RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Département de Mathématiques



THÈSE

pour l'obtention du grade de

Doctorat LMD

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **Analyse et Modélisation Mathématiques**

Présentée par **Souad Ayadi**

Intitulé de la thèse

Existence de solutions pour certains problèmes elliptiques

Directeur de thèse : **Toufik Moussaoui**

Soutenue le 03/05/2018

Devant la commission d'examen

Mr. S. Kouadik, U. Médéa,	Professeur,	Président
Mr. A. Ouahab, U. Sidi-Belabès,	Professeur,	Examinateur
Mr. K. Bachouche, U. Alger 01,	M.C.(A),	Examinateur
Mr. A. Ait Mokhtar, ENS-Kouba,	M.C.(A),	Examinateur
Mr. T. Moussaoui, ENS-Kouba,	Professeur,	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus particuliers à Monsieur Toufik Moussaoui de l'ENS de Kouba, qui a accepté de diriger cette thèse, pour son aide, sa patience, sa grande disponibilité et ses conseils qui m'ont guidé tout au long de ce travail.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements au professeur S. Kouadik de l'université de Médéa de m'avoir donné l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur le professeur A. Ouahab de l'université de Sidi-Belabès, Messieurs K. Bachouche de l'université d'Alger 01 et A. Ait Mokhtar de l' ENS-Kouba d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Aussi, je n'oublie pas de remercier Monsieur le professeur S. Hanini et tous les responsables de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès de Médéa pour leur soutien et leurs encouragements durant toutes les années de préparation de cette thèse.

C'est également avec plaisir que je remercie tous les membres du laboratoire de Mathématiques "Théorie de Point Fixe et Applications" (TPFA) de l'École Normale Supérieure de Kouba qui m'ont permis de préparer ce travail dans d'excellentes conditions.

Enfin, je remercie ma famille et toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

RÉSUMÉ

Le but de cette thèse est d'étudier l'existence de solutions pour certains problèmes aux limites elliptiques non linéaires, posés sur des domaines bornés de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, via les théories des points fixes et critiques. Nos outils sont deux nouveaux théorèmes que nous avons démontrés ; le premier concerne le point critique et le deuxième le point fixe. L'opérateur inverse du Laplacien est un autre ingrédient important dans nos démonstrations.
Dans le premier chapitre, nous allons présenter quelques outils mathématiques que nous utiliserons dans notre thèse, et nous allons donner aussi des définitions et des propriétés du calcul différentiel. Dans le deuxième chapitre qui contient trois sections, nous allons regrouper nos résultats principaux. Dans la première section, nous allons présenter un théorème de minimisation, dont la démonstration est basée sur des théorèmes de points fixes et la notion d'opérateurs potentiels sur les espaces de Hilbert. Dans la deuxième section, nous allons utiliser un théorème de point critique pour démontrer l'existence de points fixes pour certains opérateurs potentiels sur les espaces de Hilbert. Les resultats trouvés seront utilisés pour démontrer l'existence de solutions pour une classe de problèmes aux limites de type Dirichlet. Dans la dernière section, nous allons prouver l'existence de solutions dans $C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, pour une certaine classe de problèmes aux limites elliptiques non linéaires posés sur des domaines bornés de $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$, en utilisant les théorèmes de points fixes et l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to study the existence of solutions for some class of nonlinear elliptic boundary value problems posed on bounded domains of $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, via fixed and critical point theories. Our tools are two new theorems that we have proved ; the first concerns the critical point and the second the fixed point. The inverse of the Laplacien operator is an important ingredient that we have also used.

In the first chapter, we will present some basic tools that we are going to use in our thesis. In the second chapter which contains three sections, we will give our main results. In the first section we will use fixed point theorems and the notion of potential operators on Hilbert spaces to prove a minimization theorem. In the second section, we will use a critical point theorem to prove the existence of fixed points for a potential operator on Hilbert spaces. These results will be used to prove the existence of weak solutions for a class of boundary value problems. In the last section, we will use fixed point theorems and the operator $(-\Delta)^{-1}$ to study the existence of solutions on the Banach space $C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, for a class of nonlinear elliptic boundary value problems posed on bounded domains of $\mathbb{R}^N$.

TABLE DES MATIÈRES

Notations **2**

Introduction **4**

Chapitre 1 Préliminaires **12**

1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach 12

1.1.1 Quelques notions de convergence 12

1.2 Continuité des opérateurs 15

1.2.1 Injections continues et compactes[23] 17

1.2.2 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla 17

1.2.3 Opérateur de Nemytskii 17

1.2.4 Semi-continuité 18

1.2.5 Fonctions convexes 19

1.3 Définitions et propriétés élémentaires des espaces de Lebesgue et Sobolev [16, 39] 20

1.3.1 Les espaces L^p avec $1 \leq p \leq +\infty$ 20

1.3.2 Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue [23], [39] 21

1.3.3 Espace de Sobolev, théorèmes d'injections [16], [23] 23

1.4 Opérateurs différentiables . . . 24
1.4.1 Opérateurs différentiables . . . 24
1.4.2 Fonctionnelles différentiables . . . 25
1.5 Résultats de minimisation . . . 26
1.5.1 Points extrêmes . . . 26
1.5.2 Théorème de Weierstrass généralisé . . . 27
1.5.3 Théorèmes de minimisation . . . 28
1.5.4 Théorème de Lax-Milgram . . . 30
1.6 Théorie des points critiques . . . 31
1.6.1 Condition de Palais-Smale . . . 31
1.6.2 Principe variationnel d'Ekeland . . . 32
1.7 Quelques théorèmes de points fixes . . . 38

Chapitre 2 Résultats Principaux **41**

2.1 Existence de solutions pour un problème aux limites elliptique sur les espaces de Hilbert via un théorème de minimisation global [33] . . . 41
2.1.1 Résultat principal[33] . . . 47
2.1.2 Application . . . 49
2.3 Sur un nouveau théorème de point fixe sur les espaces de Hilbert via le lemme du col et application aux problèmes aux limites elliptiques [34] . . . 58
2.3.1 Résultat principal . . . 60
2.3.2 Application . . . 63
2.4 Existence de solutions pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ via certains théorèmes de points fixes [35] . . . 70
2.4.1 Existence de solutions positives . . . 76
2.4.2 Résultats généraux d'existence . . . 79

Bibliographie **83**

NOTATIONS

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$\hookrightarrow$	si X et Y sont deux espaces normés, on écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclu dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	pour signifier que X est inclu dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est compacte.
X'	dual topologique.
$\langle ., . \rangle$	crochet de dualité entre X et son dual.
$(. \ , . \ )$	produit scalaire.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	l'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^N$	espace euclidien réel $n-$dimensionnel.
Ω	un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	la frontière de Ω.
$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$	la dérivée partielle de u par rapport à x_i.
∇u	le gradient de la fonction à valeurs réelles u : $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
Δu	le Laplacien de u : $\Delta u = \sum_{i=1}^{i=N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, $\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx < \infty \}$, avec $1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(\Omega)$	espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur Ω.
$\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert_{L^p}$	la norme dans l'espace $L^p(\Omega)$.
$\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert_\infty$	la norme dans l'espace $L^\infty(\Omega)$.
$C(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω.
$W^{1,p}(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées au sens des distributions sont également dans $L^p(\Omega)$.
i.e.	c'est-à-dire.
p.p.	presque partout.
(P.S)	condition de Palais-Smale.

INTRODUCTION

Les théories des points fixes et critiques sont au coeur de l'analyse non linéaire appliquée aux E.D.Ps, et E.D.Os, car elles fournissent les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non linéaires. L'analyse non linéaire, comme une branche autonome des mathématiques, s'est faite imposer durant les années 1950 par des mathématiciens, comme Browder, c'est le résultat de la combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

Cependant, les premiers résultats avaient déjà été obtenus dans les années 1920 ; ils sont appliqués à un large éventail de domaines ; en effet plusieurs problèmes en physique, chimie, biologie, économie peuvent être representés par des modèles non linéaires.

On peut voir à titre d'exemple le modèle suivant qui peut modéliser la propagation de la chaleur dans un domaine Ω, il modélise aussi la diffusion ou la migration d'une concentration ou une densité à travers le domaine Ω, comme il peut modéliser un problème en finance *Black et Scholes*

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f, \quad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in \mathbb{R}_*^+, \\ u(t=0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Dans le cas de la propagation de la chaleur, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$ désigne un domaine occupé par un matériaux homogène, isotrope et conducteur de chaleur ; $f(t, x)$ les sources de chaleur dans Ω et $u(t, x)$ la température (inconnue). Quand le domaine Ω est supposé baigner dans un thermostat à température constante alors $u(t, x) = 0$ quand $x \in \partial\Omega$, $t > 0$. c et k sont deux constantes la première est une constante physique dite chaleur spécifique (qui dépend du type de matériau),et k une constante positive.

Les problèmes aux limites associés aux équations différentielles jouent un rôle important dans la théorie de la physique mathématique. De nombreux problèmes, y compris des problèmes d'equations aux dérivées partielles non linéaires, peuvent être (re)formulés sous forme de problèmes d'existence de points fixes ou de points critiques pour une certaine application dans un certain espace approprié.

Dans les applications, les techniques de résolution basées sur la théorie du point critique disent que la solution proposée d'un problème aux limites est un point critique d'une certaine fonctionnelle J sur un espace approprié, c'est à dire un point u dans l'espace où $J'(u) = 0$. La résolution du problème se ramène à trouver les points où les différentielles s'annulent. La principale difficulté est de trouver les candidats appropriés.

A cet égard, on peut utiliser des considérations géométriques, mais ces dernières n'impliquent pas des notions de différentielles. Généralement, ceux qui peuvent produire des différentielles sont les suites de Palais-Smale, c'est à dire, des suites qui vérifient

$$|J(u_n)| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}^+,$$

$$\|J'(u_n)\|_{X'} \quad \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

L'existence d'une telle suite n'est pas suffisante pour produire un point critique, il est possible que cette suite soit divergente. Cependant, si l'on peut montrer que la suite possède une sous-suite convergente, alors on obtient en effet un point critique. Une fonctionnelle qui a la propriété que chaque suite de Palais-Smale produit un point critique est dite qu'elle satisfait la condition de Palais-Smale. Lorsque le problème donné se ramène à un problème de point fixe, on cherche à trouver u dans X qui vérifie $Tu = u$, où T est une application d'un ensemble X dans lui même et qui vérifie certaines conditions de continuité et de compacité. C'est dans ces deux directions qu'on a travaillé dans cette thèse. Nous avons reformulé les

problèmes à étudier en problèmes de rcherche de points critiques ou de points fixes. Notre travail est structuré dans deux chapitres, présentés comme suit :

Dans le premier chapitre, nous allons rappeler quelques notions d'analyse fonctionnelle (telles que la semi-continuité inférieure et supérieure, les espaces de Sobolev, la théorie des injections,...) et quelques théorèmes de points fixes (Schauder, Leray-Schauder, Browder, Krasnoselskii) et la théorie de points critiques (minimisation, Théorème de col, condition de Palais-Smale,...).

Le deuxième chapitre regroupe tous nos résultats principaux et ; il est réparti en trois sections. Dans la première, nous allons présenter deux résultats importants. D'abord, nous allons donner un théorème de minimisation, qui fait intervenir la différentielles seconde de la fonctionnelle à minimiser. Ce résultat est nouveau par rapport aux théorèmes de minimisation connus dans la littérature, où presque la quasi totalité de ces théorèmes font intervenir la condition forte de compacité de Palais-Smale.

Ce premier résultat montre que sur un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(.,.)$, si $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle qui vérifie :

1. φ est deux fois Gâteaux différentiable sur H.
2. $\|(I' - \varphi'')(u)\| \leq 1, \quad \forall u \in H.$
3. $(I - \varphi')(C) \subset C \quad$ où C est un certain convexe, non vide, fermé et borné de H.

Alors, φ possède un minimum global sur H. En d'autres termes, il existe $u_0 \in C$ tel que

$$\varphi(u_0) = \inf_{u \in H} \varphi(u).$$

En particulier, $\varphi'(u_0) = 0$.

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur un résultat de B. Ricceri dans [4] et le théorème de Browder [30].

Dans la deuxième partie de cette section nous allons appliquer le théorème précédent pour prouver l'existence de solutions pour un problème aux limites similaire au Problème (0.0.1) dans [7]

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}(x)D_i(u)) + c(x)u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où Ω est un sous ensemble borné de $\mathbb{R}^N$, et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui vérifie

$$|f(x,s)| \leq c|s|^{\sigma} + d(x), \quad \text{où} \quad \sigma = \frac{N+2}{N-2} \quad \text{et } d \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \quad \text{si} \quad N \geq 3, \tag{0.0.2}$$

ou bien $d \in L^p(\Omega)$ et $1 < p, \sigma < \infty$ si $N = 2$, $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, $c \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, $c(x) \geq 0$.

Le problème de Dirichlet associé est

$$\begin{cases} a[u,v] = \int_{\Omega} f(x,u)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{0.0.3}$$

avec $a[u,v] = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_i u D_j v + c(x)uv$.

Par sous-solution et sur-solution de (0.0.3), on désigne respectivement w et $W \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifient $a[w,v] \leq \int_{\Omega} f(x,w)v$, et $a[W,v] \geq \int_{\Omega} f(x,W)v$, $\forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0$.

On considère la fonctionnelle $\varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}a[u,u] - \int_{\Omega} F(x,u)dx \quad \text{avec} \quad F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi. \tag{0.0.4}$$

Le Théorème 6 dans [7] assure l'existence de solutions pour le problème posé sous les conditions suivantes :

1) les auteurs imposent sur f des hypothèses qui garantissent que φ vérifie la condition de Palais-Smale,

2) ils supposent que la sous-solution w et la sur-solution W de (0.0.3) existent dans $H_0^1(\Omega)$ et vérifient $w \leq W$.

Notre contribution consiste à éliminer la condition de Palais-Smale. Cette condition forte a été remplacée par des hypothèses faciles à vérifier, liées à la dérivée de f.

Soit λ_1 la première valeur propre du problème de Dirichlet.

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.5}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1, et \quad f, f' : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory et f' est la dérivée de f par rapport à la deuxième variable. L'existence de

solutions pour le problème posé est assurée par les hypothèses (plus faibles) suivantes :
on suppose que

$$|f(x,s)| \leq c_1|s|^{\sigma_1} + d_1, \quad \text{et} \quad |f'(x,s)| \leq c_2|s|^{\sigma_2} + d_2$$

pour certaines constantes positives c_1, c_2, d_1, d_2 et $1 \leq \sigma_1 + 1, \sigma_2 + 1 < \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$ ($0 \leq \sigma_1, \sigma_2 < \infty$ si $N = 1, 2$) et que

1. pour chaque $x \in \Omega$, fixé, $f(x,y)$ est une fonction croissante en y
   pour $w(x) \leq y \leq W(x)$,
2. $|f'(x,s)| \leq \lambda_1$, $\forall x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Alors, il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ qui est solution du problème donné, de plus $u_0 \in [w,\, W]$.
Ce résultat est confirmé par un exemple.
Dans la littérature, on ne trouve pas beaucoup de travaux qui reformulent les problèmes de la recherche de points fixes en problèmes de recherche de points critiques. Cette technique a été utilisée dans [2, 42], et nous allons aussi l'utiliser pour démontrer l'existence de points fixes pour un certain opérateur potentiel dans les espaces de Hilbert, et c'est le but de la deuxième section.
Cette section est constituée de deux parties, dans la première, on utilise un théorème de minimisation pour démontrer un théorème de point fixe, qui affaiblie les hypothèses d'un théorème similaire dans [2]. Les auteurs ont démontré dans [2] que si H est un espace de Hilbert et $T : H \longrightarrow H$ est un opérateur potentiel compact et tel qu'il existe un opérateur linéaire B borné sur H et un élément $v^* \in H'$ tels que

$$\Big(T(su),\, u\Big) \leq \Big(B(su),\, u\Big) + \langle v^*,\, u\rangle,\ \forall\, s \in [0,1],\ \forall\, u \in H \text{ avec } \|B\| < 1. \tag{0.0.6}$$

Alors, l'opérateur T a un point fixe dans H.
En utilisant le théorème de minimisation du col, on a pu localiser les points fixes de T dans H. Nous allons prouver que les points fixes de l'operateur T sont les fonctions u dans H telles que $\|u\| = \rho_0$, où $\rho_0 > \frac{2\|v^*\|}{1-\|B\|}$, $\|B\| < 1$.
En effet, nous allons prouver le résultat suivant :
si H est un espace de Hilbert et $T : H \longrightarrow H$ est un opérateur potentiel compact et s' il existe un operateur linéaire B borné sur H et un élément $v^* \in H'$ tels que

1. $\Big(T(su),\, u\Big) \leq \Big(B(su),\, u\Big) + \langle v^*,\, u\rangle,\ \forall\, s \in [0,1],\ \forall\, u \in H$ avec $\|u\| = \rho_0$, et $\rho_0 > \frac{2\|v^*\|}{1-\|B\|},\ \|B\| < 1,$
2. $\exists\, e \in H$ avec $\|e\| = 1$ et $\Big(B(e), e\Big) > 1$ et $\Big(T(se), e\Big) \geq \Big(B(se), e\Big),\ \forall s \in [0,1].$

Alors, l'opérateur T a un point fixe dans H.

La deuxième partie de cette section va porter sur une application du résultat trouvé pour la résolution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.7}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

On suppose que :

1. il existe des fonctions $a, b \in L^\infty(\Omega)$ telles que ,

$$f(x,u(x)) \leq a(x)u(x) + b(x),\ \forall x \in \Omega, \forall u \in L^2(\Omega) \text{ avec } \|u\|_{L^2} \leq r_0,$$

pour $r_0 > \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1 |\Omega|}}$ et $1 - \frac{\|a\|_\infty}{\lambda_1} > 2\|b\|_\infty |\Omega| \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$.

2. il existe $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|w_0\| = 1$, tel que

$$\frac{1}{\|w_0\|_{L^2}^2} < a(x) < \lambda_1, \ \ \forall x \in \Omega \text{ et } f(x, sw_0(x)) \geq a(x) s w_0(x), \ \ \forall x \in \Omega,\ \forall s \in [0,1].$$

Alors, le Problème (0.0.7) admet une solution faible.

Dans la troisième section, nous allons étudier l'existence de solutions pour un certain problème aux limites elliptique de type Dirichlet sur l'espace de Banach $C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$. Nous allons démontrer l'existence d'une solution strictement positive, en utilisant le théorème de point fixe de Krasnosel'skii. Le théorème de point fixe de Schauder va être utiliser pour prouver l'existence d'une solution non triviale du problème posé. Pour pouvoir appliquer les théorèmes du point fixe, on cherche à reformuler le problème posé comme un problème d'existence de point fixe pour un certain opérateur $T = (-\Delta)^{-1} F$ avec $(-\Delta)^{-1}$ l'inverse de l'opérateur Laplacien et F un opérateur de Nemytskii. Le critère de compacité d'Ascoli-Arzéla est un outil très important pour prouver la compacité de l'opérateur T. Cette section sera aussi divisé en deux parties.

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f\,(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.0.8}$$

Soit E l'espace de Banach défini par : $C_0(\overline{\Omega},\mathbb{R}) = \{u \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}) : \ u = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega\}$,
equipé de la norme $\|u\|_0 = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$. Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ avec frontière régulière et $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Dans la première partie, nous allons supposer que la condition suivante (*l'inégalité globale faible d'Harnack*) est vérifiée :

$$\begin{cases} \text{il existe un ensemble compact } K \subset \Omega \text{ et un nombre } \eta > 0 \\ \text{tels que } u(x) \geq \eta\|u\|_0 \text{ pour tout } x \in K \\ \text{ et toute fonction super-harmonique,croissante} \\ u \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}) \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On démontre que sous les hypothèses :

$$\begin{cases} f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \ \text{ est une fonction continue,} \\ \exists\, \sigma > 0,\ \sigma \neq 1 \text{ tel que, } \ f(x,u) \leq a(x) + b(x)u^\sigma, \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \\ \text{où } a, b \ \ \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ sont des fonctions continues positives} \end{cases} \tag{0.0.9}$$

et

$$\text{il existe } R > 0 \text{ tel que } \min_{\substack{x\in K \\ u\in[R\eta,R]}} f(x,u) > R\|(-\Delta)^{-1}1_{|K}\|_0^{-1}, \tag{0.0.10}$$

et

$$\begin{cases} M_2(\frac{1}{\sigma M_2})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\frac{1}{\sigma M_2})^{\frac{1}{\sigma-1}} + M_1 < 0 \ \text{ si } \ \sigma > 1, \\ \text{où } M_1 = \|(-\Delta)^{-1}a\|_0 \text{ et } M_2 = \|(-\Delta)^{-1}b\|_0. \end{cases} \tag{0.0.11}$$

Alors, le Problème (0.0.8) admet au moins une solution.

