RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE DE MASTER

Analyse Mathématique et Applications

Méthode de Galerkin et Applications

Par : **Amira Tamartat**

Soutenu publiquement le 20 juin 2026, devant le jury composé de :

H. AYADI	MCA	Univ. Médéa	**Président**
R. SOUILAH	MCA	Univ. Médéa	**Encadreur**
N. BENAICHOUCHE	MCB	Univ. Médéa	**Examinateur**

Année Universitaire : 2025/2026

إهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى أختيَّ العزيزتين داليا وسارة، اللتين كانتا مصدر إلهامي وقوتي، واللتين فعلتُ كل ما فعلتُه من أجلهما. إلى من شاركتاني لحظات التعب والتعبير عن الفرح، وإلى من كان دعمهما ومحبتُهما سنداً لي في كل خطوة من مسيرتي.

وإلى إبراهيم، الشخص الذي ساندني ووقف إلى جانبي طيلة السنوات الست الماضية، وكان خير معين لي في أوقات الصعوبة والتحديات، فكان حضوره ودعمه دافعاً للاستمرار وتحقيق هذا الإنجاز.

كما أتقدم بخالص الشكر والتقدير إلى أستاذي المشرف، الدكتور صويلح رزاق، الذي لم يبخل عليَّ بعلمه وتوجيهاته ونصائحه القيمة، وساهم بشكل كبير في إنجاز هذه المذكرة وإخراجها في أفضل صورة.

إلى كل هؤلاء، أهدي ثمرة جهدي وتعبي، راجيةً أن يكون هذا العمل مصدر فخر وسعادة لهم.

أميرة

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers **Allah**, le Tout-Puissant, pour m'avoir insufflé la force, la patience et la persévérance nécessaires à l'accomplissement de ce modeste travail.

J'adresse mes plus vifs remerciements à mon encadreur, Monsieur **R. SOUILAH**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire. Ses conseils avisés, sa disponibilité constante et ses encouragements ont été pour moi une source de motivation inestimable. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie également Monsieur **H. AYADI**, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Ma reconnaissance s'étend aussi à Monsieur **N. BENAICHOUCHE**, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de l'enrichir par ses remarques constructives.

Je tiens à exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques et Informatique de l'Université Yahia Farès de Médéa, qui ont contribué à ma formation académique tout au long de mon parcours universitaire.

Enfin, je remercie chaleureusement mes amies et mes camarades de promotion pour leur solidarité, leur soutien moral et les moments partagés durant ces années d'études.

Amira Tamartat

Résumé

Le présent mémoire est consacré à l'étude de la **méthode de Galerkin** en tant qu'outil constructif fondamental pour l'existence et l'approximation de solutions de problèmes elliptiques linéaires et non linéaires. Après un rappel des outils essentiels de l'analyse fonctionnelle et des espaces de Sobolev, nous exploitons cette approche pour démontrer des résultats pivots tels que les théorèmes de **Lax–Milgram** et de **Minty–Browder**.

L'intérêt central de ce travail réside dans le traitement de l'opérateur ***p*-laplacien**, d'abord dans un cadre standard au sein de l'espace de Banach $W_0^{1,p}(\Omega)$, puis avec l'ajout d'un terme de réaction local à croissance sous-linéaire. En s'appuyant sur les propriétés de *monotonie*, de *compacité* et de *convergence faible*, nous illustrons la robustesse de la méthode de Galerkin comme pont entre l'analyse fonctionnelle abstraite et la résolution concrète d'équations aux dérivées partielles complexes.

Mots-clés : Méthode de Galerkin, Théorème de Lax–Milgram, Théorème de Minty–Browder, *p*-Laplacien, Espaces de Sobolev, Solutions faibles, Opérateurs monotones.

Abstract

This thesis focuses on the **Galerkin method** as a fundamental constructive tool for the existence and approximation of solutions to both linear and nonlinear elliptic problems. After reviewing essential functional analysis tools and Sobolev spaces, we employ this approach to prove pivotal results such as the **Lax–Milgram** and **Minty–Browder** theorems.

The core of this work lies in the analysis of the p-**Laplacian** operator, first in a standard setting within the Banach space $W_0^{1,p}(\Omega)$, and subsequently with the addition of a local sublinear reaction term. By leveraging *monotonicity*, *compactness*, and *weak convergence* properties, we demonstrate the robustness of the Galerkin method as a bridge between abstract functional analysis and the practical resolution of complex partial differential equations.

Key-words : Galerkin method, Lax–Milgram theorem, Minty–Browder theorem, p-Laplacian, Sobolev spaces, Weak solutions, Monotone operators.

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	frontière topologique de Ω
$x = (x_1, \cdots, x_N)$	point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$	mesure de Lebesgue sur Ω
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de l'ensemble Ω
$\rightharpoonup$	la convergence faible
p.p.	presque partout
V	un espace de Banach
H	un espace de Hilbert
V'	le dual topologique de V
$\langle ., . \rangle_{V' \times V}$	le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Banach V
$(., .)$	le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Hilbert H
$\mathbb{R}^{m \times N}$	l'espace des matrices réelles.
Id	désigne la matrice d'identité.
$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$	la partie positive et négative de la fonction f
$C^0(\mathbb{R})$	l'espace des fonctions continues
$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$	espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω
$C^k(\Omega)$	espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω
$\mathcal{D}'(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))'$	l'espace des distributions

TABLE DES MATIÈRES

Résumé iii

Abstract iv

Notation v

Introduction viii

1 Préliminaires 1

1.1 Espaces de Lebesgue L^p 1
1.2 Espaces de Sobolev 5
1.3 Théorie des opérateurs monotones 7
1.4 Méthode de compacité 11
1.5 Inégalités importantes 12

2 Méthode de Galerkin abstraite 14

2.1 Méthode de Galerkin pour le théorème de Lax-Milgram 15
2.2 Méthode de Galerkin pour le théorème de Minty-Browder 19

3 Méthode de Galerkin pour l'équation de Poisson 23

3.1 Construction d'une base orthonormée de fonctions propres de $H_0^1(\Omega)$ 23

3.2 Méthode de Galerkin pour l'équation de Poisson 24

4 Problème du p-Laplacien 27

4.1 Preuve de l'assertion 31

5 Problème du p-Laplacien avec un terme de réaction 33

5.1 Preuve de l'assertion 39

Conclusion 41

Bibliographie 43

Introduction

La méthode de Galerkin constitue aujourd'hui l'un des fondements majeurs de l'analyse numérique moderne pour l'étude et l'approximation des problèmes issus des sciences physiques et de l'ingénierie. Son importance réside autant dans sa robustesse théorique que dans sa remarquable polyvalence. Elle intervient dans de nombreux domaines tels que la mécanique des solides, la dynamique des fluides, le transfert de chaleur, l'acoustique ou encore l'électromagnétisme.

Qu'il s'agisse d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles (EDP) ou d'équations intégrales, la méthode de Galerkin fournit un cadre unifié permettant d'aborder l'existence, l'unicité et l'approximation des solutions. Elle s'applique aussi bien à l'étude des phénomènes stationnaires qu'à celle des phénomènes évolutifs, ce qui en fait un outil incontournable dès lors qu'un phénomène physique peut être décrit par un système d'équations gouvernantes.

D'un point de vue historique, l'origine de cette méthode est associée aux travaux pionniers de **Boris Galerkin**, qui publia en 1915 un article consacré à l'équilibre élastique des poutres et des plaques. Son introduction dans la littérature scientifique occidentale s'est effectuée progressivement à partir des années 1930, notamment grâce aux travaux de **Duncan** (1937) et de **Bickley** (1941), qui mirent en évidence sa précision par rapport aux méthodes de collocation classiques. À partir des années 1950, le développement rapide des moyens de calcul numérique a contribué à l'essor de la méthode, constituant l'un des piliers du développement de la méthode des éléments finis.

Au-delà de son intérêt numérique, la méthode de Galerkin occupe une place centrale dans l'analyse mathématique des EDP. Elle constitue un outil *constructif* privilégié pour établir des résultats d'existence de solutions en construisant des suites d'approximations dans des sous-espaces de dimension finie. Cette double dimension, à la fois théorique et computationnelle, explique l'importance qu'elle conserve aujourd'hui dans la recherche contemporaine en mathématiques appliquées.

