Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématique & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématique
Option : Recherche Opérationnelle

Par

BENDALI BRAHAM Yousra & ZAHRAOUI Hassiba

Thème

AUTOUR DE LA COLORATION DOMINÉE DANS LES GRAPHES

Composition du Jury :

Mr.	A. BENKACI	Maître Assistant	UYF Médéa	Président
Mr.	M. ZAMIME	Maître de Conférences	UYF Médéa	Examinateur
Mr.	N. IKHLEF ESCHOUF	Professeur	UYF Médéa	Promoteur

Date de soutenance : *21 Juin 2022*

Résumé

Les travaux réalisés dans ce mémoire portent sur l'étude de la coloration dominée dans les graphes. Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une coloration dominée de G,

est une coloration propre telle que chaque classe de couleur doit être dominée par au moins un sommet. Le nombre chromatique dominé, noté $\chi_{dom}(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une coloration dominée avec k couleurs.

Nous rappelons d'abord, les définitions et notations de la théorie des graphes nécéssaires á la compréhension de ce mémoire, ensuite nous présentons des résultats existants et des notions liées à la coloration minimale et la coloration dominée dans les graphes. Enfin, nous donnons des valeurs exactes du nombre chromatique dominé de quelques graphes.

Abstract

The work carried out in this thesis concerns the study of the dominated coloring graphs. Given a graph G = (V ; E), a dominated coloring of G, is a proper coloring such that each color class must be dominated by at least one vertex.The dominated chromatic number, denoted dom (G), is the smallest integer k such that G admits a dominated coloring with k colors.We first recall the essential denitions of graph theory and then we present existing results and notions related to minimal coloring and dominated coloring of graphs. Finally, we give exact values of the chromatic number of some graphs.

REMERCIEMENTS

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Les cinq années de ce parcours nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce chemin, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses de longues heures de travail.

Nous tenons à la fin de ce travail à remercier ***ALLAH*** *le tout puissant de nous avoir donné la foi et de nous avoir permis d'en arriver là.*

C'est ainsi qu'à travers ce mémoire, nous tenons à remercier du fond de notre cœur notre Encadreur Monsieur Noureddine IKHLEF ESCHOUF *Professeur à l'université* YAHIA FARES *de Médéa, pour ses conseils, tant au niveau scientifique que méthodologique. Il est évident que sans lui ce mémoire n'aurait pas abouti.*

Nous tenons à remercier Monsieur Azzedine BENKACI *Maître Assistant à l'université* YAHIA FARES *de Médéa qui nous a fait l'honneur de présider ce jury.*

Nous tenons à remercier également le membre de jury Monsieur Mohamed ZAMIME *Maître de conférences à l'université* YAHIA FARES *de Médéa de nous avoir fait le plaisir d'être l'examinateur de notre travail.*

Nos reconnaissances vont aussi à tous nos enseignants pour leurs apports inestimables en informations indispensables pour notre formation .

Enfin, il est important pour nous de remercier nos parents d'avoir fait de leur mieux pour que nous puissions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions. Nous

remercions nos frères et sœurs, sans oublier nos chers amis qui étaient toujours présents.

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes très chers parents Aucune dédicace, aucun mot ne pourrait exprimer à leur juste valeur la gratitude et l'amour que je vous porte. Puisse Dieu le tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.* ***A*** *mes sœurs , et ma*

famille qui m'a toujours poussé et motivé durant mes années d' études

A*mon fils Haithem qui m'a appris à aimer la vie.*

A *mon mari qui m'a chaleuresement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*

A *tous ceux qui m'ont aidé -de prés ou de loin- et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotions lors de la réalisation de ce travail*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du*

primaire, du moyen, du secondaire ou de

l'enseignement supérieur.

Hassiba

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents ma mère et mon père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études.*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes sœurs, mon frère, ma belle sœur et ma famille qui me donne de l'amour et de la vivacité.*

A *mon fiançé qui m'a chaleuresement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*

A *tous ceux qui m'ont aidé -de prés ou de loin- et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotions lors de la réalisation de ce travail*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

Y ou **sr** ***a***

Table des matières

Résumé **i**

Abstract **iii**

Remerciements **iii**

Introduction **1**

1 Notions générales sur les graphes **4**

1.1 Définitions et notations de base 4

1.1.1 Graphe 4

1.1.2 Voisinage 5

1.1.3 Degré d'un sommet 6

1.1.4 Sous graphe et graphe partiel 6

1.1.5 Invariant d'un graphe 7

1.1.6 Chaîne et cycle 8

1.1.7 Graphe connexe 9

1.1.8 Graphe particulier 10

1.2 Opération classique sur les graphes 14

1.3 Aperçu sur la complexité algorithmique 16

1.3.1 Problème de décision 16
1.4 Coloration propre et domination 18
1.4.1 Coloration 18
1.4.2 Domination dans les graphes 20

2 Etat de l'art sur la coloration dominée 21

2.1 Coloration dominée 21
2.2 Quelques résultats existants sur le nombre chromatique dominé . . . 22
2.2.1 Encadrement du nombre chromatique dominé 22
2.3 Valeurs exactes du nombre chromatique dominé de certains graphes . 26
2.3.1 Nombre chromatique dominé des chaînes et des cycles 26
2.3.2 Nombre chromatique dominée de certains graphes spécifiques . 27
2.3.3 Nombre chromatique dominée des cactus 29
2.4 Coloration dominée des graphes obtenus à partir de deux graphes . . 30
2.5 Relations de type Nordhaus-Gaddum pour le nombre chromatique dominé 33
2.6 Nombre chromatique dominé de certains graphes obtenus à partir des opérations 34
2.6.1 Suppression des sommets et des arêtes 35
2.6.2 Contraction des sommets et des arêtes 35
2.6.3 Subdivision 37
2.7 Application de la coloration dominée 38

