République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieure et de la
Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département De Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

Bachene Amel

Titre

SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE ET CONVEXITÉ EN CALCUL DES VARIATIONS

Soutenu le 14/ septembre/2021 devant le jury composé de

Président :	Benaichouche Noureddine	Université de Médéa
Directeur de Mémoire :	Leghmizi Mohamed Lamine	Université de Médéa
Examinateur :	Benchaa Mohammed	Université de Médéa
Examinateur :	Ayadi Hocine	Université de Médéa

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À l'être la plus chère de ma vie, ma mère qui ma bénie par ces prières et qui m'a inondé avec ça tend ress.

À mon chère et mon support, mon père, qui parcouru au long de mes études et ma dirigé vers la gloire.

À mes chéres frères et mes sœurs et leur conjoints pour leur soutiens et leurs encouragement .

À ma grand mère, grand père et membres de ma famille .

À tout mes amis sons citer les noms .

À la fin, je dédie special pour la jolie fille `Amira Abd ellatife` *et la femme de mon frère* `Mazoura` *et à toute personne qui on participe à ma réussite*

Bachene amel

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier,
Dieu le tout puisant de nous avoir donné la santé et la volonté
d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier vivement,
Mon directeur de mémoire monsieur `Leghmizi Mohamed Lamine` *pour*
la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience,
sa rigueur et sa disponibilité durant ma préparation
de cette mémoire.

Je tiens remercier également,
Les membres jury pour avoir accepter d'examiner ce mémoire.

Enfin,je remercie
Très particulièrement `Amina Louze` *pour son aide et son soutient*
tout le long de la préparation de ce mémoire.

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres reéls. .
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels.
Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, (N \in \mathbb{R}^N)$.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
∇u	Le gradient de u, $\quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^t$.
$p.p.$	Presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue).
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.
$\| \, . \, \|$	la norme
$:=$	par définition.
$\cdot . \cdot$	le produit scalair.
$D^\alpha u$	Dérivée au sens de distribution d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^N$ de u , $D^\alpha u = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}, \lvert\alpha\rvert = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
$\longrightarrow$	La convergence fort.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\rightharpoonup^*$	La convergence étoile faible.
$L^{p'}$	Le duale de l'espace L^p.
∇u	gradient de u , $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^t$.
$Supess$	supérieur essentiel c'est le plus petit des majorants essentiels.
$\lvert \, . \, \rvert$	la norme euclidienne
$i.e$	$c'est-à-dire$.
$\Omega \setminus [\cdot, \cdot]$	La différence ensembliste de Ω et $[\cdot, \cdot]$.

Résume

Dans ce mémoire on s'intéresse à une caractérisation de la semi-continuité inférieure des fonctionnelles intégrales du calcul des variations. Dans le cas scalaire, il en ressort que la convexité est une condition nécessaire et suffisante pour la semi-continuité inférieure faible. Ce travail a été traité indépendamment dans [12] et [6] . Une telle condition est importante non seulement du point de vue théorique mais aussi du point de vue des applications. En effet, on étudie un problème de minimisation non convexe par relaxation.

Abstract

In this thesis we are interested in a characterisation of the lower semi continuity about the integral functionalities calculation of variations .In the scalar case , it appears that convexity is a necessary and sufficient condition for lower semi continiuty.This work was handled independently in [12] et [6] .Such a condition is important not only from the theoretical point of view but also from the application . Indeed,we are studying a non convex relaxation minimization problem.

Sommaire

Dédicace 2
Remerciements 3
Notations 4
Résume 5
Abstract 6
Table des figures 8
Introduction 9
1. **Rappels et outils de base** 10
1.1. Élement d'analyse convexe 10
1.2. Espace de L^p et Espace Sobolev 15
2. **Condition nécessaire et suffisante de semi-continuité inférieure** 19
2.1. Position du problème de minimisation 19
2.2. Théorème d'éxistance 19
2.3. Caractérisation de s.c.i. 21
2.4. **Exemple d'application** 25
3. **Relaxation** 26
3.1. Position du problème de minimisation 26
3.2. Caractérisation de la régularisée s.c.i. 27
3.3. Théorème d'existence 28
conclusion 30
Références 31

Table des figures

1 Fonction bi-conjugué 12
2 C_{ξ^*} représente le graphe de h , $\xi^* \leq 0$ et $\mid x \mid < 1$ 14
3 C_{ξ^*} représente le graphe de h , $\xi^* > 0$ et $\mid x \mid < 1$ 14
4 K_x représente le graphe de h , $\mid x \mid \geq 1$ 14
5 Le graphe de $\phi(s)$ 21

Introduction

Le calcul des variations est un des sujets classique de mathématiques qui s'est développé pour résoudre les problèmes d'optimisation. On s'intéresse, dans ce mémoire, à l'utilisation du calcul des variations dans la résolution du problème de minimisation d'une fonctionnelle intégrale de type

$$\inf \left\{ G(u) \ ; \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}, \qquad (P)$$

où $G(u) = \displaystyle\int_\Omega g(x, \nabla u(x))dx$, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$), $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $1 < p < +\infty$.

Ce type de problème est courant en mécanique et plus particulièrement en élasticité. En effet, si $N \leq 3$, Ω représente la configuration de référence occupée par un matériau élastique et G est l'énergie associée de densité g.

Au départ, les chercheurs se sont appuyés sur le théorème d'existence du problème (P). Mais avec le temps la question qui leur est venue est : peut-on caractérisé la semi-continuité inférieure ?. ils sont conclus que dans le cas scalaire, la condition nécessaire et suffisante de la semi-continuité inférieure est la convexité. aussi, nous a permis de traité le problème non convexe par relaxation.

Le mémoire est composé essentiellement de trois parties. Dans la première partie on a essayé de rappeler les éléments essentiels de la théorie des fonctions convexes et quelques notions fondamentales d'analyse fonctionnelle.

la deuxième partie, concerne la minimisation des fonctions convexes. On y rappelle d'abord le théorème d'existence. En suite, on exposera une condition nécessaire et suffisante de la semi-continuité inférieure. On terminera cette partie par un rappel d'existence et d'unicité de la solution du problème (P).