Le présent mémoire est consacré à l'étude de la méthode de Galerkin et à son application à certains problèmes elliptiques linéaires et non linéaires. L'objectif est de montrer comment cette technique de discrétisation permet de résoudre des problèmes d'existence dans des espaces fonctionnels complexes. Le travail est organisé en cinq chapitres :

- **Le premier chapitre** est consacré à la présentation des outils préliminaires indispensables. Nous y rappelons les notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle, les espaces de Lebesgue et de Sobolev, ainsi que les éléments de la théorie des opérateurs monotones.
- **Le deuxième chapitre** expose les principes généraux de la méthode de Galerkin dans un cadre abstrait. Nous l'utilisons pour démontrer deux résultats fondamentaux : le théorème de **Lax–Milgram** pour les problèmes linéaires et le théorème de **Minty–Browder** pour les problèmes non linéaires.
- **Le troisième chapitre** applique la méthode à la résolution de l'équation de Poisson. La construction de l'approximation repose sur une base hilbertienne de l'espace $H_0^1(\Omega)$ obtenue à partir des fonctions propres du Laplacien, permettant ainsi d'illustrer la convergence de la méthode.
- **Le quatrième chapitre** aborde l'étude d'un problème elliptique non linéaire faisant intervenir l'opérateur **p-laplacien**. Nous y développons une approche galerkinienne adaptée au cadre des espaces de Banach $W_0^{1,p}(\Omega)$ en exploitant la propriété de monotonie et la propriété (S_+).
- **Le cinquième chapitre** prolonge cette analyse en considérant un problème de type p-laplacien comportant un **terme de réaction** à croissance sous-linéaire. Nous y démontrons l'existence de solutions faibles en traitant les difficultés spécifiques engendrées par cette non-linéarité supplémentaire.

Ainsi, ce mémoire illustre à la fois la richesse théorique et l'efficacité de la méthode de Galerkin, en montrant comment elle constitue un outil privilégié pour l'étude des problèmes aux dérivées partielles, qu'ils soient linéaires ou non linéaires.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Nous introduisons quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les espaces fonctionnels.

1.1 Espaces de Lebesgue L^p

1.1.1 Notions générales

Définition 1.1: Espace de Lebesgue

On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :
Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ et de Hilbert pour $p = 2$ muni de produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)\, dx.$$

PROPOSITION 1.1 – Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$ [10]. Les assertions suivantes sont vraies.

1. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.
2. Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
3. $L^1(\Omega)$ est séparable, ni réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.
4. $L^\infty(\Omega)$ ni séparable, ni réflexif et son dual contient strictement $L^1(\Omega)$.

PROPOSITION 1.2 – Compacité $L^p - L^q$ [10]. Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. De plus, l'injection est compacte pour $p < q$.

1.1.2 Mode de convergence dans les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.2: Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$

Soient $p \in [1, \infty[$,et $\{f_n, f\}$ une famille de $L^p(\Omega)$.

- On dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.
- On dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^{p'}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
- On dit que f_n converge faible $*$ vers f dans $L^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(\Omega)$ si $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^1$.

PROPOSITION 1.3 – [10]. Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Théorème 1.1. [10]

Soit X un espace normé et supposons que $x_n \to x$ (faiblement). Alors :

1. (x_n) est bornée dans la norme de X, c'est-à-dire $\sup \|x_n\| < \infty$.
2. La limite faible x de (x_n) est unique.

Théorème 1.2. (Lemme de Fatou [14])

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction mesurable, à valeurs dans $[0, +\infty[$. Alors :

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\, dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx.$$

PROPOSITION 1.4 – Théorème de convergence dominée [14]. Soit $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que

1. $f_n \longrightarrow f$ p.p dans Ω.
2. il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leq g$ p.p dans Ω .

Alors

$$f_n \to f \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega).$$

La proposition suivante est la réciproque partielle de la proposition 1.4.

PROPOSITION 1.5 – [15]. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction g de $L^p(\Omega)$ telles que :

1. $f_{n_k}(x) \longrightarrow g(x)$ p.p. sur Ω.
2. $\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 1.4.

PROPOSITION 1.6 – [24]. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables sur E qui converge ponctuellement presque partout sur E vers f. Supposons qu'il existe une suite $\{g_n\}$ de fonctions mesurables non négatives sur E qui converge ponctuellement presque partout sur E vers g et domine $\{f_n\}$ sur E dans le sens où

$$|f_n| \leq g_n \text{ sur } E \text{ pour tout } n.$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n = \int_E g < \infty,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

La proposition suivante donne le lien entre la bornitude et la convergence faible dans les espaces de Lebesgues réfléxifs.

PROPOSITION 1.7 – [9]. Soit $1 < p < \infty$ et soient f_n des fonctions dans $L^p(\Omega)$ convergeant presque partout (ou en mesure) vers une fonction f. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\{f_n\}$ vers f dans la topologie faible de $L^p(\Omega)$ est la bornitude de $\{f_n\}$ dans la norme de $L^p(\Omega)$.

1.1.3 Opérateurs de Nemytskii

Définition 1.3: (Fonction de Carathéodory)

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de Carathéodory si :

1. $f(., s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$,
2. $f(x, .) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue presque partout $x \in \Omega$.

Définition 1.4: [3, 4]

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'opérateur de Nemytskii associé à f est l'application N_f définie sur $\mathcal{M}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions réelles mesurables définies sur Ω) par

$$N_f(u(x)) = f(x, u(x)).$$

Nous rappelons le résultat fondamental suivant concernant les opérateurs de Nemytskii [3, Théorème 2.2]. Une version plus générale peut être trouvée dans [4, Théorème 1.7]

(voir aussi [22]).

Théorème 1.3

Soient $\alpha, \beta \geq 1$, et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. Supposons qu'il existe une fonction positive $a_1 \in L^{\beta}(\Omega)$ et une constante $a_2 > 0$ telles que

$$|f(x,t)| \leq a_1(x) + a_2|t|^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors l'opérateur de Nemytskii N_f associé à la fonction f est continu de $L^{\alpha}(\Omega)$ dans $L^{\beta}(\Omega)$.

1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.5: (Espace des fonctions test [29])

. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On appelle support de φ l'ensemble :

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

- On dit que la fonction φ à support compact si il existe une partie compacte K de $\mathbb{R}^N$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset K$.
- On appelle l'espace des fonctions test et on note $D(\Omega)$ ou $(C_c^{\infty}(\Omega))$ l'espace des fonctions de classe C^{∞} à support compact dans Ω.

Définition 1.6: (Espaces de Sobolev ($W^{1,p}(\Omega)$))

On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$,pour $1 \leq p \leq +\infty$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max\left(\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^{\infty}(\Omega)}\right), & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

PROPOSITION 1.8 – Complétude, séparabilité, et réflexivité de $W^{1,p}(\Omega)$ [1, 10] . L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, et séparable pour $1 \leq p < +\infty$, et réflexif pour $1 < p < +\infty$.

Définition 1.7: (Espaces de Sobolev$W_0^{1,p}(\Omega)$)

Soit $1 \leq p < +\infty$. On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, (c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$)

Le théoréme suivant donne une Caractérisation de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ via le théoreme de trace.

Théorème 1.4

On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega); \quad v|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Définition 1.8: (Espace de Sobolev $W^{-1,p'}(\Omega)$)

L'espace de Sobolev $W^{-1,p'}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$; c'est-à-dire : l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires continues sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.9: (Convergence faible, convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$)

Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\{f_n, f\}$ une famille de $W^{1,p}(\Omega)$.

- On dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

- On dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Théorème 1.5. Théorème d'injection de Sobolev–Rellich–Kondrachov [21]

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à frontière de classe C^1, et soit $1 \leq p < N$. Alors, l'injection de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega),$$

est compacte pour tout exposant $s \in [1, p^*)$, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Théorème 1.6. Inégalité de Poincaré [28, 16]

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.1}$$

En conséquence, l'application

$$u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

définit une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Remarque : L'inégalité (1.1) reste valable dès lors que Ω est borné dans au moins une direction de l'espace.

1.3 Théorie des opérateurs monotones

La théorie des opérateurs monotones joue un rôle central dans le cadre d'analyse non linéaire [27, 33, 19, 25, 7, 12, 14].

Dans ce qui suit, on suppose que V est un espace de Banach séparable et réflexif.

Les classes d'opérateurs suivantes sont fondamentales dans le cadre d'analyse non linéaire.

Définition 1.10: (Opérateur borné)

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est borné, s'il transforme les bornés de V en bornés de V'.

Définition 1.11: Opérateur monotone

On dit que $A : V \to V'$ est monotone si

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \text{pour tous } u, v \in V.$$

Théorème 1.7

Si $A : V \to V'$ est un opérateur monotone, alors A est localement borné.

Définition 1.12: (Opérateur coercif)

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est dit coercif si

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

Définition 1.13: (Types de continuité)

Soit $A : V \to V'$ un opérateur.

