$$Pour: \quad Y = 0 \quad et \quad 0 \leq X \leq 1 \quad U = V = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = 0 \qquad \text{(II.30)}$$

$$Pour: \quad Y = 1 \quad et \quad 0 \leq X \leq 1 \quad U = V = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = 0 \qquad \text{(II.31)}$$

$$Pour: \quad X = 0 \quad et \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad U = V = 0$$

$$\theta = 0{,}5 \quad , \quad S = 0{,}5$$

$$Pour: \quad X = 1 \quad et \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad U = V = 0$$

$$\theta = -0{,}5 \quad , \quad S = -0{,}5$$

La mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes à donné naissance à un groupement de nombre adimensionnel tel que nombre de Darcy (D_a) pour la couche poreuse, le nombre de Rayleigh (R_a) ainsi que le nombre Prandtl (P_r) et le nombre de Lewis (Le).

II.5 Conclusion :

Une fois les équations régissant le problème posées, avec les conditions aux limites associées, et mises sous leurs formes adimensionnelles, et étant donné leur présentation sous forme d'équations aux dérivées partielles ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique. Celle-ci permettra de transformer en équations aux dérivées en équations algébrique plus simples à résoudre. Ceci fera l'objet de prochain chapitre.

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1. Introduction :

Dans le présent chapitre sont présentés les résultats de la simulation numérique du transfert de masse générée dans une cavité carrée renfermant une couche poreuse.

Dans toutes les simulations de cette étude, nous considérons une solution aqueuse comme fluide saturant la couche poreuse (Pr=7). La porosité, le rapport des conductivités thermiques de la couche poreuse, le nombre de Lewis et le rapport des forces du volume (N) sont respectivement fixés à 0.8, 1, 10 et 10.

Par ailleurs, le rapport de la viscosité effective à la viscosité fluide ($R\nu$) est pris égal à l'unité. Nous nous sommes placés dans le cas d'un écoulement convectif où la contribution des forces de volume dues à la concentration vient s'ajouter à celle des forces de volume dues à la température. C'est la convection double diffusive avec un rapport des forces de volume N>0 (convection thermosolutale coopérante) et nous avons choisi un rapport des forces de volume élevé N=10 le cas de la convection essentiellement d'origine solutale (N>>1).

L'étude de l'effet de variation des paramètres sus cités, sur les transferts de matière est analysée. Nous avons pris une large étendue de la perméabilité K qui varie de 10^{-9} à 10^{-1}, le nombre de Rayleigh varie de10 à 10^{6}, le nombre de Lewis vraie de 1 à 100, le rapport des forces de volume N de 0 à 15.

Cette étude concerne du transfert de masse générée dans une cavité poreuse la couche poreuse est considérée homogène et isotrope et saturée par le même fluide. Les parois latérales sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables.

IV.2. Modélisation numérique :

L'ensemble des équations aux dérivées partielles gouvernant la situation physique, est traduit en équations algébriques par utilisation de la méthode des volumes finis [24]. L'algorithme SIMPLER a été adopté pour la séquence des étapes de résolution. Le schéma en loi de puissance a été retenu pour l'évaluation des termes convectifs. Le système d'équations algébriques est résolu itérativement par l'algorithme de Thomas. Un maillage décalé non uniforme, de 82×82 nœuds, a été retenu. Un critère de convergence est imposé en termes d'erreur relative pour les variables U, V, P, θ et S en terme de résidu de masse dans l'équation de correction de pression. Les calculs sont stoppés pour une erreur relative inférieure à 10^{-4} et un résidu de masse inférieur à 10^{-5}.

IV.3. Sensibilité du code de calcul et Validation :

Pour trouver le nombre de noeuds adéquat, nous avons effectué plusieurs exécutions dans le cas où l'enceinte est munie d'une couche de milieu poreux. En tenant compte du temps de convergence et la précision de calcul, on a opté pour un nombre de noeuds (82×82), qui donne un bon compromis entre le temps d'exécution et la précision des calculs. Un exemple de calcul est représenté dans le tableau IV.1.

Tableau. IV.1 : *Sensibilité du code de calcul au maillage cas horizontale pour* $Ra=10^8$, $R_K=0.1$, $Pr=7$, $N=1$, $Le=10$, $\varepsilon= 0.8$.