La troisième partie est consacrée à la relaxation. En étudiant les problèmes de minimisation variationnels non convexe dépourvus de solution classique,on définit alors un problème relaxé qui est équivalent au problème initiale (P). On étudie alors l'existence de solutions classiques associées au problème relaxé et qui ne sont que des solutions généralisée du problème non convexe initial.

1. Rappels et outils de base

Dans cette partie, nous rappelons certains résultats de base sur l'analyse convexe et sur les espaces fonctionnels(l' espace L^p et l' espace de Sobolev).

Dans toute la suite, X désigne un espace de Banach [1] , Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$), muni de la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ qu'on notera par dx.

1.1. Élement d'analyse convexe.

1.1.1. *La convexité.*

Dans cette partie nous mentionnerons les caractéristiques les plus importantes de la convexité. Pour les démonstrations voir [3, 8, 9].

Definition 1.1. (**Graphe et épigraphe d'une fonction**)
Soit $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
On définit le graphe de g par :

$$Gr(g) = \{(x, g(x)) \ ; \ x \in X\}.$$

On définit l'épigraphe de g par :

$$epi(g) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \ ; \ \lambda \geq g(x)\}.$$

On définit le domaine de g par :

$$dom(g) = \{x \in X \ ; \ g(x) < +\infty\}.$$

Definition 1.2. (**Ensemble convexe**)
Soit C partie de X et a, b deux éléments de X, le segment [a,b] est défini par :

$$[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda) b \ ; \ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

On dit que C est un ensemble convexe si :

$$a \in C \quad et \quad b \in C \Rightarrow [a, b] \subset C.$$

Definition 1.3. (**Enveloppe convexe**)
Soit A une partie de X, l'enveloppe convexe de A est donné par :

$$Conv\,(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \ a_i \in A \right\}.$$

Remarque 1.4. *Cette ensemble représente l'intersection des parties convexes contenant A.*

1. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Definition 1.5. (**Fonction convexe**)
Soit C un convexe de X et $g : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que :
(i) g est convexe si :

$$\forall x, y \in dom(g),\ \forall t \in [0,1]\,,\ g(tx + (1-t)\,y) \leq tg\,(x) + (1-t)\,g\,(y) \quad .$$

(ii) g est strictement convexe si :

$$\forall x, y \in dom(g),\ \forall t \in [0,1]\,,\ g\,(tx + (1-t)\,y) < tg\,(x) + (1-t)\,g\,(y) \quad .$$

Théorème 1.6. *(**Inégalité de Jensen**[2])*
Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe alors

$$g\left(\frac{1}{mes\ \Omega}\int_\Omega u(x)\ dx\right) \leq \frac{1}{mes\ \Omega}\int_\Omega g\,(u(x))\ \ dx.$$

1.1.2. ***La semi-continuité inférieure.***
Dans cette partie, on rappelle la définition de la semi-continuité inférieure (en abrégé s.c.i.) d'une fonction $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definition 1.7. On dit que g est s.c.i. (séquentiellement) relativement à la topologie faible si

$$\forall\, \{x_n\} \subset X \quad ; \quad x_n \rightharpoonup x,\ \liminf_{n\to+\infty} g(x_n) \geq g(x).$$

où $\liminf_{n\to+\infty} g(x_n) = \sup_{n\geq 0} \inf_{m\geq n} g(x_n) = \sup\{inf\ \{g(x_m) : m \geq n\}\, n \geq 0\}$.

Remarque 1.8. *g est s.c.i. sur X si g est s.c.i. en tout point $x \in X$.*

1.1.3. ***La fonction conjuguée et bi-conjuguée.***
Nous rappelons ici les définitions et propriétés de la conjuguée et bi-conjuguée d'une fonction $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ où $dom\,(g(x,.)) \neq \emptyset$. Pour plus de détail voir [5] [6].

Definition 1.9. On appelle fonction conjugué de g et on note g^* la fonction $g^* : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définit par :

$$g^*(x, \xi^*) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \{\xi.\xi^* - g(x, \xi)\}.$$

Ceci permet d'obtenir que $g^*(x,.)$ est une fonction convexe et s.c.i.

Proposition 1.10. *Si pour tout $x \in \Omega$, la fonction $g(x,.)$ est convexe et s.c.i. alors $dom\,(g^*\,(x,.)) \neq \emptyset$.*

2. Johan Ludwig William Valdemar Jensen(1859-1925) est un mathématicien et ingénieur danois.

Definition 1.11. Soit $dom\,(g^*(x,.)) \neq \emptyset$. On appelle fonction bi-conjugué de g et on note g^{**} la fonction $g^{**} : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{^{\pm}\infty\}$ définit par :

$$g^{**}(x,\xi) = \sup_{\xi^* \in \mathbb{R}^N} \{\xi.\xi^* - g^*(x,\xi^*)\}.$$

On obtient le théorème de Fenchel [3]-Mareau [4]. Pour la démonstration voir ([5], théorème 1.10 et [6]).

Théorème 1.12. ***(Fenchel-Mareau)***
Pour tout $x \in \Omega$, si $g(x,.)$ convexe et s.c.i. alors

$$g^{**}(x,.) = g(x,.)\ p.p.\ x \in \Omega.$$

Remarque 1.13.
b) Ona g n'est pas nécessairement convexe alors g^{**} est son enveloppe convexe.Autrement dit : g^{**} représente la plus grand fonction convexe qui soit plus petite que g.