Cette solution est dans le cône

$$\mathcal{C} = \{u \in C_0(\overline{\Omega},\mathbb{R}),\ u \geq 0 \ \text{ sur } \overline{\Omega} : \ \min_{x\in K} u(x) \geq \eta\|u\|_0\}.$$

On peut voir qu'une solution du problème posé est un point fixe de l'opérateur T défini par

$$T : \mathcal{C} \longrightarrow C_0(\overline{\Omega},\mathbb{R}) : \ \ Tu = (-\Delta)^{-1}Fu,$$

l'opérateur de Nemytskii F est donné par

$F : \ C_0\left(\overline{\Omega},\mathbb{R}\right) \longrightarrow \ C\left(\overline{\Omega},\mathbb{R}\right) : \ \ Fu(x) = f(x,u(x))$.

Pour appliquer le théorème de Krasnosel'skii, en particulier pour démontrer que $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$, on aura besoin de l'inégalité dite d'Harnack pour les fonctions super-harmonique.
La deuxième partie de cette section est destinée à démontrer que le problème donné admet une solution non triviale en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Selon le terme non linéaire f, on a le premier résultat suivant : On suppose que le terme non linéaire f satisfait

$$|f(x,u)| \leq H(x,|u|), \text{ pour tous } x \in \overline{\Omega} \text{ et } u \in \mathbb{R},$$

où

$$H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{est telle que}$$

— (A_1) H est continue et croissante par rapport à la deuxième variable,

— (A_2) il existe $M_0 > 0$, tel que

$$H(x,M_0) \leq \frac{M_0}{\|(-\Delta)^{-1}1_{\overline{\Omega}}\|_0}, \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Sous les hypothèses (A_1) et (A_2), le Problème (0.0.8) a au moins une solution.
Le deuxième rèsultat est : on suppose que

— (H_1) Il existe une fonction croissante $\Phi \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ et une fonction $\psi \in C\left(\overline{\Omega},\mathbb{R}^+\right)$, telles que

$$|f(x,u)| \leq \psi(x)\Phi(|u|), \quad \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \tag{0.0.12}$$

— (H_2) $\exists\, R_0 > 0$, tel que $\Phi(R_0) \leq \dfrac{R_0}{\|(-\Delta)^{-1}\psi\|_0}$.

Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), le Problème (0.0.8) a au moins une solution.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on passe en revue quelques résultats d'analyse dont on se servira souvent dans le reste de cette thèse. On en trouvera des démonstrations dans la plupart des ouvrages qui traitent de ces questions.

1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

1.1.1 Quelques notions de convergence

Soit X et Y, deux espaces de Banach.

Définition 1.1. ***(Convergence d'une suite)*** *Soit $(x_n)_n$ une suite de X et $x_0 \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers x_0 (en norme) si $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$, et on ecrit $x_n \longrightarrow x_0$ dans X.*

Définition 1.2. ***(Opérateur borné)*** *On dit qu' un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est borné si*

l'image de tout borné dans X par T est un borné de Y. i.e : pour tout ensemble D borné dans X, $T(D)$ est borné dans Y.

On note $B(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires et bornées de X dans Y.
Le cas $Y = \mathbb{R}$ est très important par la suite.

Proposition 1.1. *(**Espace dual**) La classe des fonctionnelles linéaires et bornées définies sur X, sera notée par $X^{'}$.*
On munit $X^{'}$ de la norme

$$\|J\|_{X'} = \sup_{x\in X, \|x\|_X \leq 1} |\langle J, x\rangle|, \quad pour \quad J \in X^{'}.$$

$X^{'}$ muni de cette norme est un espace de Banach et nous avons l'inégalité

$$|\langle J, x\rangle| \leq \|J\|_{X'}\|x\|_X, \quad \forall J \in X^{'}, \quad \forall x \in X.$$

Remarque 1.1. *Quand on travaille dans un espace de Hilbert les choses deviennent beaucoup plus faciles.*
En effet, on sait d'après le théorème de représentation de Riesz que pour toute fonctionnelle linéaire et bornée $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique élément $w_J \in H$ tel que $J(h) = (w_J, h) \quad \forall h \in H$. Pour cette raison l'espace de Hilbert H et son dual $H^{'}$ peuvent être identifiés, si par dualité nous utilisons le produit scalaire sur H, et on écrit $H^{'} = H$.

Remarque 1.2. *Nous remarquons que si $(x_n) \subset X$ est une suite telle que : $x_n \longrightarrow x$ dans X alors*

$$\forall J \in X^{'}, \langle J, x_n\rangle \longrightarrow \langle J, x\rangle.$$

L'implication inverse n'est en général pas vraie.

Définition 1.3 (Convergence faible)**.** *On dit qu'une suite $(x_n) \subset X$ converge faiblement vers x, si*

$$\forall J \in X^{'}, \langle J, x_n\rangle \longrightarrow \langle J, x\rangle$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.2. *([16]) Soit (x_n) une suite de X. On a*

1. *Si* $x_n \longrightarrow x$, *alors* $x_n \rightharpoonup x$.
2. *Si* $x_n \rightharpoonup x$, *alors* (x_n) *est bornée et* $\|x\|_X \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\|_X$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$, *et* $J_n \longrightarrow J$ *dans* X', *alors* $\langle J_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle J, x\rangle$.

Proposition 1.3. *([16]) Lorsque* X *est de dimension finie, une suite* (x_n) *converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Exemple

Soit (e_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, une base orthonormée dans un espace de Hilbert H. D'après [16] (théorème $\vee$.9), tout élément $x \in H$ peut être décomposé comme suit

$$x = \sum_{n=1}^{n=\infty} (e_n, x)e_n,$$

$$\|x - \sum_{n=1}^{n=N} (e_n, x)e_n\| \longrightarrow 0 \ \text{ quand}\, N \longrightarrow +\infty,$$

donc $(e_n, x) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, $\forall x \in H$. Ceci signifie que $e_n \rightharpoonup 0$.
Mais il est clair que la suite (e_n) ne converge pas en norme vers 0 car,

$$\forall n \geq 1, \|e_n\|_H = 1.$$

Ceci sert comme exemple d'une suite faiblement convergente qui n'est pas fortement convergente.

Définition 1.4. *Un ensemble* $A \subset X$ *est dit faiblement pré-compact si toute suite de* A *contient une sous suite faiblement convergente.*
Si toutes les limites faibles sont dans A, *alors* A *est dit faiblement compact.*

Remarque 1.3.

1. *Comme nous allons voir par la suite, on ne peut pas appliquer les méthodes variationnelles que lorsqu'on travaille dans des espaces de Banach qui ont la propriété que toute boule fermée est faiblement compacte. Les espaces de Banach qui ont cette propriété sont appelés des espaces réflexifs.*
2. *Soit* X *un espace de Banach,* X' *son dual et* X'' *son bidual. On a une injection canonique* $i : X \longrightarrow X''$ *définie comme suit :*

$$\langle ix, J\rangle_{X'',X'} = \langle J, x\rangle_{X',X} \quad \forall x \in X, \quad \forall J \in X',$$

i est linéaire et c'est une isométrie [16].

Définition 1.5. *On dit que X est réflexif si $i(X) = X''$ (i.e. i est surjective de X sur X'').*

Exemple

1. Un espace de Hilbert est réflexif.

   Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Les espaces fonctionnelles $L^p(\Omega)$ sont réflexifs pour $1 < p < \infty$.

3. $L^1(\Omega)$, n'est pas réflexif .

Pour plus détails voir [16].

Théorème 1.1. *([12], [16]) Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.*

Corollaire 1.1. *([12], [16]) Si X est un espace de Banach réflexif alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\|_X \leq M$, contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \leq M$.*

Corollaire 1.2. *([16]) Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si X' est réflexif.*

1.2 Continuité des opérateurs

Nous allons considérer des opérateurs T de X dans Y et nous allons donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T. La notion la plus simple est la suivante :

Définition 1.6. *L'opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit continu en $x \in X$, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.*
T est dit continu sur un ensemble $A \subset X$ si T est continu en tout point $x \in A$.

Remarque 1.4. *Pour les opérateurs linéaires, les concepts de bornitude et de continuité sont équivalents ; pour les opérateurs non linéaires, ceci n'est pas vrai.*
Il existe d'autres définitions qui sont liées au concept de convergence faible. Nous énonçons les plus importantes :

Définition 1.7. *Soit T un opérateur de X dans Y.*

1. *T est dit fortement continu en $x_0 \in X$, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$ dans X alors $T(x_n) \longrightarrow T(x_0)$ dans Y.*
2. *T est dit faiblement continu en x_0 si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$ dans X alors $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ dans Y.*

Remarque 1.5.
1. *Comme la convergence en norme implique la convergence au sens faible, il s'en suit que si T est fortement continu alors T est continu.*
   Donc la continuité forte est un concept qui est "plus fort" que le concept de la continuité.
2. *Pour les fonctionnelles définies sur X, les définitions (1), (2) coïncident.*

Définition 1.8. *[25]*

Soient X, Y deux espaces de Banach et $\Omega \subset X$ un ensemble non vide , et soit T un opérateur défini de Ω dans Y. On dit que T est compact s'il est continu et envoie les ensembles bornés dans Ω aux ensembles relativement compacts dans Y.

Proposition 1.4. *[25]*

Soient X, Y deux espaces de Banach tels que X est réflexif, et soit T un opérateur défini de Ω dans Y, où $\Omega \subset X$ est non vide, fermé et convexe. Si T est fortement continu alors T est compact.

Remarque 1.6. *L'implication inverse dans la proposition précédente n'est pas toujours vraie. Par exemple la fonctionnelle :$J(x) = \|x\|_H$ défini sur un espace de Hilbert H est compact , mais nous avons vu qu'il existe une suite (e_n) telle que : $e_n \rightharpoonup 0$ et $\|e_n\|_H = 1$,*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \longrightarrow +\infty} J(e_n) \neq 0.$$

L'implication inverse est vraie pour les opérateurs linéaires.

Proposition 1.5. *[25] Soit X un espace de Banach réflexif, et Y un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors, T est fortement continue si et seulement si T est compact.*

1.2.1 Injections continues et compactes[23]

On rappelle qu'un espace de Banach X s'injecte de manière continue dans un espace de Banach Y, et on note cela par $(X \hookrightarrow Y)$, si

1. $X \subseteq Y$,
2. l'injection canonique $i : X \longrightarrow Y$ est un opérateur continu.

Un espace de Banach X s'injecte de manière compacte dans un espace de Banach Y, et on note cela par $(X \hookrightarrow\hookrightarrow Y)$, si X s'injecte de manière continue dans Y et l'injection canonique i est un opérateur compact.

1.2.2 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Théorème 1.2. [*Ascoli-Arzéla*] *[41]*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un espace métrique compact (X, d) et à valeurs réelles. On suppose que la suite (f_n) a les deux propriétés suivantes :

(1) *$(f_n)_n$ est équicontinue i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \eta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon,$$

(2) *La suite $(f_n(x))_n$ est bornée pour tout $x \in X$.*

Alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge vers une fonction continue f dans $C(X, \mathbb{R})$.

1.2.3 Opérateur de Nemytskii

Définition 1.9. *([5])*
Soit X et Y deux espaces de Banach, et $f : \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y : (t, x) \longmapsto f(t, x)$.
On appelle opérateur de Nemytskii (ou aussi opérateur de superposition) construit sur f, l'opérateur N_f de la forme suivante

$$[t \longmapsto u(t)] \longmapsto N_f(u) := [t \longmapsto f(t, u(t))],$$

où u est une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans X.

Définition 1.10. *(Fonction de Carathéodory)([18])*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On appelle fonction de Carathéodory toute fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :
$(\boldsymbol{i})$ *pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(x,s)$ est Lebesgue mesurable sur Ω,*
$(\boldsymbol{ii})$ *la fonction $s \longmapsto f(x,s)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout x dans Ω.*

Pour une fonction u mesurable sur Ω, et une fonction de Carathéodory f définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'opérateur de Nemytskii construit sur f est

$$N_f : u \longmapsto f(.,u(.)) \text{ tel que : } (N_f u)(x) = f(x,u(x)).$$

N_f transforme les fonctions mesurables en fonctions mesurables. La proposition suivante concerne la continuité et la bornitude de l'opérateur de Nemytskii dans l'espace des fonctions continues.

Proposition 1.6. *([28]) Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, et f une fonction continue de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'opérateur*

$$\begin{array}{rccc} N_f : C(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & C(\overline{\Omega}) \\ u & \mapsto & N_f u \end{array}$$

défini par $N_f u(x) = f(x,u(x))$ est continu et borné de $C(\overline{\Omega})$ vers $C(\overline{\Omega})$.

Le théorème suivant garantit la continuité des opérateurs de Nemytskii dans les espaces de Lebesgue.
Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, et N_f l'opérateur de Nemytskii associé à f.

Théorème 1.3. *([8])*
On suppose qu'il existe une constante $c > 0$, et une fonction $b \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, et $0 < \sigma < 1$ telles que : $|f(x,s)| \leq c|s|^\sigma + b(x)$, $\forall x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Alors, l'opérateur $N_f : L^{q\sigma}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ est continu et borné.

1.2.4 Semi-continuité

On commence par donner une définition dans le cadre général.

Définition 1.11. *([18]) Une fonction sur un espace topologique X à valeur dans $[-\infty,+\infty]$ est dite semi-continue inférieurement si pour tout $a \in [-\infty,+\infty]$, l'image réciproque de $[-\infty,a]$ par cette fonction est un fermé pour la topologie considérée sur X.*

On trouve aussi les définitions suivantes :

Définition 1.12.

1. *Une fonctionnelle $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \longrightarrow x_0$, on a*

$$J(x_0) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} J(x_n).$$

2. *On dit que J est faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i.) au point x_0 si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a*

$$J(x_0) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} J(x_n).$$

3. *On dit que J est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \longrightarrow x_0$, on a*

$$J(x_0) \geq \limsup_{n\longrightarrow\infty} J(x_n).$$

4. *On dit que J est faiblement semi-continue supérieurement (f.s.c.s.) au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a*

$$J(x_0) \geq \limsup_{n\longrightarrow\infty} J(x_n).$$

Remarque 1.7.

1. *Si J est continue en x_0 , alors f est (s.c.s) et (s.c.i) en x_0 et inversement.*
2. *Si J est faiblement continue en x_0, alors J est (f.s.c.s) et (f.s.c.i) et inversement.*

1.2.5 Fonctions convexes

Définition 1.13. *([26]) On dit qu'une partie K de X est convexe si :*

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \theta \in [0,1], \quad \theta x + (1-\theta)y \in K.$$

Soient K un convexe et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que J est convexe si :

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \theta \in [0,1], \quad J(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta J(x) + (1-\theta)J(y).$$

On dit que J est strictement convexe si :

$$\forall x, y \in K, \quad avec \quad x \neq y \quad \forall \theta \in]0,1[, \quad J(\theta x + (1-\theta)y) < \theta J(x) + (1-\theta)J(y).$$

Théorème 1.4. [*Lemme de Mazur*] *([16]) Soit $C \subset X$ un convexe. Alors C est faiblement fermé si seulement s'il est fortement fermé.*

Corollaire 1.3. *([16]) Soit $J : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle convexe. Alors J est (f.s.c.i) si seulement si elle est (s.c.i).*

1.3 Définitions et propriétés élémentaires des espaces de Lebesgue et Sobolev [16, 39]

1.3.1 Les espaces L^p avec $1 \leq p \leq +\infty$

Définition 1.14. *(Les espaces L^p, $1 \leq p < +\infty$)*
Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré, $1 \leq p < +\infty$ et f une fonction mesurable définie de X dans $\mathbb{R}$. On dit que $f \in L^p = L^p(X, \Sigma, \mu)$ si $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. On pose alors :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.15. *(L'espace L^∞)*
On dit que f est essentiellement bornée, ou encore que $f \in L^\infty = L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}^+$ telle que $|f| \leq C$, p.p. $x \in X$.
On pose :

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ C \in \mathbb{R}^+, \ |f| \leq C, \ p.p \right\}.$$

Définition 1.16. *Pour $p \in [1, \infty)$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, on note $L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue défini par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \, f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |f|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \big\{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable}, \exists\ C \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } |f(x)| \leq C, \text{ p.p. sur } \Omega\big\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_\Omega\text{-ess}|f|.$$

Lemme 1.1. *(Inégalité de Hölder)*
Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré et $p, q \in (1, +\infty)$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Soient $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ et $g \in L^q(X, \Sigma, \mu)$. Alors

$$fg \in L^1(X, \Sigma, \mu) \quad et\ \|fg\|_{L^1} \leq ||f||_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Comme un cas particulier, on a le théorème suivant :

Théorème 1.5. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)[16]*
Soit $u \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

1.3.2 Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue [23], [39]

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et μ la mesure de Lebesgue, définie sur la complétion de la tribu borélienne.

Théorème 1.6. ***(Convergence dominée de Lebesgue)***
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \ \text{quand } n \longrightarrow +\infty \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Alors f est intégrable et l'on a

$$\int_\Omega |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0, \ \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

En particulier,

$$\int_\Omega f_n d\mu \longrightarrow \int_\Omega f d\mu.$$

Le théorème de la convergence dominée existe aussi en version L^p.

Théorème 1.7. *Soit $p \in (1, +\infty)$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega, \Sigma, d\mu)$ telle que*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \ \textit{quand } n \longrightarrow +\infty \ \ \textit{presque partout dans } \Omega,$$

et telle qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega, \Sigma, d\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que l'on ait

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{presque partout dans } \Omega.$$

Alors, $f \in L^p(\Omega, \Sigma, d\mu)$ et l'on a

$$||f_n - f||_{L^p} \longrightarrow 0, \ \textit{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On fera un usage répété de la réciproque partielle du théorème de la convergence dominée.

Théorème 1.8. *[18] Soit $p \in (1, +\infty)$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega, \Sigma, d\mu)$ telle que*

$$||f_n - f||_{L^p} \longrightarrow 0, \ \textit{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et une fonction $g \in L^p(\Omega, \Sigma, d\mu)$ telles que

$$f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x), \ \textit{quand} k \longrightarrow +\infty \ \ \textit{presque partout dans } \Omega,$$

et

$$|f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \textit{presque partout dans } \Omega.$$

Ce résultat est moins connu que le théorème direct, mais très utile. L'extraction d'une sous-suite est obligatoire dans ce théorème. À propos de sous-suites, on utilisera aussi souvent la petite idée d'unicité suivante :

Lemme 1.2. *[18] Soit X un espace topologique et $(x_n)_n$ une suite de cet espace qui a la propriété qu'il existe $x \in X$ tel que de toute sous-suite, on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers x. Alors la suite entière $(x_n)_n$ converge vers x.*

1.3.3 Espace de Sobolev, théorèmes d'injections [16], [23]

Soit Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega)\}.$$

$W^{1,p}(\Omega)$ est équipé de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p},$$

ou de la norme équivalente $\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (si $1 \leq p < \infty$).
On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.
$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$, et il est séparable pour $1 \leq p < \infty$.
Soit $1 \leq p < \infty, W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On pose $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.
L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est equipé de la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Inégalité de Poincaré

On suppose $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert **borné**. Alors, il existe une constante c qui dépend de Ω et p telle que

$$\|u\|_{L^p}(\Omega) \leq c\|\nabla u\|_{L^p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier, la quantité $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et elle est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$.
Le long de ce travail, on aura souvent besoin de certaines injections dites de Sobolev, qu'on rappelle dans le théorème suivant dit de Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.9. *[16] On suppose que Ω est borné de classe C^1, alors on a les injections compactes suivantes :*

$$\textit{Si } p < N \textit{ alors : } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, p^*), \ \textit{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

$$\textit{Si } p = N \textit{ alors : } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, +\infty).$$

$$\textit{Si } p > N \textit{ alors : } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

En particulier, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte pour tout p (et tout N).

Théorème 1.10. *([12]) Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $1 \leq p < \infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ s'injecte dans $L^q(\Omega)$($L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$) pour $1 \leq q \leq p$, et il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^q} \leq M\|u\|_{L^p},\ \forall\ u \in L^p(\Omega),\ 1 \leq q \leq p.$$

De plus, l'injection $I : L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $1 \leq q < p$.

1.4 Opérateurs différentiables

1.4.1 Opérateurs différentiables

Par la suite, X et Y seront deux espaces de Banach et Ω un ouvert de X.