3 Détermination du nombre chromatique dominé de certains graphes 39

3.1 Quelques définitions 39

3.2 Nombre chromatique dominée du graphe milieu,
total et central de certains graphes 40

Conclusion **47**

Bibliographie **48**

Table des figures

1.1 Un graphe simple G, un sous graphe G_A et un graphe partiel G_B. . . 7

1.2 Un cycle C_5 et une chaîne P_5. 8

1.3 Un graphe complet G_1 et un graphe discret G_2. 11

1.4 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 11

1.5 Le graphe de Petersen. 12

1.6 Exemple d'un graphe scindé. 12

1.7 Un graphe biparti G_1 et un graphe biparti complet $K_{3,2}$. 13

1.8 Une étoile $K_{1,5}$. 13

1.9 Une étoile double $S_{3,3}$. 14

1.10 Un arbre T. 14

1.11 Une chenille $c(3, 1, 0, 2)$. 15

1.12 Un graphe C_4 et sa couronne. 15

1.13 Graphe puissance G^2 de P_6. 16

1.14 Le produit cartésien $P_3 \square P_3$. 16

1.15 Le produit croisé $P_3 \times P_3$. 17

2.1 Un graphe planaire avec $\chi_{dom}(G) = 4\gamma$. 25

2.2 Un $3 - prisme$. 27

2.3 Un cactus triangulaire en chaîne T_n. 29

2.4 Un cactus para-carré Q_n et un ortho-carré O_n. 30

2.5 Un cactus ortho-hexagonal H_n et un para-hexagonal M_n. 31

2.6 Graphe Mycielski de C_n. 32

3.1 graphe milieu de P_n. 41

3.2 Graphe milieu de C_n. 42

3.3 Graphe milieu et graphe total de $K_{1,n}$. 43

3.4 Graphe total de P_n. 43

3.5 Graphe total de C_n. 44

3.6 Graphe central de P_n. 45

3.7 Graphe central de C_n. 46

3.8 Graphe central de $K_{1,n}$. 46

Introduction

Lorsque nous sommes confrontés à un problème donné, nous avons souvent recours à dessiner un schéma sur un papier, car le schématisme d'un problème concert est nécessaire pour le clarifier et simplifier la compréhension, et en conséquence obtenir des solutions efficaces. Ce schéma est constitué par un ensemble de points représentant les différents objets du problème dont certains sont reliés par des lignes symbolisant les relations existantes entre eux, les mathématiciens ont convenu d'appeler ce schéma un graphe, les points sont appelés des sommets et les lignes sont dites des arêtes (les arcs si les lignes sont orientées). Par conséquence, un graphe est une manière de pensé qui permet la modélisation d'une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude des sommets et des arêtes. Ce type de problèmes fait le but d'un très vaste domaine qui s'appelle 'la théorie des graphes'.

Ce domaine s'est développé dans diverses disciplines telles que les sciences techniques (biologie, chimie, physique, informatique), les sciences humaines (géographique, histoire) et le monde économique (finance, logistique,...), cela explique pourquoi la théorie des graphes devient le domaine le plus populaire des mathématiques discrètes malgré son jeune âge.

Le début a été hésitant : l'histoire veut que la théorie des graphes ait commencé avec l'article du mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) à l'Académie de Saint Pétersbourg en 1735, puis publié en 1741, sur le problème des sept ponts de Königsberg. Le problème consistait à trouver une promenade qui, à partir d'un point donné, fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept

ponts de la ville de Königsberg. Un des premiers problèmes de coloration des graphes est certainement le problème des quatre couleurs posé par Francis Gauthier en 1852, qui stipule que toute carte géographique peut être coloriée avec quatre couleurs de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes. En 1976, le problème des quatre couleurs est devenu le Théorème des quatre couleurs puisque Appel et Hakens [1] , assistés d'un ordinateur, l'ont résolu. Les problèmes de coloration sont au cœur de la théorie des graphes et font l'objectif de plusieurs recherches. Ils apparaissent dans plusieurs domaines pour modéliser de nombreux problèmes pratiques nous citons par exemple le problème d'ordonnancement, de planning de la vie de tous les jours, et dans le domaine des réseaux / télécom ... etc.

Il existe de nombreuses variantes des problèmes de coloration de graphe citons par exemple (coloration des sommets, colorations des arêtes, coloration totale, coloration par liste, ...). Pour plus de détails sur ce sujet, le lecteur peut se reporter aux livres de G.Chartared et P. Zhang et de T.R. Jensen et B. Toft. La coloration des sommets est certainement le concept le plus ancien et le plus étudié. Il s'agit d'affecter des couleurs (entiers positifs) aux sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne doivent pas porter la même couleur, une telle coloration est dite propre (classique). Le nombre chromatique, noté $\chi(G)$, est défini comme le nombre minimum de couleurs utilisées dans une coloration propre de sommets d'un graphe.

Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique, notre étude se focalise sur une variante de la coloration classique appelée " coloration dominée ". Elle est définie comme étant une coloration propre de sommets telle que chaque classe de couleur doit être dominée par au moins un sommet, le nombre de couleurs minimum dans cette coloration d'un graphe G, est noté par $\chi_{dom}(G)$.

Ce manuscrit comporte trois chapitres organisés comme suit.

Chapitre 1 :Notions générales sur les graphes. *Dans la première section de ce chapitre, nous rappelons les principales définitions et les notations de base de*

la théorie des graphes qui nous seront utiles au cours de ce mémoire. La deuxième section est destinée à la présentation de quelques opérations sur les graphes. Dans la troisième section, nous donnons un aperçu sur la complexité algorithmique, ensuite nous exposons les définitions et les notations relatives à la coloration propre et à la domination.

Chapitre 2 : Etat de l'art sur la coloration dominée. *Dans ce chapitre, nous donnons un résumé de l'ensemble des travaux et résultats existants sur la coloration dominée.*

Chapitre 3 : Détermination du nombre chromatique dominée de certains graphes. *Dans ce chapitre, nous donnons les premiers résultats de notre contribution. Plus précisément, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique dominée pour une classe spéciale des graphes.*

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

Dans ce chapitre, nous citons les notions et la terminologie utilisée dans ce mémoire. Dans la première partie, nous rappelons les définitions basiques de la théorie des graphes ainsi les concepts fondamentaux nécessaires utilisés tout au long de ce document. Ensuite, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite. Enfin, dans la troisième partie, nous rappelons les concepts relatives à la coloration propre et à la domination et quelques bornes et résultats existants sur le nombre chromatique $\chi(G)$.