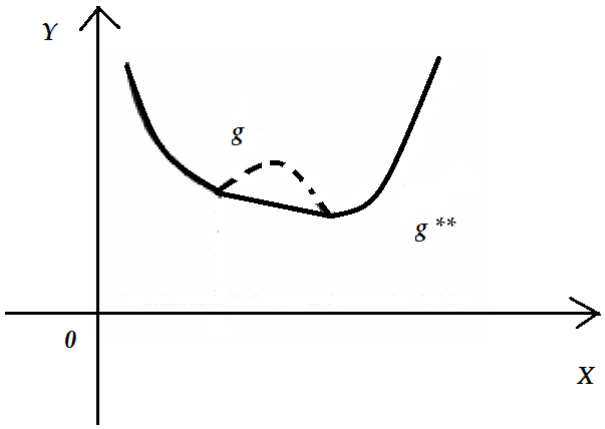


FIGURE 1. Fonction bi-conjugué

Exemple 1.14. *soit* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,\xi) \longmapsto g(x,\xi) = (\mid \xi \mid +1)^{|x|}$$

On calcule $g^{**}(x,\xi)$ tel que

$$g^{**}(x,\xi) = \sup_{\xi^* \in \mathbb{R}} \{\xi.\xi^* - g^*(x,\xi)\}$$

1) On calcul d'abord $g^*(x,\xi)$ tel que

$$g^*(x,\xi^*) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{\xi.\xi^* - g(x,\xi)\}$$

3. Werner Fenchel (1905-198b)est un mathématicien danois d'origine allemande.
4. Jean-Jacques Moreau(1923-2014) est un mathématicien français.

il vient

$$g^*(x,\xi^*) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\{\xi^*\xi - (\mid \xi \mid +1)^{|x|}\right\}$$

On pose $h(\xi) = \xi^*\xi - (\mid \xi \mid +1)^{|x|}$, et on étudie les variations de la fonction $h(\xi)$

$$h(\xi) = \begin{cases} \xi^*\xi - (\xi+1)^x & \xi \geq 0\ ,\ x \geq 0 \\ \xi^*\xi - (-\xi+1)^x & \xi < 0\ ,\ x \geq 0 \\ \xi^*\xi - (\xi+1)^{-x} & \xi \geq 0\ ,\ x < 0 \\ \xi^*\xi - (-\xi+1)^{-x} & \xi < 0\ ,\ x < 0 \end{cases}$$

$$h^{'}(\xi) = \begin{cases} \xi^* - x(\xi+1)^{x-1} & \xi \geq 0\ ,\ x \geq 0 \\ \xi^* - x(-\xi+1)^{x-1} & \xi < 0\ ,\ x \geq 0 \\ \xi^* + x(\xi+1)^{-x-1} & \xi \geq 0\ ,\ x < 0 \\ \xi^* + x(-\xi+1)^{-x-1} & \xi < 0\ ,\ x < 0 \end{cases}$$

Si $0 \leq x < 1$

Si $\xi \geq 0$ ona $\xi^* - x(\xi+1)^{x-1} \leq \xi^* - 1$

Si $\xi < 0$ ona $\xi^* - x(-\xi+1)^{x-1} < \xi^* - 1$

Pour $\xi^* \leq 1$ ona $h^{'}(\xi) \leq 0$

Si $-1 < x < 0$

Si $\xi \geq 0$ ona $\xi^* + x(\xi+1)^{-x-1} \geq \xi^* - 1$

Si $\xi < 0$ ona $\xi^* + x(-\xi+1)^{-x-1} > \xi^* - 1$

Pour $\xi^* > 1$ ona $h^{'}(\xi) > 0$

Comme $\xi^*\xi - (\mid \xi \mid +1)^{|x|} \leq \xi^*\xi - 1,\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}$ alors les variations de h sont données par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $h^{'}$		$+$	$\circ$	$-$	
variations de h			$\xi^*\xi - 1$		
		$\xi^*\geq 1$ ↗		↘ $\xi^*<1$	
	$-\infty$				$-\infty$

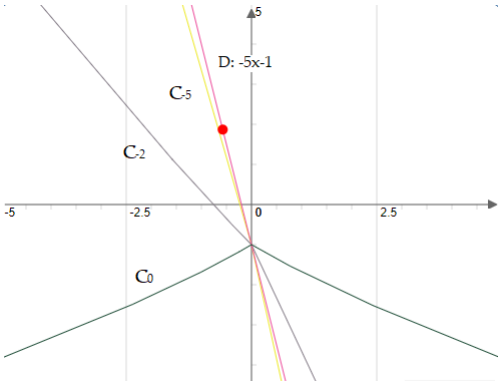


FIGURE 2. C_{ξ^*} représente le graphe de h , $\xi^* \leq 0$ *et* $\mid x \mid < 1$

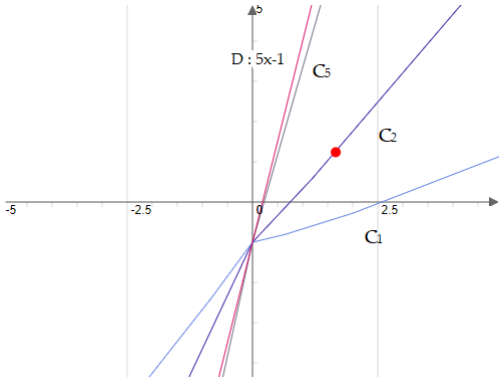


FIGURE 3. C_{ξ^*} représente le graphe de h , $\xi^* > 0$ *et* $\mid x \mid < 1$

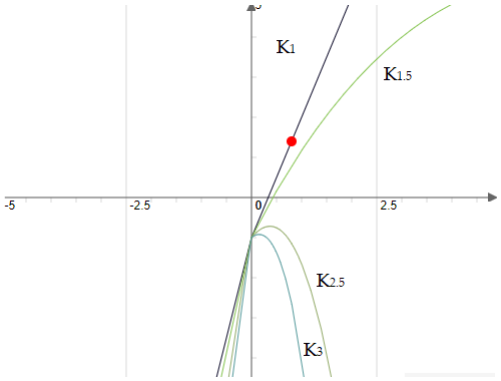


FIGURE 4. K_x représente le graphe de h , $\mid x \mid \geq 1$

D'après le tableaux des variations et les figures 2,3,4 on conclue $\forall \xi^* \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ on a

$$g^*(x, \xi^*) = \begin{cases} \xi^* \xi - 1 & , \quad \text{si} \mid x \mid < 1 \\ h(x) & , \quad \text{si} \mid x \mid \geq 1 \end{cases}$$