Définition 1.17. *Un opérateur $F : \Omega \longrightarrow Y$ est dit Gâteaux différentiable en $a \in \Omega$, s'il existe un opérateur linéaire et borné, $T(a) : X \longrightarrow Y$ tel que*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t} = T(a)h, \quad \forall\ h \in X.$$

- *L' opérateur $T(a)$ sera appelé la différentielle au sens de Gâteaux de F en a, qui sera notée $DF(a)$. Par définition $DF(a) \in B(X, Y)$.*
- *$DF(a)h \in Y$ est appelée la différentielle au sens de Gâteaux de F en a dans la direction h.*
- *F est Gâteaux différentiable sur Ω, si F est Gâteaux différentiable en tout point de Ω. Dans ce cas l'application $a \longmapsto DF(a)$ est appelée la différentielle au sens de Gâteaux de F sur Ω et est notée par DF .*

Définition 1.18. *Un opérateur $F : \Omega \longrightarrow Y$ est dit Fréchet différentiable (ou différentiable) en $a \in \Omega$ s'il existe un opérateur linéaire borné $T(a) : X \longrightarrow Y$ tel que*

$$F(a+h) - F(a) = T(a)h + W(a,h), \quad \forall h \in X$$

avec

$$\lim_{\|h\|_X \longrightarrow 0} \frac{\|W(a,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

- *L'opérateur $T(a)$ est appelée la différentielle au sens de Fréchet de F en $a \in \Omega$, qui sera notée $dF(a)$ ou F'. Par définition $dF(a) \in B(X,Y)$.*
- *F est Fréchet différentiable sur Ω, si F est Fréchet différentiable en tout point de Ω ; dans ce cas l'application $a \longmapsto dF(a)$ est appelée la différentielle au sens de Fréchet de F sur Ω et est notée par dF ou F', donc $dF : \Omega \longrightarrow B(X,Y)$.*

Remarque 1.8.

1. *Si F est Fréchet différentiable au point $a \in \Omega$, alors F est continue en a .*
2. *On remarque directement de la définition que si F est Fréchet différentiable en a, alors F est Gâteaux différentiable en a.*
3. *Le cas inverse n'est pas toujours vrai, mais on a le théorème suivant :*

Théorème 1.11. *([12]) Si F est Gâteaux différentiable sur un voisinage $U(a)$ d'un point $a \in \Omega$, et si DF est continue sur $U(a)$, alors F est Fréchet différentiable sur $U(a)$ et on a $dF(x) = DF(x)$ pour tout $x \in U(a)$.*

Définition 1.19. *On dit que F est de classe C^1 sur Ω ($F \in C^1(\Omega, Y)$) si F est différentiable sur Ω et $F' \in C^0(\Omega, B(X,Y))$.*

Théorème 1.12. *([12]) Si F est Gâteaux différentiable sur Ω et $DF \in C^0(\Omega, B(X,Y))$ alors F est de classe C^1 sur Ω.*

1.4.2 Fonctionnelles différentiables

Définition 1.20. *([23]) Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert de X et J une fonctionnelle définie de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que J est Fréchet différentiable en $a \in \Omega$, s'il existe $T \in X'$ telle que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{J(a+v) - J(a) - Tv}{\|v\|} = 0.$$

Alors, pour une fonctionnelle J qui est différentiable on a

$$J(a+v) - J(a) = Tv + o(\|v\|),$$

quand $\|v\| \to 0$ pour un certain $T \in X'$. On note que si J est Fréchet différentiable en a, alors elle est continue en a.

Remarque 1.9. *([23]) Si J est Fréchet différentiable en a, alors il existe une unique fonctionnelle $T \in X'$ qui satisfait la Définition 1.20.*

Définition 1.21. *Soit $J : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle Fréchet différentiable en a. L'unique élément de X' qui satisfait la Définition 1.20 est appelé la différentielle au sens de Fréchet de J au point a, et il est noté par $J'(a)$ ou $dJ(a)$. On a alors*

$$J(a+v) - J(a) = J'(u).v + o(\|v\|), \quad quand \ \|v\| \to 0.$$

On introduit maintenant une notion de différentiabilité plus faible.

Définition 1.22. *([23]) Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert de X et J une fonctionnelle définie de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que J est Gâteaux différentiable en $a \in \Omega$, s'il existe $T \in X'$ tel que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(a+tv) - J(a)}{t} = Tv, \quad \forall v \in X.$$

Si J est Gâteaux différentiable en a, alors il existe une unique fonctionnelle $T \in X'$ qui satisfait la Définition 1.22. Elle est appelée la différentielle au sens de Gâteaux de J au point a, et elle est notée par $J'_G(a)$.

Remarque 1.10. *En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que J est C^1, il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentielle J'_G est continue.*

1.5 Résultats de minimisation

1.5.1 Points extrêmes

Définition 1.23. *Soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Un point $x_0 \in X$ est appelé extrémum de J s'il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 tel que : ou bien*

$$J(x) \leq J(x_0), \quad \forall x \in U(x_0), \quad (J \ est \ maximal \ en \ x_0)$$

ou bien

$$J(x) \geq J(x_0), \quad \forall x \in U(x_0), \quad (J \ est \ minimal \ en \ x_0).$$

Définition 1.24. *([23]) Soient X un espace de Banach et Ω un ouvert de X. On suppose que la fonctionnelle J définie de Ω dans $\mathbb{R}$ est différentiable. Un point critique de J est un point $x_0 \in \Omega$ tel que $J'(x_0) = 0$. Comme $J'(x_0) \in X'$, donc on a $J'(x_0).v = 0 \ \ \forall v \in X$.*

- *Si $J'(x_0) = 0$ et $J(x_0) = c$, on dit que x_0 est un point critique au niveau c.*
- *L'équation $J'(x_0) = 0$ est dite l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle J.*

L'exemple le plus simple de point critique d'une fonctionnelle $J \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ est le point extrémal ; c'est-à-dire un point où J atteint un minimum ou un maximum, local ou global.

Définition 1.25. *Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est une suite $(x_n)_n$ telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_X J.$$

Théorème 1.13. *([12]) Soit J une fonctionnelle définie sur un domaine $\Omega \subset X$ et x_0 un point intérieur de Ω. Supposons que J est Gâteaux différentiable en x_0. Alors, si x_0 est un extrémum de J, il est donc un point critique de J.*

Remarque 1.11. *Si $x_0 \in \partial\Omega$, alors on n'a pas nécessairement $J'_G(x_0) = 0$.*

1.5.2 Théorème de Weierstrass généralisé

Théorème 1.14. *([12]) Soit X un espace de Banach réflexif et Ω un sous-ensemble de X qui est borné et faiblement fermé .*
Si la fonctionnelle J est faiblement continue sur Ω, alors J est bornée supérieurement et inférieurement sur Ω. De plus J atteint son supremum et son infimum.

Démonstration. Nous allons démontrer tout d'abord que J est bornée inférieurement. Supposons que ceci n'est pas vrai, alors il existe une suite $(x_n) \subset \Omega$ avec

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n) = -\infty,$$

comme Ω est bornée, la suite (x_n) est uniformément bornée, donc il existe $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ telle que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$; comme Ω est faiblement fermé, alors $x_0 \in \Omega$. Puisque J est faiblement continue, alors $\lim_{k \longrightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = J(x_0)$.

Mais ceci est impossible car $\lim_{k\longrightarrow+\infty} J(x_{n_k}) = -\infty$; donc J est bornée inférieurement.
De la même manière, nous démontrons que J est bornée supérieurement.

Montrons maintenant que J atteint son infimum :

posons $\alpha = \inf_{x\in\Omega} J(x)$, ceci veut dire que $\forall x \in \Omega, J(x) \geqslant \alpha$ et il existe une suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que $\alpha = \lim_{n\longrightarrow\infty} J(x_n)$; comme précédemment, on peut trouver une sous-suite $(x_{n_k}) \subset \Omega$ telle que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$, $x_0 \in \Omega$ et $\lim_{k\longrightarrow\infty} J(x_{n_k}) = \alpha$.

Puisque J est faiblement continue, on obtient que $\lim_{k\longrightarrow\infty} J(x_{n_k}) = J(x_0) = \alpha$, donc $J(x_0) = \alpha$ et $J(x) \geq \alpha, \forall x \in \Omega$.

Ceci montre que J atteint son infimum sur Ω ou point x_0.

De la même manière, on démontre que J atteint son supremum en un point $x_0 \in \Omega$. □

1.5.3 Théorèmes de minimisation

Théorème 1.15. *([12]) Soit X un espace de Banach réflexif et Ω un sous-ensemble dans X borné et faiblement fermé.*
Si la fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i) sur Ω, alors J est bornée inférieurement et atteint son infimum.

Démonstration. Montrons que J est bornée inférieurement.

si ceci n'est pas vrai, alors il existe une suite $(x_n) \subset \Omega$ avec $\lim_{n\longrightarrow-\infty} J(x_n) = -\infty$, (x_n) est uniformément bornée, alors il existe une sous-suite $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ telle que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ avec $x_0 \in \Omega$.

Comme J est (f.s.c.i), alors on a $J(x_0) \leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} J(x_{n_k})$. Mais ceci est impossible puisque $J(x_{n_k}) \longrightarrow -\infty$; donc J est bornée inférieurement.

Maintenant montrons que J atteint son infimum :

soit $\alpha = \inf_{x\in\Omega} J(x)$ et soit $(x_n) \subset \Omega$ telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} J(x_n) = \alpha$, alors on a aussi que (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$, avec $\lim_{k\longrightarrow+\infty} J(x_{n_k}) = \alpha$.

Du fait que J est (f.s.c.i), alors

$$J(x_0) \leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} J(x_{n_k}) = \lim_{k\longrightarrow+\infty} J(x_{n_k}) = \alpha.$$

Mais par la définition de α on doit avoir $J(x_0) > \alpha$; ceci montre que $J(x_0) = \alpha$.

Donc J atteint son infimum. □

Remarque 1.12. *Si on pose $J = -g$ dans le théorème précédent, on voit qu'une fonctionnelle qui est (f.s.c.s) est bornée supérieurement et atteint son supremum .*

Théorème 1.16. *([20]) Soit X un espace de Banach réflexif et Ω un sous-ensemble dans X faiblement fermé. Si la fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i) sur Ω, alors J atteint son infimum sur Ω si et seulement si une suite minimisante de J est bornée sur Ω.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite minimisante de J. On suppose (x_n) est bornée ; comme X est réflexif, alors il existe une sous-suite $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ qui converge faiblement vers x. Comme J est (f.s.c.i) donc :

$$J(x) \leq \liminf_{k \longrightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = \inf_X J,$$

on conclut que $\inf_X J = J(x)$. □

Définition 1.26. *Soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que J coercive ssi :*

$$\lim_{\|u\|_X \longrightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

Théorème 1.17. *([12], [20]) Soit X un espace de Banach réflexif et J est une fonctionnelle définie sur X, telle que*

1. $\lim_{\|u\|_X \longrightarrow +\infty} J(x) = +\infty$,
2. *J est (f.s.c.i),*

alors J est bornée inférieurement sur X et atteint sa borne inférieure en un point $x_0 \in X$. De plus, si J est Gâteaux différentiable en x_0, alors $J'_G(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que J n'est pas bornée inférieurement, alors il existe une suite (x_n) telle que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n) = -\infty$.
D'après (1), la suite est uniformément bornée ; donc (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ avec $\lim_{k \longrightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = -\infty$.
D'après (2), on a

$$J(x_0) \leq \liminf_{k \longrightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = -\infty,$$

et ceci est impossible. Donc J est bornée inférieurement.

Montrons maintenant que J atteint son infimum :

soit $\alpha = \inf_{x\in X} J(x)$ et soit (x_n) une suite minimisante de J, i.e, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} J(x_n) = \alpha$; comme précédemment, (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0 \in X$ et donc

$$J(x_0) \leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} J(x_{n_k}) = \lim_{k\longrightarrow+\infty} J(x_{n_k}) = \alpha.$$

Comme $J(x_0) \geq \alpha$ par définition de α alors $J(x_0) = \alpha$.

La dernière partie du théorème est une conséquence du Théorème 1.13. □

Corollaire 1.4. *([26]) Soient X un espace de Banach réflexif et J une fonctionnelle définie sur X telle que*

1. *J est convexe,*
2. *J est coercive,*
3. *J est s.c.i (pour la topologie forte).*

Alors J atteint son infimum.

Théorème 1.18. *([13]) Soit $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ convexe. Alors $x_0 \in X$ est un minimum de J si et seulement si x_0 est un point critique de J.*

1.5.4 Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert et H' son dual. L'un des résultats les plus utilisés dans l'analyse fonctionnelle linéaire est le théorème de Lax Milgram

Définition 1.27. *On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est*

1. *continue s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H \quad \forall u, v \in H,$$

2. *coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.19. *([16]) Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que*

$$a(u, v) = (\varphi, v), \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors la fonctionnelle $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (\varphi, v)$$

atteint son minimum en u.

Notons que :

- $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|\varphi\|_{H'}$.
- L'application $T_u : H \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

  $$T_u(v) = a(u, v)$$

  est une forme linéaire continue sur H et $\|T_u\|_{H'} \leq C$.
- L'opérateur solution $S : H' \longrightarrow H, S\varphi = u$, est un opérateur linéaire et borné.

1.6 Théorie des points critiques

1.6.1 Condition de Palais-Smale

Définition 1.28. *([23], [26]) Soit X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable sur X. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est de Palais-Smale pour la fonctionnelle J si*

1. *$(J(u_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$,*
2. *$J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans X'.*

Définition 1.29. *([23], [26]) Soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (PS), si toute suite (u_n) de X telle que*

1. *$(J(u_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$,*
2. *$J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans X',*

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ *convergente.*

Définition 1.30. *Soit* X *un espace de Banach et* $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonctionnelle différentiable. On dit que* J *vérifie la condition de Palais-Smale au niveau* c, $(PS)_c$, *si toute suite* (u_n) *de* X *telle que*

1. $J(u_n) \longrightarrow c$ *dans* $\mathbb{R}$;
2. $J'(u_n) \longrightarrow 0$ *dans* X',

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ *convergente.*

1.6.2 Principe variationnel d'Ekeland

Théorème 1.20. [*La forme forte du principe variationnel d'Ekeland*] *([20], [43])*
Soit (X, d) *un espace métrique complet et* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonctionnelle s.c.i, bornée inférieurement et non identiquement égale à* $+\infty$ *(* $\varphi \not\equiv +\infty$*).*
Soit $\varepsilon > 0$ *et* $x \in X$ *vérifiant*

$$\varphi(x) \leq \inf_{u \in X} \varphi(u) + \varepsilon.$$

Alors, pou tout $\lambda > 0$, *il existe* $y = y(\varepsilon) \in X$ *tel que*

- (a) $\varphi(y) \leq \varphi(x)$,
- (b) $d(x, y) \leq \lambda$ *et*
- (c) $\varphi(y) < \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, y),\ \forall u \in X,\ u \neq y.$

Démonstration. On considère la relation définie sur X par

$$u \prec v \Leftrightarrow \varphi(u) \leq \varphi(v) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, v),$$

où $\prec$ définie un ordre partiel dans X qui dépend de λ. La réflexivité et l'antisymétrie sont évidentes. Pour la transitivité, on suppose que $u \prec v$ et $v \prec w$. Comme $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$, on en déduit que $u \prec w$.
Nous allons utiliser l'ordre $\prec$, pour définir une suite décroissante d'ensembles fermés tels que l'interssection

$$\bigcap_n S_n = \{y\} = \{y(\lambda)\}.$$

Les ensembles définis par

$$I_v = \{u \in X; u \prec v\}$$

sont non vides ($v \in I_v$) et fermés car φ est s.c.i. En effet, soit $(u_n)_n \subset I_v$ telle que $u_n \longrightarrow u$ quand $n \longrightarrow +\infty$; alors

$$\varphi(u_k) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\, d(u_k, v) \leq \varphi(v),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \varphi(v) &\geq \liminf_{k \longrightarrow +\infty} \left[\varphi(u_k) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\, d(u_k, v)\right] \\ &\geq \liminf_{k \longrightarrow +\infty} \varphi(u_k) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\, d(u, v) \\ &\geq \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\, d(u, v). \end{aligned}$$

On commence par $z_1 = x$ (le x qui apparait dans les hypothèses du principe) et on pose

$$S_1 = \{u \in X; u \prec z_1\}.$$

On prend $z_2 \in S_1$ tel que

$$\varphi(z_2) \leq \inf_{S_1} \varphi + \frac{\varepsilon}{2^2}\cdot$$

On définit

$$S_n = \{u \in X; u \prec z_n\}$$

et on choisit $z_{n+1} \in S_n$ qui satisfait

$$\varphi(z_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \varphi + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\cdot$$

$z_{n+1} \in S_n$, implique que , $z_{n+1} \prec z_n$, pour tout n, et on a

$$S_1 \supset S_2 \supset ... \supset S_n \supset S_{n+1} \supset ...$$

On peut montrer que le diamètre de S_n tend vers zéro.

En effet, pour $u \in S_{n+1}$, on a $u \prec z_{n+1}$ et $u \in S_n$. Donc,

$$\varphi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, z_{n+1}) \leq \varphi(z_{n+1}) \leq \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\cdot$$

Par conséquent,

$$d(u, z_{n+1}) \leq \frac{\lambda}{2^{n+1}},$$

ce qui signifie que

$$\text{diam}\,(S_{n+1}) \leq \frac{\lambda}{2^n}.$$

D'où, $\text{diam}\,(S_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Comme X est un espace métrique complet et $(S_n)_n$ est une suite décroissante d'ensembles fermés dont le $diam\,(S_n) \longrightarrow 0$, on en déduit que leur intersection est un singleton,

$$\bigcap_n S_n = \{y\}.$$

Nous allons vérifier que le point y satisfait les propriétés $(a), (b)$, et (c).

. Comme $y \in S_1$, on a $y \prec x$. Alors la propriété (a) est vérifiée.

. Pour la propriété (b), on a

$$\begin{aligned} d(y,x) &\leq \frac{\lambda}{\varepsilon}(\varphi(x) - \varphi(y)) \\ &\leq \frac{\lambda}{\varepsilon}\Big(\inf_{u\in X}\varphi(u) + \varepsilon - \varphi(y)\Big) \\ &\leq \lambda, \end{aligned}$$

. pour la propriété (c), si pour un certain $u \in X$, nous avions $u \prec y$, alors nous aurions $u \prec z_n$ pour tout n. Alors $u \in \bigcap_n S_n$, ce qui donne, $u = y$. □

Remarque 1.13. *Quand X est un espace normé, la notion de dérivée a un sens. La propriété (c) dans le principe d' Ekeland implique que*

$$\|\varphi'(y)\|_{X'} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Ainsi, on a comme conséquence, le résultat utile suivant :

Théorème 1.21. *([20], [43])*

Soit X un espace de Banach et $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle s.c.i, bornée inférieurement, et Gâteaux différentiable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $u \in X$ vérifiant

$$\varphi(u) \leq \inf_{x\in X}\varphi(x) + \varepsilon,$$

il existe un point $v \in X$ qui vérifie les relations suivantes :

- (a') $\varphi(v) \leq \varphi(u)$,
- (b') $\|v - u\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ *et*

— (c') $\|\varphi'(v)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Démonstration. Les relations (a') et (b') sont évidemment (a) et (b) dans le principe d'Ekeland pour $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$, tandis que pour (c'), de la relation (c), nous avons , pour tout $w \in X$ et pour $t > 0$,

$$\frac{\varphi(v) - \varphi(v + tw)}{t} \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Par passage à la limite quand t tend vers 0, nous aurons pour chaque w dans X,

$$-\langle \varphi'(v), w\rangle \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Ce qui est aussi vrai pour $-w$, d'où

$$\Big|\langle \varphi'(v), w\rangle\Big| \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|,$$

et donc

$$\|\varphi'(v)\| \leq \sup_{\|w\|=1} \Big|\langle \varphi'(v), w\rangle\Big| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

□

Le résultat suivant s'appelle la formulation faible du principe variationnel d'Ekeland.