1.1 Définitions et notations de base

Dans cette section, nous rappelons les principales notions nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire.

1.1.1 Graphe

— Un graphe G est défini par un couple $(V(G), E(G))$, où $V(G)$ est un ensemble de sommets, et $E(G)$ est un ensemble de paires de sommets appelées arêtes. Le nombre des sommets de G, appelé ordre de G, est noté $n(G)$ et le nombre

de ses arêtes est noté $m(G)$.

— Si u et v sont deux sommets reliés par une arête e, alors u et v sont dits adjacents ou voisins, et e est dite incidente à u et v, de plus u et v sont appelés les extrémités de e, on écrit donc $e = uv$ ou $e = vu$.

— Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.

— Un sommet u est dit isolé s'il n'existe aucune arête dans E incidente à u.

— Le sommet universel est le sommet adjacent à tous les sommets restants du graphe G.

— Une arête reliant le même sommet est dite boucle c'est à dire une arête dont les extrémités sont confondues.

— Un ensemble d'arêtes est dit multiple si elles ont les mêmes extrémités.

— Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples.

— Deux graphes G et H d'ordre n sont dits isomorphes (on écrit $G \approx H$) s'il existe une bijection définie par :

$$\Phi : V(G) \to V(H) telque \forall v_1, v_2 \in V(G), v_1v_2 \in E(G) \Leftrightarrow \Phi(v_1)\Phi(v_2) \in E(H).$$

Notons que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont non-orientés, finis, simples et sans sommets isolés.

1.1.2 Voisinage

— Le voisinage ouvert d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble suivant :

$$N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}.$$

— Le voisinage fermé d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$, noté $N_G[v]$, est défini par :

$$N_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}.$$

— L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v) (resp. N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup (S))$ est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$.

1.1.3 Degré d'un sommet

— Le nombre de voisins d'un sommet v d'un graphe G est appelé degré de v, noté $d_G(v)$ c'est-à dire : $d_G(v) = |N_G(v)|$.

— Un sommet de degré nul est dit sommet isolé.

— Les sommets pendants sont de degré 1, un sommet adjacent à un sommet pendant est dit sommet support.

— Nous disons qu'un sommet v est dominé par un sommet u si $N(v) \subseteq N[u]$. Deux sommets sont dits comparables si l'un d'eux domine l'autre.

— Le degré maximum d'un graphe G, noté $\Delta(G)$ est la quantité définie par :

$$\Delta(G) = max\{d_G(x) : x \in V\}.$$

— Le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$ est la quantité définie par :

$$\delta(G) = min\{d_G(x) : x \in V\}.$$

1.1.4 Sous graphe et graphe partiel

— On appelle sous-graphe de G, un graphe $G\prime = (V\prime, E\prime)$ tel que $V\prime \subseteq V$ et $E\prime \subseteq E$.

— On appelle sous-graphe de G induit (ou engendré) par A, le sous-graphe $H = (A, E_A)$ de G, avec $E_A = \{uv \in E : u, v \in A\}$: Dans ce cas, H sera désigné par $G[A]$ .On dira aussi que $G[A]$ est un sous-graphe induit de G.

— Si $B \subseteq E$, on appelle graphe partiel de G défini par B, le sous-graphe $G_B = (V, B)$ de G dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et B.

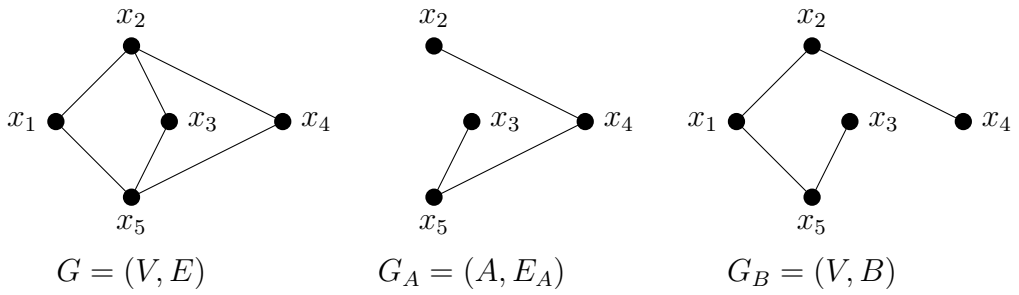


FIGURE 1.1 – Un graphe simple G, un sous graphe G_A et un graphe partiel G_B.

On dira que G contient un graphe H s'il existe un sous-graphe induit de G isomorphe H. Dans le cas contraire, on dira que G est sans H (ou H-libre).

1.1.5 Invariant d'un graphe

Clique, stable, couplage et transversal

- Une clique dans un graphe est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté $\omega(G)$.
- Un stable (un ensemble indépendent) dans un graphe est un ensemble des sommets deux à deux non-adjacents. La cardinalitée du plus grand stable dans G noté $\alpha(G)$ s'appelle le nombre de stabilité est .
- Un couplage M (ou appariement) dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G. Le nombre de couplage $\alpha'(G)$ du graphe G est le cardinal maximum d'un couplage.
- Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$, est un sous ensemble $S \subseteq V$ contenant au moins une extrémité de chaque arête, ie. $\forall uv \in E, u \in S$ ou $v \in S$. Le nombre de transversal d'un graphe G, noté par $\alpha_0(G)$ ou $\beta(G)$, est la cardinalité minimum d'un transversal de G.

1.1.6 Chaîne et cycle

— Une chaîne d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes de G de la forme : $(v_0, e_1, v_1, ..., e_k, v_k)$ où k est un entier positif ou nul, les v_i et v_{i+1} sont des sommets de G et les e_i sont des arêtes, tels que pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$, v_i et v_{i+1} sont des extrémités de l'arête e_i tel que les sommets v_0 et v_k sont les extrémités de la chaîne P_n, et les sommets $v_1, v_2...v_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de P_n.

— La longueur de la chaîne est le nombre de ses arêtes donc c'est l'entier k.

— Une chaîne est dite simple si elle ne passe pas deux fois par la même arête.