2) On calcule maintenant $g^{**}(x,\xi)$

$$\begin{aligned} g^{**}(x,\xi) &= \sup_{\xi^*\in\mathbb{R}} \{\xi.\xi^* - g^*(x,\xi)\} \\ &= \begin{cases} \sup\limits_{\xi^*\in\mathbb{R}} \{\xi^*\xi - (\xi^*\xi - 1)\} & , \quad \text{si} \mid x \mid < 1 \\ \sup\limits_{\xi^*\in\mathbb{R}} \{\xi^*\xi - h(x)\} & , \quad \text{si} \mid x \mid \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sup\limits_{\xi^*\in\mathbb{R}} \{\xi^*\xi - (\xi^*\xi - 1)\} & , \quad \text{si} \mid x \mid < 1 \\ \sup\limits_{\xi^*\in\mathbb{R}} \left\{\xi^*\xi - (\xi^*\xi - (\mid \xi \mid +1)^{|x|})\right\} & , \quad \text{si} \mid x \mid \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad \text{si} \mid x \mid < 1 \\ (\mid \xi \mid +1)^{|x|} & , \quad \text{si} \mid x \mid \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2. **Espace de L^p et Espace Sobolev.**

On rappelle dans cette partie les notions de base associées à l'espace L^p et l'espace de Sobolev : la norme, la convergence et quelque lemme et des inégalités importante. Pour plus de détails voir [2].

L'espace L^p est un espace de Lebesgue de fonction (classe) p-sommable de Ω a valeur dans $\mathbb{R}$.

Definition 1.15. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace L^p par

$$L^p = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \quad mesurable \ ; \ \| \ u \ \|_p < \infty\}.$$

Ce espace muni de la norme

$$\| \ u \ \|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si} \quad 1 \leq p < +\infty \\ \sup ess|u| = inf \ \{c; |u| \leq c \quad p.p. \quad sur \quad \Omega\}, & \text{si} \quad p = +\infty \end{cases}$$

Definition 1.16. (**La convergence dans l'espace** L^p)

Soit $\{u_n, u\}$ une famille de L^p ,on définit la convergence dans L^p par :

(i) on dit que $\{u_n\}$ convergeante fortement vers u si $\| \ u_n - u \ \|_p \to 0$.
on note alors $u_n \to u$.

(ii) on dit que $\{u_n\}$ convergeante faiblement vers u si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n v \ dx = \int_\Omega uv \ dx \quad pour \quad tout \quad v \in L^{p'} \quad Avec \quad 1 \leq p < +\infty \quad et \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

on note alors $u_n \rightharpoonup u$.

(iii) on dit que $\{u_n\}$ convergeante *-faiblement dans L^∞ vers u si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n v \ dx = \int_\Omega uv \ dx \quad pour \quad tout \quad v \in L^1 \quad Avec \quad p = +\infty \quad .$$

on note alors $u_n \rightharpoonup^* u$.

Lemme 1.17. *(**Lemme de Fatou**[5])*
Soit $\{g_n\}$ une suite des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^N$ dans $[0,+\infty]$. Alors, on a l'inégalité suivante

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} g_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega g_n(x)\,dx.$$

Théorème 1.18. *(**Convergence dominée de Lebesgue**)*
Soit $p\in[1,\infty[$ et $\{g_n\}$ une suite de fonctions mesurables si :

(i) $\{g_n\}$ converge vers g p.p.

(ii) il existe $h\in L^1(\Omega)$ tel que $|g_n(x)|\leq h(x)$ p.p. Alors

$$\int_\Omega |\,g_n(x)-g(x)\,|\;dx=0.\ \textit{Autrement dit}\ \lim_{n\to+\infty}\|g_n-g\|_1=0$$

et en particulier $\lim_{n\to+\infty}\int g_n(x)\,dx=\int g(x)\,dx.$

Corollaire 1.19. *tout suite bornée de $L^p(\Omega)$ $(1\leq p<+\infty)$ admet une sous-suite convergeante pour la topologie faible.*

Espace de Sobolev[6] Sont des espaces de Banach si $1\leq p\leq\infty$, réflexif si $1<p<\infty$ et séparable si $1\leq p<\infty$ adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles.

Definition 1.20. Soit $1\leq p\leq\infty$, on définit l'espace de Sobolev en dimension 1 par :

$$W^{1,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega): D^\alpha u\in L^p(\Omega),|\alpha|=1\},$$

ce espace muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p+\sum_{1\leq i\leq n}|\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si}\quad p\in[1,+\infty[\\[2ex] max\{\|u\|_{L^\infty},\|\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\|_{L^\infty},1\leq i\leq n\}, & \text{si}\quad p=+\infty\end{cases}$$

qui équivalente á

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\begin{cases}\|u\|_p+\|\nabla u\|_p, & \text{si}\quad p\in[1,+\infty[\\[2ex] max\{\|u\|_{L^\infty},\|\nabla u\|_{L^\infty}\}, & \text{si}\quad p=+\infty\end{cases}$$

5. Pierre Joseph Louis Fatou (1878 1929) est un mathématicien et astronome français.

6. Lvovitch Sobolev(1908-1989) est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique (URSS).

Pour Ω borné à frontière régulière lipschitzien, on définit l'opérateur trace par :

$$\tau_0 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$
$$u \mapsto u_{|\partial\Omega}$$

τ_0 est une application linéaire continue,donc on peut caractériser l ' espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ où $W_0^{1,p}(\Omega)$ est le noyau de τ_0 et $\overline{D(\Omega)} = W_0^{1,p}(\Omega)$ qu'on peut définit comme suit :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0\}$$

Théorème 1.21. ***(Inégalité de Poincaré)***
Soit Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ borné au moins dans une direction et $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une constante $C = C(p, \Omega) > 0$, tel que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p} \leq C.\|\nabla u\|_{L^p}.$$

Pour la démonstration voir [7]

Théorème 1.22. ***(Injection de Sobolev)***
Soit Ω borné à frontière régulière, et $1 \leq p < +\infty$
L'injection canonique de $W^{1,p}(\Omega)$ dans L^p est compact relativement à la topologie forte de L^p.
Pour la démonstration voir [5, 11]

Definition 1.23. (La convergence dans $W^{1,p}(\Omega)$)
Soit $\{u_n\}$ une suite de $W^{1,p}(\Omega)$. On définit la convergence dans $W^{1,p}(\Omega)$ comme suit
(i) Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on dit que $\{u_n\}$ convergeante fortement

vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si $\begin{cases} u_n \longrightarrow u \quad dans \quad L^p(\Omega) \\ \nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad dans \quad (L^p(\Omega))^N \end{cases}$

(ii) Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on dit que $\{u_n\}$ converge faiblement

vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad dans \quad L^p(\Omega) \\ \nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \quad dans \quad (L^p(\Omega))^N \end{cases}$

(iii) Pour $p = +\infty$, on dit que $\{u_n\}$ converge *-faiblement

vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si $\begin{cases} u_n \rightharpoonup^* u \quad dans \quad L^{+\infty}(\Omega) \\ \nabla u_n \rightharpoonup^* \nabla u \quad dans \quad (L^{+\infty}(\Omega))^N \end{cases}$

Maintenant nous allons mentionner la relation entre la convergence dans $W^{1,p}$ et L^p.