1. On dit que A est continu si $u_n \to u$ dans V implique $A(u_n) \to A(u)$ dans V'.
2. On dit que A est fortement continu si $u_n \rightharpoonup u$ dans V implique $A(u_n) \to A(u)$ dans V'.
3. On dit que A est démicontinu si $u_n \to u$ fortement dans V entraîne $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ faiblement dans V'.
4. On dit que A est hémicontinu si, pour tous $u, v, w \in V$, la fonction réelle

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.8

Soit $A : V \to V'$ un opérateur. Alors

$$A \text{ fortement continu} \implies A \text{ continu} \implies A \text{ démicontinu}.$$

De plus, si V est de dimension finie, alors ces différentes notions de continuité sont équivalentes, puisque les topologies forte et faible coïncident en dimension finie.

Preuve.

1. Supposons que A est fortement continu. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ fortement dans V. Alors $u_n \rightharpoonup u$ dans V, puisque la convergence forte implique la convergence faible. Par forte continuité de A, on obtient alors

$$A(u_n) \to A(u) \quad \text{dans } V'.$$

   Ainsi, A est continu.

2. Supposons que A est continu. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ fortement dans V. Alors $A(u_n) \to A(u)$ dans V', et donc en particulier $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$. Ainsi, A est démicontinu.

Théorème 1.9

Soit $A : V \to V'$.

$$A \text{ demicontinu} \implies A \text{ hémicontinu .}$$

Preuve.

Supposons que A est démicontinu. Soient $u, v, w \in V$ et considérons la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \langle A(u + tv), w \rangle.$$

Pour établir la continuité de φ, soit (t_n) une suite réelle telle que $t_n \to t$. Posons $u_n = u + t_n v$. Alors $u_n \to u + tv$ fortement dans V. Par démicontinuité de A, on obtient

$$A(u_n) \rightharpoonup A(u + tv) \quad \text{dans } V'.$$

Par définition de la convergence faible dans V', il vient alors

$$\langle A(u_n), w \rangle \to \langle A(u + tv), w \rangle.$$

Ainsi, $\varphi(t_n) \to \varphi(t)$, ce qui prouve que φ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc A est hémicontinu.

Théorème 1.10

Soit V un espace de Banach de dimension finie et $A : V \to V'$ un opérateur monotone et hémicontinu. Alors A est continu.

Preuve.

Soit $(u_n) \subset V$ une suite telle que

$$u_n \to u \qquad \text{fortement dans } V.$$

D'après le Théorème 1.7, l'opérateur A est localement borné. Comme la suite (u_n) est convergente, elle est bornée ; par conséquent, la suite $(A(u_n))$ est bornée dans V'.

Comme V' est de dimension finie, il existe une sous-suite $(A(u_{n_k}))$ et un élément $\xi \in V'$ tels que

$$A(u_{n_k}) \to \xi \quad \text{fortement dans } V'. \tag{1.2}$$

Soit $v \in V$. Par monotonie de A, on a

$$\langle A(u_{n_k}) - A(v),\, u_{n_k} - v\rangle \geq 0, \tag{1.3}$$

c'est-à-dire

$$\langle A(u_{n_k}), u_{n_k} - v\rangle \geq \langle A(v), u_{n_k} - v\rangle.$$

En passant à la limite lorsque $k \to \infty$, à l'aide de (1.2) et du fait que $u_{n_k} \to u$, on obtient

$$\langle \xi - A(v),\, u - v\rangle \geq 0. \tag{1.4}$$

Soient maintenant $w \in V$ et $t > 0$. En appliquant (1.4) à $v = u + tw$, on obtient

$$\langle \xi - A(u + tw),\, -tw\rangle \geq 0,$$

d'où

$$\langle \xi - A(u + tw),\, w\rangle \leq 0. \tag{1.5}$$

En faisant tendre t vers 0^+ et en utilisant l'hémicontinuité de A, il vient

$$\langle \xi - A(u),\, w\rangle \leq 0. \tag{1.6}$$

Comme cette inégalité est également valable pour $-w$, on en déduit

$$\langle \xi - A(u),\, w\rangle = 0 \qquad \forall w \in V.$$

Par conséquent,

$$\xi = A(u).$$

On vient ainsi de montrer que la suite $(A(u_n))$ admet une sous-suite convergeant fortement vers $A(u)$. De plus, toute sous-suite convergente de $(A(u_n))$ converge nécessairement vers $A(u)$. Il s'ensuit que la suite entière $(A(u_n))$ converge fortement vers $A(u)$. Ainsi, A est continu.

Les propriétés suivantes de l'opérateur p-Laplacien sont bien connues, voir [7, Théorème 17.11]

Théorème 1.11

L'opérateur p-Laplacien $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est monotone, coercif et continu.

Théorème 1.12. [12]

Soit $A : V \to V'$ un opérateur monotone hémicontinu. Si (u_n) une suite de V telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans V, $A(u_n) \rightharpoonup f$ dans V' et $\langle A(u_n), u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$, alors $A(u) = f$.

Définition 1.14: (Propriété (S_+))

On dit qu'un opérateur $A : V \to V'$ vérifie la propriété (S_+) (ou est de type (S_+)) si, pour toute suite $(u_n) \subset V$ telle que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } V$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0,$$

on a nécessairement

$$u_n \to u \quad \text{fortement dans } V.$$

Théorème 1.13. [13, 17, 31]

L'opérateur $-\Delta_p$ est de type (S_+).

1.4 Méthode de compacité

L'application d'un théorème du point fixe pour obtenir une solution d'un problème d'EDP non-linéaire, en général, nécessite la définition d'un opérateur S dans un sous-ensemble approprié C d'un espace de fonctions approprié. Un tel opérateur est généralement donné au moyen de la solution d'un problème linéaire, c'est, en associant à chaque

élément $v \in C$ la solution $u = S(v)$ d'un problème linéaire, et est telle que ses points fixes, soient des solutions de $S(u) = u$, résoudre notre problème non linéaire. Il existe plusieurs théorèmes de points fixes et leurs applications varient selon le modèle et les hypothèses.

Définition 1.15: (Application compacte [30])

Soient X et Y deux espaces de Banach et C un sous-ensemble non vide de X. On dit que $S : C \longrightarrow Y$ est compacte si elle est continue et pour tout $B \subset C$ bornée, $\overline{S(B)}$ est compacte dans Y.

Définition 1.16: (Point fixe d'une application)

Soient X un espace de Banach. On appelle point fixe d'une application $S : X \longrightarrow X$ tout point $x \in X$ vérifiant $Sx = x$.

Théorème 1.14. Théorème du point fixe de Brouwer[14]

Soient B une boule fermée de $\mathbb{R}^N$ et $S : B \longrightarrow B$ une application continue. Alors S admet au-moins un point fixe.

Le résultat suivant, une variante du théorème du point fixe de Brouwer, jouera un rôle crucial dans la preuve de l'existence d'une solution au problème approché. Sa démonstration peut être trouvée dans [12, Théorème 9.9-3] (voir aussi [5, Lemme 2.3] et [14, Théorème 2.7]).

Théorème 1.15

Soit $(V, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $F : V \longrightarrow V'$ une application continue vérifiant la propriété suivante : il existe $r > 0$ tel que

$$\langle F(\xi), \xi \rangle_{V' \times V} \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in V \text{ tel que } \|v\|_V = r. \tag{1.7}$$

Alors il existe $u_0 \in V$ tel que

$$\|v_0\|_V \leq r \quad \text{et} \quad F(v_0) = 0. \tag{1.8}$$

1.5 Inégalités importantes

Dans cette section, nous présentons plusieurs inégalités fondamentales qui constituent des outils essentiels pour l'analyse développée dans cette mémoire. Ces résultats seront

utilisés de manière récurrente dans les démonstrations et les estimations établies par la suite.

Théorème 1.16. Inégalité de Young [10]

Soient p et p' deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour tout réel positif a et b, on a

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Théorème 1.17. Inégalité de Convexité [10]

Soient $a \geq 0$, $b \geq 0$ et soit $1 \leq p < +\infty$. On a

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Théorème 1.18. Inégalité de Hölder [10]

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $fg \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^{p'}}. \tag{1.9}$$

CHAPITRE 2

Méthode de Galerkin abstraite

Une idée naturelle, lorsque l'on considère un problème variationnel en dimension infinie, consiste à l'approximer par une suite de problèmes posés en dimension finie. Cette approche joue un rôle central, tant du point de vue théorique (existence et unicité des solutions) que du point de vue numérique.

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre des théorèmes de Lax–Milgram, de Minty–Browder.