Corollaire 1.5. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle s.c.i, bornée inférieurement, et non identiquement égale à $+\infty$ ($\varphi \not\equiv +\infty$). Alors,*
pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $u_\varepsilon \in X$ tel que

$$\varphi(u_\varepsilon) \leq \inf_{u\in X} \varphi(u) + \varepsilon,$$

et

$$\varphi(u_\varepsilon) < \varphi(u) + \varepsilon d(u_\varepsilon, u),\ \forall u \in X,\ u_\varepsilon \neq u.$$

Démonstration. Du fait qu'il existe toujours un certain point $\hat{u} \in X$ tel que

$$\varphi(\hat{u}) \leq \inf_{u\in X} \varphi(u) + \varepsilon.$$

Alors d'aprés le Théorème 1.20, il existe $u_\varepsilon \in X$ (en prenant $\lambda = 1$) tel que

$$\varphi(u_\varepsilon) \leq \varphi(\hat{u}) \leq \inf_{u\in X} \varphi(u) + \varepsilon$$

et

$$\varphi(u_\varepsilon) < \varphi(u) + \varepsilon d(u_\varepsilon, u),\ \forall u \in X,\ u_\varepsilon \neq u.$$

□

Quand l'espace n'est pas réflexif, ou si la fonctionnelle est seulement semi-continue inférieurement, en présence d'une certaine compacité, le principe variationnel d'Ekeland implique la conséquence directe suivante :

Corollaire 1.6. *([26],[43]) Soit X un espace de Banach et $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$. On suppose que la fonctionnelle φ est bornée inférieurement et vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c avec $c = \inf_{u \in H} \varphi(u)$. Aors φ admet un point critique au niveau c.*

Remarque 1.14. *En effet, φ atteint un minimum (voir [19, Corollaire 1.1.1]), et chaque point de minimum local u_0 d'une fonctionnelle Gâteaux différentiable φ est un point critique, i.e., $\varphi'(u_0) = 0$.*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.5, il existe $u_n \in X$, tel que
$c \leq \varphi(u_n) \leq c + \frac{1}{n}$,
$\forall\, v \in X : \varphi(v) + \frac{1}{n}\|v - u_n\| \geq \varphi(u_n)$.
En écrivant
$\varphi(v) = \varphi(u_n) + \langle \varphi'(u_n), v - u_n \rangle + o(v - u_n)$, on en déduit que

$$\|\varphi'(u_n)\|_{X'} \longrightarrow 0, \text{quand } n \longrightarrow +\infty,$$

c'est à dire que $\varphi'(u_n) \longrightarrow 0$, alors que $\varphi(u_n) \longrightarrow c$. Comme φ satisfait la condition de Palais-Smale, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ et $u \in X$, tels que $u_{n_k} \to u$. Puisque $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, alors on a $\varphi(u) = c$ et $\varphi'(u) = 0$. □

1.6.2.1 Théorème du col de la montagne (Mountain pass theorem)

Théorème 1.22. [*Théorème du col de la montagne (Mountain pass theorem)*] *([23],[26]) Soit X un espace de Banach et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On*

suppose que

(i) $\varphi(0) = 0$;

(ii) *il existe* $\rho > 0$ *et* $\sigma > 0$ *tels que* $\varphi(u) \geq \sigma$ *pour tout* $u \in X$ *avec* $\|u\| = \rho$;

(iii) *il existe* u_1 *dans* X *avec* $\|u_1\| > \rho$ *tel que* $\varphi(u_1) < \sigma$.

Alors φ *possède une valeur critique* $c \geq \sigma$, *caractérisée par*

$$c = \inf_{\gamma \in \Lambda} \max_{u \in \gamma([0,1])} \varphi(u),$$

où

$$\Lambda = \big\{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = u_1\big\}.$$

Démonstration. Il est clair que $c < \infty$ puisque $\gamma([0,1])$ est compacte, donc la borne supérieure de J sur chaque chemin est atteinte. Par ailleurs, pour tout chemin $\gamma \in \Lambda$, on a $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = u_1$, avec $\|u_1\| > \rho$, et la fonction ω définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par : $\omega(t) = \|\gamma(t)\|$, est continue et satisfait $\omega(0) = 0$ et $\omega(1) = \|u_1\|$. Donc, d'après le théorème des valeurs moyennes, on en déduit que pour tout $0 < \rho < \|u_1\|$, il existe $s \in (0,\ 1)$ tel que $\omega(s) = \rho = \|\gamma(s)\|$. Par conséquent, $\max\limits_{u \in \gamma([0,1])} \varphi(u) \geq \sigma$, ce qui implique que $c \geq \sigma$.

$$\|\gamma\|_\Lambda = \max_{t \in [0,1]} \|\gamma(t)\|, \quad \gamma \in \Lambda.$$

(Λ, d) est un espace métrique complet où d est une distance définie par

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{t \in [0,1]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|, \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda.$$

On considère la fonctionnelle

$$\phi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ avec } \ \phi(\gamma) = \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)).$$

Comme la fonction

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi} : \Lambda \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\gamma, t) & \longrightarrow & \tilde{\varphi}(\gamma, t) = \varphi(\gamma(t)) \end{array}$$

est continue, alors ϕ est s.c.i.

De plus, $c = \inf\limits_{\Lambda} \phi \geq \sigma$, donc ϕ est bornée inférieurement. En appliquant le théorème d'Ekeland (voir Corollaire 1.5), pour chaque $\varepsilon > 0$ on obtient l'existence de $\gamma_\varepsilon \in \Lambda$ telle que

$$\phi(\gamma_\varepsilon) \ \leq \ c + \varepsilon, \tag{1.6.1}$$

$$\phi(\gamma) \geq \phi(\gamma_\varepsilon) - \varepsilon\|\gamma - \gamma_\varepsilon\|_\Lambda, \quad \forall\, \gamma \in \Lambda. \tag{1.6.2}$$

On définit

$$I_\varepsilon = \{t \in [0,1] : \varphi(\gamma_\varepsilon(t)) = \max_{s\in[0,1]} \varphi(\gamma_\varepsilon(s))\}.$$

D'après (1.6.1) et (1.6.2), on peut en déduire qu'il existe au moins $t_\varepsilon \in I_\varepsilon$ tel que $\|\varphi'(\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon))\| \leq \varepsilon$.

Pour conclure, il suffit de prendre la suite de Palais-Smale $u_n = \gamma_{\frac{1}{n}}(t_{\frac{1}{n}})$, et le résultat vient en appliquant la condition de Palais-Smale au niveau c. □

1.7 Quelques théorèmes de points fixes

Soit T est une application d'un ensemble X dans lui-même. On appelle point fixe de T tout élément u de X tel que $T(u) = u$. De nombreux problèmes, peuvent être (re)formulés sous forme de problèmes d'existence de points fixes. On rappelle d'abord un résultat élémentaire qui est le théorème du point fixe de Picard pour une contraction.

Théorème 1.23. *[18]*
Soit (X, d) un espace métrique complet, $T : X \to X$ une contraction, i.e., il existe une constante $k < 1$ telle que, $\forall u, v \in X$, $d(T(u), T(v) \leq kd(u, v)$.
Alors T admet un point fixe unique $u_0 = T(u_0)$. De plus, pour tout $u \in X$, la suite des itérées $(T^m(u))$ converge vers u_0 quand $m \longrightarrow \infty$.

Par la suite on aura besoin du théorème suivant :

Théorème 1.24. [*Théorème de Browder*] *[30]*
Soit H un espace de Hilbert et C un sous-ensemble non vide borné, fermé, convexe de H. Alors, toute application non expansive $T : C \longrightarrow C$ admet un point fixe dans C.

Les théorèmes de points fixes de Schauder sont un outil important pour prouver l'existence de points fixes pour certains opérateurs. Nous allons citer quelques versions.

Théorème 1.25. [*Schauder*] *[18]*
Soit X un espace vectoriel normé, C un convexe non vide et compact de X et T une application continue de C dans C. Alors T admet un point fixe.

Théorème 1.26. [*Schauder*] *[18]*

Soit X un espace de Banach, C un convexe fermé et non vide de X et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet un point fixe.

Théorème 1.27. [*Schauder*] *[38]*

Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach X et $T : C \longrightarrow C$ une application compacte. Alors T admet au moins un point fixe.

Théorème 1.28. [*de Type Leray-Schauder*] *(p 46 ; Thm 3.5)[10]*

Soit U un ouvert borné d'un espace de Hilbert H, $0 \in U$ et $T : \overline{U} \longrightarrow H$ une application non expansive. On suppose que

$$\lambda T(u) \neq u \ \text{ pour tout } u \in \partial U \text{ et } \lambda \in [0,1]\,.$$

Alors T admet au moins un point fixe dans U.

Théorème 1.29. [*Alternative non linéaire de Leray-Schauder*] *[38]*

Soit Ω un ouvert, borné d'un espace de Banach X et $T : \Omega \longrightarrow X$ une application compacte. Alors on a l'alternative suivante :

(i) T admet un point fixe dans Ω,

(ii) il existe $u \in \partial\Omega$, il existe $\lambda \in [0,1] : u = \lambda T(u)$.

Théorème 1.30. [*Théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff*] *[29]*

Soit Ω un sous-ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Hausdorff localement convexe X. Supposons que l'opérateur $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ est continu et $\overline{T(\Omega)}$ est compact dans Ω. Alors T admet un point fixe dans Ω.

On rappelle aussi deux autres théorèmes de points fixes.

Théorème 1.31. [*Théorème du point fixe de Schaefer*] *[38]*

Soit X un espace de Banach et $T : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu. On a alors l'alternative suivante :

(i) l'équation $u = T(u)$ admet une solution,

(ii) l'ensemble $S = \{u \in X,\ u = \lambda T(u),\ \lambda \in (0,1)\}$ est non borné.

Définition 1.31. *[13]*

Un cône $\mathcal{C}$ dans un espace de Banach X est un sous ensemble fermé, convexe de X tel que $\mathcal{C} \neq \{0\}$, $\lambda\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, et $\mathcal{C} \bigcap (-\mathcal{C}) = \{0\}$.

Théorème 1.32. [*Théorème de Krasnosel'skii*] *[22]*

Soit X un espace de Banach, $\mathcal{C} \subset X$ un cône ; on suppose que $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est une application complètement continue telle que pour certains r et R avec $0 < r < R$, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) $\|Tu\| \leq \|u\|$ *pour* $\|u\| = r$ *et* $\|Tu\| \geq \|u\|$ *pour* $\|u\| = R$,

(ii) $\|Tu\| \geq \|u\|$ *pour* $\|u\| = r$ *et* $\|Tu\| \leq \|u\|$ *pour* $\|u\| = R$.

Alors, T admet un point fixe u_0 avec $r \leq \|u_0\| \leq R$.

CHAPITRE

2

RÉSULTATS PRINCIPAUX

2.1 Existence de solutions pour un problème aux limites elliptique sur les espaces de Hilbert via un théorème de minimisation global [33]

Le but de cette section est de donner un nouveau théorème de minimisation, pour les opérateurs potentiels non expansifs sur les espaces de Hilbert. Ce théorème nous a permis de donner un nouveau résultat similaire à celui de Hôfer dans [17], mais avec des hypothèses plus faibles. Ce résultat est confirmé par un exemple. Le lien entre le point fixe d'un opérateur potentiel et le minimum global d'une certaine fonctionnelle d'énergie a été établi dans [4]. Les théorèmes de minimisation dans [7, 17] sont basés sur la condition de compacité de Palais-Smale, qui est une condition forte et dont la vérification n'est pas toujours évidente. En utilisant les théorèmes du point fixe, nous allons démontrer dans cette section , que

pour les opérateurs potentiels non expansifs sur les espaces de Hilbert, on peut avoir les mêmes résultats de [7, 17] en remplaçant la condition de Palais-Smale par des hypothèses plus faibles liées à la différentielle de la fonctionnelle à minimiser. Pour atteindre ce but, nous allons donner un théorème de minimisation dont la démonstration est basée sur le théorème du point fixe de Browder et une proposition de Ricceri dans [4].

Soit $(H,(.,.))$ un espace Hilbert. Un opérateur $T : H \longrightarrow H$ est dit opérateur potentiel (opérateur gradient), s'il existe une fonctionnelle Gâteaux différentiable $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $Grad\,\varphi(u) = T(u)$, pour tout $u \in H$, i.e.,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u+th)-\varphi(u)}{t} = (T(u),h) \quad \forall u,h \in H.$$

On note par $(.,.)$ le produit scalaire dans H et $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$ la norme.

Définition 2.1. *Soit (X,d) un espace métrique et $U \subseteq X$.*
L'application $T : U \longrightarrow X$ est dite non expanxive si

$$d(T(u),T(v)) \leq d(u,v), \quad \forall u,v \in X.$$

Définition 2.2. *Soit X un espace vectoriel normé et soit $\|.\|_X$ sa norme.*
L'application $T : X \longrightarrow X$ est dite non expansive si

$$\|T(u)-T(v)\|_X \leq \|u-v\|_X, \quad \forall u,v \in X.$$

Définition 2.3. *Soit X un espace de Banach et X' son dual topologique.*
L'opérateur $T : X \to X'$ est dit monotone si

$$\forall u,v \in X, \ \langle T(u)-T(v),u-v\rangle \geq 0.$$

Proposition 2.1. *[14]*
Soit X un espace de Banach et X' son dual topologique,
$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteaux différentiable et $\varphi' : X \longrightarrow X'$.
On a les équivalences suivantes

1. *φ convexe $\Longleftrightarrow$ φ' est monotone.*
2. *Si φ est convexe, on a*

$$\varphi \text{ admet un minimum global en } u \text{ si et seulement si } \varphi'(u) = 0.$$

Démonstration. On suppose que φ est convexe et on démontre que φ' est monotone. Pour $t \in (0,\, 1)$, l'inégalité de convexité s'écrit :

$$\varphi\left(tu + (1-t)v\right) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad u, v \in X,$$

que l'on peut écrire :

$$\varphi\left(v + t(u-v)\right) \leq \varphi(v) + t\left(\varphi(u) - \varphi(v)\right), \quad u, v \in X,$$

d'où

$$\frac{\varphi\left(v + t(u-v)\right) - \varphi(v)}{t} \leq \left(\varphi(u) - \varphi(v)\right), \quad u, v \in X,$$

en faisant tendre t vers zéro, on a :

$$\langle \varphi'(v), u - v\rangle \leq \varphi(u) - \varphi(v), \quad u, v \in X,$$

de la même manière on trouve

$$\langle \varphi'(u), v - u\rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u), \quad u, v \in X,$$

en additionnant les deux inégalités, on trouve :

$$\langle \varphi'(u) - \varphi'(v), u - v\rangle \geq 0, \quad u, v \in X.$$

Maintenant, on suppose que φ' est monotone et on démontre que φ est convexe. Pour $t \in [0,\, 1]$, soit $J(t) := \varphi\left(tu + (1-t)v\right) = \varphi\left(v + t(u-v)\right), \quad u, v \in X$. Donc

$$J'(t) = \langle \varphi'\left(v + t(u-v)\right), u - v\rangle, \quad u, v \in X.$$

Comme J' est croissante, on a $J'(st) \leq J'(s)$ pour $0 \leq t, s \leq 1$. Par conséquence on a

$$J(t) - J(0) = \int_0^t J'(\sigma)\, d\sigma = t \int_0^1 J'(ts)\, ds \leq t\left(J(1) - J(0)\right),$$

par suite on a

$$J(t) \leq tJ(1) - (1-t)J(0),$$

ce qui signifie que

$$\varphi\left(tu + (1-t)v\right) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad u, v \in X.$$

Maintenant, on démontre (2). On sait par le Théorème 1.13 que si u est un minimum de φ alors, u est un point critique. D'autre part, de la convexité de φ on a

$$\langle \varphi'(u), v-u\rangle \leq \varphi(v)-\varphi(u), \quad \forall v \in X,$$

par suite, si $\varphi'(u)=0$ on a

$$\varphi(u) \leq \varphi(v), \quad \forall v \in X.$$

□

Proposition 2.2. *[4]*

Soit H un espace de Hilbert et $(.,.)$ le produit scalaire sur H,
$T : H \longrightarrow H$ un opérateur potentiel non expansif, et $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle telle que $\varphi' = I - T$. Alors le minimum global de φ coïncide avec le point fixe de T.

Démonstration. Soit u_0 un point fixe de T. Alors $Tu_0 = u_0$ et donc $\varphi'(u_0) = 0$.
D'autre part, comme T est non expansif, alors pour tous $u, v \in H$,

$$\|T(u) - T(v)\|_H \leq \|u - v\|_H,$$

et on a alors

$$\begin{aligned}(\varphi'(u) - \varphi'(v), u - v) &= (u - Tu - v + Tv, u - v)\\ &= (u - v, u - v) - (Tu - Tv, u - v)\\ &\geq \|u - v\|_H^2 - \|T(u) - T(v)\|_H \|u - v\|_H\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

D'où φ' est monotone, et par suite φ est convexe.
La convexité de φ associée à $\varphi'(u_0) = 0$, nous donne d'après la Proposition 2.1 que u_0 est un minimum global pour φ. □

Théorème 2.1. [*Théorème des valeurs moyennes pour les opérateurs*] *[12]*

Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : A \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur Gâteaux différentiable sur A. Pour toute paire d'éléments a et b avec $ta+b(1-t) \in A$ et $t \in [0,1]$, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que :

$$\|T(a) - T(b)\|_Y \leq \|DT(\tau a + (1-\tau)b)\| \|b - a\|_X.$$

On rappelle le critère de compacité de Palais-Smale [26]. Soit $\varphi \in C^1(H,\mathbb{R})$. Si toute suite $(u_n)_n$ d'éléments dans H pour laquelle $(\varphi(u_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et $\varphi'(u_n) \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$ dans H' possède une sous suite qui converge, alors on dit que φ satisfait la condition de Palais-Smale (PS).

Proposition 2.3. *[7, 17]. Soit H un espace de Hilbert et $\varphi \in \mathcal{C}^1(H,\mathbb{R})$ satisfaisant la condition de Palais-Smale. Soit C un sous-ensemble fermé et convexe de H. On suppose que $T = I - \varphi'$ envoie C dans C et que φ est bornée inférieurement dans C. Alors, il existe $u_0 \in C$ tel que $\varphi'(u_0) = 0$, et $\inf\limits_C \varphi = \varphi(u_0)$.*

Démonstration. Par le principe variationnel d'Ekeland, on a : étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in C$ tel que $\varphi(u_\varepsilon) \leq \inf\limits_C \varphi + \varepsilon$ et

$$(1) \qquad \varphi(u_\varepsilon) \leq \varphi(u) + \varepsilon\|u - u_\varepsilon\|, \quad \forall u \in C.$$

En prenant $u = (1-t)u_\varepsilon + tTu_\varepsilon$ avec $0 \leq t \leq 1$, et en utilisant la formule de Taylor, on trouve à partir de (1)

$$t\|\varphi'(u_\varepsilon)\|^2 \leq \varepsilon t\|\varphi'(u_\varepsilon)\| + o(t),$$

en faisant tendre t vers zéro, on trouve

$$\|\varphi'(u_\varepsilon)\| \leq \varepsilon.$$

Par la condition de Palais-Smale, on en déduit qu'il existe $u_0 \in C$ tel que $u_\varepsilon \to u_0$, quand $\varepsilon \to 0$. Comme φ et φ' sont continues, on obtient le résultat voulu. □

Dans [7], les auteurs ont considéré le problème

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}(x)D_i(u)) + c(x)u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où Ω est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^N$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^{\frac{N}{2}}$, $c(x) \geq 0$,
$f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que :

$$(*) \quad |f(x,s)| \leq c|s|^\sigma + d(x),$$

avec c une constante positive et $\sigma = \frac{N+2}{N-2}$ et $d \in L^{\frac{2N}{N+2}}$ si $N \geq 3$, ou bien $d \in L^p$ et $1 < p, \sigma < \infty$ si $N = 2$.

Le problème de Dirichlet associé est

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} a[u,v] = \int_\Omega f(x,u)vdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$\text{avec, } \; a[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_i u D_j v + c(x)uvdx.$$

Par une sous-solution et sur-solution de (P), on désigne respectivement w et W dans $H_0^1(\Omega)$ qui vérifient,

$$a[w,v] \leq \int_\Omega f(x,w)vdx, \;\; \text{et} \;\; a[W,v] \geq \int_\Omega f(x,W)vdx, \; \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0.$$

Soit $\varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie par

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}a[u,u] - \int_\Omega F(x,u)dx, \qquad \text{avec} \;\; F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi. \tag{2.1.2}$$

Théorème 2.2. [*Théorème 6 dans [7]*]

On impose à f des conditions qui garantissent que φ définie dans (2.1.2) satisfait la condition de Palais-Smale. On suppose aussi que la sous-solution w et la sur-solution W du Problème (P) existent dans $H_0^1(\Omega)$ et que $w \leq W$. On suppose que pour chaque $x \in \Omega$ fixé, $f(x,s)$ est une fonction croissante en s avec $w(x) \leq s \leq W(x)$.

Alors il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$u_0 \in [w,\, W], \;\; \varphi(u_0) = \inf_{[w,\, W]} \varphi \; et \;\; \varphi'(u_0) = 0,$$

où $[w,\, W] = \{tw + (1-t)W,\; t \in [0,1]\}$.