— Elle est élémentaire si elle ne passe pas deux fois par le même sommet c'est à dire tous ses sommets sont distincts. Notons que toute chaîne élémentaire est simple.

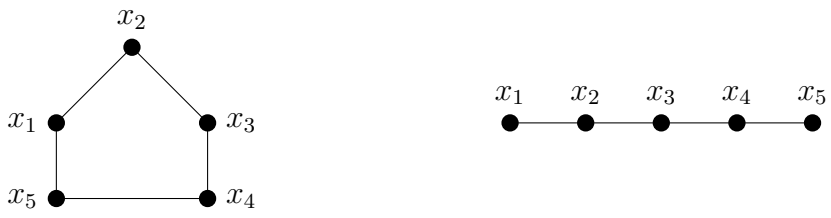
— Une arête reliant deux sommets non successifs dans une chaîne est dite une corde.

— Une chaîne sans corde est dite induite.

— Un cycle d'ordre n (avec $n \geq 3$), noté C_n est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.

— Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. Le nombre d'arêtes d'un cycle représente sa longueur.

— La maille d'un graphe G notée $g(G)$, est la longueur du plus petit cycle dans G.



$G = C_5$ $G = P_5$

FIGURE 1.2 – Un cycle C_5 et une chaîne P_5.

Distance, excentricité et diamètre

— La distance entre deux sommets u et v d'un graphe G , notée $d(u, v)$, est la longueur du plus courte chaîne reliant u à v.

— L'excentricité d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$, notée $exc(v)$, est définie par :

$$exc(v) = max\{d(v, w) : w \in V\}$$

— Le diamètre de G, noté par $diam(G)$ est défini par :

$$diam(G) = max\{exc(v) : v \in V\}.$$

— Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé un centre.

Maximalité, minimalité par rapport à une propriété

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble S de $V(G)$ est dit minimal (resp., maximal) par rapport à une propriété P, si S vérifie P et n'existe pas d'ensemble $S\prime \subset S$ (resp., $S \subset S\prime$) tel que $G[S\prime]$ vérifie P.

1.1.7 Graphe connexe

— Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si pour toute paire de sommets x, y de V , il existe une chaîne reliant x à y.

— Une composante connexe de G est un sous-graphe de G qui est maximal pour la propriété d'être connexe (c'est à dire elle n'est pas contenue dans aucune autre composante connexe).

— Un graphe G est connexe s'il possède une seule composante connexe.

— Un graphe qui n'est pas connexe est dit non connexe.

— Un sommet $v \in V$ est dit sommet d'articulation si sa suppression de V augmente le nombre de composantes connexes de G. Une arête $e \in E$ s'appelle un

isthme si sa suppression de E augmente le nombre de composantes connexes de G.

1.1.8 Graphe particulier

— Un graphe complet d'ordre n noté K_n est un graphe tel que toutes les paires de sommets sont adjacents.

— On dit qu'un graphe G est discret ou nul s'il ne contient aucune arête, c'est-a-dire que $E = \varnothing$ et noté $\overline{K_n}$.

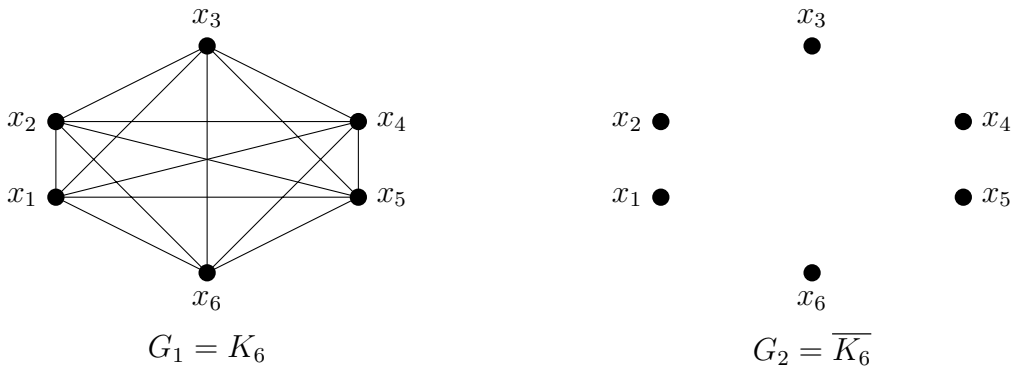


FIGURE 1.3 – Un graphe complet G_1 et un graphe discret G_2.

— Le graphe complémentaire d'un graphe G est le graphe noté $\overline{G}$, défini par : $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$. Autrement dit, le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.



FIGURE 1.4 – Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

— Un graphe est régulier si tous ses sommets ont le même degré.

— Un graphe simple est dit *d-régulier* si tous ses sommets sont de même degré d. Prenons par exemple le graphe de Petersen G_{10} qui est un graphe 3-*régulier*. Voir la Figure 1.5.

— Un graphe est dit scindé si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en une clique et un stable. Voir la Figure 1.6.

— Un graphe est dit biparti si on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ sont

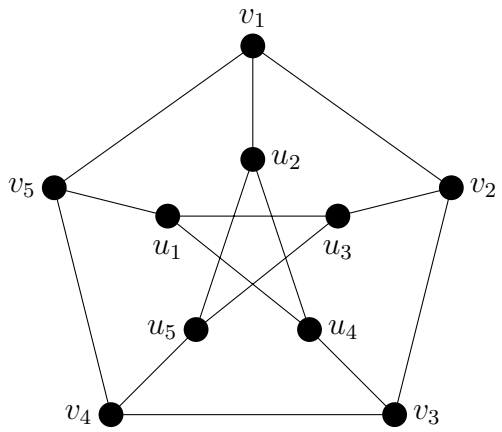


FIGURE 1.5 – Le graphe de Petersen.

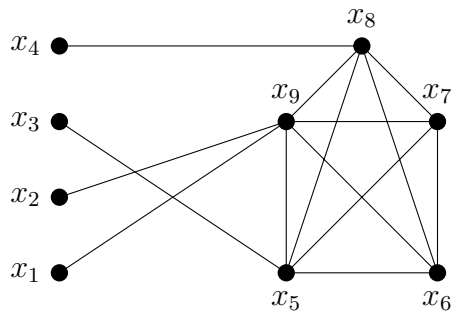


FIGURE 1.6 – Exemple d'un graphe scindé.

indépendants.