Définition 2.1

Soit V un espace de Banach. On appelle *schéma d'approximation de Galerkin* une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces de V de dimension finie telle que pour tout $v \in V$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_n \in V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme vers v.
Cette propriété d'approximation peut se reformuler comme

$$\forall v \in V \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(v, V_n) = 0,$$

où $\operatorname{dist}(v, V_n) = \inf_{w\in V_n} \|v - w\|$.

PROPOSITION 2.1. [6, 12] Soit V un espace de Banach séparable. Alors on peut construire un schéma d'approximation de Galerkin (V_n) par la méthode suivante :

(i) prendre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de V (la séparabilité de V exprime précisément qu'un tel ensemble existe) ;

(ii) poser $V_n = \text{vect}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un schéma de Galerkin.

Preuve.

Soit $v \in V$. D'après (i), il existe une application $k \mapsto n(k)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\|u_{n(k)} - v\| \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour k fixé, $u_{n(k)} \in V_{n(k)}$ et donc

$$\text{dist}(v, V_{n(k)}) \leq \frac{1}{k}.$$

Puisque $V_n \supset V_{n(k)}$ pour $n \geq n(k)$, on obtient

$$\forall n \geq n(k) \quad \text{dist}(v, V_n) \leq \text{dist}(v, V_{n(k)}) \leq \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire $\text{dist}(v, V_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Remarque :

(a) Les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ ne sont pas nécessairement linéairement indépendants. Par un argument classique d'algèbre linéaire, on peut remplacer dans la Proposition 2.1 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_n \in V$ formée de vecteurs linéairement indépendants.

(b) Dans la Proposition 2.1, la suite de sous-espaces $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait

- $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \cdots \subset V_n \subset \ldots$ est une suite croissante de sous-espaces de dimension finie ;
- $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n} = V$.

2.1 Méthode de Galerkin pour le théorème de Lax-Milgram

Dans cette section, nous supposons que V est un espace de Hilbert séparable.

Théorème 2.1. Théorème de représentation de Riesz [26]

Soit f une forme linéaire continue sur V. Alors il existe un élément unique u de V tel que :

$$f(v) = (u, v)_V; \quad \forall v \in V.$$

Preuve.

1. **Existence.** On distingue deux cas.

   (a). Si $f \equiv 0$, il suffit de prendre $u = 0$ comme un représentant de f.

   (b). Si $f \not\equiv 0$, alors il existe un élément non nul u_0 de $(\ker f)^{\perp}$. Dès que f

est continue, $\ker f$ est un sous-espace fermé de V, alors

$$V = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}.$$

Soit $v \in V$. Il est clair que $w = u_0 f(v) - f(u_0)v$ est un élément de $\ker f$, et en conséquence, on a

$$0 = (u_0, w) = (u_0, u_0 f(v) - f(u_0)v) = \|u_0\|^2 f(v) - f(u_0)\,(u_0, v)\,.$$

Par suite, il vient

$$f(v) = \left(\frac{f(u_0)u_0}{\|u_0\|^2}, v\right).$$

Donc, on peut prendre $u = \dfrac{f(u_0)u_0}{\|u_0\|^2}$ comme un représentant de f.

2. **Unicité.** On suppose qu'il existe deux éléments u_1 et u_2 de V tels que

$$f(v) = (u_1, v); \quad \forall v \in V, \tag{2.1}$$

et

$$f(v) = (u_2, v); \quad \forall v \in V. \tag{2.2}$$

En soustrayant (2.2) de (2.1), il vient

$$(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V. \tag{2.3}$$

Prenant $v = u_1 - u_2$ dans (2.3), il s'ensuit que $\|u_1 - u_2\|^2 = 0$, ce qui implique que $u_1 = u_2$.

Théorème 2.2. Lax-Milgram [18]

Soit a une forme bilinéaire sur $V \times V$ telle qu'il existe deux constantes strictement positives α et β telles que

1. $\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V$ (a est continue sur $V \times V$),
2. $\forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|u\|_V^2$ (a est coercive).

Soit L une forme linéaire continue sur V. Alors, le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ \\ a(u, v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in V. \end{cases} \tag{2.4}$$

admet une unique solution.

Preuve.

On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} A : V &\longrightarrow V \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

où Au est l'unique représentant de Riesz de la forme linéaire continue $a(u, .)$. Donc, on a :

$$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall v \in V. \tag{2.5}$$

L'opérateur A défini ainsi est linéaire. En effet si $u,\ w \in V$, et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (A(u + tw), v)_V &= a(u + tw, v) \\ &= a(u, v) + ta(w, v) \\ &= (A(u), v)_V + t(A(w), v)_V \\ &= (A(u) + tA(w), v)_V \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de a par rapport à la deuxième variable. Par conséquent :

$$(A(u + tw) - A(u) - tA(w), v)_V = 0 \quad \forall v \in V.$$

En choisissant $v = A(u + tw) - A(u) - tA(w)$, il s'en suit que :

$$\|A(u + tw) - A(u) - tA(w)\|_V^2 = 0,$$

ce qui implique que $A(u + tw) = A(u) + tA(w)$.

Il est clair que le problème variationnel (2.4) est équivalent au

$$\begin{cases} \text{Trouver une unique élément } u \in V \text{ tel que :} \\ A(u) = f, \end{cases} \tag{2.6}$$

où f est l'unique représentant de Riesz de la forme linéaire continue L.

Puisque V est séparable, par la Proposition 2.1 il existe un schéma de Galerkin $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec V_n croissant avec $n \in \mathbb{N}$. Considérons les problèmes approchés

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_n \in V_n \text{ tel que} \\ a(u_n, v) = L(v) \quad \forall v \in V_n. \end{cases} \tag{2.7}$$

En appliquant le théorème de la représentation de Riesz, Le problème (2.7) peut être reformulé de manière équivalente

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_n \in V_n \text{ tel que} \\ A_n u_n = f_n \quad \forall v \in V_n, \end{cases} \tag{2.8}$$

où A_n est l'opérateur linéaire de $V_n \longrightarrow V_n$ tel que

$$a(u, v) = \langle A_n u, v\rangle \quad \forall u, v \in V_n$$

et

$$L(v) = \langle f_n, v\rangle \quad \forall v \in V_n.$$

Ainsi, (2.7) est bien posé si et seulement si A_n est un isomorphisme. Puisque $\dim(V_n) < \infty$, cela équivaut à exiger que A_n soit injectif, c'est-à-dire que $\ker A_n = \{0\}$.
Soit $v \in \ker(A_n)$. Alors

$$0 = \langle A_n(v), v\rangle_{V_h' \times V_h} = a(v_n, v_n).$$

Par coercivité, on en déduit que

$$0 \geq \alpha \|v\|^2_{V_n},$$

ce qui implique que $v = 0$. Ainsi, $\ker(A_n) = \{0\}$, ce qui montre que A_n est bijectif. Donc le problème (2.8) admet une unique solution.
La question est maintenant d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Prenant $v = u_n$ dans (2.7), on obtient

$$\alpha \|u_n\|^2 \leq a(u_n, u_n) = L(u_n) \leq \|L\|_* \|u_n\|$$

et

$$\|u_n\| \leq \frac{\|L\|_*}{\alpha}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc relativement compacte pour la topologie faible ; il existe donc une sous-suite (u_{n_k}) et un certain $u \in V$ tels que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{2.9}$$

c'est à dire :

$$\langle u_{n_k}, v\rangle \longrightarrow \langle u, v\rangle \quad \forall v \in V.$$

On fixe maintenant $m \leq n_k$, de sorte que $V_m \subset V_{n_k}$. Ainsi, pour tout $v \in V_m$, on a

$$a(u_{n_k}, v) = L(v). \tag{2.10}$$

On remarque alors que

$$a(u_{n_k}, v) \longrightarrow a(u, v) \quad \text{lorsque } k \longrightarrow +\infty.$$

Ceci découle de la représentation de la forme linéaire continue $u \mapsto a(u, v)$ sur V, où $a(u, v) = \langle u, A^t v\rangle$ (A^t désigne l'adjoint de A).
En passant à la limite dans (2.10), on obtient

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_m.$$

Par conséquent,

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Puisque $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n} = V$, et par continuité de $a(u, \cdot)$ et de L, on en déduit finalement

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Ainsi, on a prouvé que le problème variationnel (2.4) admet au moins une solution. L'unicité découle directement de l'injectivité de l'opérateur A.

2.2 Méthode de Galerkin pour le théorème de Minty-Browder

Dans cette section, nous supposerons que V est un espace de Banach séparable.

Théorème 2.3. Minty-Browder [20, 11, 12]

Soit $A : V \to V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif. Alors A est surjectif.

Preuve.

La preuve du Théorème 2.3 est effectuée en plusieurs étapes.