Par conséquent, u_0 est solution du Problème (P).

Dans la démonstration de ce théorème on aura besoin du principe du maximum dont on rappelle une version. considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$ et $f \in L^2(\Omega)$.

Théorème 2.3. [*Principe du maximum*] *[15] Si $f \geq 0$ presque partout dans Ω, alors $u \geq 0$ presque partout dans Ω.*

Le principe du maximum ne fait que traduire une propriété parfaitement naturelle de point de vue physique : par exemple dans le contexte de l'équation stationnaire de la chaleur, si on chauffe ($f \geq 0$), la température intérieure est toujours plus grande que la température au bord ($u \geq 0$).
Pour démontrer le Théorème 2.3 on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u^+ = max(u, 0)$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u^+ = 1_{u>0}\nabla u$ presque partout dans Ω, où $1_{u>0}(x)$ vaut 1 là où $u(x) > 0$ et 0 ailleurs.*
En utilisant la formulation variationnelle du Problème 2.1.3 avec $v = u^- = -min(u, 0)$ qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ en vertu du Lemme 2.1 (car $u = u^+ - u^-$), on a

$$\int_\Omega f u^- \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla u^- \, dx = \int_\Omega 1_{u<0} \nabla u \nabla u \, dx = -\int_\Omega |\nabla u^-|^2 \, dx \leq 0. \tag{2.1.4}$$

Mais $u^- \geq 0$ et $f \geq 0$ presque partout dans Ω. Par conséquent, tous les termes de (2.1.4) sont nuls, et comme $u^- \in H_0^1(\Omega)$ on en déduit que $u^- = 0$, et par suite $u \geq 0$ presque partout dans Ω.

Maintenant on démontre le Théorème 2.2.

Démonstration. Il est facile de voir que $C = [w,\ W]$ est fermé et convexe. D'autre part, par le principe de maximum on a $(I - \varphi')$ envoie C dans lui même. De plus, par la condition de croissance $(*)$ imposée sur f, on voit que φ est bornée inférieurement. Comme φ vérifie la condition de Palais-Smale, on en déduit de la Proposition 2.3, l'éxistence de u_0 dans C qui vérifie

$$\varphi(u_0) = \inf_{[w,\ W]} \varphi \text{ et } \ \varphi'(u_0) = 0.$$

□

2.1.1 Résultat principal[33]

Soit H un espace de Hilbert et $(.,.)$ le produit scalaire sur H. Soient I et I' les opérateurs définis par $\quad I : H \longrightarrow H \quad u \longmapsto I(u) : H \longrightarrow \mathbb{R} \quad v \longmapsto I(u).v = (u, v)$

$$I' : H \longrightarrow \mathcal{L}(H, H')$$
$$u \longmapsto I'(u) : H \longrightarrow H'$$
$$v \longmapsto I'(u).v : H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto (I'(u).v).w = (w, v).$$

Théorème 2.4. *[33] Soit $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle telle que*

1. *φ est deux fois Gâteaux différentiable sur H.*
2. *$\|(I' - \varphi'')(u)\| \leq 1, \quad \forall u \in H.$*
3. *$(I - \varphi')(C) \subset C$ pour un certain sous-ensemble non vide C de H, convexe, fermé et borné.*

Alors, φ possède un minimum global sur H, i.e., il existe $u_0 \in C$ tel que

$$\varphi(u_0) = \inf_H \varphi.$$

En particulier, $\varphi'(u_0) = 0$.

Démonstration. On cherche à montrer que les conditions du théorème de Browder sont satisfaites. Comme φ est deux fois Gâteaux différentiable, alors φ' et φ'' existent.

Soit, $T : H \longrightarrow H$ avec $T = I - \varphi'$.

On remarque que T est un opérateur potentiel.

En effet, soit

$$\psi : H \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad \psi' = I.$$

On a alors, pour tout $u \in H$, $T(u) = (\psi - \varphi)'(u)$.

Pour montrer que T est non expansif, on utilise le théorème des valeurs moyennes (voir [12] p. 122). Pour tous $u, v \in H$, il existe $\tau_0 \in (0, 1)$ tel que

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\| &\leq \|DT(\tau_0 u + (1 - \tau_0)v).(u - v)\|, \\ &\leq \|DT(\tau_0 u + (1 - \tau_0)v)\|\|u - v\|, \\ &= \|(I' - \varphi'')(\tau_0 u + (1 - \tau_0)v)\|\|u - v\|, \end{aligned}$$

ici, DT est la différentielle de T. En utilisant l'hypothèse (2) on a

$$\|Tu - Tv\| \leq \|u - v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

Donc T est un opérateur non expansif.
Par le Théorème 1.24, l'opérateur T admet un point fixe dans C, et par la Proposition 2.2, ce point fixe est un minimum global de φ dans H. □

Maintenant, on peut prouver un résultat analogue au théorème précédent.

Théorème 2.5. *[33] Soit $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle vérifiant les hypothèses (1) et (2) du Théorème 2.4. On suppose aussi qu'il existe un ouvert borné U de H avec $0 \in U$ et*

$$\varphi'(u) \neq \frac{\lambda - 1}{\lambda} u \ , \forall u \in \partial U, \ \ \forall \lambda \in [0, 1] .$$

Alors, φ admet un minimum global dans U, i.e., il existe $u_0 \in U$ tel que

$$\varphi(u_0) = \inf_H \varphi.$$

En particulier, $\varphi'(u_0) = 0$.

Démonstration. Le résultat vient immédiatement du Théorème 1.28, puisque les hypothèses imposées garantissent que $\lambda(I - \varphi')(u) \neq u$ pour tout $u \in \partial U$ et $\lambda \in [0, 1]$. □

2.1.2 Application

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1, et \quad f, f' : \ \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory où f' est la dérivée de f par rapport à la deuxième variable. On suppose aussi que

$$|f(x, s)| \leq c_1 |s|^{\sigma_1} + d_1, \quad \text{et} \quad |f'(x, s)| \leq c_2 |s|^{\sigma_2} + d_2, \tag{2.1.6}$$

où c_1, c_2, d_1 et d_2, sont des constantes positives, et $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 < \frac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$ $(0 \leq \sigma_1, \sigma_2 < \infty$ si $N = 1, 2)$.

Une solution faible du Problème (2.1.5) est une solution du problème

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f(x,u).v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.1.7}$$

La norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ est notée par $\| \|$. Soient $w, W \in H_0^1(\Omega)$ respectivement la sous-solution et la sur-solution du Problème (2.1.7) et soit λ_1 la première valeur propre du problème linéaire de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

On rappelle qu'une valeur réelle λ est dite valeur propre du Problème (2.1.8), s'il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que, $u \neq 0$, et $(u,v)_{H_0^1} = \lambda(u,v)_{L^2}$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $u \neq 0$ on peut immédiatement conclure que $\lambda > 0$, puisque si on prend $v = u$ on obtient $\|u\|^2 = \lambda \|u\|_{L^2}^2$. On désigne par λ_1 la première valeur propre du Problème (2.1.8), le théorème suivant assure l'existence de λ_1 et donne sa caractérisation.

Théorème 2.6. *[24] Le Problème (2.1.8) admet une suite de valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, et une suite de fonctions propres $(u_n)_{n\geq 1}$, normale dans $L^2(\Omega)$ $(\|u_n\|_{L^2} = 1, \ \forall n)$, et sa première valeur propre vérifie*

1. $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega),\, u \neq 0} \dfrac{\|u\|^2}{\|u\|_{L^2}^2}$.
2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots$

Démonstration. On pose

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \|u\|^2 : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L^2} = 1 \right\},$$

et soit $(u_n)_n$ une suite telle que

$$u_n \in H_0^1(\Omega), \|u_n\|_{L^2} = 1, \text{ et } \|u_n\|^2 \to \lambda_1 \text{ quand } n \to +\infty.$$

La suite $(u_n)_n$ est bornée dans l'espace réflexif $H_0^1(\Omega)$, donc il existe u et une sous suite notée aussi $(u_n)_n$ telles que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, quand $n \to +\infty$. Par ailleurs, par l'injection

compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on a $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \to +\infty$. Par la continuité de la norme, on en déduit que $\|u\|_{L^2} = 1$. D'autre part, par la définition de λ_1, et la semi continuité inférieure faible de la norme, on a

$$\lambda_1 \leq \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{L^2}^2} = \|u\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2 \leq \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|^2 = \lambda_1,$$

d'où $\lambda_1 = \|u\|^2$, ce qui signifie que l'infimum est atteint. Maintenant, on montre que λ_1 est une valeur propre du Problème (2.1.8). Soit $u \neq 0$ la fonction où l'infimum est atteint, et soit v dans $H_0^1(\Omega)$. On considère la fonction g définie au voisinage de zéro par

$$g(t) := \frac{\|u + tv\|^2}{\|u + tv\|_{L^2}^2}.$$

Comme $u \neq 0$, alors g est bien définie et elle atteint son minimum en zéro, d'où $g'(0) = 0$. Par un calcul simple de la dérivée par rapport à t, on trouve

$$\left[(u, v)_{H_0^1} - \lambda_1 (u, v)_{L^2}\right] = 0.$$

Il reste à montrer que λ_1 est la plus petite valeur propre. Si λ est une autre valeur propre de Problème 2.1.8, alors il existe une fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $(\varphi, v)_{H_0^1} = \lambda(\varphi, v)_{L^2}$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, et $\|\varphi\|_{L^2} = 1$. Si on prend $v = \varphi$, on a $\|\varphi\|^2 = \lambda$. Vue la définition de λ_1, on peut déduire que $\lambda_1 \leq \lambda$. □

Quand Ω est borné, on rappelle le résultat important suivant (voir [23], [24])

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|u\|, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 2.7. *On suppose que*

$$|f(x, s)| \leq c_1 |s|^{\sigma_1} + d_1, \quad \text{et} \quad |f'(x, s)| \leq c_2 |s|^{\sigma_2} + d_2,$$

c_1, c_2, d_1 et d_2, sont des constantes positives, et $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 < \frac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$ $(0 \leq \sigma_1, \sigma_2 < \infty$ si $N = 1, 2)$ et que

1. *pour chaque $x \in \Omega$, fixé, $f(x, y)$ est croissante en y avec $w(x) \leq y \leq W(x)$,*
2. *$|f'(x, s)| \leq \lambda_1$, $\forall x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbb{R}$.*

Alors, il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ qui est une solution faible du Problème (2.1.5) et $u_0 \in [w, W]$.

Pour la démonstration du théorème 2.7, on aura besoin des résultats suivants :

Proposition 2.4. *[9], [23]*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$|f(x,s)| \leq c_1|s|^{\sigma_1} + d_1, \ \forall x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R},$$

où c_1, d_1 sont des constantes positives, et $0 \leq \sigma_1 < \frac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$ ($0 \leq \sigma_1 < \infty$ si $N = 1, 2$).
Soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$.
Alors, la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \varphi : \ & H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u \longmapsto \varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx, \end{aligned}$$

est bien définie, différentiable au sens de Fréchet et on a

$$\varphi'(u).v = (u,v) - \int_\Omega f(x,u).vdx, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On pose $\varphi(u) = K(u) - J(u)$ où $K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ et $J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$. Il est clair que, K est bien définie et est Fréchet différentiable, avec $K'(u).v = \langle u, v\rangle$. J est bien définie. La condition de croissance imposée sur f permet de déduire que

$$\begin{aligned} F(x,u) &= \int_0^u f(x,s)\,ds, \\ &\leq \int_0^u c_1|s|^{\sigma_1}\,ds + \int_0^u d_1\,ds, \\ &\leq \frac{c_1}{\sigma_1+1}\text{sign}(u)u^{\sigma_1+1} + d_1u, \\ |F(x,u)| &\leq \frac{c_1}{\sigma_1+1}|u|^{\sigma_1+1} + d_1|u|, \\ \int_\Omega |F(x,u)|dx &\leq \frac{c_1}{\sigma_1+1}\int_\Omega |u|^{\sigma_1+1}\,dx + d_1\int_\Omega |u|\,dx < \infty. \end{aligned}$$

Maintenant, on démontre que J es Fréchet différentiable. En utilisant le théorème des valeurs moyennes et la continuité de f par rapport à la deuxième variable, on peut montrer que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(F(x,u(x)+tv(x)) - F(x,u(x))\big) = f(x,u(x)).v(x).$$

En utilisant la condition de croissance imposée sur f, et les inégalités de Holder et de Minkowski, on peut voir que

$$\frac{1}{t}\big(F(x,u(x)+tv(x)) - F(x,u(x))\big) \leq g(x), \text{ avec } g \in L^1(\Omega).$$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on trouve

$$J'(u).v = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\, dx.$$

Si J' est continue en chaque $u \in H_0^1(\Omega)$, alors elle est Fréchet différentiable. Dans le cas ou $N \geq 3$, on a $1 \leq \sigma_1 + 1 < \frac{2N}{N-2}$, et $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^{\sigma_1+1}(\Omega)$. D'autre part, la condition de croissance imposée sur f permet de déduire que l'opérateur de Nemytskii associé à f est continu de $L^{\sigma_1+1}(\Omega)$ vers $L^{\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1}}(\Omega)$. Maintenant, Soit $(u_n)_n$ une suite dans $H_0^1(\Omega)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$, et par l'injection compacte on a $u_n \to u_0$ dans $L^{\sigma_1+1}(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. De plus, la continuité de l'opérateur de Nemytskii nous donne, $\|N_f u_n - N_f u_0\|_{L^{\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1}}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. On peut voir que $J'(u_n) \longrightarrow J'(u_0)$ dans $(H_0^1(\Omega))'$ quand $n \longrightarrow +\infty$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|J'(u_n) - J(u_0)\|_{(H_0^1(\Omega))'} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle J'(u_n) - J(u_0),\, v\rangle|, \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \int_\Omega \Big|f(x, u_n(x)) - f(x, u_0(x))\Big|\Big|v(x)\Big|\, dx, \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \Big(\int_\Omega \Big|f(x, u_n(x)) - f(x, u_0(x))\Big|^{\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1}}\, dx\Big)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1+1}} \Big(\int \Big|v(x)\Big|^{\sigma_1+1}\, dx\Big)^{\frac{1}{\sigma_1+1}}, \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \|N_f u_n - N_f u_0\|_{L^{\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1}}} \|v\|_{L^{\sigma_1+1}}, \\
&\leq \eta \sup_{\|v\|\leq 1} \|N_f u_n - N_f u_0\|_{L^{\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1}}} \|v\|, \\
&\leq \eta \|N_f u_n - N_f u_0\|_{L^{\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1}}} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Pour le cas $N = 2$, on procède de la même manière en utilisant l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{\sigma_1+2}(\Omega)$, et la continuité de l'opérateur de Nemytskii de $L^{\sigma_1+2}(\Omega)$ dans $L^{\frac{\sigma_1+2}{\sigma_1}}(\Omega)$. Dans le cas ou $N = 1$, l'injection de l'espace $H_0^1(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ est compacte. Si on suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a aussi $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$, et par l'injection compacte on a $u_n \to u_0$ dans $C(\overline{\Omega})$. Comme l'opérateur N_f est continu sur $C(\overline{\Omega})$, on a $\|N_f(u_n) - N_f(u_0)\|_{C(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\|J'(u_n) - J(u_0)\|_{(H_0^1(\Omega))'} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle J'(u_n) - J(u_0),\, v\rangle|, \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \int_\Omega \Big|f(x, u_n(x)) - f(x, u_0(x))\Big|\Big|v(x)\Big|\, dx, \\
&\leq \|N_f(u_n) - N_f(u_0)\|_{C(\overline{\Omega})} \sup_{\|v\|\leq 1} \int_\Omega \Big|v(x)\Big|\, dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J'(u_n)-J(u_0)\|_{(H_0^1(\Omega))'} &\leq \|N_f(u_n)-N_f(u_0)\|_{C(\overline{\Omega})}\sup_{\|v\|\leq 1}\|v\|_{C(\overline{\Omega})}|\Omega|,\\ &\leq \eta|\Omega|\|N_f(u_n)-N_f(u_0)\|_{C(\overline{\Omega})}\sup_{\|v\|\leq 1}\|v\|,\\ &\leq \theta\|N_f(u_n)-N_f(u_0)\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0,\ \text{quand}\ \ n\to+\infty.\end{aligned}$$

□

Si f' est la dérivée de f par rapport à la deuxième variable et satisfait

$$|f'(x,s)|\leq c_2|s|^{\sigma_2}+d_2,\ \forall x\in\Omega, s\in\mathbb{R},$$

où c_2, d_2 sont des constantes positives, et $0\leq\sigma_2<\frac{N+2}{N-2}$ si $N\geq 3$ $(0\leq\sigma_2<\infty$ si $N=1,2)$, alors, d'après la Proposition 2.4, la fonctionnelle φ' est Fréchet différentiable. En suivant les règles du calcul dans [1], on trouve

$$(\varphi''(u).v).\omega=\int_\Omega\nabla v.\nabla\omega-\int_\Omega f'(x,u).v.\omega dx,\quad\forall\, v,\omega\in H_0^1(\Omega). \tag{2.1.9}$$

En effet,

$$J''(u)(v,w)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}J(u+tv+ws)\right)\Big|_{t=s=0},$$

avec,

$$J(u+tv+sw)=\int_\Omega F(x,u(x)+tv(x)+sw(x))\,dx.$$

D'après la Proposition 2.4, on a

$$\frac{d}{ds}J(u+tv+sw)=\int_\Omega f(x,u(x)+tv(x)+sw(x))w(x)\,dx,$$

et encore par la même proposition, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}J(u+tv+sw)\right)=\int_\Omega f'(x,u(x)+tv(x)+sw(x))w(x)v(x)\,dx,$$

donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}J(u+tv+ws)\right)\Big|_{t=s=0}=\int_\Omega f'(x,u(x))w(x)v(x)\,dx.$$

De la même manière on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}K(u+tv+ws)\right)\Big|_{t=s=0}=\langle w,v\rangle.$$

Maintenant, on démontre le Théorème 2.7.

Démonstration. On considère le problème

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f(x,u).v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Comme on peut le voir immédiatement, une solution faible du Problème (2.1.5) est un point critique de la fonctionnelle φ définie dans la Proposition 2.4. Pour montrer que le Problème (2.1.7) a une solution, on montre que φ satisfait les hypothèses du Théorème 2.4.

On commence par montrer que

$$\|(I' - \varphi'')(u)\| \leq 1, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} \|(I' - \varphi'')(u)\| &= \sup_{\|v\|\leq 1, \|\omega\|\leq 1} |(I' - \varphi'')(u).v.\omega|, \\ &= \sup_{\|v\|\leq 1, \|\omega\|\leq 1} \Big| \int_\Omega f'(x,u)v(x)\omega(x)dx \Big| \\ &\leq \sup_{\|v\|\leq 1, \|\omega\|\leq 1} \int_\Omega |f'(x,u)||v(x)||\omega(x)|dx \\ &\leq \lambda_1 \sup_{\|v\|\leq 1, \|\omega\|\leq 1} \int_\Omega |v(x)||\omega(x)|dx \\ &\leq \lambda_1 \sup_{\|v\|\leq 1, \|\omega\|\leq 1} \Big(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |\omega(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \lambda_1 \sup_{\|v\|\leq 1, \|\omega\|\leq 1} \|v\|_{L^2}.\|\omega\|_{L^2} \\ &\leq \lambda_1 \sup_{\|v\|\leq 1, \|\omega\|\leq 1} \Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|v\|\Big).\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\omega\|\Big) \\ &= \sup_{\|v\|\leq 1, \|\omega\|\leq 1} \|v\|.\|\omega\| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Soit $C = [w,\ W] = \{u \in H_0^1(\Omega) : w(x) \leq u(x) \leq W(x),\ \forall x \in \Omega\}$.

(i) C est un sous ensemble fermé.

En effet, soit $(u_n) \subset C$ une suite qui converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, donc $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Alors, il existe une sous-suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ $p.p.\, x \in \Omega$. Comme $(u_n) \subset C$ pour tout n, on a $w(x) \leq u_{n_k}(x) \leq W(x)$; par passage à la limite quand $k \to +\infty$, on trouve $w(x) \leq u(x) \leq W(x)$, i.e., $u \in C$.

(ii) C est un convexe de $H_0^1(\Omega)$.

En effet, soient u et v dans C et $t \in [0,1]$. Il est facile de vérifier que

$$w(x) \leq tu(x) + (1-t)v(x) \leq W(x).$$

(iii) C est borné.