Remarque 1.24. *tout suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$admet une sous-suit convergeante fortement dans $L^p(\Omega)$.*

Lemme 1.25. *(**Mazur**[7])*
Soit $\{u_n\}$ une suite convergeante faiblement vers u dans X. Il existe une suite $\{v_n\} \subset \text{conv}\{u_k \ : \ k \geq n\}$[8] convergeante fortement vers v.

Théorème 1.26. *(**Inégalité de Cauchy**[9] **Schwarz**[10])*
soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, soit $\| \ . \ \|$ la norme euclidienne associe á $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Alors

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |< x, y >| \leq \| \ x \ \| \ . \ \| \ y \ \| \ .$$

7. Stanisław Mazur (1905-1981) mathématicien polonais.

8. Le terme y_n s'écrit donc $y_n = \sum_{j=n}^{m} \lambda_j u_j, m \in \mathbb{N}, n \leq j \leq m, \sum_{j=n}^{m} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0.$

9. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) , est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.

10. Hermann Schwarz Amandusest(1843- 1921) un mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.

2. Condition nécessaire et suffisante de semi-continuité inférieure

Dans cette partie nous allons étudier l'existence de solution de problème d'optimisation (minimisation) en calcul des variations. Nous mentionnerai d'abord le théorème d'existence de Weierstrass [4] ce qui explique l'importance de la semi-continuité inférieure et la coercivité. Ensuite on discutera le rôle de la convexité pour l'existence et l'unicité de solution de ce problème et pour cela on donne quelques résultats simple :condition nécessaire de s.c.i. [4], condition suffisante de s.c.i [10, 4].

2.1. Position du problème de minimisation.

En calcul des variations on considère la fonctionnelle suivant :

$$G(u) = \int_\Omega g(x, \nabla u(x))dx.$$

où

- Ω : est un ouvert bornée inclue dans $\mathbb{R}^N,\ N \in \mathbb{N}$.
- $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[\ ,\ g : (x, \xi) \longrightarrow g(x, \xi)$.
- $1 < p < +\infty$.

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\inf \left\{G(u),\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\} \qquad (P_1)$$

Dans ce problème la s.c.i. de G est plus important pour l'existence de la solution .

Remarque 2.1. *Si G n 'est pas s.c.i. alors le problème (P_1) peut n'admettre pas des solutions.*

2.2. Théorème d'éxistance.

Definition 2.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow]-\infty, +\infty]$. g est dite une intégrande de Carathéodory si

(i) $\xi \mapsto g(x, \xi)$ est continue sur $\mathbb{R}^N$, p.p. $x \in \Omega$.

(ii) $x \mapsto g(x, \xi)$ est mesurable, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Lemme 2.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow] - \infty, +\infty]$ une fonction de Carathéodory et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors la fonction composée*

$$x \mapsto g(x, v(x)),$$

est mesurable.

Théorème 2.4. *(**Théorème de Weierstrass**[11])*
Soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach réflexif, et $G : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
(i) la coercivité :

$$\exists\, \beta \geq 0 \ \textit{tel que} \ \forall \xi \in X,\ G(\xi) \geq \beta \parallel \xi \parallel^p,\ 1 \leq p \leq +\infty.$$

(ii) G est faiblement (séquentiellement) s.c.i.

$$i.e\ \ \forall \{u_n\} \subset X\ ;\ u_n \rightharpoonup u,\ G(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} G(u_n).$$

Alors le problème

$$\inf \{G(u)\ ;\ u \in X\}. \qquad (P_2)$$

admet une solution. Autrement dit,

$$\exists\, \overline{u} \in X \ \textit{tel que} \ \forall u \in X\ ,\ G(\overline{u}) = \inf_{u \in X} G(u) = \min_{u \in X} G(u).$$

preuve. Soit $\{v_n\}$ une suite minimisante du problème de minimisation . Autrement dit,

$$\liminf_n G(v_n) = \inf_{u \in E} G(u) < +\infty.$$

Il existe une sous-suite $\{v_{n_k}\}$ (qu'on notera $\{v_k\}$) de $\{v_n\}$ tel que

$$\liminf_n G(v_n) = \lim_k G(v_k).$$

Par coercivité et la bornétude de $G(v_k)$, on obtient que $\{v_k\}$ est bornée. D'où, par réflexivité de l'espace X, il existe une sous-suite $\{v_{k_l}\}$ qui converge faiblement vers $\bar{u} \in X$. Comme G est faiblement (séquentiellement) s.c.i. on obtient

$$\begin{aligned} G(\bar{u}) &\leq \liminf_l G(v_{k_l}) \\ &= \lim_k G(v_k) \\ &= \inf_{u \in X} G(u) \\ &\leq G(u), \end{aligned}$$

pour tout $u \in X$. Donc $\bar{u}$ est solution du (P_2).

11. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass(1815-1897)est un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895

2.3. Caractérisation de s.c.i.

2.3.1. *Condition nécessaire de s.c.i.*

Proposition 2.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0 + \infty[$ intégrande carathéodory .Si la fonctionnelle*

$$G(u) = \int_\Omega g(x, \nabla u(x))dx.$$

est faiblement (séquentiellment) s.c.i. sur $W^{1,p}(\Omega)$, $p \in]1, +\infty[$. Alors la fonction

$$\xi \longmapsto g(x, \xi)$$

est convexe p.p. $x \in \Omega$.

preuve. Ona la fonctionnelle suivante :

$$G(u) = \int_\Omega g(\nabla u(x))dx.$$

On prouve par deux étapes
(1) Soient $x \in \Omega,\ t \in [0, 1]$ *et* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^N,\ N \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On met

$$h = \beta - \alpha \ \ telque \ \ \alpha \neq \beta.$$
$$s = nx.h - [nx.h]\,.$$
$$y = t\alpha + (1 - t)\beta.$$

On définit la suit

$$u_n(x) = y.x + \frac{1}{n}\Phi(s).$$

On définit la fonction

$$\Phi(s) = \begin{cases} -(1-t)s, & \text{si} \quad s \in [0, t[\\ -(1-s)t, & \text{si} \quad s \in [t, 1[\end{cases}$$

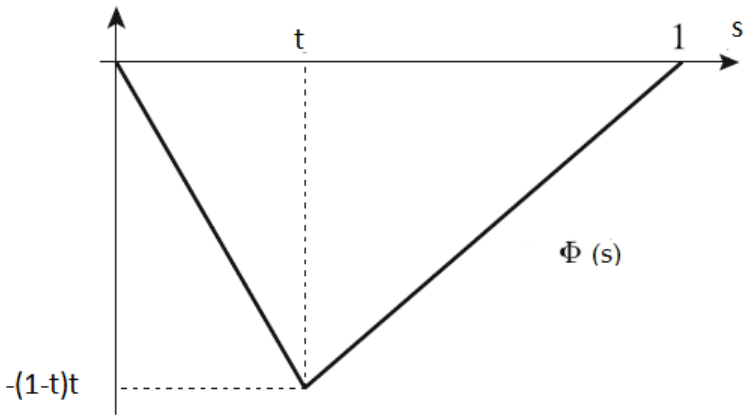


FIGURE 5. Le graphe de $\phi(s)$

Alors

$$\nabla\Phi(s) = \begin{cases} \nabla(t-1)(nx.h - [nx.h]), & \text{si } s \in [0,t[\\ \nabla(nx.h - [nx.h] - 1)t, & \text{si } s \in [t,1] \end{cases}$$

On remarque que $x \mapsto nx.h - [nx.h]$ est la fonction de partie fractionnaire et ça dérivée est égale nh alors on obtient :

$$\nabla\Phi(s) = \begin{cases} -(1-t)nh, & \text{si} \quad s \in [0,t[\\ nht, & \text{si} \quad s \in [t,1] \end{cases}$$

Comme $\nabla u_n(x) = y + \frac{1}{n}\nabla\Phi(s)$ on conclue

$$\nabla u_n(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si} \quad x \in [n-1, nt[\\ \beta, & \text{si} \quad x \in [nt, n] \end{cases}$$

Si $n \to +\infty$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Phi(s) = 0$ donc

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u = yx & dans\ L^p(\Omega) \\ \nabla u_n \rightharpoonup \nabla u = y & dans\ L^p(\Omega) \end{cases}$$

Alors $u_n \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$

(2) On a $u_n \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et G est s.c.i. Alors

$$G(u) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} G(u_n)$$

donc

$$\int_\Omega g(\nabla u(x))dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega g(\nabla u_n(x))dx$$

Et par suite

$$\int_\Omega g(\nabla u(x))dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^t g(\nabla u_n(x))dx + \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_t^1 g(\nabla u_n(x))dx$$
$$+ \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\Omega\setminus[0,1]} g(\nabla u_n(x))dx$$

D'après le théorème de convergence dominer on obtient

$$\int_\Omega g(y)dx \leq \int_0^t g(\alpha)dx + \int_t^1 g(\beta)dx + \int_{\Omega\setminus[0,1]} g(y)dx$$

Il vient

$$\int_\Omega g(y)dx - \int_{\Omega\setminus[0,1]} g(y)dx \leq \int_0^t g(\alpha)dx + \int_t^1 g(\beta)dx$$

On déduit

$$g(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tg(\alpha) + (1-t)g(\beta)$$

Remarque 2.6.

Pour $G(u) = \int_\Omega g(x, \nabla u(x))dx$. voir ([2],théoreme [5.1],page 139)

2.3.2. ***Condition suffisante de s.c.i.***

Théorème 2.7. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty[$ est intégrand carathéodory,tel que*

$$\xi \longmapsto g(x, \xi) \quad est \quad convexe \quad p.p. \quad x \in \Omega$$

Alors G est faiblement (séquentiellement) s.c.i. dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 < p < +\infty$.

preuve. On prouve par deux étape :
(1) D'abord on montre que G est s.c.i.

Soit la suite $\{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\quad u_n \to u \quad dans \quad W^{1,p}(\Omega)$ on a

$$G(u) = \int_\Omega g(x, \nabla u(x))dx = \int_\Omega \liminf_{n \longrightarrow +\infty} g(x, \nabla u_n(x))dx$$

On applique lemme de Fatou on obtient :

$$G(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega g(x, \nabla u_n(x))dx = \liminf_n G(u_n)$$

Alors

$$G(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} G(u_n)$$

(2) On montre que F est faiblement s.c.i. , il suffit de montrer que

$$G(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} G(u_n) := \alpha$$

Soit $\{u_n\}$ une suite tel que $u_n \rightharpoonup u \quad dans \quad W^{1,p}(\Omega)$ et soit $\{u_{nk}\}$ une sou-suit de $\{u_n\}$ tel que

$$\liminf_n G(u_n) := \liminf_{n \longrightarrow +\infty} G(u_{n_k}) = \alpha \leq +\infty$$