Étape 1 : Approximation de Galerkin. On suppose que V soit de dimension infinie (si V est de dimension finie, la surjectivité de A découle par la partie (ii) de cette preuve). Puisque V est séparable, il existe une famille dénombrable $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ de vecteurs v_i de V linéairement indépendants tels que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ dense dans V, où $V_n = \text{vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Étape 2 : Construction de la solution approchée : Pour tout $n \geq 1$, il existe $u_n \in V_n$ tel que

$$\langle A(u_n), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_n \quad \text{et } \|u_n\| \leq C,$$

où C est une constante positive indépendante de n.

Pour chaque $n \geq 1$, on définit l'opérateur

$$A_n := A_{|V_n}.$$

Ainsi, $A_n : V_n \to V_n'$ est monotone, car pour tous $u, v \in V_n$,

$$\langle A_n(u) - A_n(v), u - v \rangle = \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0.$$

De plus, A_n hérite de l'hémicontinuité de A. Comme V_n est un espace de dimension finie, il résulte du Théorème 1.10 que l'opérateur A_n est continu.

Soit $f_n := f|_{V_n} \in V_n'$, de sorte que $\|f_n\|_{V_n'} \leq \|f\|_{V'}$. Alors

$$\frac{1}{\|v\|} \left(\langle A_n(v), v \rangle - \langle f_n, v \rangle \right) \geq \frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|} - \|f\|_{V'} \quad \text{pour tout } v \in V_n,\ v \neq 0.$$

Puisque A est coercif, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que

$$\langle A_n(v) - f_n, v \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in V_n \text{ avec } \|v\| = C.$$

Puisque $A_n : V_n \longrightarrow V_n'$ est continue, alors par le Théorème 1.15, il existe $u_n \in \overline{B(0;C)}$ tel que

$$A_n(u_n) = f_n,$$

au sens suivant

$$\langle A(u_n) - f, v \rangle = \langle A_n(u_n) - f_n, v \rangle = 0 \quad \text{pour tout } v \in V_n. \tag{2.11}$$

Étape 3 : Estimation a priori : La suite $(A(u_n))$ est bornée dans V'. Puisque A est localement borné, il existe $r > 0$ et $\rho > 0$ telles que

$$\|v\| \leq r \quad \text{implique} \quad \|A(v)\| \leq \rho.$$

En combinant cette propriété avec la monotonie de A et l'identité (2.11), on obtient

$$\begin{aligned}\langle A(u_n), v \rangle &\leq \langle A(u_n), u_n \rangle - \langle A(v), u_n \rangle + \langle A(v), v \rangle \\ &= \langle f, u_n \rangle - \langle A(v), u_n \rangle + \langle A(v), v \rangle \\ &\leq C\|f\|_{V'} + C\rho + r\rho \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et pour tout } \|v\| \leq r.\end{aligned}$$

La bornitude de la suite $(A(u_n))$ résulte alors de la relation

$$\|A(u_n)\|_{V'} = \sup_{\|v\| \leq r} \langle A(u_n), v \rangle.$$

Étape 4 :Passage à la limite dans l'approximation de Galerkin : Puisque la suite (u_n) est bornée dans V et la suite $(A(u_n))$ est bornée dans V' et que V est réflexif, alors il existe une sous-suite (u_m) de (u_n) telle que

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans } V, \tag{2.12}$$

et

$$A(u_m) \longrightarrow g \quad \text{faiblement dans } V'. \tag{2.13}$$

En utilisant (2.11), (2.12) et (2.13), on obtient

$$\langle g, v_k \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle A(u_m), v_k \rangle = \langle f, v_k \rangle \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Par conséquent

$$\langle g, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m.$$

Par densité de $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ dans V, il découle que

$$\langle g, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Par conséquent $g = f$, et donc

$$A(u_m) \to f \quad \text{faiblement dans } V'. \tag{2.14}$$

Enfin, on a

$$\lim_{m\to\infty} \langle A(u_m), u_m \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle f, u_m \rangle = \langle f, u \rangle.$$

D'après le Théorème 1.12, il résulte que $A(u) = f$. Par conséquent, A est surjectif. Si on suppose de plus que A est strictement monotone, alors A est injectif.

CHAPITRE 3

Méthode de Galerkin pour l'équation de Poisson

Dans ce chapitre, nous étudions la méthode de Galerkin appliquée à l'équation de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes. L'intérêt principal de cette approche réside dans l'utilisation d'une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$, construite à partir des fonctions propres du Laplacien de Dirichlet.

Avant de présenter la méthode de Galerkin proprement dite, nous introduisons la base spectrale du Laplacien de Dirichlet, qui joue un rôle fondamental dans la construction des approximations.

3.1 Construction d'une base orthonormée de fonctions propres de $H_0^1(\Omega)$

On considère le problème spectral du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k & \text{dans } \Omega, \\ \phi_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 3.1. Théorème spectral [32, 8]

Il existe une suite de valeurs propres

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \longrightarrow +\infty,$$

et une famille de fonctions propres $\{\phi_k\}_{k\geq 1} \subset H_0^1(\Omega)$ telles que :

(i) $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ forme une base orthonormale de $L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega \phi_i \phi_j \, dx = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

(ii) Les fonctions propres sont orthogonales pour la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

et vérifient

$$a(\phi_i, \phi_j) = \lambda_i \delta_{ij}.$$

3.2 Méthode de Galerkin pour l'équation de Poisson

3.2.1 Formulation du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné à frontière suffisamment régulière et soit $f \in L^2(\Omega)$. Nous considérons le problème de Poisson muni de conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Afin d'étudier le problème (3.1) dans un cadre variationnel, nous introduisons la notion de solution faible.

Définition 3.1. Une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est dite solution faible du problème (3.1) si elle satisfait

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Le résultat suivant garantit l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (3.1).

Théorème 3.2

Le problème (3.1) admet une unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$.

3.2.2 Preuve du Théorème 3.2

La démonstration repose sur la méthode de Galerkin. Pour cela, nous commençons par introduire la forme bilinéaire et la forme linéaire associées au problème (3.1) :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \qquad L(v) = \int_\Omega f v \, dx,$$

pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

La formulation faible du problème (3.1) s'écrit alors sous la forme :

$$a(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Étape 1 : Approximation de Galerkin. On considère la famille normalisée

$$e_k := \frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}},$$

où (ϕ_k) sont les fonctions propres du Laplacien (voir Théorème 3.1).

La famille $\{e_k\}_{k\geq 1}$ constitue une base orthonormale de $H_0^1(\Omega)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$V_n := \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

La suite croissante (V_n) est dense dans $H_0^1(\Omega)$.

On cherche $u_n \in V_n$ sous la forme

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j,$$

solution du problème approché

$$a(u_n, v) = L(v), \quad \forall v \in V_n. \tag{3.3}$$

En testant avec $v = e_i$, on obtient

$$\alpha_i = \int_\Omega f e_i \, dx.$$

Ainsi,

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (f, e_i)_{L^2} \, e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \left(\int_\Omega f \phi_i \, dx \right) \phi_i.$$

Étape 2 : Estimations a priori. En prenant $v = u_n$, on obtient

$$\|u_n\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega f u_n \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|u_n\|_{L^2}.$$

Par l'inégalité de Poincaré,

$$\|u_n\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)},$$

d'où

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

Étape 3 : Passage à la limite. La suite (u_n) étant bornée dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une sous-suite (encore notée (u_n)) telle que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Pour tout $m \leq n$ et tout $v \in V_m \subset V_n$, on a

$$a(u_n, v) = L(v).$$

En passant à la limite dans cette identité et en utilisant la densité de $\bigcup_{n \geq 1} V_n$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi, u est solution faible du problème de Poisson.

CHAPITRE 4

Problème du p-Laplacien

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, avec $1 < p < N$, et soit $f \in L^{p'}(\Omega)$. Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Δ_p désigne l'opérateur p-Laplacien défini par

$$-\Delta_p u = -\operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big), \qquad 1 < p < N.$$

Afin d'étudier le problème (4.1) dans un cadre variationnel, nous introduisons la notion de solution faible.

Définition 4.1. Une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est appelée solution faible du problème (4.1) si elle vérifie

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \qquad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.2}$$

Le théorème suivant constitue le résultat principal de cette section et garantit l'existence d'au moins une solution faible au problème (4.1).

Théorème 4.1

Le problème (4.1) admet au moins une solution faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. La démonstration est décomposée en plusieurs étapes.