Maillage	22x22	42x42	62x62	82x82	102x102
Nu	11.23	11.86	11.90	11.86	11.83
Sh	45.25	54.63	55.65	55.68	55.61

Le code de calcul est validé par rapport à plusieurs cas limites de la littérature [28-30]. Une très bonne concordance est à noter. Les résultats comparatifs sont résumés dans le tableau IV.2 en termes des valeurs du nombre de Nusselt et Sherwood moyen

Tableau. IV.2 : *Comparaison des nombres de Nusselt et Sherwood pour N=0, Da=10^{-7}.*

	Ra_m	100	200	400
Bennacer et al [28]	Nu Sh	3.11 13.24	4.96 19.83	7.77 29.36
Trevisan et Bejan [29]	Nu Sh	3.27 15.61	5.61 23.23	6.69 30.37
Goyeau et al [30]	Nu Sh	3.11 13.25	4.96 19.86	7.77 28.41
Présent Code	Nu Sh	3.11 13.32	4.96 19.98	7.77 29.55

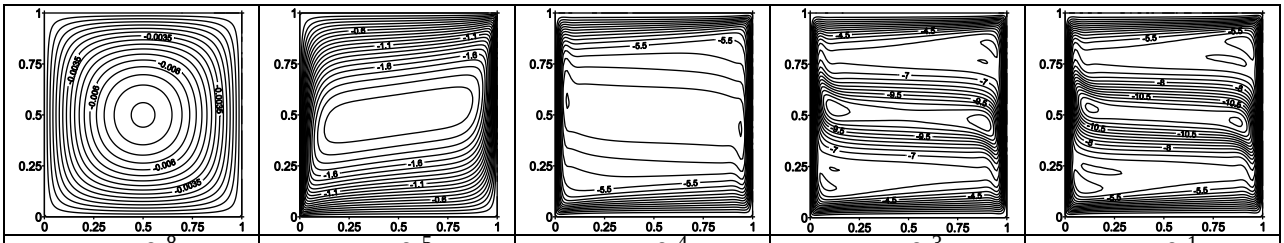
En premier lieu nous avons analysé l'effet de la perméabilité sur le transfert de matière indépendamment des autres paramètres du problème. Ensuite nous avons étudié les effets, sur les transferts massiques, du nombre de Rayleigh, du nombre de Lewis (Le) et du rapport des forces du volume (N). Les résultats de la simulation numérique sont représentés sous forme de courbes et englobent l'allure des lignes de courant et des isoconcentrations. Les transferts massiques sont traduits par les nombres de Nusselt et Sherwood moyens.

Les structures d'écoulement et des isoconcentrations pour différentes valeurs de nombre de Rayleigh sont présentées dans les figures 1 à 4. Pour une situation présentant une faible valeur de K, les structures d'écoulement est de forme d'une cellule rotative remplit entièrement la cavité et une résistance significative à l'écoulement dans la couche poreuse est à noter. Ce comportement est dû à la faible perméabilité de cette couche poreuse. Par contre la circulation du fluide dans la couche est plus favorable et la convection thermosolutale est plus prononcée quand la perméabilité de couche poreuse est plus élevée. En effet, les isoconcentrations sont déformées et un gradient de concentration intensif prend place dans la couche. Pour les faibles perméabilités les isoconcentrations sont parallèles aux parois verticales, indiquant que les transferts tendent vers une situation diffusive.

Pour une valeur de K modéré, les lignes de courant sont de forme elliptique prolongée les isoconcentrations sont déformées et prennent place sur toute la cavité, la couche limite massque tend à se former, localisée respectivement sur les parties basses et hautes des parois verticales gauche et droite pour Ra est égal à 10^4. Une couche limite solutale prend place sur les parois verticales pour Ra est égal à 10^6 en plus le nombre de Lewis est élevé (Le=10). En effet, un resserrement des isoconcentrations sur les parois verticales de la cavité est notable.