Par définition de C on a si $u \in C = [w,\ W]$, il existe $t \in [0,1]$ tel que

$$u = tw + (1-t)W,$$

donc,

$$\|u\| = \|tw + (1-t)W\| \leq \|w\| + \|W\|.$$

(iv) Maintenant, on montre que $(I - \varphi')(C) \subset C$.

Soit $u \in C$, on a $w(x) \leq u(x) \leq W(x), x \in \Omega$. Comme f est croissante par rapport à sa deuxième variable y pour $w(x) \leq y \leq W(x)$, on a alors

$$f(x, w(x)) \leq f(x, u(x)) \leq f(x, W(x)).$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ et $v \geq 0$, on a

$$\int_\Omega f(x, w(x))vdx \leq \int_\Omega f(x, u(x))vdx \leq \int_\Omega f(x, W(x))vdx.$$

Comme w et W sont respectivement la sous et la sur-solution du Problème (2.1.7), on a

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v dx \leq \int_\Omega f(x, w(x))vdx \leq \int_\Omega f(x, u(x))vdx \leq \int_\Omega f(x, W(x))vdx \leq \int_\Omega \nabla W \nabla v dx.$$

En d'autres termes,

$$(w, v) \leq ((I - \varphi')(u), v) \leq (W, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ et } v \geq 0.$$

Par le principe du maximum on en déduit que

$$w \leq (I - \varphi')(u) \leq W, \text{ sur } \Omega.$$

Donc, pour tout x dans Ω on a

$$w(x) \leq (I - \varphi')(u)(x) \leq W(x),$$

ce qui signifie que $(I - \varphi')(u) \in C$. Alors, $(I - \varphi')(C) \subset C$. L'existence de la solution faible du Problème (2.1.5) vient du Theorem 2.4. □

Exemple 2.2. *On considère le problème aux limites*

$$\begin{cases} -u''(x) = \dfrac{\pi^2}{4}\left(\ln(\exp(u(x)) + 10) - \dfrac{1}{2}\right), \quad x \in (-1,1), \\ u(-1) = u(+1) = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$\Omega = [-1,1]\,, \quad f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec :*

$$f(x,u) = \frac{\pi^2}{4}\left(\ln(\exp(u) + 10) - \frac{1}{2}\right),$$

$$f'(x,u) = \frac{\pi^2}{4}\frac{\exp(u)}{\exp(u) + 10} > 0, \forall u \in \mathbb{R},$$

$$|f'(x,u)| \leq \frac{\pi^2}{4} = \lambda_1.$$

Il est facile de voir que w *et* W *qui sont définies sur* Ω *par* $w(x) = 0$ *et* $W(x) = \dfrac{\pi^2}{4}\left(|x| - |x|^2\right)$ *sont respectivement une sous-solution et une sur-solution du Problème (2.2.1).*

$$f(x,0) = \frac{\pi}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2}) \geq 0 = -w''(x),$$

$$f(x,W(x)) = \frac{\pi^2}{4}\left(\ln(\exp(W(x)) + 10) - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi^2}{2} = -W''(x).$$

Donc toutes les hypothèses du Théorème 2.7 sont satisfaites.

2.3 Sur un nouveau théorème de point fixe sur les espaces de Hilbert via le lemme du col et application aux problèmes aux limites elliptiques [34]

Dans cette section, en se basant sur un théorème de point critique, nous allons donner un nouveau théorème d'existence de point fixe sur les espaces de Hilbert, pour des opérateurs potentiels vérifiant certaines conditions. Le résultat trouvé sera appliqué à l'étude d'existence de solutions pour un problème aux limites.

Soit X un espace de Banach. Un opérateur $T: \ X \longrightarrow X'$ est dit opérateur potentiel sur un sous ensemble $\Omega \subset X$, s'il existe une fonctionnelle Gâteaux différentiable $\varphi: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nabla\varphi(u) = T(u)$, pour tout $u \in \Omega$ ([12]). En d'autres termes

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u+th)-\varphi(u)}{t} = \langle T(u), h\rangle_{X',X} \quad \forall\, u \in \Omega, h \in X.$$

Ici $\langle .\,,\, .\rangle_{X',X}$ réfère au crochet de dualité entre X et son dual topologique X'. Pour un opérateur potentiel donné, on suppose toujours que $\varphi(0) = 0$. Les opérateurs potentiels apparaissent en physique dans de nombreux phénomènes d'équilibre qui proviennent de la mécanique quantique, telle que le potentiel d'un opérateur Hamiltonien dans l'équation de Schrödinger. En effet, en mécanique quantique, dans la représentation de Schrödinger, l'évolution dans le temps d'un système quantique est caractérisée (au niveau infiniment petit) par l'opérateur Hamiltonien, tel qu'exprimé par la célèbre équation de Schrödinger $i\overline{h}\dfrac{d\psi}{dt} = \hat{H}(\psi)$, où ψ est la fonction d'onde du système et $\hat{H}$ est l'Hamiltonien, et h, $\overline{h} = \dfrac{h}{2\pi}$ sont respectivement les constantes de Dirac et de Planck. Dans un état stationnaire, $\psi(t) = \exp(\dfrac{-tE}{h})\psi(0)$, où E est l'énergie de l'état stationnaire. On dit que l'opérateur $T: X \longrightarrow X$ admet un point fixe dans X s'il existe $u_0 \in X$ tel que $T(u_0) = u_0$. Dans [42], les auteurs ont reformulé le problème de la recherche de points fixes d'un opérateur potentiel T, en un problème de recherche de points critiques de la fonctionnelle J avec $J' = I - T$. On rappelle qu'un point critique de J dans X est un élément $u_0 \in X$, tel que $J'(u_0) = 0$. Dans ce travail, nous avons donné un nouveau théorème de point fixe pour les opérateurs potentiels compacts sur les espaces de Hilbert. Nous avons imposé des conditions sur l'opérateur T, de sorte que le théorème du col assure l'existence des points critiques pour la fonctionnelle J, et donc l'existence des

points fixes pour l'opérateur T. Le résultat principal est appliqué pour prouver l'existence de solutions pour un problème aux limites de type Dirichlet.

Théorème 2.8. *[1], [12] Soient X et Y deux espaces de Banach, Ω un sous ensemble ouvert de X, et $\varphi : \Omega \longrightarrow Y$ une application de classe C^1. Pour $x, y \in \Omega$, si $x + ty \in \Omega$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors*

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \int_0^1 < D\varphi(x + ty), y > dt.$$

Ce résultat exprime le lien entre l'opérateur potentiel T et la fonctionnelle Gâteaux différentiable φ puisque

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle T(sx), x\rangle ds.$$

Soit $(H, (., .))$ un espace de Hilbert et soit $(., .)$, le produit scalaire sur H et $\|.\| = \sqrt{(., .)}$ la norme. En suivant [42], les auteurs dans [2] ont utilisé un théorème de minimisation pour prouver le résultat suivant :

Théorème 2.9. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T : H \longrightarrow H$ un opérateur potentiel compact tel qu' il existe un opérateur linéaire, borné B défini sur H et $v^* \in H$ tels que*

$$\Big(T(su),\, u\Big) \leq \Big(B(su),\, u\Big) + \langle v^*,\, u\rangle,\ \forall\, s \in [0, 1],\ \forall\, u \in H \text{ avec } \|B\| < 1. \tag{2.3.1}$$

Alors, l'opérateur T admet un point fixe dans H.

Démonstration. On considère la fonctionnelle ψ définie par

$$\psi :\ H \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{avec } \psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 (T(su), u)\, ds.$$

Étape 1 : La fonctionnelle ψ est bornée inférieurement. En effet, pour tout $c > \dfrac{\|v^*\|}{2(1 - \|B\|)}$ on a

$$\begin{aligned}
\psi(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 \Big[\Big(B(su),\, u\Big) + \langle v^*, u\rangle\Big]\, ds \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 s\|u\|^2\|B\| ds - \int_0^1 \langle v^*, u\rangle\, ds \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2\|B\| - \|v^*\|\|u\| \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 - \|B\|\Big)\|u\|^2 - \|v^*\|\|u\| \geq -c.
\end{aligned}$$

Étape 2 : ψ satisfait la condition de Palais-Smale.

Soit $(u_n)_n$ une suite dans H telle que $\lim_{n\to+\infty} \psi'(u_n) = 0$ et $(\psi(u_n))$ est bornée, i.e., il existe une constante η telle que $|\psi(u_n)| \leq \eta$, pour tout entier positive n. De l'hypothèse (2.3.1), on a

$$\begin{aligned}
\eta \geq \psi(u_n) &\geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_0^1 \Big[\Big(B(su_n),\, u_n\Big) + \langle v^*, u_n\rangle\Big]\, ds \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_0^1 s\|u_n\|^2\|B\| ds - \int_0^1 \langle v^*, u_n\rangle\, ds \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2}\|u_n\|^2\|B\| - \|v^*\|\|u_n\| \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 - \|B\|\Big)\|u_n\|^2 - \|v^*\|\|u_n\|,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $(u_n)_n$ est bornée dans H. Puisque la suite (u_n) est bornée et l'opérateur T est compact, donc il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k \subset (u_n)_n$ telle que $T(u_{n_k}) \longrightarrow w$. On affirme que $u_{n_k} \longrightarrow w$ dans H. On a $\lim_{n\to+\infty} \psi'(u_n) = 0$, avec $\psi'(u_n) = u_n - T(u_n)$. D'où,

$$\|u_{n_k} - w\| \leq \|u_{n_k} - T(u_{n_k})\| + \|T(u_{n_k}) - w\| \longrightarrow 0, \text{ quand } k \to +\infty.$$

Donc, la condition de Palais-Smale est satisfaite. Le Corollaire 1.6 assure l'existence du point critique de la fonctionnelle ψ qui est un point fixe de l'opérateur T. □

Nous allons donner un théorème qui affaiblie les conditions du Théorème 2.9. Notre démonstration est basée sur le théorème du col où les conditions géométriques nous ont permis de donner une caractérisation de la solution et en particulier sa localisation.

2.3.1 Résultat principal

Théorème 2.10. *soit H un espace de Hilbert et $T : H \longrightarrow H$ un opérateur potentiel compact tel qu'il existe un opérateur linéaire, borné B défini sur H et $v^* \in H'$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $\Big(T(su),\, u\Big) \leq \Big(B(su),\, u\Big) + \langle v^*,\, u\rangle,\ \forall\, s \in [0,1],\ \forall\, u \in H,$ *avec* $\|u\| = \rho_0,$ *pour* $\rho_0 > \frac{2\|v^*\|}{1-\|B\|},\ \|B\| < 1,$
2. $\exists\, e \in H$ *avec* $\|e\| = 1$ *et* $\Big(B(e), e\Big) > 1$ *tels que* $\Big(T(se), e\Big) \geq \Big(B(se), e\Big), \quad \forall s \in [0,1]\,.$

Alors, l'opérateur T admet un point fixe dans H.

Démonstration. Comme T est un opérateur potentiel, il existe une fonctionnelle $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux différentiable telle que

$$\varphi' = T \ \text{ et } \ \varphi(u) = \int_0^1 \Big(T(su), u\Big)\, ds.$$

On considère la fonctionnelle $J : \ H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 \Big(T(su), u\Big) ds,$$

et soit ψ la fonctionnelle définie par $\psi(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|^2, \ \ u \in H$. la fonctionnelle J définie par $J(u) = \psi(u) - \varphi(u), u \in H$, est la somme de deux fonctionnelles de classe $C^1(H, \mathbb{R}))$, et $J'(u) = \psi'(u) - \varphi'(u)$ pour tout $u \in H$. Soit $u \in H$, on a $\psi'(u).v = \langle u, \ v\rangle, \ \forall v \in H$ et donc, $J'(u) = u - T(u), \ \ \forall u \in H$. Par conséquent, les points critiques de J sont les points fixes de T.

Nous allons prouver que sous les hypothèses imposées dans le Théorème 2.10, les conditions du théorème du col sont satisfaites.

Théorème 2.11. [*Théorème du col de la montagne (Mountain pass theorem)*] *([23],[26]) Soit X un espace de Banach et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que*

(i) $\varphi(0) = 0$;

(ii) *il existe* $\rho > 0$ *et* $\sigma > 0$ *tels que* $\varphi(u) \geq \sigma$ *pour tout* $u \in X$ *avec* $\|u\| = \rho$;

(iii) *il existe* u_1 *dans* X *avec* $\|u_1\| > \rho$ *tel que* $\varphi(u_1) < \sigma$.

Alors φ possède une valeur critique $c \geq \sigma$, cractérisée par

$$c = \inf_{\gamma \in \Lambda} \max_{u \in \gamma([0,1])} \varphi(u),$$

où

$$\Lambda = \big\{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = u_1\big\}.$$

Étape 1 : J satisfait la condition de Palais-Smale.

Soit (u_n) une suite dans H telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} J'(u_n) = 0$ et $(J(u_n))$ est bornée, i.e., il existe une

constante K telle que $|J(u_n)| \leq K$, pour tout entier positive n. De l'hypothèse (1), on a

$$\begin{aligned} K \geq J(u_n) &\geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_0^1 \Big[\Big(B(su_n),\, u_n\Big) + \langle v^*, u_n\rangle\Big]\, ds \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_0^1 s\|u_n\|^2\|B\| ds - \int_0^1 \langle v^*, u_n\rangle\, ds \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2}\|u_n\|^2\|B\| - \|v^*\|\|u_n\| \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \|B\|\Big)\|u_n\|^2 - \|v^*\|\|u_n\|, \end{aligned}$$

ce qui signifie que (u_n) est bornée dans H. Puisque la suite (u_n) est bornée et l'opérateur T est compact, donc il existe une sous-suite $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ telle que $T(u_{n_k}) \longrightarrow w$. On affirme que $u_{n_k} \longrightarrow w$ dans H. En effet, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} J'(u_n) = 0$, avec $J'(u_n) = u_n - T(u_n)$. D'où,

$$\|u_{n_k} - w\| \leq \|u_{n_k} - T(u_{n_k})\| + \|T(u_{n_k}) - w\| \longrightarrow 0, \text{ quand } k \to +\infty.$$

Donc, la condition de Palais-Smale est satisfaite.

Étape 2 : J satisfait l'hypothèse (ii) du Théorème 1.22.

Soit ρ_0 un nombre positif tel que $\rho_0 > \frac{2\|v^*\|}{1-\|B\|}$, et soit $\alpha_0 = \frac{1}{2}\rho_0\Big((1 - \|B\|)\rho_0 - 2\|v^*\|\Big)$. Si $\|u\| = \rho_0$, on a d'après l'hypothèse (1)

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 \Big[\Big(B(su),\, u\Big) + \langle v^*, u\rangle\Big]\, ds \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 s\|u\|^2\|B\|\, ds - \int_0^1 \langle v^*, u\rangle\, ds \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2\|B\| - \|v^*\|\|u\| \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \|B\|\Big)\|u\|^2 - \|v^*\|\|u\| \\ &= \frac{1}{2}\|u\|\Big((1 - \|B\|)\|u\| - 2\|v^*\|\Big) \\ &= \frac{1}{2}\rho_0\Big((1 - \|B\|)\rho_0 - 2\|v^*\|\Big) \\ &= \alpha_0. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\rho = \rho_0$, et $\sigma = \alpha_0$.

Étape 3 : J satisfait l'hypothèse (iii) du Théorème 1.22.

D'après l'hypothèse (2), il existe $e \in H$ tel que ,

$$\|e\| = 1 \text{ et } 1 - \Big(B(e), e\Big) < 0.$$

Soit $\vartheta = \xi e,$ avec $\xi > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} J(\xi e) &= \frac{1}{2}\|\xi e\|^2 - \int_0^1 \Big(T(s\xi e), \xi e\Big) ds \\ &\leq \frac{1}{2}\|\xi e\|^2 - \int_0^1 \Big(B(s\xi e), \xi e\Big) ds \\ &= \frac{1}{2}\xi^2\Big(\|e\|^2 - \Big(B(e), e\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\xi^2\Big(1 - \Big(B(e), e\Big)\Big) \longrightarrow -\infty \text{ quand } \xi \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

La fonctionnelle J satisfait les hypothèses du théorème du col donc J admet un point critique qui est un point fixe de T. □

2.3.2 Application

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1,$ $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait les conditions de croissance suivantes :

il existe $a, b > 0$ et $0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$ $(0 \leq \sigma < \infty$ si $N = 1, 2)$ tels que

$$|f(x,u)| \leq a|u|^\sigma + b, \ \forall x \in \Omega, \ \forall u \in \mathbb{R}. \tag{2.3.3}$$

On peut voir qu'une solution faible du Problème (2.3.2) est une solution du problème

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.3.4}$$

donc, une solution faible du Problème (2.3.2) satisfait

$$(u, v) - \int_\Omega f(x,u) v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Soit $T : \ H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ l'opérateur défini par

$$(Tu, v) = \int_\Omega f(x, u(x)) v(x) dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On peut vérifier que l'opérateur T est potentiel. En effet, on considère la fonctionnelle J telle que :

$$J'(u).v = (u, v) - \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

d'où

$$J'(u).v = (u - Tu, v) = ((I - T)u, v), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

on peut en déduire que

$$T(u) = (I - J')(u), \ \ u \in H_0^1(\Omega).$$

Alors, il est clair que T est un opérateur potentiel.

Pour démontrer que l'opérateur T est compact, on aura besoin du résultat suivant sur la continuité des opérateurs de Nemytskii dans les espaces de Lebesgue.

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et N_f l'opérateur de Nemytskii associé à f.

Théorème 2.12. *[8]*

On suppose qu'il existe une constante $c > 0$, et une fonction $b \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, et $\sigma > 0$ telles que : $|f(x, s)| \leq c|s|^\sigma + b(x), \ \ \forall x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}$. Alors, l'opérateur $N_f : L^{q\sigma}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ est continu et borné.

Démonstration. Soit $u \in L^{q\sigma}(\Omega)$ et soit N_f l'opérateur de Nemytskii associé à f. Par la condition de croissance sur f et l'inégalité de Minkowski on a :

$$\begin{aligned}
\|N_f u\|_{L^q} &= \Big(\int_\Omega |f(x, u(x))|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big(\int_\Omega \Big|c|u(x)|^\sigma dx + b(x)\Big|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big(\int_\Omega \Big|c|u(x)|^\sigma dx\Big|^q\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int_\Omega \Big|b(x)\Big|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big(\int_\Omega c^q \Big|u(x)\Big|^{\sigma q} dx\Big)^{\frac{1}{q}} + \|b\|_{L^q} \\
&\leq c\left(\Big(\int_\Omega \Big||u(x)|^{\sigma q} dx\Big|\Big)^{\frac{1}{\sigma q}}\right)^\sigma + \|b\|_{L^q} \\
&\leq c\|u\|_{L^{\sigma q}}^\sigma + \|b\|_{L^q} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc, N_f est bien défini. De plus, si K est un sous-ensemble borné de $L^{\sigma q}(\Omega)$, et si $u \in K$,

alors il existe $M > 0$ telle que $\|u\|_{L^{\sigma q}} \leq M$. Par conséquent,

$$\|N_f u\|_{L^q} \leq cM^\sigma + \|b\|_{L^q} \leq M'.$$

Donc, N_f est un opérateur borné.