Étape 1 : Approximation de Galerkin. Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable, on peut construire une suite de sous-espaces de dimension finie $(V_n)_n$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ V_n \subset V_{n+1} \subset W_0^{1,p}(\Omega), \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \text{ est dense dans } \ W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.3}$$

On définit ensuite une approximation de Galerkin $u_n \in V_n$ par l'identité :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in V_n. \tag{4.4}$$

Étape 2 : Existence des solutions approchées u_n. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur $A_n : V_n \longrightarrow V_n'$ par

$$\langle A_n(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx - \int_\Omega f \, \varphi \, dx, \quad \forall \, u, \, \varphi \in V_n.$$

1. **Continuité de l'opérateur A_n.** Comme V_n est de dimension finie, il suffit, d'après le Théorème 1.8, de montrer que A_n est démicontinue.
   Soit $(u_k) \subset V_n$ une suite telle que

   $$u_k \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } V_n. \tag{4.5}$$

   D'après le Théorème 1.11, l'opérateur p-Laplacien définit une application continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$. En particulier, il est démicontinu. Ainsi, en combinant cette propriété avec (4.5), on obtient, pour tout $\varphi \in V_n$,

   $$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \cdot \nabla\varphi \, dx \ \longrightarrow \ \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx. \tag{4.6}$$

   De plus, comme $f \in L^{p'}(\Omega)$ (ou est fixé), on a également

   $$\int_\Omega f \, \varphi \, dx \quad \text{indépendant de } u_k,$$

   d'où

   $$\langle A_n(u_k), \varphi\rangle \ \longrightarrow \ \langle A_n(u), \varphi\rangle \, , \quad \forall \, \varphi \in V_n.$$

   Cela signifie que

   $$A_n(u_k) \rightharpoonup A_n(u) \quad \text{faiblement dans } V_n'. \tag{4.7}$$

   Ainsi, A_n est démicontinu.
2. **L'opérateur A_n vérifie la propriété (1.7) du Théorème 1.15.**

Nous montrons maintenant qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\langle A_n(v), v\rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in V_n \text{ tel que } \|v\|_{V_n} = r. \tag{4.8}$$

Grâce aux inégalités de Hölder et de Sobolev, on obtient

$$\left| \int_\Omega f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Supposons que $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = r$, pour un certain $r > 0$ suffisamment grand. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\langle A_n(v), v\rangle &= \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega f v \, dx \geq \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C_\Omega \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\geq \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \left(1 - C_\Omega \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v\|^{1-p}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right) \\
&\geq r^p \left(1 - C_\Omega \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} r^{1-p}\right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème 1.15, il existe $u_n \in V_n$, tel que $\|u_n\| \leq r$, avec r indépendant de n, et vérifiant $A_n(u_n) = 0$. Par conséquent, (4.4) est satisfaite.

Étape 3 : Estimations à priori sur Galerkin approximation. Prenant u_n comme fonction test dans (4.4), il s'ensuit que

$$\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f u_n \, dx. \tag{4.10}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (1.9), puis l'inégalité de Poincaré (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq \int_\Omega f |u_n| \, dx \\
&\leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C_\Omega \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \frac{C_\Omega}{p'} \|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} + \frac{1}{p} \|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

d'où

$$\left(1 - \frac{1}{p'}\right) \|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{p'} \|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Par conséquent,

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_\Omega^{\frac{1}{p}} \|f\|^{\frac{p'}{p}}_{L^{p'}(\Omega)},$$

Ce qui implique que la suite (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Étape 4 : Passage à la limite dans l'identité (4.4). Comme la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que, quitte à extraire une sous-suite,

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega), \\ &u_n \to u \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega), \\ &u_n(x) \to u(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{4.12}$$

On fixe maintenant $m \leq n$, de sorte que $V_m \subseteq V_n$. Pour tout $\varphi \in V_m$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx. \tag{4.13}$$

En utilisant (4.12), on conclut que

$$\int_\Omega f(x,u_n)\varphi \, dx \to \int_\Omega f\varphi \, dx, \tag{4.14}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous considérons maintenant l'assertion suivante, dont la preuve sera reportée à la fin du chapitre.

Assertion 4.1. La convergence suivante a lieu :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \tag{4.15}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dans l'identité (4.13), nous faisons tendre $n \to \infty$ et nous utilisons (4.14) et (4.15) pour obtenir

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \tag{4.16}$$

pour tout $\varphi \in V_m$.

Puisque $m \in \mathbb{N}$ est arbitraire, l'inégalité ci-dessus est valable pour tout $\varphi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Par densité de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \tag{4.17}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

4.1 Preuve de l'assertion

Rappelons que nous devons montrer que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \tag{4.18}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Tout d'abord, nous affirmons que $(-\Delta_p u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. En effet, pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\left|\langle -\Delta_p u_n, v\rangle\right| = \left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla v \, dx\right| \le \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v| \, dx. \tag{4.19}$$

Comme $u_n \in V_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $|\nabla u_n| \in L^p(\Omega)$ et donc $|\nabla u_n|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

En appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $\frac{p}{p-1}$, il vient

$$\left|\langle -\Delta_p u_n, v\rangle\right| \le \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{4.20}$$

Ainsi,

$$\| -\Delta_p u_n\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \le \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \le C, \tag{4.21}$$

où $C > 0$ est indépendante de n.

Ainsi, la suite $(-\Delta_p u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, et par conséquent, à extraction près d'une sous-suite,

$$-\Delta_p u_n \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } W^{-1,p'}(\Omega). \tag{4.22}$$

C'est-à-dire :

$$\langle -\Delta_p u_n, \psi \rangle \to \langle \chi, \psi \rangle \quad \text{pour tout } \psi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ce qui est équivalent à

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla \psi \, dx \to \langle \chi, \psi \rangle \quad \text{pour tout } \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.23}$$

Passant à la limite dans (4.13), on en déduit que

$$\langle \chi, \psi \rangle = \int_\Omega f\psi \, dx \quad \text{pour tout } \psi \in V_m.$$

Puisque $m \in \mathbb{N}$ est arbitraire, l'inégalité ci-dessus est valable pour tout $\psi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Par

densité de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit que

$$\langle \chi, \psi \rangle = \int_\Omega f\psi \, dx \quad \text{pour tout } \psi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier,

$$\langle \chi, u \rangle = \int_\Omega fu \, dx. \tag{4.24}$$

En utilisant la monotonie de l'opérateur $-\Delta_p$, on obtient

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\right)\cdot\nabla(u_n-\psi)\,dx \geq 0, \quad \forall\ \psi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4.25}$$

d'où l'on déduit que

$$\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla\psi\,dx \geq \int_\Omega |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\cdot\nabla(u_n-\psi)\,dx. \tag{4.26}$$

En utilisant (4.10), il vient

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx \leq \int_\Omega fu\,dx. \tag{4.27}$$

Passant à la limite supérieure dans (4.26), et en utilisant (4.24), on en conclut que

$$\left\langle \chi - (-\Delta_p\psi), u-\psi \right\rangle \geq 0. \tag{4.28}$$

En posant

$$\psi = u - \lambda\varphi, \quad \lambda > 0,\ \varphi \in V_m,$$

On obtient

$$\left\langle \chi + \Delta_p(u-\lambda\varphi), \varphi \right\rangle \geq 0.$$

En passant à la limite des deux côtés de l'expression précédente lorsque $\lambda \longrightarrow 0$, et en utilisant la hémicontinuité de l'opérateur $-\Delta_p$,

$$\left\langle \chi + \Delta_p u, \varphi \right\rangle \geq 0 \quad \forall\varphi \in V_m.$$

Par conséquent,

$$\left\langle \chi + \Delta_p u, \varphi \right\rangle = 0 \quad \forall\varphi \in V_m, \tag{4.29}$$

ce qui implique $\chi = -\Delta_p u$, puisque m est arbitraire. Cela signifie que l'égalité précédente est valable pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Ainsi, en utilisant, on obtient (4.15). □

CHAPITRE 5

Problème du p-Laplacien avec un terme de réaction

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, avec $1 < p < N$. Nous considérons le problème elliptique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où Δ_p désigne l'opérateur p-Laplacien défini par

$$-\Delta_p u = -\operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big), \qquad 1 < p < N.$$

Nous supposons que la fonction

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction de Carathéodory vérifiant la condition de croissance sous-linéaire suivante :

$$|f(x,s)| \leq a(x) + b|s|^q, \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega \text{ et tout } s \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

où $a \in L^{p'}(\Omega)_+$, $b > 0$ et $0 \leq q < p - 1$.

Afin d'étudier le problème (5.1) dans un cadre variationnel, nous introduisons la notion de solution faible.

Définition 5.1. Une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est dite solution faible du problème (5.1) si

elle vérifie

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi \, dx, \qquad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.3}$$

Le théorème suivant constitue le résultat principal de ce chapitre. Il garantit l'existence d'au moins une solution faible du problème (5.1).