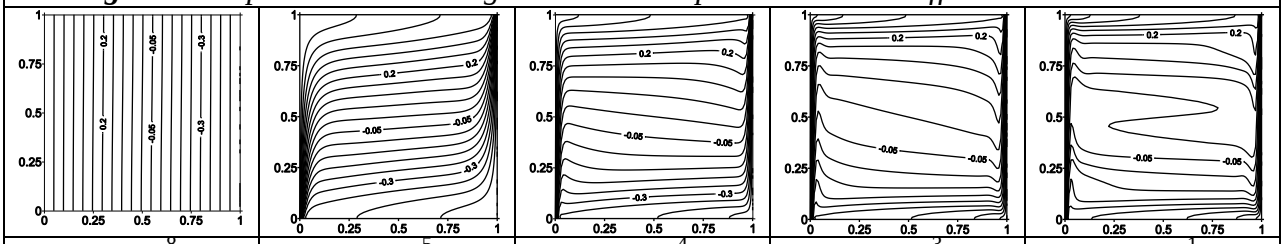
le nombre de Lewis

En passant à un K plus élevé, la structure des lignes de courant est très affectée. En effet, la convection thermosolutale est bien prononcée dans la couche poreuse. La perméabilité est très favorable au transfert massique; la couche limite solutale prenne place sur les parois verticales de la cavité. On note la non dépendance des structures d'écoulement et des isoconcentrations avec la perméabilité K. En effet, les structures restent les mêmes. Par ailleurs, ce comportement induit de transfert massique est asymptotique.



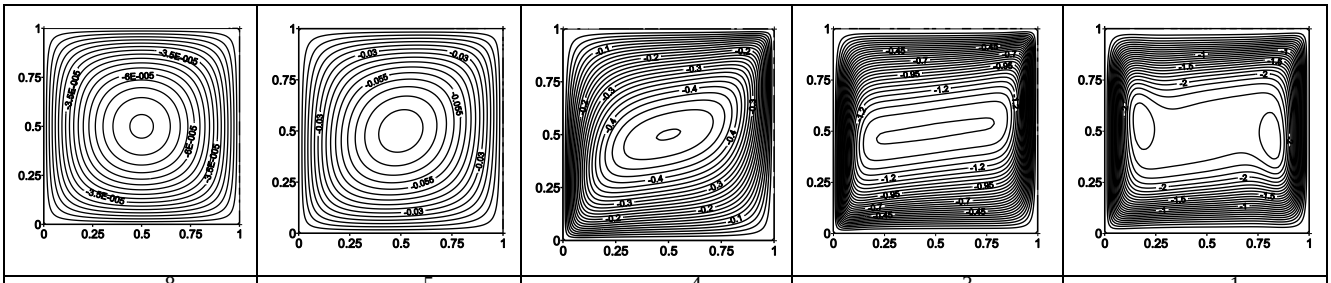
$K=10^{-8}$	$K=10^{-5}$	$K=10^{-4}$	$K=10^{-3}$	$K=10^{-1}$

Fig.IV.1 : *Représentation des lignes de courant pour $Ra=10^6$ et différentes valeurs de K*



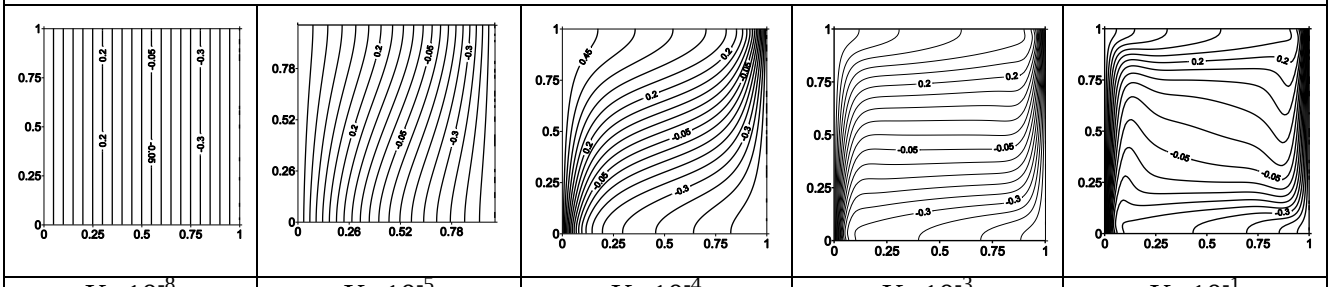
$K=10^{-8}$	$K=10^{-5}$	$K=10^{-4}$	$K=10^{-3}$	$K=10^{-1}$