— Un graphe biparti complet est un graphe biparti tel que tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$.

— Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ *et* $|V_2| = s$ est appelé une étoile et noté $K_{1,s}$. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile.

— Une étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en ajoutant une arête à partir des deux centres des étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$.

— Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

— Une forêt est un graphe non connexe où chaque composante connexe est un arbre.

— Une chenille $C(t_1, t_2, ..., t_s)$ est un arbre dont la suppression de ses sommets

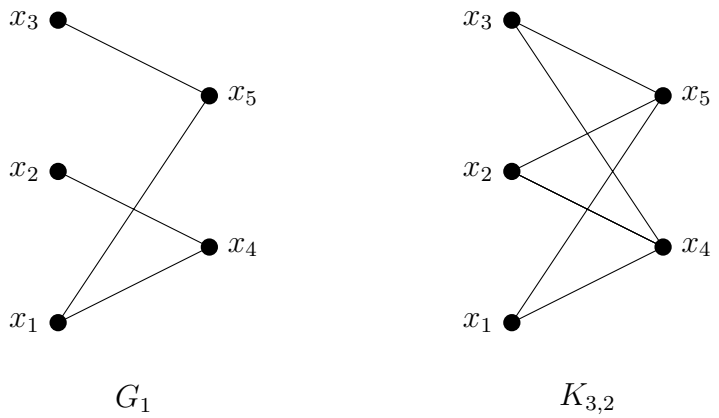


FIGURE 1.7 – Un graphe biparti G_1 et un graphe biparti complet $K_{3,2}$.

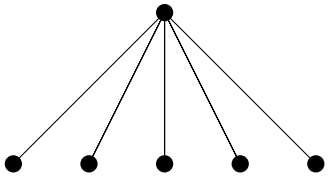


FIGURE 1.8 – Une étoile $K_{1,5}$.

pendants donne une chaîne $u_1, u_2, ..., u_s$ où t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i.

— Une griffe d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre une étoile $K_{1,3}$.

— Un cactus est un graphe où chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit unicycle.

— La couronne de H notée $G = H \circ K_1$ est le graphe obtenu d'une copie de H et pour tout sommet v de $V(H)$, on relie un sommet pendant. Il est évident que l'ordre de G est égal à $2n$ si celui de H est n.

— Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe adjoint de G (ou graphe de ligne) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

— Le graphe puissance d'un graphe $G = (V, E)$ noté G^k est le graphe obtenu à partir de G en rajoutant l'arête uv pour toute paire de sommets $\{u, v\} \in$



FIGURE 1.9 – Une étoile double $S_{3,3}$.

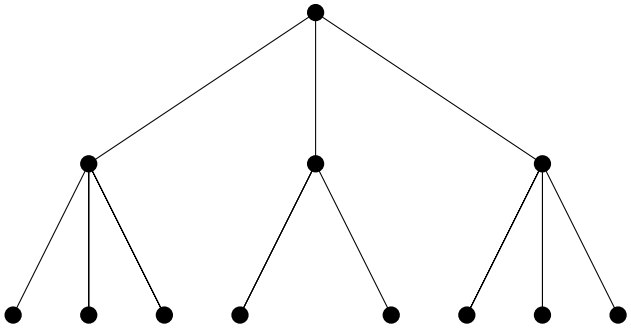


FIGURE 1.10 – Un arbre T.

$V(G)^2$ telle que $d_G(u,v) \leq k$.

— Un graphe G est dit héréditaire par rapport à une propriété P si chaque sous-graphe induit de G vérifie la propriété P. Par exemple, si G est $H - libre$, alors G est héréditaire par rapport à cette propriété (puisque tout sous-graphe induit de G est $H - libre$).

1.2 Opération classique sur les graphes

Nous donnons, ci-après, les différentes opérations de base sur les graphes.

— Le produit cartésien (ou somme cartésienne) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe G défini par : $V(G) = \{(u,v) : u \in V(G_1)\ et\ v \in V(G_2)\}$ et $E(G) = \{v_1 = v_2\ et\ u_1u_2 \in E(G_2)$ ou $u_1 = u_2$ et $v_1v_2 \in E(G1)\}$.

Exemple 1.2.1 *Une grille $G_{n,m}$ est le produit cartésien de deux chaînes P_m et P_n.*

— Le produit tensoriel, produit direct ou encore produit croisé de deux graphes $G = (V, E)$ et $G\prime = (V\prime, E\prime)$, noté $G \times G\prime$, est le graphe ayant pour ensemble

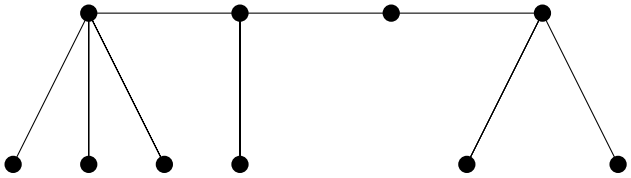


FIGURE 1.11 – Une chenille $c(3, 1, 0, 2)$.

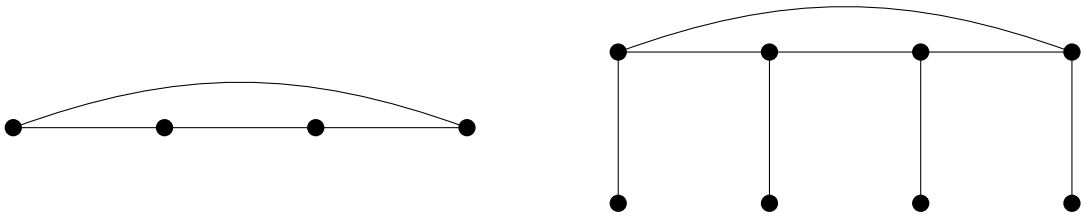


FIGURE 1.12 – Un graphe C_4 et sa couronne.

de sommets $V(G) \times V(G\prime)$. Deux sommets (u, v) et (u', v') de $V(G) \times V(G\prime)$ sont adjacents si $uu\prime \in E(G)$ *et* $vv\prime \in E(G\prime)$.