Maintenant, on démontre que N_f est continu. Soit (u_n) une suite qui converge vers u_0 dans $L^{\sigma q}(\Omega)$, on veut montrer que $N_f u_n \longrightarrow N_f u_0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, dans $L^q(\Omega)$. $u_n \longrightarrow u_0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ dans $L^{\sigma q}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite (u_{n_k}) et $h \in L^{\sigma q}(\Omega)$, telles que $u_{n_k}(x) \longrightarrow u_0(x)$, $p.p.\, x \in \Omega$ et $\left|u_{n_k}(x)\right| \leq h(x)$. Par la condition de croissance sur f, on a

$$\left|f(x, u_{n_k}(x))\right| \leq c|u_{n_k}(x)|^\sigma + b(x),$$

et donc

$$\left|f(x, u_{n_k}(x))\right| \leq c|h(x)|^\sigma + b(x) \in L^q(\Omega),$$

$h^\sigma \in L^q(\Omega)$, car $h \in L^{\sigma q}(\Omega)$. D'autre part, f est continue par rapport à la deuxième variable, donc $f(x, u_{n_k}(x)) \longrightarrow f(x, u_0(x))$ quand $k \longrightarrow +\infty$. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\|N_f u_{n_k} - N_f u_0\|_{L^q} \longrightarrow 0, \text{ quand } k \longrightarrow +\infty.$$

Du lemme 1.2, en déduit la continuité de N_f. □

Lemme 2.2. [*Remarque 2.1, [9]*]
L'opérateur $T : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ *est compact.*

Démonstration. Dans le cas ou $N \geq 3$, on a $0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, et l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{\sigma+1}(\Omega)$ est compacte. D'autre part, en vue de l'hypothèse (2.3.3), l'opérateur de Nemytskii associé à f est continu de $L^{\sigma+1}(\Omega)$ dans $L^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}(\Omega)$. Maintenant, soit (u_n) une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$; on veut démontrer que $(T(u_n))$ admet une sous-suite qui converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Comme $H_0^1(\Omega)$ est réflexif, il existe une sous-suite (u_{n_k}) et u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ avec $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ quand $k \longrightarrow +\infty$; par l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{\sigma+1}(\Omega)$, on a $u_{n_k} \longrightarrow u_0$ quand $k \longrightarrow +\infty$ dans $L^{\sigma+1}(\Omega)$. De plus, par la continuité de l'opérateur N_f, on a

$$\|N_f(u_{n_k}) - N_f(u_0)\|_{L^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}} \longrightarrow 0, \text{ quand } k \longrightarrow +\infty.$$

$$\begin{aligned}
\|Tu_{n_k} - Tu_0\| &= \sup_{\|v\|\leq 1} \left|\langle Tu_{n_k} - Tu_0, v\rangle\right| \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \int_\Omega \left|f\left(x, u_{n_k(x)}\right) - f\left(x, u_0(x)\right)\right| \left|v(x)\right| dx \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \left(\int_\Omega \left|f\left(x, u_{n_k(x)}\right) - f\left(x, u_0(x)\right)\right|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} dx\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \left(\int_\Omega \left|v(x)\right|^{\sigma+1} dx\right)^{\frac{1}{\sigma+1}} \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \left\|N_f(u_{n_k}) - N_f(u_0)\right\|_{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \left\|v\right\|_{L^{\sigma+1}} \\
&\leq \eta \sup_{\|v\|\leq 1} \left\|N_f(u_{n_k}) - N_f(u_0)\right\|_{L^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}} \left\|v\right\| \\
&\leq \eta \left\|N_f(u_{n_k}) - N_f(u_0)\right\|_{L^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}} \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

De la même manière, dans le cas $N = 2$, on utilise l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^s(\Omega)$, pour $s \in [2, +\infty[$. Dans le cas $N = 1$, on utilise l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ et la continuité de l'opérateur de Nemytskii sur l'espace des fonctions continues. □

Soit λ_1 la première valeur propre du problème linéaire de Dirichlet définie dans la section précédente. On rappelle que $\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|,\ \forall u \in L^\infty(\Omega)$. Le théorème suivant assure l'existence de points fixes pour l'opérateur T, et qui ne sont rien d'autres que les solutions du problème aux limites donné.

Théorème 2.13. *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *il existe deux fonctions $a, b \in L^\infty(\Omega)$ telles que*

$$f(x, u(x)) \leq a(x)u(x) + b(x),\ \forall x \in \Omega, \forall u \in L^2(\Omega) \text{ avec } \|u\|_{L^2} \leq r_0,$$

$$r_0 > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1|\Omega|}} \quad et \quad 1 - \tfrac{\|a\|_\infty}{\lambda_1} > 2\|b\|_\infty|\Omega|\tfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}},$$

2. *il existe $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|w_0\| = 1$, telle que $\dfrac{1}{\|w_0\|_{L^2}^2} < a(x) < \lambda_1, \forall x \in \Omega$,*
   $f(x, sw_0(x)) \geq a(x)sw_0(x),\ \forall x \in \Omega,\ \forall s \in [0, 1]$.

Alors le problème (2.3.2) admet une solution faible.

Démonstration. Nous allons appliquer le Théorème 2.10.

D'abord, on montre que l'hypothèse (1) du Théorème 2.10 est satisfaite.

Soit B l'opérateur linéaire defini sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$(Bu, v) = \int_\Omega a(x)u(x)v(x)dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

et soit $v^* \in (H_0^1(\Omega))'$ tel que

$$\langle v^*, v\rangle = \int_\Omega b(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Poincaré, on peut montrer que l'opérateur B est borné. En effet,

$$\begin{aligned}
\|Bu\| &= \sup_{\|v\|\le 1} |\langle Bu, v\rangle| \\
&= \sup_{\|v\|\le 1} \left| \int_\Omega a(x)u(x)v(x)\,dx \right| \\
&\le \|a\|_\infty \sup_{\|v\|\le 1} \int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \\
&\le \|a\|_\infty \sup_{\|v\|\le 1} \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&= \|a\|_\infty \|u\|_{L^2} \sup_{\|v\|\le 1} \|v\|_{L^2} \\
&\le \|a\|_\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\| \sup_{\|v\|\le 1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|v\| \\
&\le \frac{1}{\lambda_1}\|a\|_\infty \|u\|.
\end{aligned}$$

Par hypothèse on a, $1 - \frac{1}{\lambda_1}\|a\|_\infty > 0$, et comme B est linéaire et $\|Bu\| \le \frac{1}{\lambda_1}\|a\|_\infty\|u\|$, il en résulte que $\|B\| < 1$.

Soit $\rho_0 = r_0\sqrt{\lambda}_1$, et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que $\|u\| = \rho_0$. Comme $\|u\|_{L^2} \le r_0$ alors, $\|su\|_{L^2} \le r_0$ pour tout $s \in [0,1]$. D'après l'hypothèse (1) du Théorème 2.13, on a

$$\begin{aligned}
\Big(T(su), u\Big) &= \int_\Omega f(x,(su)(x)).u(x)dx \\
&\le \int_\Omega a(x)(su)(x).u(x) + \int_\Omega b(x).u(x)dx \\
&= (B(su), u) + \langle v^*, u\rangle.
\end{aligned}$$

Maintenant, on montre que $\rho_0 > \dfrac{2\|v^*\|}{1-\|B\|}$.

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré, on peut voir que

$$\begin{aligned}
\|v^*\| &= \sup_{\|v\|\le 1} |\langle v^*, v\rangle| \\
&= \sup_{\|v\|\le 1} \left| \int_\Omega b(x)v(x)dx \right| \\
&\le \|b\|_\infty \sup_{\|v\|\le 1} \int_\Omega |v(x)|dx \\
&\le \|b\|_\infty \sup_{\|v\|\le 1} \sqrt{|\Omega|}\|v\|_{L^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|v^*\| &\leq \|b\|_\infty\sqrt{|\Omega|}\sup_{\|v\|\leq 1}\|v\|_{L^2}\\ &\leq \|b\|_\infty\sqrt{|\Omega|}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\sup_{\|v\|\leq 1}\|v\|\\ &\leq \|b\|_\infty\sqrt{|\Omega|}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}.\end{aligned}$$

On a $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} < r_0\sqrt{|\Omega|}$, par suite, $\|v^*\| < \|b\|_\infty|\Omega|r_0$ et donc, $r_0 > \frac{\|v^*\|}{\|b\|_\infty|\Omega|}$,

comme, $\rho_0 = r_0\sqrt{\lambda}_1$, alors $\rho_0 > \frac{\|v^*\|\sqrt{\lambda}_1}{\|b\|_\infty|\Omega|}$.

Maintenant, puisque $\|B\| \leq \frac{\|a\|_\infty}{\lambda_1}$, alors $1 - \frac{\|a\|_\infty}{\lambda_1} \leq 1 - \|B\|$,

comme $2\|b\|_\infty|\Omega|\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} < 1 - \frac{\|a\|_\infty}{\lambda_1}$, on a

$$2\|b\|_\infty|\Omega|\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} < 1 - \|B\|,$$

donc

$$\frac{\sqrt{\lambda}_1}{2\|b\|_\infty|\Omega|} > \frac{1}{1-\|B\|},$$

i.e.,

$$\frac{2\|v^*\|\sqrt{\lambda}_1}{2\|b\|_\infty|\Omega|} > \frac{2\|v^*\|}{1-\|B\|},$$

d'où

$$\rho_0 > \frac{2\|v^*\|}{1-\|B\|}.$$

Dans l'étape suivante, on montre que l'hypothèse (2) du Théorème 2.10 est satisfaite.

On commence par montrer qu'il existe $e \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|e\| = 1$ tel que $\Big(Be, e\Big) > 1$.

D'après l'hypothèse (2) du Théorème 2.13, il existe $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|w_0\| = 1$, et $a(x) > \frac{1}{\|w_0\|^2_{L^2}}$, $\forall x \in \Omega$.

On prend $e = w_0$, on a alors

$$\begin{aligned}\Big(Be, e\Big) &= \int_\Omega a(x)(e(x))^2dx\\ &> \frac{1}{\|e\|^2_{L^2}}\int_\Omega |e(x)|^2dx\\ &= 1.\end{aligned}$$

Maintenant, on montre que $\Big(T(se), e\Big) \geq \Big(B(se), e\Big)$ pour tout $s \in [0, 1]$.

D'après l'hypothèse (2) du Théorème 2.13, pour $e = w_0$,

on a $f(x, se(x)) \geq a(x)(se)(x)$, $\forall x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\Big(T(se), e\Big) &= \int_\Omega f(x, se(x))e(x)dx, \\ &\geq \int_\Omega a(x)(se)(x).e(x)dx, \\ &= \Big(B(se), e\Big).\end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.10, l'opérateur potentiel T admet un point fixe u_0 dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui signifie que $J'(u_0) = 0$. Le Problème (2.3.2) admet une solution faible. □

2.4 Existence de solutions pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ via certains théorèmes de points fixes [35]

Dans cette section, on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

où $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$, est un domaine borné dont la frontière est régulière. Selon le comportement du terme non linéaire f, nous allons donner des résultats d'existence de solutions du Problème (2.4.1) sur un espace de Banach approprié. Nos outils sont les deux théorèmes de points fixes de Krasnosel'skii et de Schauder. L'existence et l'unicité des solutions de ce problème ont été étudiées dans plusieurs articles, où différents arguments étaient utilisés (voir [31] pour les références). Dans [31, 40], le théorème du point fixe de Krasnosel'skii (compression-expansion fixed point theorem) a été utilisé comme un outil de base pour montrer l'existence et la localisation de solutions positives du problème (2.4.1). Nous mentionnons que le rôle de l'inégalité d'Harnack, pour l'application du théorème de Krasnosel'skii dans les cônes, a été montré en premier dans [32]. Dans [40], les auteurs ont reformulé le Problème (2.4.1) comme un problème de point fixe ou l'on cherche u dans l'espace des fonctions continues et qui vérifie $Tu = u$, où T est un opérateur de la forme $T = (-\Delta)^{-1}F$ avec $(-\Delta)^{-1}$ l'opérateur inverse du Laplacien et F l'opérateur de Nemytskii. Nous nous sommes inspiré de [36] et [40] pour démontrer des résultats d'existence pour le problème donné. Quand le termes non linéaire f vérifie certaines conditions, nous allons utiliser le théorème de Krasnosel'skii pour prouver l'existence de solutions positives, et le théorème de Schauder pour prouver l'existence d'au moins une solution non triviale dans l'espace des fonctions continues. On rappelle quelques notions qui seront utilisées par la suite.

Proposition 2.5. *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à supports compacts dans Ω. Soit T une distribution sur Ω. Alors la forme*

linéaire définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

est une distribution.

Définition 2.4. *On suppose que* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue. Une solution positive du Problème (2.4.1) est une fonction* $u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ *qui vérifie (2.4.1) (avec* Δu *dans le sens des distributions), et* $u(x) > 0$ *pour tout* $x \in \Omega$.

Définition 2.5. *Une fonction super-harmonique dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *est une fonction* $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ *avec* $\Delta u \leq 0$ *dans le sens des distributions, i.e.,*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \geq 0 \quad \textit{pour tout } v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \quad \textit{avec } v(x) \geq 0 \quad \textit{sur } \Omega.$$

Il est facile de voir que si $v(x) \geq 0$ sur Ω et $\Delta u \leq 0$ dans le sens des distributions, par la formule de Green on a

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \leq 0.$$

Lemme 2.3. *[6] Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ *et à frontière régulière, et soit* $g \in L^\infty(\Omega)$. *Le problème*

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega g \, \varphi \, dx, \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \ p > 1, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

admet une solution unique $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$. *De plus, l'opérateur*

$$(-\Delta)^{-1} : L^\infty(\Omega) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$$

$$g \longmapsto u$$

est continu, compact et monotone, où u *est l'unique solution du Problème (2.4.2).*

L'opérateur de Nemytskii est un ingrédient de base lorsqu'on veut utiliser des méthodes d'analyse fonctionnelle non linéaire. En effet, lorsqu'on veut transformer le problème proposé en un problème de recherche de points fixes d'un certain opérateur défini entre des espaces appropriés, l'opérateur de Nemytskii favorise une sorte de composition. Ainsi, les propriétés de cet opérateur, telles que la continuité et la bornitude sont nécessaires.
Le lemme suivant est une extension du lemme de Heine (les fonctions continues sur les compacts sont uniformément continues).

Lemme 2.4. *[11] Soit X et Y deux espaces métriques, K un compact de X et $\phi \in C(X,Y)$. Alors,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in X^2, [x \in K, d(x,y) \leq \delta] \Longrightarrow [d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \varepsilon].$$

La proposition suivante concerne la continuité et la bornitude de l'opérateur de Nemytskii dans l'espace des fonctions continues.

Proposition 2.6. *[28] Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, N \geq 1$, et f une fonction continue de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'opérateur*

$$\begin{aligned} N_f : C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C(\overline{\Omega}) \\ u &\mapsto N_f u, \quad avec \quad N_f u(x) = f(x, u(x)) \end{aligned}$$

est continu et borné de $C(\overline{\Omega})$ vers $C(\overline{\Omega})$.

Démonstration. On donne la démonstration en trois étapes.

Étape 1 : N_f est bien défini ; en effet,

soit la suite $(x_n) \subset \overline{\Omega}$, on suppose que $x_n \longrightarrow x$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

Comme u est continue sur $\overline{\Omega}$, on a $u(x_n) \longrightarrow u(x)$, quand $n \longrightarrow +\infty$. Alors par la continuité de f par rapport à la deuxième variable, on en déduit que

$$N_f u(x_n) = f(x_n, u(x_n)) \longrightarrow f(x, u(x)) = N_f u(x), \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Étape 2 : N_f est borné ; en effet, soit $K \subset C(\overline{\Omega})$ un ensemble borné, on montre que $N_f(K)$ est borné dans $C(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire

$$\exists M > 0, \text{ tel que, } \forall u \in K \ : \|N_f u\|_C \leq M. \qquad (*)$$

Comme K est un ensemble borné dans $C(\overline{\Omega})$, alors

$$\exists R > 0, \ \forall u \in K : \|u\|_C \leq R.$$

D'après la continuité de f, on a

$$|f(x, u(x))| \leq \sup_{(\tau, y) \in \overline{\Omega} \times [-R, R]} |f(\tau, y)| \leq M.$$

Donc

$$\|N_f u\|_C \leq M,$$

i.e., $(*)$ est vérifiée.

Étape 3 : N_f est continu (voir [11]). En effet, soit u et $h \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $X = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $K = \left\{(x, u(x)),\ x \in \overline{\Omega}\right\}, \varphi = f$. D'après le Lemme 2.4, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (z_1, z_2) \in X^2, [z_1 = (x, u(x)) \in K, \|z_1 - z_2\|_X \leq \delta] \Longrightarrow [|f(z_1) - f(z_2)| \leq \varepsilon].$$

En particulier, pour $z_2 = (x, u(x) + h(x))$, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |h(x)| \leq \delta \Longrightarrow |f(x, u(x) + h(x)) - f(x, u(x))| \leq \varepsilon,$$

en passant aux sup on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \|h\|_C \leq \delta \Longrightarrow \|N_f(u + h) - N_f(u)\|_C \leq \varepsilon.$ □

Théorème 2.14. [*Théorème de compression-expansion de Krasnosel'skii*] *[22]*
Soit E un espace de Banach et $\mathcal{C} \subset E$ un cône, on suppose que $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est une application complètement continue telle que pour certains nombres réels r et R avec $0 < r < R$, l'une des conditions suivantes est satisfaite :
(i) $\|Tu\| \leq \|u\|$ *pour* $\|u\| = r$ *et* $\|Tu\| \geq \|u\|$ *pour* $\|u\| = R$,
(ii) $\|Tu\| \geq \|u\|$ *pour* $\|u\| = r$ *et* $\|Tu\| \leq \|u\|$ *pour* $\|u\| = R$.
Alors T admet un point fixe u avec $r \leq \|u\| \leq R$.

On rappelle que les théorèmes de points fixes de Krasnosel'skii ont été largement utilisés comme outil de base pour prouver l'existence de solutions positives d'une $E.D.O$, et donner une idée sur leurs localisations, mais presque jamais utilisés pour les $E.D.Ps$ sauf dans des cas particuliers où l' $E.D.P$ peut être réduite à une $E.D.O$.
Dans [32] en 2012, l'auteur a expliqué pourquoi la technique de Krasnosel'skii est applicable pour les $E.D.Os$, mais elle ne l'est pas pour les $E.D.Ps$, et qu'on a besoin d'autres arguments. Il a considéré le problème

$$\begin{cases} Lu = u'' = \lambda f(u) & \text{dans } (0,1), \\ u > 0, \\ u(1) = u(0) = 0, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

où $f:\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Ce problème est equivalent à la recherche des points fixes de l'opérateur $T = L^{-1}F$ dans $C\left([0,1],\mathbb{R}^+\right)$. F est l'opérateur de Nemytskii associé à f et $(L^{-1}h)(x) = \int_0^1 G(x,y)h(y)dy,\ \ x \in [0,1],\ h \in C\left([0,1],\mathbb{R}^+\right),$ et $G(x,y)$ la fonction de Green,

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y);\ \ 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ (1-x)y;\ \ 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont essentielles pour l'applicabilité de la technique de Krasnosel'skii,

$(i)\ \ G(x,y) \leq G(y,y),\ \ \forall x,y \in [0,1],$

(ii) pour chaque sous-interval $\Omega_0 = (a,b) \subset (0,1),\quad 0 < a < b < 1$, il existe une constante $M > 0$ telle que $G(x,y) > G(y,y),\ \ \forall x \in [a,b],\ y \in [0,1].$

Ce qui implique que pour chaque $h \in L^2\left([0,1],\mathbb{R}^+\right)$ et $\forall x \in [a,b],\ x' \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} (L^{-1}h)(x) &= \int_0^1 G(x,y)h(y)dy \\ &\geq M\int_0^1 G(y,y)h(y)dy \\ &\geq M\int_0^1 G(x',y)h(y)dy \\ &= M(L^{-1}h)(x'), \end{aligned}$$

$$\text{i.e.,}\ \ (L^{-1}h)(x) \geq M|L^{-1}h|_\infty\ \ \forall x \in [a,b]. \quad (***)$$

$|.|_\infty$ est la norme du maximum dans $C([0,1])$. En se basant sur l'estimation $(***)$, il définit le cône

$$K = \left\{u \in C\left([0,1],\mathbb{R}^+\right) : u(x) \geq M|u|_\infty,\ \ \forall x \in [0,1]\right\}.$$

Malheureusement, ces résultats ne sont pas connus pour $n > 1$, et $L = -\Delta$; c'est la raison pour laquelle les théorèmes de points fixes de Krasnosel'skii dans les cônes ne peuvent être appliqués aux $E.D.Ps$. Dans le cas $n > 1$, au lieu de l'inégalité $(***)$, l'ingrédient essentiel est une autre inégalité locale dite inégalité de Moser-Harnack pour les fonctions super-harmoniques positives. Dans [32], l'auteur a montré que cette inégalité est suffisante pour produire un certain cône de fonctions pour lequel la technique de Krasnosel'skii est aussi applicable aux équations elliptiques.