FigIV.2 : *Représentation des isoconcentrations pour $Ra=10^6$ et différentes valeurs de K*



$K=10^{-8}$	$K=10^{-5}$	$K=10^{-4}$	$K=10^{-3}$	$K=10^{-1}$

FigIV.3: *Représentation des lignes de courants pour $Ra=10^4$ et différentes valeurs de K*



$K=10^{-8}$	$K=10^{-5}$	$K=10^{-4}$	$K=10^{-3}$	$K=10^{-1}$

FigIV.4: *Représentation des isoconcentrations pour $Ra=10^4$ et différentes valeurs de K*

L'évolution de transfert massique de l'ensemble de la cavité poreuse en fonction de la perméabilité K pour les différentes valeurs de Ra est présentée dans la figure.VI.5. Les effets de K sur le transfert est notable. Pour les faibles valeurs de K, les transferts sont principalement diffusifs. Ce comportement est dû à la résistance quand la couche poreuse est présente une faible perméabilité. L'écoulement convectif est alors de moins en moins prononcé avec la décroissance de K ce qui induit un régime diffusif sur l'ensemble de la cavité.

Pour des valeurs de K modéré, le transfert massique s'intensifié et tend vers des valeurs limites maximales constantes et indépendantes de K. Ces valeurs correspondent à un écoulement en couche limite. La variation de la perméabilité met donc en évidence trois régimes de transfert massique, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de K, un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de K (pour K modéré) et un régime complètement couche limite indépendant de K quand ce dernier est élevé. La transition entre les deux régimes convectifs se fait pour une valeur de raccordement notée K^{Cr}. Cette valeur critique est d'autant plus élevée que Ra est faible.

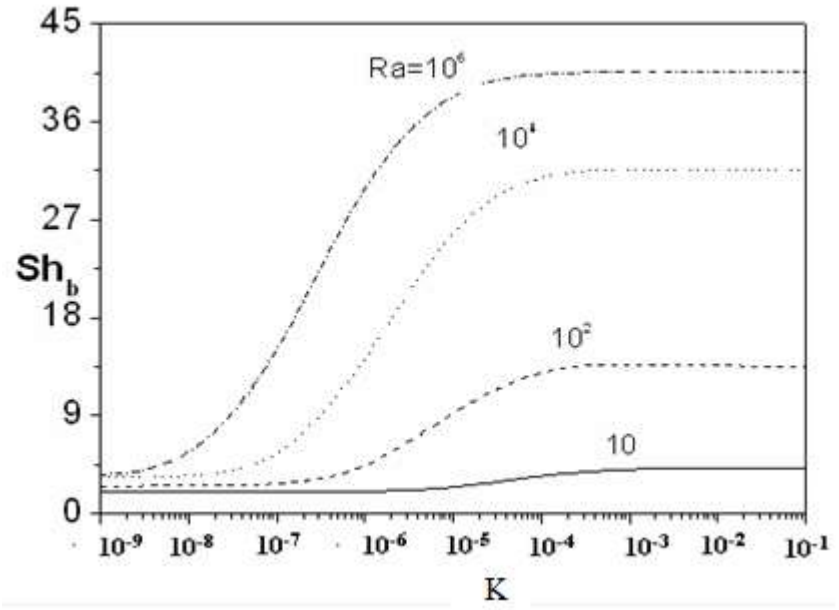


Fig.IV.5 : *Représentation de transfert de masse en fonction de la perméabilité pour différentes valeurs de nombre de Rayleigh.*

IV.4. Effet du nombre Lewis sur les transferts :

Les variations des nombres de Sherwood moyen en fonction de K pour différentes valeurs de (Le) sont présentées dans la figure IV.6. Le transfert de masse croit nettement avec Le pour une valeur de perméabilité K fixé.