Théorème 5.1

Sous l'hypothèse (5.2), le problème (5.1) admet au moins une solution faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. La démonstration sera menée en plusieurs étapes.

Étape 1 : Approximation de Galerkin. Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable, on peut construire une suite de sous-espaces de dimension finie $(V_n)_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; V_n \subset V_{n+1} \subset W_0^{1,p}(\Omega), \; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \text{ est dense dans } \; W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.4}$$

On définit ensuite une approximation de Galerkin $u_n \in V_n$ par l'identité :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x,u_n)v, \quad \forall v \in V_n. \tag{5.5}$$

Étape 2 : Existence des solutions approchées u_n. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on introduit l'application $A_n : V_n \to V_n'$ définie par

$$\langle A_n(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \quad \text{pour tous } u,\, v \in V_n.$$

1. **Continuité de l'opérateur A_n.** Comme V_n est de dimension finie, il suffit de montrer que l'opérateur A_n est démicontinu. Soit donc (u_k) une suite de V_n telle que

$$u_k \to u \qquad \text{fortement dans } V_n. \tag{5.6}$$

D'après le Théorème 1.5, on déduit que

$$u_k \to u \qquad \text{fortement dans } L^r(\Omega), \quad \forall\, 1 \le r < p^*. \tag{5.7}$$

Par ailleurs, le Théorème 1.11 assure que l'opérateur p-Laplacien

$$u \mapsto -\Delta_p u$$

définit une application continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$. En particulier, cet opérateur est démicontinu. Ainsi, en utilisant (5.6), on obtient, pour tout $\varphi \in V_n$,

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \cdot \nabla\varphi \, dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx. \tag{5.8}$$

Comme $q+1 < p < p^*$, il résulte de (5.7) que

$$u_k \to u \qquad \text{fortement dans } L^{q+1}(\Omega).$$

D'après le Théorème 1.3, l'opérateur de Nemytskii

$$N_f : u \mapsto f(\cdot, u)$$

associé à la fonction f est continu de $L^{q+1}(\Omega)$ dans $L^{(q+1)'}(\Omega)$. Par conséquent,

$$N_f(u_k) \to N_f(u) \qquad \text{fortement dans } L^{(q+1)'}(\Omega).$$

De plus, puisque $q+1 < p^*$, on a

$$(q+1)' > (p^*)',$$

et donc

$$N_f(u_k) \to N_f(u) \qquad \text{fortement dans } L^{(p^*)'}(\Omega). \tag{5.9}$$

Soit maintenant $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En appliquant l'inégalité de Hölder ainsi que l'injection de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \big(f(x,u_k) - f(x,u)\big)\varphi \, dx\right| &= \left|\int_\Omega \big(N_f(u_k) - N_f(u)\big)\varphi \, dx\right| \\ &\le \|N_f(u_k) - N_f(u)\|_{L^{(p^*)'}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\ &\le S_p \, \|N_f(u_k) - N_f(u)\|_{L^{(p^*)'}(\Omega)}\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},\end{aligned}$$

où S_p désigne la meilleure constante de Sobolev associée à l'injection

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Grâce à (5.9), il vient alors

$$\int_\Omega f(x,u_k)\varphi\,dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx. \tag{5.10}$$

En combinant (5.8) et (5.10), on obtient, pour tout $\varphi \in V_n$,

$$\langle A_n(u_k),\varphi\rangle \longrightarrow \langle A_n(u),\varphi\rangle.$$

Autrement dit,

$$A_n(u_k) \rightharpoonup A_n(u) \qquad \text{faiblement dans } V_n'. \tag{5.11}$$

Par conséquent, l'opérateur A_n est démicontinu, et donc continu sur V_n.

2. **L'opérateur A_n vérifie la propriété (1.7) du Théorème 1.15.**

Nous montrons maintenant qu'il existe $r>0$ tel que

$$\langle A_n(u),u\rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } u\in V_n \text{ tel que } \|u\|_{V_n}=r. \tag{5.12}$$

En utilisant (5.2), les inégalités de Hölder (1.9), puis l'inégalité de Poincaré (1.1), et ensuite l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega f(x,u)u\,dx\Big| &\leq \int_\Omega |f(x,u)||u|\,dx\\
&\leq \int_\Omega (a(x)+b|u|^q)\,|u|\,dx\\
&\leq \|a\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)} + b|\Omega|^{\frac{p^*-(q+1)}{p^*}}\|u\|_{L^{p^*}}^{q+1}\\
&\leq \|a\|_{L^{p'}(\Omega)}C_\Omega\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + b|\Omega|^{\frac{p^*-(q+1)}{p^*}}\|u\|_{L^{p^*}}^{q+1}\\
&\leq C_1\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + C_2\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{q+1}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Supposons que $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=r$, pour un certain $r>0$ suffisamment grand. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\langle A_n(u),u\rangle &\geq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - C_1\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C_2\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{q+1}\\
&\geq r^p\left(1 - C_1 r^{1-p} - C_2 r^{q+1-p}\right)\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème 1.15, il existe $u_n\in V_n$, tel que $\|u_n\|\leq r$, avec r indépendant de n, et vérifiant $A_n(u_n)=0$. Par conséquent, (5.5) est satisfaite.

Étape 3 : Estimations à priori sur Galerkin approximation. Prenant u_n comme fonction test dans (5.5), il s'ensuit que

$$\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx. \tag{5.14}$$

En utilisant la condition de croissance (5.2), on en déduit que

$$\begin{aligned}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\le \int_\Omega (a(x)+b|u_n|^q)\,|u_n|\,dx\\ &\le \int_\Omega a(x)|u_n|\,dx + b\int_\Omega |u_n|^{q+1}\,dx\\ &\le \|a\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u_n\|_{L^p(\Omega)} + b|\Omega|^{\frac{(p-1)-q}{p}}\|u_n\|^{q+1}_{L^p(\Omega)}\\ &\le C_\Omega\|a\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + bC_\Omega^{q+1}|\Omega|^{\frac{(p-1)-q}{p}}\|u_n\|^{q+1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Puisque $q < p-1$, on déduit de (5.15) que la suite (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Étape 4 : Passage à la limite dans l'identité (5.5). Comme la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que, quitte à extraire une sous-suite,

$$\begin{aligned}&u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega),\\ &u_n \to u \quad \text{fortement dans } L^s(\Omega), \text{ pour tout } 1 \le s < p^*,\\ &u_n(x) \to u(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega.\end{aligned} \tag{5.16}$$

On fixe maintenant $m \le n$, de sorte que $V_m \subseteq V_n$. Pour tout $\varphi \in V_m$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(x,u_n)\varphi\,dx. \tag{5.17}$$

Puisque $q+1 < p < p^*$, il s'ensuit que

$$u_n \to u \quad \text{fortement dans } L^{q+1}(\Omega).$$

D'après le Théorème 1.3, l'opérateur de Nemytskii N_f associé à la fonction f est continu de $L^{q+1}(\Omega)$ dans $L^{(q+1)'}(\Omega)$. Par conséquent,

$$N_f(u_n) \to N_f(u) \quad \text{fortement dans } L^{(q+1)'}(\Omega).$$

De plus, comme $(q+1)' > (p^*)'$ (puisque $q+1 < p < p^*$), on en déduit que

$$N_f(u_n) \to N_f(u) \quad \text{fortement dans } L^{(p^*)'}(\Omega). \tag{5.18}$$

Soit maintenant $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En appliquant l'inégalité de Hölder et le théorème d'injection de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (f(x,u_n)-f(x,u))\,\varphi\,dx\right| &= \left|\int_\Omega \big(N_f(u_n)-N_f(u)\big)\,\varphi\,dx\right| \\ &\le \int_\Omega |N_f(u_n)-N_f(u)||\varphi|\,dx \\ &\le \|N_f(u_n)-N_f(u)\|_{L^{(p^*)'}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (5.18), on conclut que

$$\int_\Omega f(x,u_n)\varphi\,dx \to \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx, \tag{5.19}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous considérons maintenant l'assertion suivante, dont la preuve sera reportée à la fin du chapitre.

Assertion 5.1. La convergence suivante a lieu :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla\varphi\,dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx, \tag{5.20}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dans l'identité (5.17), nous faisons tendre $n \to \infty$ et nous utilisons (5.19) et (5.20) pour obtenir

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx, \tag{5.21}$$

pour tout $\varphi \in V_m$.