Lemme 2.5. *[Moser][32]*
Soit $n \geq 3$ *et* $1 \leq p < \dfrac{n}{n-2}$, *ou bien* $n = 2$ *et* $1 \leq p < \infty$. *Soit* $R > 0$. *Alors il existe une*

constante $M_0 = M_0(n,p,R) > 0$ *telle que pour toute fonction positive, super-harmonique* $u \in B_{4R}(x_0)$, *l'inégalité suivante est vérifiée*

$$u(x) \geq M_0 |u|_{L^p(B_{2R})(x_0)}, \quad x \in B_R(x_0). \tag{2.4.4}$$

Un résultat similaire en résulte pour tout domaine Ω_0 avec $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.15. *[32] Soit* $n \geq 3$ *et* $1 \leq p < \dfrac{n}{n-2}$, *ou bien* $n = 2$ *et* $1 \leq p < \infty$, *et* Ω_0 *avec* $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. *Alors il existe une constante* $M = M(n,p,\Omega,\Omega_0) > 0$, *telle que pour toute fonction positive, super-harmonique* u *sur* Ω, *l'inégalité suivante est satisfaite*

$$u(x) \geq M |u|_{L^p(\Omega_0)}, \quad x \in \Omega_0. \tag{2.4.5}$$

Dans [31], l'auteur a utilisé une inégalité plus générale dite d'Harnack (*global weak Harnack inequality*) sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$,

$$\begin{cases} \text{il existe un ensemble compact } K \subset \Omega \text{ et un nombre } \eta > 0 \\ \text{tels que } u(x) \geq \eta |u|_{L^p(\Omega)} \text{ pour tout } x \in K, \quad p \in [1, +\infty], \\ \text{ et toute fonction super-harmonique, positive} \\ u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4.6}$$

Cette inégalité est un ingrédient très important pour appliquer la technique de Krasnosel'skii dans les cônes. Elle permet de prouver que l'opérateur envoie le cône dans lui même.
L'inégalité d'Harnack sur les bornés Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, est donnée aussi sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{il existe un ensemble compact } K \subset \Omega \text{ et un nombre } \eta > 0 \\ \text{tels que } u(x) \geq \eta \|u\|_0 \text{ pour tout } x \in K \\ \text{ et toute fonction super-harmonique, positive} \\ u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

L'inégalité (2.4.7) a été utilisée dans [40] pour prouver l'existence de solutions positives pour le Problème (2.4.8),

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4.8}$$

où $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, et $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$, est un domaine borné dont la frontière est régulière, et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'espace considéré est l'espace de Banach $C_0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ et le cône est

$$\mathcal{C} = \{u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+) : \ u(x) \geq \eta \|u\|_0 \quad \forall x \in K\}.$$

Théorème 2.16. *[40]*

On suppose que (2.4.7) est satisfaite. Alors pour chaque λ vérifiant

$$\frac{1}{\underline{f}_\infty \eta \|(-\Delta)^{-1} 1_K\|_0} < \lambda < \frac{1}{f_0 \|(-\Delta)^{-1} 1\|_0},$$

il existe au moins une solution positive pour le Problème (2.4.8),

où,

$$f_0 = \limsup_{y \longrightarrow 0^+} \max_{x \in \overline{\Omega}} \frac{f(x,y)}{y} \quad \text{et} \quad \underline{f}_\infty = \liminf_{y \longrightarrow \infty} \min_{x \in K} \frac{f(x,y)}{y},$$

$$\underline{f}_0 = \liminf_{y \longrightarrow 0^+} \min_{x \in K} \frac{f(x,y)}{y} \quad \text{et} \quad f_\infty = \limsup_{y \longrightarrow \infty} \max_{x \in \overline{\Omega}} \frac{f(x,y)}{y}.$$

2.4.1 Existence de solutions positives

Pour prouver l'existence de solutions positives du Problème (2.4.1), nous allons donner des hypothèses sur le terme non linéaire f qui vont nous permettre d'appliquer le théorème de Krasnosel'skii dans un certain cône. Soit E l'espace de Banach défini par

$$C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) = \{u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) : \ u = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega\}$$

équipé de la norme $\|u\|_0 = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$. Soit K un sous-ensemble de $\overline{\Omega}$; pour $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $h_{|_K}$ est définie par : $h_{|_K}(x) = h(x)$ si $x \in K$ et $h_{|_K}(x) = 0$ si $x \in \overline{\Omega} \setminus K$. Nous allons supposer que la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} \text{il existe un ensemble compact } K \subset \Omega \text{ et un nombre } \eta > 0 \\ \text{tels que } u(x) \geq \eta \|u\|_0 \text{ pour tout } x \in K \\ \text{ et toute fonction super-harmonique, positive} \\ u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4.9}$$

Théorème 2.17. *On suppose que*

$$\text{1-}\quad \begin{cases} f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ est une fonction continue} \\ \exists\, \sigma > 0,\ \sigma \neq 1 \text{ tel que, } f(x,u) \leq a(x) + b(x)u^\sigma, \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \\ \text{où } a, b\ \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ sont des fonctions continues positives,} \end{cases} \tag{2.4.10}$$

$$\text{2-}\quad \text{il existe } R > 0 \text{ tel que } \min_{\substack{x \in K \\ u \in [R\eta, R]}} f(x,u) > R \|(-\Delta)^{-1} 1_{|K}\|_0^{-1}, \tag{2.4.11}$$

$$\text{3-}\quad \begin{cases} M_2 (\frac{1}{\sigma M_2})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\frac{1}{\sigma M_2})^{\frac{1}{\sigma-1}} + M_1 < 0 \ \text{ quand } \ \sigma > 1, \\ \text{où } M_1 = \|(-\Delta)^{-1} a\|_0 \text{ et } M_2 = \|(-\Delta)^{-1} b\|_0. \end{cases} \tag{2.4.12}$$

Alors le Problème (2.4.1) admet au moins une solution positive.

Démonstration. On considère le cône $\mathcal{C}$ et l'opérateur de Nemytskii F,

$$F : \ C_0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right) \longrightarrow \ C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$$

$$u \longmapsto Fu \quad \text{avec } \ Fu(x) = f(x, u(x)),$$

$$\mathcal{C} = \{u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}),\ u \geq 0 \ \text{ sur } \overline{\Omega} : \ \min_{x \in K} u(x) \geq \eta \|u\|_0\}.$$

On définit l'opérateur T par :

$$T : \mathcal{C} \longrightarrow C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$$

$$u \longmapsto Tu \quad \text{avec } \ Tu = (-\Delta)^{-1} Fu,$$

$$(-\Delta)^{-1} : \ L^\infty(\Omega) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$$

$$g \longmapsto u \quad \text{avec } \ (-\Delta)u = g.$$

Il est facile de vérifier que toute solution du Problème (2.4.1) est un point fixe de l'opérateur T, i.e., u est une solution du Problème (2.4.1) si et seulement si $u = (-\Delta)^{-1} Fu$.
En effet, si u est un point fixe de T alors $Tu = u$. Comme $Tu = (-\Delta)^{-1} Fu$, on en déduit par la définition de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ que $(-\Delta)Tu = f(., u)$ au sens des distributions. Donc u est solution du problème (2.4.1). Réciproquement, si $u = (-\Delta)^{-1} Fu$, alors $u = Tu$.
Pour montrer que l'opérateur T admet un point fixe, nous allons montrer que les hypothèses

du Théorème 2.14 sont satisfaites.

(1) Effectivement, $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Il est clair que l'opérateur T satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta(Tu) = f(.,u) & \text{dans } \Omega, \\ Tu = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme $f(x,u) \geq 0$, alors Tu est super-harmonique, alors par l'inégalité d'Harnack (2.4.9), on a si $v \in T(\mathcal{C})$, il existe $u \in \mathcal{C}$ telle que $v = Tu$. D'où,

$$\begin{aligned} \min_{x\in K} v(x) &= \min_{x\in K} Tu(x) \\ &\geq \eta\|Tu\|_0 \\ &\geq \eta\|v\|_0. \end{aligned}$$

(2) D'autre part, l'opérateur T est compact.

Comme f est continue, alors par la Proposition 2.6, l'opérateur F est continu et borné. D'autre part, par le lemme 2.3, l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ est compact et le théorème d'Ascoli-Arzéla garantit que l'injection de $C_0^1(\overline{\Omega})$ dans $C(\overline{\Omega})$ est compacte. Donc l'opérateur T est compact. En effet, soit (u_n) une suite bornée dans $C_0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$, donc (Fu_n) est bornée dans $C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ et dans $L^\infty(\Omega)$. Comme l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ est compact, donc $((-\Delta)^{-1}Fu_n)$ admet une sous suite qui converge dans $C_0^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$.

(3) Maintenant, on montre que l'une des conditions (i) ou (ii) du Théorème de Krasnosel'skii est satisfaite.

Soit r un nombre positif qui sera donné plus tard. On considère les deux ensembles

$$S_1 = \left\{u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \|u\|_0 < r\right\} \quad \text{et} \quad S_2 = \left\{u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \|u\|_0 < R\right\}.$$

Soit $u \in \mathcal{C} \cap \partial S_1$, en utilisant l'hypothèse (2.4.10) et la monotonie de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \|Tu\|_0 &= \|(-\Delta)^{-1}Fu\|_0 \\ &\leq \|(-\Delta)^{-1}(a(.) + b(.)u^\sigma)\|_0 \\ &\leq \|(-\Delta)^{-1}a\|_0 + \|(-\Delta)^{-1}b(.)u^\sigma\|_0 \\ &\leq \|(-\Delta)^{-1}a\|_0 + \|\|u\|_0^\sigma(-\Delta)^{-1}b\|_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|Tu\|_0 &\leq \|(-\Delta)^{-1}a\|_0 + r^\sigma \|(-\Delta)^{-1}b\|_0 \\ &\leq M_1 + r^\sigma M_2.\end{aligned}$$

On remarque que si $0 < \sigma < 1$, on a $r - M_1 - r^\sigma M_2 \longrightarrow +\infty$ quand $r \longrightarrow +\infty$. Donc, si r est choisi suffisamment grand ($r > R$), on a $M_1 + r^\sigma M_2 < r$. D'autre part, en utilisant (2.4.12), on en déduit que pour $\sigma > 1$, il existe $r > 0$ qui satisfait $M_1 + r^\sigma M_2 < r$. Alors, pour tout $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$, on a $\|Tu\|_0 \leq r = \|u\|_0$.

Maintenant, si $u \in \mathcal{C} \cap \partial S_2$, en utilisant (2.4.11) et la monotonie de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$,

$$\begin{aligned}\|Tu\|_0 &= \|(-\Delta)^{-1}Fu\|_0 \\ &\geq \|(-\Delta)^{-1}(Fu)_{|_K}\|_0 \\ &\geq \min_{\substack{x\in K \\ y\in[R\eta,\, R]}} f(x,y) \sup_{x\in K} |(-\Delta)^{-1}1_{|K})| \\ &\geq R\|(-\Delta)^{-1}1_{|K})\|_0^{-1}\|(-\Delta)^{-1}1_{|K})\|_0 \\ &= R \\ &= \|u\|_0.\end{aligned}$$

D'où, $\|Tu\|_0 \geq \|u\|_0$ pour $\|u\|_0 = R$. Alors, le résultat d'existence découle du théorème du point fixe de Krasnosel'skii, i.e., il existe $u \in \mathcal{C}$ tel que $R \leq \|u\|_0 \leq r$. □

2.4.2 Résultats généraux d'existence

Dans cette sous-section, nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schauder pour montrer l'existence de solutions pour le problème (2.4.1). Maintenant le terme non linéaire f est défini sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f satisfait :

$$|f(x,u)| \leq H(x,|u|), \text{ pour tous } x \in \overline{\Omega} \text{ et } u \in \mathbb{R},$$

$$H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ telle que}$$

(A_1) H est continue et croissante par rapport à sa deuxième variable,

(A_2) il existe $M_0 > 0$, tel que

$$H(x, M_0) \leq \frac{M_0}{\|(-\Delta)^{-1}1_{\overline{\Omega}}\|_0}, \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Théorème 2.18. *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (A_2), *le Problème (2.4.1) admet au moins une solution.*

Démonstration. Soit $\mathcal{D} = \overline{B}(0, M_0) = \left\{u \in C_0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right), \ \|u\|_0 \leq M_0\right\}$, et

$$T: \ \mathcal{D} \longrightarrow C_0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right), \quad Tu = (-\Delta)^{-1}Fu.$$

T est compact et on a pour tout $v \in T(\mathcal{D})$, il existe $u \in \mathcal{D}$ tel que $v = Tu$. Par la monotonie de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ et comme H est croissante par rapport à sa deuxième variable,

$$\begin{aligned}
\|v\|_0 &= \|Tu\|_0 \\
&= \|(-\Delta)^{-1}Fu\|_0 \\
&\leq \|(-\Delta)^{-1}H(., |u|)\|_0 \\
&\leq \|(-\Delta)^{-1}H(., M_0)\|_0 \\
&\leq \left\|(-\Delta)^{-1}\left(\frac{M_0}{\|(-\Delta)^{-1}1_{\overline{\Omega}}\|_0}\right)\right\|_0 \\
&\leq \frac{M_0}{\|(-\Delta)^{-1}1_{\overline{\Omega}}\|_0}\|(-\Delta)^{-1}1_{\overline{\Omega}}\|_0 \\
&= M_0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $v \in \mathcal{D}$, i.e., $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Par le théorème du point fixe de Schauder, on en déduit que l'opérateur T admet un point fixe dans $\mathcal{D}$. □

Maintenant, on suppose que

(H_1) il existe une fonction croissante par rapport à sa deuxième variable, $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et une fonction $\psi \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+\right)$, telles que

$$|f(x,u)| \leq \psi(x)\Phi(|u|), \quad \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \tag{2.4.13}$$

(H_2) $\exists\, R_0 > 0$, tel que $\Phi(R_0) \leq \dfrac{R_0}{\|(-\Delta)^{-1}\psi\|_0}$.

Théorème 2.19. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), *le Problème (2.4.1) admet au moins une solution.*

Démonstration. On considère l'opérateur compact

$$T: \ \mathcal{D} = \overline{B}(0, R_0) = \left\{u \in C_0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right), \ \|u\|_0 \leq R_0\right\} \longrightarrow C_0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right),$$

$$Tu = (-\Delta)^{-1} Fu,\ \forall u \in \mathcal{D}.$$

On a $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. En effet, $v \in T(\mathcal{D})$ implique qu'il existe $u \in C_0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ avec $\|u\| \leq R_0$ et $v = Tu$. En utilisant les hypothèses (H_1), (H_2) et la monotonie de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}
\|v\|_0 &= \|Tu\|_0 \\
&= \|(-\Delta)^{-1} Fu\|_0 \\
&\leq \left\|(-\Delta)^{-1} \psi(.)\Phi(|u|)\right\|_0 \\
&\leq \left\|(-\Delta)^{-1} \psi(.)\Phi(\|u\|_0)\right\|_0 \\
&\leq \left\|(-\Delta)^{-1} \psi(.)\Phi(R_0)\right\|_0 \\
&\leq \Phi(R_0)\|(-\Delta)^{-1}\psi\|_0 \\
&\leq R_0.
\end{aligned}$$

D'où, $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Donc, par le théorème du point fixe de Schauder, l'opérateur T admet un point fixe, qui est solution du Problème (2.4.1). □

Remarque 2.1. *Si dans les Théorèmes 2.18 et 2.19, on suppose qu'il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $f(x_0, 0) \neq 0$, alors les solutions obtenues sont non triviales.*

CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons donné deux théorèmes. Le premier est un théorème de minimisation dont la démonstration est basée sur la théorie des points fixes. Le deuxième théorème concerne les points fixes et dont la preuve est basée sur la théorie des points critiques.

Les deux nouveaux théorèmes démontrés nous ont permis de prouver l'existence de solutions pour certains problèmes aux limites elliptiques de type Dirichlet, d'une part.

D'autre part, le théorème de minimisation démontré, permet de prouver l'existence de points critiques sans faire appel à la condition forte de compacité de Palais-Smale.

Notons que ces résultats peuvent servir pour la modélisation mathématique, dans le sens où ils donnent naissance à de nouveaux algorithmes de programmation comme par exemple en traitement d'image.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Avez, *Calcul Différentiel,* Masson, Paris, 1983.

[2] A. Boucenna, S. Djebali, and T. Moussaoui, *Fixed point theorems for compact potential operators in Hilbert spaces,* Fixed Point Theory, **18**(2017), No. **2**, 493-502.

[3] A. Mao, Y. Li, *Infinitely many solutions of superlinear elliptic equations*, Abstr. Appl. Anal., 2013, 6 pp.

[4] B. Ricceri, *Fixed points of nonexpansive potential operators in Hilbert spaces*, Fixed Point Theory and Appl., 2012, 123.

[5] B. Yan, *Introduction to Variational Methods in Partial Differential Equations and Application,* A Summer Course at Michigan State University, 2008.

[6] C. Azizieh, P. Clèment, *A priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations,* Journal of Differential Equations, 179, 2002, 213-245.

[7] D.G. De Figueiredo, and S. Solimini, *A variational approach to superlinear elliptic problems*, Comm. Part. Diff. Equa., **9(7)**, 1984, 699-717.

[8] D.G. De Figueiredo, *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours,* Springer-Verlag, 1989.

[9] D.G. Costa, *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhauser, Boston, 2007.

[10] D. O'Regan, R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder Type and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 2001.

[11] D. Pennequin, *Optimisation : aspects géométriques et analytiques,* Université de Paris 1, 2008.

[12] E.W.C. Van Groesen, *Variational Methods for Nonlinear Operator Equation, In Nonlinear analysis,* Proceeding of the lectures of a Colloquium Nonlinear Analysis. Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1976), 100-191.

[13] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis, T1, Fixed Point Theory*, Springer 1986.

[14] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis, T3, Variational Methods and Optimisation,* Springer, 1985.

[15] G. Allaire, *Analyse Numérique et Optimisation,* École Polytechnique, 2012.

[16] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, 2011.

[17] H. Hôfer, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann., **261**(1982), 493-514.

[18] H. Ledret, *Équations aux Dérivées Partielles Elliptiques,* Université de Paris VI, 2010.

[19] J. Chabrowski, *Variational Methods for Potential Operator Equation*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.

[20] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems,* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[21] L. Yin ; Y. Liang, Q. Zhang, C. Zhao, *Existence of solutions for a variable exponent system without PS conditions*, Electron. J. Differ. Equ., Vol. 2015(2015), No. **63**, 23p.

[22] M.A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations,* Cambridge University Press, New York, 1964.

[23] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners,* Springer-Verlag, London, 2011.

[24] M. Chipot, *Elliptic Equations : An Introductory Course,* Birkhäuser advanced texts, Basel, 2009.

[25] N. S. Papageorgiou, S. T. K. Yiallourou, *Handbook of Applied Analysis,* Springer, 2009.

[26] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques,* World Scientific, 2006.

[27] P. Drábek, J. Milota, *Methods of Nonlinear Analysis Applications to Differential Equations,* Birkhäuser advanced texts, Basel, 2007.

[28] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations,* CBMS regional conference series in mathematics, Vol. 65, American Mathematical Society, providence, RI, 1986.

[29] R.P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2004.

[30] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications,* Springer, 2009.

[31] R. Precup, *Moser-Harnack inequality, Krasnosel'skii type fixed point theorems in cones and elliptic problems,* Topological Methods in Nonlinear Analysis, **40**(2012), 301-313.

[32] R. Precup, *Positive solutions of semilinear elliptic problems via Krasnosel'skii type theorems in cones and Harnack's inequality,* Mathematical Analysis and Applications, AIP Conf. Proc., 835, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2006, pp. 125-132.

[33] S. Ayadi, T. Moussaoui and D. O'Regan, *Existence of solution for an elliptic boundary value problem via global minimization theorem on Hilbert spaces,* Differential Equations and Applications, Volume 8, No. **3**(2016), 385-391.

[34] S. Ayadi, T. Moussaoui and D. O'Regan, *On a new fixed point theorem on Hilbert spaces via the Mountain Pass lemma and application to elliptic boundary value problems,* International Journal of Pure and applied Mathematics, Volume 106, No. **1**(2016), 213-221.

[35] S. Ayadi, T. Moussaoui, *Existence of solutions for elliptic BVPs on a bounded domain of $\mathbb{R}^N$ via some fixed point theorems,* Applied Mathematics E-Notes, **17**(2017), 91-96.

[36] S. Djebali , T. Moussaoui, *A class of second order BVPs on infinite intervals,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **4**(2006), 1-19.

[37] S. Liu, *Existence of solutions to a superlinear p-Laplacian equation*, Electron. J. Differ. Equ., Vol. 2001(2001), No. **66**, pp. 1-6.

[38] S. Djebali, *Le Degré Topologique. Théorie et Application.* Département de Mathématiques, E.N.S. Kouba, Alger, Algérie, 2007.

[39] T. Gallouët, R. Herbin, *Mesure, Intégration et Probabilités,* Univ Aix-Marseille, France, 2012.

[40] T. Moussaoui, R. Precup, *Positive solutions for elliptic boundary value problems with a Harnack-like property,* CUBO, **10**(2008), 109-117.

[41] V. Trenoguine, *Analyse Fonctionnelle,* Edition Mir, Moscou, 1985.

[42] Y. Cui, J. Sun, *Fixed point theorems for a class of nonlinear operators in Hilbert spaces and applications*, Positivity, **15** (2011), 455-464.

[43] Y. Jabri, *The Mountain Pass Theorem, Variants, Generalizations and some Applications,* Combridge University Press, 2003.