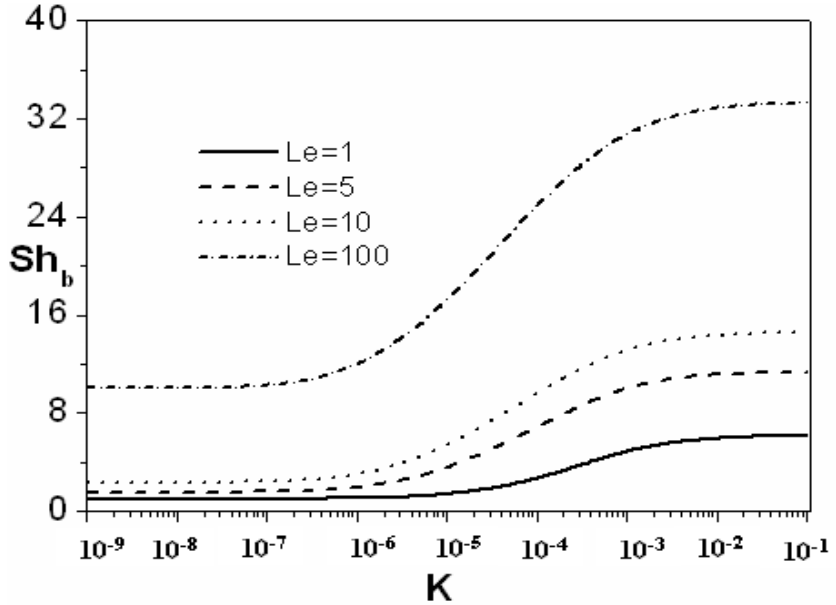


Fig.IV.6 : *Représentation de transfert de masse en fonction de la perméabilité pour différentes valeurs de nombre de Lewis.*

IV.5. Effet du rapport des forces de poussée (N) :

L'évolution des nombres de Sherwood moyen en fonction de K pour différentes valeurs de N est présentée dans la figure 7. La figure montre que pour une valeur fixée de N, le transfert massique croit nettement avec N.

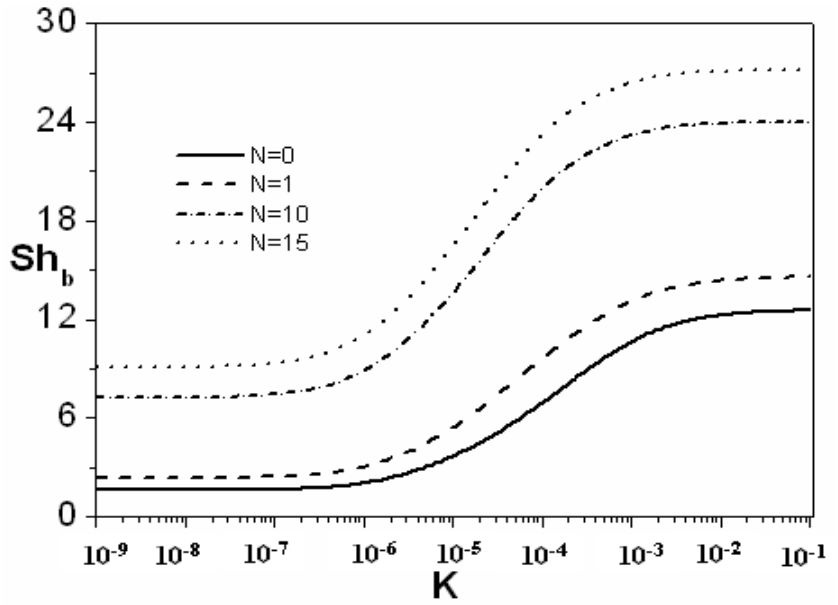


Fig.IV.7 : *Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction de K pour différentes valeurs N .*

IV.6. Conclusion :

Nous avons traité le transfert de masse dans une enceinte poreuse renfermant une couche poreuse. Cette étude numérique a permis d'apporter un certain nombre de résultats correspondant à une gamme de paramètres très variée. Nous avons montré à travers cette mémoire que la variation de la perméabilité de la couche poreuse a un effet très appréciable sur la structure d'écoulement et le transfert de masse.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE

Nous avons présenté dans ce mémoire une étude numérique qui a permis d'apporter un certain nombre de résultats correspondant à une gamme de paramètres très variée. Ces résultats aideront sans doute à mieux comprendre les phénomènes des écoulements dans les milieux poreux. Nous avons montré à travers ce travail que la variation de la perméabilité de la couche poreuse a un effet très appréciable sur la structure d'écoulement et le transfert de masse, par ailleurs trois régimes de transferts ont été identifiés, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de perméabilité, un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de K (pour K modéré) et un autre régime complètement couche limite indépendant de K (pour K élevés).A la lumière de ces résultats tout à fait remarquables, nous pouvons dire que la modélisation numérique basé sur la méthode classique volume fini est l'un des outils parfaitement fiables et performants, pour l'étude et estimation du transfert massique dans les milieux poreux.

Cette étude de transfert massique trouve son champ d'application dans plusieurs domaines, notamment dans le milieu industriel, où parmi les nombreux problèmes de génie des procédés que rencontrent l'ingénieur et le pharmacien travaillant dans les industrie chimique, pétrolières, pharmaceutiques, cosmétiques et agroalimentaires, l'écoulement d'un ou plusieurs fluides à travers un milieux poreux fixe ou mobile tient une place prépondérante. Il suffit de citer les principaux procédés unitaires du génie des procédés

(Séchage, fluidisation, sédimentation, cristallisation, distillation, échange d'ions, extraction liquide-liquide….) pour voir le nombre pléthorique de canalisations, de colonnes, de cuves et de réacteurs au sein desquels le ou les procédés sont réalisés.

De même, pour les industries de la santé, la formulation nécessite la conception, le développement, la production et l'écoulement de matériaux poreux ou non poreux.

En perspective, tout en estimant avoir atteint notre objectif tracé pour cette étude, il serait intéressant de mener d'autres études sur la convection massiques notamment en ce qui concerne :

Le développement d'une méthode généralisé qui permet l'estimation de transfert de masse dans les milieux poreux multicouche de n'importe quelle forme de particule. Toujours dans cette perspective l'étude de transfert de masse pour les multiphasiques et en régime transitoire et en trois dimension.

NOMENCLATURE

a	Diffusivité thermique.	$[m^2s^{-1}]$
C	Concentration dimensionnelle du soluté.	
D_a	Nombre de Darcy.	
k	Conductivité thermique.	[w/m.c]
K	Perméabilité du milieu poreux.	$[m^2]$
L	dimension de la cavité.	[m]
Le	Nombre de Lewis.	
N	Rapport des forces de volume.	
p	Pression.	[Pa]
P	Pression adimensionnelle.	
Pr	Nombre de Prandtl.	
Ra	Nombre de Rayleigh.	
R_v	Rapport de la viscosité effective à celle du fluide.	
Sh_b	Nombre de Sherwood moyen.	
S	Concentration adimensionnelle.	
u	Vitesse axiale.	[m/s]
U	Vitesse adimensionnelle suivant la direction X, $U = uL/a$	
v	Vitesse transversale.	[m/s]
V	Vitesse adimensionnelle suivant la direction Y, $V = vL/a$	
x	Coordonnée axiale.	[m]
X	Coordonnée horizontale adimensionnelle, $X = x/L$	
y	Coordonnée transversale.	[m]
Y	Coordonnée verticale adimensionnelle, $Y = y/L$	

Symboles grecs

β_T	Coefficient d'expansion thermique.	$[K^{-1}]$

β_S	Coefficient d'expansion solutale	
ρ	Masse volumique.	[Kg m^{-3}]
μ_{eff}	Viscosité équivalente dans le modèle de Brinkman.	[Kg m^{-1} S^{-1}]
ν	Viscosité cinématique.	[m^2 s^{-1}]
ε	Porosité.	
τ	Tortuosité	
θ	Température adimensionnelle, $\theta = \left(T - (T_0 + T_L)/2\right)/\left(T_0 - T_L\right)$	
ϕ	Variable dépendente	
Γ	Coefficient de diffusion	
ΔT	différence de température, $\Delta T = T_0 - T_L$.	[°C]
Δc	Différence de concentration, $\Delta c = c_0 - c_L$	

Indices

b	Moyen
E, e	Est
eff	Effectif
f	Fluide
N, n	Nord
Nb	Nœuds voisins
P	Nœud principal
S, s	Sud