Puisque $m \in \mathbb{N}$ est arbitraire, l'inégalité ci-dessus est valable pour tout $\varphi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Par densité de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx, \tag{5.22}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

5.1 Preuve de l'assertion

Rappelons que nous devons montrer que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi \, dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx, \tag{5.23}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Tout d'abord, nous affirmons que $(-\Delta_p u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. En effet, pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\left|\langle -\Delta_p u_n, v\rangle\right| = \left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla v \, dx\right| \le \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v| \, dx.$$

Comme $u_n \in V_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $|\nabla u_n| \in L^p(\Omega)$ et donc $|\nabla u_n|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

En appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $\frac{p}{p-1}$, il vient

$$\left|\langle -\Delta_p u_n, v\rangle\right| \le \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Ainsi,

$$\| -\Delta_p u_n\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \le \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \le C,$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de n. La suite $\big(-\Delta_p u_n\big)$ est donc bornée dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Par conséquent, à extraction près d'une sous-suite,

$$-\Delta_p u_n \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } W^{-1,p'}(\Omega).$$

C'est-à-dire :

$$\langle -\Delta_p u_n, \psi\rangle \to \langle \chi, \psi\rangle \quad \text{pour tout } \psi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou équivalemment,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\psi \, dx \to \langle \chi, \psi\rangle \quad \text{pour tout } \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.24}$$

En passant à la limite dans (5.17), on obtient

$$\langle \chi, \psi\rangle = \int_\Omega f(x,u)\psi \, dx \quad \text{pour tout } \psi \in V_m.$$

Puisque $m \in \mathbb{N}$ est arbitraire, cette relation est valable pour tout $\psi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Par densité

de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il s'ensuit que

$$\langle\, \chi, \psi \,\rangle = \int_\Omega f(x,u)\psi \, dx \quad \text{pour tout } \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.25}$$

En particulier,

$$\langle\, \chi, u \,\rangle = \int_\Omega f(x,u)u \, dx. \tag{5.26}$$

En prenant u_n comme fonction test dans (5.5), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_\Omega f(x,u_n)u_n. \tag{5.27}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \langle\, -\Delta_p u_n, u_n - u \,\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle\, -\Delta_p u_n, u_n \,\rangle - \lim_{n\to+\infty} \langle\, -\Delta_p u_n, u \,\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u_n)u_n - \langle\, \chi, u \,\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme l'opérateur $-\Delta_p$ est de type (S^+) (Théorème 1.13), il en découle que

$$u_n \to u \quad \text{fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Or, $-\Delta_p$ est continu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ (Théorème 1.11), donc

$$-\Delta_p u_n \to -\Delta_p u \quad \text{fortement dans } W^{-1,p'}(\Omega).$$

En particulier, cela implique que (5.23) est vérifiée pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

Conclusion

Au terme de ce mémoire, nous avons étudié la méthode de Galerkin comme outil fondamental pour l'analyse des équations aux dérivées partielles elliptiques. Cette méthode, qui occupe une place centrale dans la théorie moderne des problèmes variationnels, permet de construire des solutions par approximation dans des sous-espaces de dimension finie et constitue ainsi un lien naturel entre l'analyse fonctionnelle abstraite et l'étude concrète des équations aux dérivées partielles.

L'objectif principal de ce travail était de mettre en évidence le rôle de la méthode de Galerkin dans l'établissement des résultats d'existence de solutions faibles pour différentes classes de problèmes elliptiques. À travers cette approche, nous avons montré comment la réduction d'un problème posé dans un espace fonctionnel de dimension infinie à une suite de problèmes de dimension finie permet d'obtenir des estimations a priori, de mettre en œuvre des arguments de compacité et, finalement, de justifier rigoureusement le passage à la limite.

Dans un premier temps, nous avons présenté les outils fondamentaux de l'analyse fonctionnelle nécessaires à cette étude. Les propriétés essentielles des espaces de Lebesgue et de Sobolev, ainsi que les notions de réflexivité, de séparabilité et de convergence faible, ont fourni le cadre fonctionnel adapté à l'application de la méthode de Galerkin.

Nous avons ensuite appliqué cette méthode à des problèmes linéaires, notamment à l'équation de Poisson, ce qui a permis de retrouver de manière constructive le théorème de Lax–Milgram et d'établir l'existence et l'unicité de solutions faibles dans un cadre hilbertien.

La seconde partie du travail a été consacrée à l'étude de problèmes non linéaires gouvernés par l'opérateur p-Laplacien. Dans ce contexte, la théorie des opérateurs monotones, et plus particulièrement le théorème de Minty–Browder, a joué un rôle déterminant. Nous avons montré que la méthode de Galerkin demeure pleinement efficace dans ce cadre non linéaire, à condition de disposer de propriétés adaptées telles que la monotonie,

l'hémicontinuité, la coercivité et la propriété (S_+).

Enfin, nous avons considéré un problème du (p)-Laplacien comportant un terme de réaction sous-linéaire. Grâce à la combinaison de la méthode de Galerkin, des arguments de compacité et des propriétés des opérateurs de Nemytskii, nous avons établi l'existence d'au moins une solution faible. Cette application illustre la robustesse et la grande flexibilité de l'approche galerkinienne dans le traitement de modèles non linéaires plus généraux.

En conclusion, la méthode de Galerkin apparaît comme un outil incontournable de l'analyse des équations aux dérivées partielles. Au-delà de son intérêt théorique pour les preuves d'existence, elle constitue également le fondement de nombreuses méthodes numériques modernes, notamment la méthode des éléments finis. Son caractère à la fois constructif, rigoureux et adaptable en fait une technique privilégiée pour l'étude d'une large classe de problèmes linéaires et non linéaires, ouvrant ainsi la voie à de nombreuses perspectives de recherche en analyse mathématique et en calcul scientifique.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, and J. J. Fournier, *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.

[2] B. J. Alexander, Byron Joseph, *Monotone and pseudomonotone operators with applications to variational problems*. (2015).

[3] A. Ambrosetti, and G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*. No. 34. Cambridge University Press, 1995.

[4] A. Ambrosetti, and A. Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*. Vol. 104. Cambridge university press, 2007.

[5] Anderson L. A. de Araujo, A. Medeiros, and D. Motreanu. *Solutions for a nonlinear equation with competing operators and supercritical exponential growth*. Complex Variables and Elliptic Equations (2024) : 1-14.

[6] H. Attouch, G. Buttazzo, and G. Michaille, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces : applications to PDEs and optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.

[7] B. Schweizer, *Partielle Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2013).

[8] L. Boccardo and G. Croce, *Elliptic partial differential equations*, volume 55 of De Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, Berlin, 2014.

[9] V. I. Bogachev, *Measure Theory*. Vol. I, Springer, Berlin, 2007.

[10] H. Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York : Springer, 2011.

[11] F. E. Browder, *Variational boundary value problems for quasilinear elliptic equations of arbitrary order*. Proc.Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963) p. 31-37.

[12] P. G. Ciarlet, *Linear and nonlinear functional analysis with applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.

[13] G. Dinca, P. Jebelean, and J. Mawhin, *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian*. Portugaliae mathematica 58.3 (2001) : 339.

[14] H. Le Dret, *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*. Vol. 136. Springer, 2013.

[15] O. Kavian : Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag,Berlin Heidelberg, vol. 13, 1993.

[16] J. Kinnunen, *Sobolev Spaces*. Department of mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[17] L. Gasinski, and N. S. Papageorgiou, *Exercises in analysis*. Part 2 : nonlinear analysis. Heidelberg : Springer ; 2016.

[18] P. D. Lax , and A. N. Milgram, *Parabolic equations*. Contributions to the Theory of Partial Differential Equations.(AM-33) 33 (2016) : 167.

[19] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod/Gauthier-Villars, Paris.

[20] G. J. Minty, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*. (1962) : 341-346.

[21] N. S Papageorgiou, V.D Radulescu and D.D.Repovs, *Nonlinear Analysis : Theory and Methods*. Springer Monographs in Mathematics.

[22] H. K. Pathak, *An introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*. Springer, 2018.

[23] P. A. Raviart, and J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Vol. 6. Elsevier Masson, 1983.

[24] H. Royden, and P. M. Fitzpatrick, *Real analysis*. China Machine Press, 2010.

[25] T. Roubicek, *Nonlinear partial differential equations with applications*. Vol. 153. Springer Science and Business Media, 2013.

[26] W. Rudin, *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1987.

[27] Showalter, R. E. (1997). *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.

[28] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[29] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*. American Mathematical Soc., 2017.

[30] D. Motreanu, V. V. Motreanu, and N. S. Papageorgiou, *Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems*. Vol. 1. No. 7. New York : Springer, 2014.

[31] D. Motreanu, V. Motreanu and N. S. Papageorgiou, *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*. Springer, New York, 2014.

[32] R.C. Mcowen, *Partial differential equations : Methods and applications*. Prentice Hall, 1996.

[33] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications : Part 2 B : Nonlinear monotone operators*. Springer, 1989.