— Soit x un sommet d'un graphe $G = (V, E)\cdot$ On note $G - x$ le sous graphe engendré par l'ensemble $V \setminus \{x\}$. Pour un sous ensemble de sommets $S \subseteq V$,on note $G - S$ le sous graphe engendré par $V \setminus S$. Soit e une arête de G, on note $G - e$ le graphe $G' = (V, E \setminus \{e\})$. En d'autres termes, $G - v$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. Le graphe $G - e$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés).

— La contraction d'une arête uv d'un graphe $G = (V, E)$ consiste à supprimer l'arête uv et à fusionner les extrémités de l'arête uv. Le sommet résultant est adjacent à tous les voisins de u et de v. Le graphe obtenu à partir de la contraction de uv est noté par G_{uv} .

— L'union de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, notée $G_1 + G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble d'arêtes $E_1 \cup E_2$. On note par kG l'union de $k \geq 1$ copies de G.

— Le joint de deux graphes noté $G_1 \vee G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble d'arêtes $E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2}$ où $E_{1,2} = \{xy : x \in$

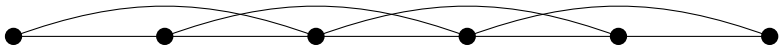


FIGURE 1.13 – Graphe puissance G^2 de P_6.

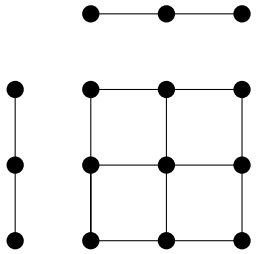


FIGURE 1.14 – Le produit cartésien $P_3 \square P_3$.

$V_1, y \in V_2\}$. Autrement dit, $G_1 \vee G_2$ est le graphe obtenu à partir de $G_1 + G_2$ en ajoutant toutes les arêtes entre tous les sommets de G_1 et G_2.

1.3 Aperçu sur la complexité algorithmique

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en théorie des graphes et plus précisément à leur résolution de façon efficace, nous introduisons quelques éléments de base sur la complexité algorithmique.

Un algorithme est une procédure de résolution composée d'une suite finie d'opérations élémentaires. On appelle complexité d'un algorithme le nombre asymptotique d'opérations élémentaires $(+, *, -, /, =, test)$ qu'il doit éffectuer en fonction de la taille d'entrée qu'il à traiter. On dit qu'un algorithme est éfficace si le nombre d'opérations élémentaires est polynomial (c'est à dire borné par un polynôme).

1.3.1 Problème de décision

Un problème de décision est un problème dont la réponse attendue est de type oui ou non. La théorie de la complexité fournit une classification des problèmes de décision selon leur niveau de difficulté.

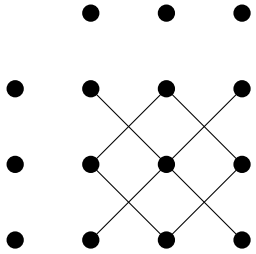


FIGURE 1.15 – Le produit croisé $P_3 \times P_3$.

Classe P

Un problème de décision est dans la classe P s'il existe un algorithme déterministe pour le résoudre en temps polynomial par rapport à la taille des données, le problème de cette classe est dit facile.

Classe NP

La classe NP (non déterministe polynomial) réunit les problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps polynomial par un algorithme non déterministe, un problème de cette classe est dit difficile, nous retrouvons dans cette classe tous les problèmes classiques en théorie des graphes tels : l'indépendance, la coloration, la domination,....etc. On constate immédiatement, que $P \subseteq NP$. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connait pas d'algorithme polynomial de résolution. De ce fait, une question majeure reste posée à ce jour : Est-ce que $P = NP$?.

Plusieurs classes de complexité sont définies à l'aide de réductions. Une réduction est une transformation d'un problème P_1 à un autre problème P_2, s'il existe un algorithme pour P_1 qui fait appel à un algorithme de résolution de P_2. On dit que P_2 est au moins aussi difficile que P_1. La plus réduction utilisée est la réduction polynomiale.

Problème $NP-$complet

Un problème de décision de la classe NP est dit NP-complet, si tout problème dans NP peut lui être réduit en temps polynomial. En d'autre termes, parmi l'ensemble des problèmes appartenant à la classe NP, il existe un sous ensemble qui contient les problèmes les plus difficiles, le problème de cette classe est dit NP-difficile.

1.4 Coloration propre et domination

1.4.1 Coloration

En 1852, Francis GUTHRIE a posé le célèbre problème des quatres couleurs : "est-il possible de colorier toute carte géographique avec exactement quatre couleurs de telle sorte que les pays voisins soient colorés différemment ?. Ce problème a été étudié par un certain nombre de mathématiciens, dont Augustus DE MORGAN, Arthur CAYLEY et Alfred KEMPE, mais ce n'est qu'en 1976 qu'une preuve a finalement été obtenue par kneeth APPEL et Wolfgang HAKEN [1] . Leur preuve a impliqué la prise en compte de près de 2000 configurations de pays et a fait un usage intensif de l'ordinateur. Jusqu'à aujourd'hui, aucune preuve simple n'a été découverte.

Définition 1.4.1 *Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une affectation de couleurs aux sommets de G de sorte que deux sommets adjacents u et v ne reçoivent pas la même couleur.*

Définition 1.4.2 *Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i. Le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble V est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$.*

Le calcul du nombre chromatique est $NP-$complet dans le cas général . De ce fait, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre

chromatique en fonction d'autres paramètres de graphe. Un des vieux résultats établi sur le nombre chromatique est celui R. Brooks [6] où il a montré que pour un graphe G, de degré maximum $\Delta(G)$, qui n'admet pas comme composante connexe un graphe complet d'ordre $\Delta(G)+1$ ni,si $\Delta(G)=2$, un cycle d'ordre impaire, on a

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Pour le graphe complet $K_{\Delta(G)+1}$ on a $\chi(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G)+1$, et pour le cycle impaire C_n on a $\chi(C_n) = \Delta(G)+1 = 3$.