D'oú pour tout $\varepsilon \geq 0$, il 'exists $k_\varepsilon \quad , \forall k \geq k_\varepsilon$

$$\alpha - \varepsilon \leq G(u_{n_k}) \leq \varepsilon + \alpha \qquad (*)$$

En appliquant lemme de Mazur á la suite $\{u_{n_k} : k \geq k_\varepsilon\}$ il existe une suite $\{V_k\}$ de combinaisons convexe de $\{u_{n_k} : k \geq k_\varepsilon\}$ tel que

$$V_k = \sum_{i=k}^{l} \lambda_i u_{n_i},\ l \in \mathbb{N},\ k_\varepsilon \leq k \leq i \leq l, \quad \sum_{i=k}^{l} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$$

et

$$V_k \to u \quad dans \ \ L^p(\Omega) \ et \ \nabla V_k \to \nabla u \ \ L^p(\Omega)$$

Par l hypothèse de convexité ; il vient

$$G(V_k) \leq \sum_{i=k}^{l} \lambda_i G(u_{n_i}) \qquad (**)$$

Comme $\sum_{i=k}^{l} \lambda_i = 1$, on en déduit de $(*)$ que

$$\lim_k \sum_{i=k}^{l} \lambda_i G(u_{n_i}) = \alpha \qquad (***)$$

Le résultat découle par passage à la limite inférieure dans $(**)$ et l'étape 1

Lemme 2.8. *Soit* $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty[$ *est intégrand carathéodory vérifier*

(H1) *g(x,.) est strictement convexe p.p.* $x \in \Omega$.

(H2) $\exists \beta \geq 0$ *telque* $\forall \xi \in X, \quad G(\xi) \geq \beta \parallel \xi \parallel$.

Alors le minimum de $(P1)$ *est unique.*

preuve. :
On suppose que le problème P admet deux solution u_1 et u_2 tel que $u_1 \neq u_2$ .Alors

$$\min G(u) = G(u_1) = G(u_2)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \min G(u) &= \tfrac{1}{2} G(u_1) + \tfrac{1}{2} G(u_2) \\ &= \tfrac{1}{2} \int_\Omega g(x, \nabla u_1) dx + \frac{1}{2} \int_\Omega g(x, \nabla u_2) dx \\ &= \int_\Omega g(x, \frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}) dx \end{aligned}$$

il vient

$$\min G(u) = G(\frac{u_1 + u_2}{2})$$

Donc $\frac{u_1+u_2}{2}$ est un solution. Mais on a g est strictement convexe alors

$$\begin{aligned} G(\frac{u_1 + u_2}{2}) &= \int_\Omega g(x, \nabla(\frac{u_1 + u_2}{2})) dx \\ &< \tfrac{1}{2} \int_\Omega g(x, \nabla u_1) dx + \frac{1}{2} \int_\Omega g(x, \nabla u_2) dx \\ &= \min G(u) \end{aligned}$$

contraduction.Donc $(P1)$ admet unique solution.

2.4. **Exemple d'application. (Intégrale de Dirichlet)**
Pour Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$, on considéré la fonctionnelle suivante :

$$G(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 dx, \;\; u \in W^{1,2}(\Omega).$$

1) On montre la convexité
comme la fonction $\xi \longmapsto \frac{1}{2}|\xi|^2$ est une fonction convexe pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, si on pose $\xi = \nabla u(x)$ on conclu que la fonction $G(u)$ est convexe.

2) On montre la ceorcivité, Ona

$$\| u \|_{W^{1,2}} = \| u \|_{L^2} + \| \nabla u \|_{L^2} .$$

on applique l'inégalité de point carré on obtient :

$$\| u \|_{W^{1,2}} \leq C \| \nabla u \|_{L^2} + \| \nabla u \|_{L^2} .$$

par suit

$$\| u \|^2_{W^{1,2}} \leq (C+1) \| \nabla u \|^2_{L^2} = 2(C+1)^2 \times \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

On pose $C' = \frac{1}{2(C+1)}$ on obtien

$$C' \| u \|^2_{W^{1,2}} \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Il vient

$$G(u) \geq C' \| u \|^2_{W^{1,2}}$$

on conclu la fonctionnelle de Dirichlet est ceorcive.Donc il existe un minime.

3. Relaxation

Dans cette partie nous aborderons les problèmes de minimisation non convexe du calcule des variations en dimension $N > 1$, il faut donc développer des techniques particuliers, malheureusement plus compliquer qu'au chapitre précédent, il s'agit de relaxer le problème fondamentale. Nous allons poursuivre l'étude à l'aide du livre Temam[6] et l'article de Carlo Sbordone et Parlo Marcelini[12].

En calcule des variations on considère la fonctionnelle suivante :

$$G(u) = \int_\Omega g(x, \nabla u(x))dx.$$

où

- Ω est un ouvert bornée lipschitzien inclue dans $\mathbb{R}^N (N \in \mathbb{N})$.
- $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ \xi \longmapsto g(x, \xi)$.
- $1 < p < +\infty$

On pose les hypothèses suivant :

$$\begin{cases} |g(x, \nabla u(x))| \leq \beta(1 + |\nabla u(x)|^P) \quad , \beta \geq 0 & (H1) \\ g \quad est \quad \text{carathéodory} & (H2) \end{cases}$$

3.1. Position du problème de minimisation.

On pose le problème fondamentale que nous cherchons á étudier

$$\inf \left\{ G(u)\ ;\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} \qquad (P)$$

Dans ce problème la fonction g n'est pas convexe qui implique que G n'est pas s.c.i. donc on cherche un autre méthode pour résoudre ce problem.On pose le problème relaxé de (P) suivent :

$$\inf \left\{ \overline{G}(u)\ ;\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} \qquad (\overline{P})$$

tel que $\overline{\mathrm{G}}$ est la régularisée s.c.i. de G qu'il peut être définit comme suite :

$$\overline{\mathrm{G}}(u) = \inf\{\liminf_{n \longrightarrow \infty} G(u_n), u_n \rightharpoonup u, u_n \in W^{1,p}(\Omega)\}$$

Mais il ya grand difficulté de traiter $\overline{\mathrm{G}}$ comme un intégrale ci pour ça on le caractériser par G^{**}

3.2. **Caractérisation de la régularisée s.c.i.**

Proposition 3.1. *Soit $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ alors ona*

$$G^{**}(u) = \overline{\mathrm{G}}(u) \quad tel\ que \quad G^{**}(u) = \int_\Omega g^{**}(x, \nabla u(x))dx$$

preuve.