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **J. Bear, Y. Bachmat,***Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media, Springer,p. 553,1990.*

[2] **T.W.Engler,***Properties of reservoir rocks,P.E. New Mexico Thech. 2000.*

[3] **A.E.Scheidrgger,***The physics of flow through porous media, 3rd University ofToronto Press, 3rd edition 1974.*

[4] **Hunt etTien,***Convection in Porous Media, 1987.*

[5] **Chaowdhuryet Chang,***Optical Processes in Microcavities,P 254,1989.*

[6] **F. A. L.Dullien,***Porous Media: Fluid Transport And Pore Structure, Academic Press New York (1979).*

[7] **O.Reynolds,***Papers On Mechanical And Physical Subjects, Cambridge University Press (1900).*

[8] **A.L. Dullien,***Porous media, fluid transport and pore structure, Academic Press, 2nd Edition (1992)*

[9] **P.C.Carman and J. Kozeny,***The Determination of the Specific Surface Area of Powder, Int. J. Soo. Them.Ind, vol 57,pp.225-234, 1937*

[10] **H.Rumpf and A.R.Gupte,***Einfusse und Korngrossenverteilung in widerstandsdesetz der porenstromung, Chimieing. Tech., Vol. 34,pp. 367-375.1971.*

[11] **S. Ergun,***Chem. Process Eng. London.pp, 48-89 ,1952.*

[12] **Rohsenowet Hernett,***Handbook of heat transfer, McGraw-Hill, p. 1504,1973.*

[13] **H.C.Brinkman,***A Caculation of the Viscous Force Exerted by a flowing Fluid on a Dense Swarm of Particules, Applied Science Research.A.1,pp.27-34,1947.*

[14] **T.S.Lundgren,***Slow flow trough stationary random beds and suspensions of sphere, J. Fluid Mech.,Vol. 51, pp.273-299,1972.*

[15] **J.C.Maxwell,***Atreatse on electrical and magnetism, Clarendon press, Oxford, England, 3rd Edition,Vol.1,pp.440-445,1904.*

[16] **M. Quintard et S. Whitaker,***Advances in heat transfer ,pp. 369-464,1993.*

[17] **G.A.Ochoa-Tapia et S.Whitaker,***Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogenous fluid-1, theoretical development,Int. J. Heat Mass Transfer, n vol. 38,pp. 2635-2646, 1994.*

[18] **H. Kuwahara,** *Research Center for Atom Technology (JRCAT), Tsukuba 305, Japan Department of Applied Physics, University of Tokyo, 1996.*

[19] **Kunii et Smith,***Fluidization: Proceedings of the Second Engineering Foundation Conference,pp.390-413,1960.*

[20] **P.Zehneret E.U. Schlunder,***Wanneleitfahigheit von SchlunderbeiMabigenTemperaturen, Chemie-Ing. Tech., Vol. 42, pp. 933-941, 1970.*

[21] **M. R. Prasad et al,***Effects of oxyradicals on oxymyoglobin. Deoxygenation, haem removal and iron release,pp. 731–736,1989.*

[22] **Hadley,***Teaching Methods, p. 479. 1986.*

[23] **Durlofskyet Brady,***Dynamic simulation of hydrodynamically interacting particle,Volume 180 / July 1987, pp 21-49 1986.*

[24] **J. P. Roache,***Résolution numérique des équations aux derives partielles.*

[25] ***Patankar, S.V.,****Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc-Graw-Hill, New York, 1980.*

[26] **A. Gourdin et M. Boumhart,***Méthodes numériques appliqués.*

[27] **D. Euvrard,***Analyse numérique en mécanique des fluides.*

[28] **R. Bennacer,***A.Tobbal et H.Beji, Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse anisotrope : formulation de Darcy-Brinkman. Rev. Energ. Ren.vol.5, pp. 1-21, 2002.*

[29] **O. V. Trevisan et A. Bejan,** *Mass and heat transfer by high Rayleigh number convection in a porous medium heated from below. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, pp. 2341-2356 (1987).*

[30] **B. Goyeau, J. P. Songbe and D. Gobin,***Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy-Brinkman formulation, Int. J. Heat MassTransfer, 39, 1363-1378, 1996.*