De ce fait, on a toujours le résultat suivant :

Théorème 1.4.1 *[6] Pour tout graphe G de degré maximum*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)+1.$$

Proposition 1.4.1 *Soit H un sous graphe de G alors :*

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

Avec égalité si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

1. Soit $\Delta(G) \neq 2$ et G admet $K_{\Delta(G)+1}$ comme composante connexe.
2. Soit $\Delta(G)$=2 et G admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.

Il est bien connu également que le nombre de clique est une borne inférieure du nombre chromatique. En effet, si un graphe G contient une clique de taille k, alors il faut au moins k couleurs pour le colorer. De ce fait on a la proposition suivante.

Proposition 1.4.2 *Tout graphe G satisfait*

$$\chi(G) \geqslant \omega(G)$$

où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G.

Le résultat suivant a été établi par C. Berge [5]

Théorème 1.4.2 *[5] Soit G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \text{ et } \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Gaddum et Nordhaus [14] ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 1.4.3 *[14] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors :*

$$\chi(G) + \chi(G) \leq n + 1 \text{ et } n \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq (\frac{n+1}{2})^2$$

1.4.2 Domination dans les graphes

Définition 1.4.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets D de V est un dominant si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D.*

Définition 1.4.4 *Le nombre de domination de G, noté par $\gamma(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G.*

Domination totale

La domination totale est l'une des principales variantes de la domination. Elle a été introduite par Cockayne, Dawes et Hedetniemi.

Un dominat total $S \subseteq V$ est un sous ensemble de sommets tel que tout sommet de V est adjacent à au moins un sommet de S. Plus formellement, S vérifie $N(S) = V$.

Le nombre de domination totale $\gamma_t(G)$ du graphe G est le cardinal minimum d'un dominant total.

Chapitre 2

Etat de l'art sur la coloration dominée

Dans ce chapitre, nous introduisons le problème de coloration dominée. Tout d'abord, nous présentons les définitions des paramètres liés à cette coloration ensuite, nous rappellons les principaux travaux qui ont été réalisés dans la littérature.

2.1 Coloration dominée

Le concept de la coloration dominée a été introduit en 2015 (l'article ayant été soumis en 2012 cependant) par H.B. Merouane et al [13]. Où ils ont adopté une approche algorithmique pour ce problème et ont prouvé que si G est sans triangle, alors $\chi_{dom}(G)$ est égal au nombre total de domination de G.

Définition 2.1.1 *La coloration dominée d'un graphe simple G sans sommets isolés, est une coloration propre telle que chaque classe de couleur admet au moins un sommet adjacent à tous ses sommets.*

Définition 2.1.2 *Le nombre chromatique dominé d'un graphe G noté $\chi_{dom}(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration dominée de G. Une*

coloration dominée minimum est dite une χ_{dom}-coloration.

Maintenant, nous allons présenter quelques résultats existants sur la coloration dominée. Il convient en premier lieu de noter que ces résultats ont été un point de départ de plusieurs recherches qui s'intéressent au nombre $\chi_{dom}(G)$. Du point de vue de complexité, H.B. Merouane et al [13] ont montré la NP-complétude du problème de calcul de $\chi_{dom}(G)$ d'un graphe arbitraire G.

Théorème 2.1.1 *la détermination de la coloration k-dominée est un problème NP-complet.*

2.2 Quelques résultats existants sur le nombre chromatique dominé

Le concept de la coloration dominée a été étudié récemment, par de nombreux chercheurs, qui sont parvenus à établir quelques résultats. Parmi eux, nous citons H.B. Merouane et al. [13] , Saeid Alikhani et Mohammad R. Piri [3] , qui ont prouvé, que la détermination du nombre chromatique dominé est en général NP-complet. Et puisqu'il n'existe pas d'algorithme polynomial déterminant ce paramètre, les chercheurs ont été incité à établir des bornes qui l'encadrent le plus possible, á chercher sa valeur exacte ou approximative pour certaines classes de graphes.

2.2.1 Encadrement du nombre chromatique dominé

Plusieurs travaux ont été consacrés pour délimiter le nombre chromatique dominé d'un graphe.

Observation 2.2.1 *[3] Pour tout graphe G sans sommets isolés on a,*

$$\chi_{dom}(G) \geq \chi(G).$$

La borne de l'Observation 2.2.1 est atteinte si $diam(G) \leq 2$.

Proposition 2.2.1 *[13] Soit G un graphe d'ordre n non connexe avec k composantes G_i $(1 \leq i \leq n)$. Alors*

$$\chi_{dom}(G) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{dom}(G_i).$$

Observation 2.2.2 *Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$2 \leq \chi_{dom}(G) \leq n.$$

Pour un graphe d'ordre n, la borne inférieure est atteinte si G est la double étoile $S_{p,q}$ à laquelle on peut ajouter des arêtes n'induisant aucun triangle. Tandis que la borne supérieure est atteinte si G est une union de cliques.

Par la proposition suivante H.B Merouane [12] a montré que la domination induite par la coloration dominée est une domination particulière.

Proposition 2.2.2 *[13] Soit G un graphe d'ordre au moins* 2*, alors*

$$\chi_{dom}(G) \geq \gamma_t(G).$$

La borne de 2.2.2 est atteinte si G est sans triangle.

Il s'en suit la Proposition 2.2.3

Proposition 2.2.3 *[12] Soit G un graphe simple sans sommets isolés. Alors*

$$max(\gamma_t(G), \chi(G)) \leq \chi_{dom}(G).$$

D'autres travaux intéressants au nombre chromatique dominé pour un graphe arbitraire ont été réalisés par H.B Merouane et al. [13] en fonction des deux nombres : chromatique et de domination .

Proposition 2.2.4 *[13] Soit G un graphe sans sommets isolés. Alors*

$$\chi_{dom}(G) \leq \chi(G).\gamma(G).$$

Proposition 2.2.5 *[13] Si G est un graphe sans triangle, alors*

$$\chi_{dom}(G) \leq 2\gamma(G).$$

Corollaire 2.2.1 *[13] Soit G un graphe planaire sans sommets isolés. Alors*

$$\chi_{dom}(G) \leq 4\gamma(G).$$

La borne est atteinte pour la classe des graphes planaires formés à partir de k copies du graphe planaire complet d'ordre 4 , dénoté par K_4^1 , K_4^2 , K_4^3 ...K_4^k ,en attachant trois nouveaux sommets, a,b et c, au même sommet choisi arbitrairement dans chaque graphe complet. Et en ajoutant une arête entre les sommets c et b attachés à K_i et K_{i+1} respectivement., avec $i = 1, ..., k-1$. Pour l'illustration voir la Figure 2.2.1

Dans 2.2.6, H.B. Merouane et al. [13] ont borné le nombre chromatique dominé d'un graphe sans $K_{1,m}$.