On montre que $epi(G^{**}) = epi(\overline{\mathrm{G}})$ donc il suffit de montrer que

$$\overline{\mathrm{conv}}(epi(G)) = \overline{\mathrm{epi(G)}}$$

sachant que

$$epi(G) = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k_i \right), G(u_i) \leq k_i, k_i \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_i \geq 0 \quad et \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \right\}$$

1) montrons que $\overline{\mathrm{epi(G)}} \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(epi(G))$
ona $epi(G) \subset conv(epi)$ alors

$$\overline{\mathrm{epi(G)}} \subset \overline{\mathrm{conv(epi(G))}} = \overline{\mathrm{conv}}(epi(G)).$$

2) montrons que $\overline{\mathrm{conv}}(epi(G)) \subset \overline{\mathrm{epi(G)}}$
Ona

$$\begin{aligned} \mid G(u) - G(u_n) \mid &= \mid \int_\Omega g(x, \nabla u(x))dx - g(x, \nabla u_n(x))dx \mid \\ &\leq \int_\Omega \mid g(x, \nabla u(x))dx - g(x, \nabla u_n(x))dx \mid \end{aligned}$$

il vient

$$\mid G(u) - G(u_n) \mid \leq \varepsilon$$

Donc

$$G(u) \leq \varepsilon + G(u_n).$$

Soit u un point de $conv(epi(G))$ alors on a

$$G(u_i) \leq k_i < \infty\ ,\ 1 \leq i \leq m.$$

On pose $u_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$ on obtiens

$$G(u) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} G(u_j) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} k_j = k$$

On conclu alors $u \in epi(G)$

On peut donc relaxé le problème (P) comme suit :

$$\inf\left\{G^{**}(u)\ ;\ u\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\} \qquad (P^{**})$$

où $G^{**}(u)=\displaystyle\int_\Omega g^{**}(x,\nabla u(x))dx$, Ω est un ouvert bornée lipschitzien inclue dans $\mathbb{R}^N(N\in\mathbb{N})$, $g^{**}:\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $\xi\longmapsto g^{**}(x,\xi)$

Remarque 3.2. *g^{**} est une fonction convexe continue.*

3.3. **Théorème d'existence.**

On va explique la relation entre les valeurs d'adhérence dune suit minimisante et les solutions de problème (P).

Proposition 3.3. *Le problème $(\overline{P})$ admet des solution .De plus :*

$$\inf\left\{G(u)\ ;\ u\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}=\min\left\{\overline{G}(u)\ ;\ u\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

Tout suite minimisante de (P) est une valeur d'adhérence d'une suite minimisante de $(\overline{P})$ sur la topologie faible de $W_0^{1,p}(\Omega)$.Inversement tout suite minimisante de $(\overline{P})$ est une limite d'une suite minimisante de (P) sur la topologie faible de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 3.4. *Soit la fonction $g:\Omega\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses $(H1)$ et$(H2)$ alors*

$$\inf\left\{\int_\Omega g(x,\nabla u(x))dx\ ;\ u\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}=\min\left\{\int_\Omega g^{**}(x,\nabla u(x))dx\ ;\ u\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

Le problème (P^{**}) a des solutions ce sont les valeurs d'adhérence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de suites minimisantes du problème (P) .

preuve.

D'abord on montre que

$$\min G^{**}\le\inf G(u).$$

on a $\overline{G}(u)\le G(u)$ alors

$$\min\overline{G}(u)\le\inf G(u).$$

d'après la proposition [3.1] on obtient

$$\min\ G^{**}\le\inf G(u).$$

Maintenant on montrer que

$$\min G^{**}>\inf G(u).$$

on peut caractérisé $\overline{G}(u)$ par
$\forall u\in X$, il existe $u_n\to u$ dans X tel que

$$\overline{G}(u)>\lim_{n\to+\infty}\sup G(u_n).$$

Alors on a

$$\min \overline{G}(u) > \inf G(u_n) \ .$$

Par suit

$$\min G^{**}(u) > \inf G(u).$$

On conclue $\min G^{**}(u) = \inf G(u)$.

Pour plus de détail voir [6](page 314) et [12](page 254).

CONCLUSION

Au terme de notre travail, on a abordé un problème de minimisation du calcul des variations dans le cas scalaire. À travers ce travail, nous avons constater que pour l'existence de solution de problème variationnelle deux hypothèses sont suffisantes : la semi-continuité inférieure et la coercivité. De plus, on peut caractériser la la semi-continuité inférieure par la convexité. Si la convexité n'est pas vérifiée, on relaxe le problème de minimisation et on obtient des solutions généralisées.

Références

[1] B.Dacorogna, *Direct methods in the calculs of variations*, Springer Science, Business Media, vol78, (2008).

[2] E.Giusti,*Direct methods of the calculus of variations*, World Scientific publishing Co Pte Ltd,(2003).

[3] E.Provenzi, *Optimisation convexe*,Premiere partie, polycopié du cours.

[4] F. Rindler , *calculus of variations*, Berlin, Springer International Publishing AG,(2018).

[5] H. Brezis,*Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris New york Bar-celone Milan Mexico Sao Poulo,(1987).

[6] I. Ekeland et R.Temam,*Convexe analysis and variational problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, CL28,(1999).

[7] I.Nourdin (2001), *Une démonstration de l' inégalité de point carré*, https ://www.lpsm.paris/pageperso/nourdin/LeSiteDeLAgregatif/poincare.pdf.

[8] JB.Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*, EDP sciences, (2021 Feb 11).

[9] JF. Bonnans, *Optimisation continue*, Dunod Paris, volume 31, (2006).

[10] J. Lamboley et H. Le Dret, *Analyse fonctionnelle approfondie et calcul des variations*, polycopié de J-F Babadjian.

[11] ML.Leghmizi, *Analyse variationnelle et* Γ *convergence*, Notes de cours, (2020-2021).

[12] P. Marcellini, C. Sbordone, *On the existence of minima of multiple integrals of the calculus of variations*, J. Math. Pures Appl., t. 62, (1983).

[13] T. Gallouet et R. Herbin (2021), *Mesure, Intégration, Probabilités*, https ://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/licence.d/int/part4.pdf.