Proposition 2.2.6 *[13] Soit G un graphe d'ordre n,*
Si G est sans $K_{1,m}(m \geq 2)$, *alors*

$$\chi_{dom}(G) \geq \frac{n}{m-1}.$$

Ils ont également montré que cette borne est atteinte dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.7 *[13] Soit* $k \geq 3$ *un entier et G un graphe* $(K_{1,m},K_3)-$*libre d'ordre n. Alors* $\chi_{dom}(G) = \frac{n}{m-1}$ *si et seulement si G est obtenu à partir d'une*

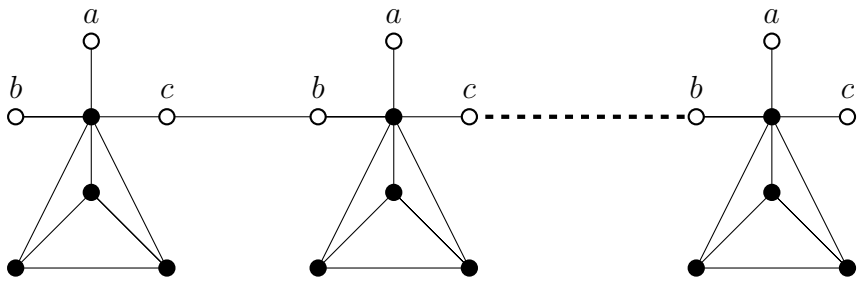


FIGURE 2.1 – Un graphe planaire avec $\chi_{dom}(G) = 4\gamma$.

ou plusieurs bistars $S_{m-2,m-2}$ en ajoutant des arêtes (éventuellement aucune) entre les feuilles de sorte que G est un graphe $(K_{1,m},K_3)-$libre.

D'autres résultats sur le même sujet ont été fournis par H.B Merouane et al. dans [13]

Corollaire 2.2.2 *[13] Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ. Alors*

$$\chi_{dom}(G) \geq \frac{n}{\Delta}.$$

Corollaire 2.2.3 *[13] Soit G un graphe K_3-Libre d'ordre n et de degré maximum Δ . Alors $\chi_{dom}(G) = \frac{n}{\Delta}$ si et seulement si G est formé à partir de bistares $B_{\Delta-1,\Delta-1}$ en ajoutant des arêtes (éventuellement aucune) entre les feuilles de sorte que le graphe obtenu est un K_3-libre de degré maximal Δ.*

Les mêmes auteurs de [13] ont étudié le nombre chromatique dominé des graphes scindés.

Théorème 2.2.1 *[13] Soit G un graphe scindé tel que sa clique maximale est d'ordre k. Alors*

$$\chi_{dom}(G) = \chi(G) = \omega(G) = k.$$

Dans ce qui suit, F. CHOOPANI et al. [8], ont pu borner le nombre chromatique dominé d'un graphe en fonction de son nombre de packing.

Définition 2.2.1 *Un ensemble S est appelé Packing si*

$$\forall u, v \in S(u \neq v) N(u) \cap N(v) = \emptyset (N[u] \cap N[v] = \emptyset).$$

Le nombre de packing $\rho(G)$ (resp.nombre de packing ouvert $\rho_0(G)$) du graphe G est la cardinalité maximum d'un packing (resp.packing ouvert) .

Théorème 2.2.2 *[8] Pour tout graphe G, $\chi_{dom}(G) \geq \rho_0(G) \geq \rho(G)$.*

Théorème 2.2.3 *[8] Si $diam(G) \geq 3$, alors*

$$\chi_{dom}(G) \leq n - \rho(G).$$

Corollaire 2.2.4 *[8] Soit G un graphe d'ordre n et $diam(G) \geq 3$. Alors*

1. *Si $\rho(G) \leq \rho_0(G) \leq \chi_{dom}(G) \leq n - \rho(G) \leq n - \frac{\rho_0(G)}{2}$.*
2. *Si $\rho_0(G) = \frac{2n}{3}$, alors $\chi_{dom}(G) = \rho_0(G)$ et si $\rho(G) = \frac{n}{2}$, alors $\chi_{dom}(G) = \rho(G)$.*

Plusieurs chercheurs ont établi des bornes qui encadrent le paramètre $\chi_{dom}(G)$ dans le cas d'absence d'algorithme polynômial pour la détermination de ce paramètre dans le cas général. Dans ce contexte suivant, les auteurs de [8] et [3] ont donné des bornes et des valeurs exactes du nombre chromatique dominé pour certains graphes particuliers.

2.3 Valeurs exactes du nombre chromatique dominé de certains graphes

2.3.1 Nombre chromatique dominé des chaînes et des cycles

Théorème 2.3.1 *[8] Pour $n \geq 3$,*

$$\chi_{dom}(P_n) = \chi_{dom}(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{Si } n \equiv 0 \bmod(4) \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Dans [3] et [15] S. ALIKHANI et M.R. PIRI et A. E. PRABHA et A. VIJAYALEKSHMI ont donné les valeurs exactes du nombre chromatique dominé des graphes représentatifs de quelques graphes, comme la grille,le prisme, cactus...

2.3.2 Nombre chromatique dominée de certains graphes spécifiques

Définition 2.3.1 *Un graphe en échelle ,noté L_n. est le produit cartésien de deux chaînes P_2 et P_n.*

Définition 2.3.2 *Pour $n \geq 3$, le produit cartésien $C_n \square K_2$,noté Y_n. est un graphe appelé le n-prisme.*

Remarque 2.3.1 *les 3-prisme, 4-prisme et 5-prisme sont communément appelés le prisme triangulaire, le cube, et le prisme pentagonal .*

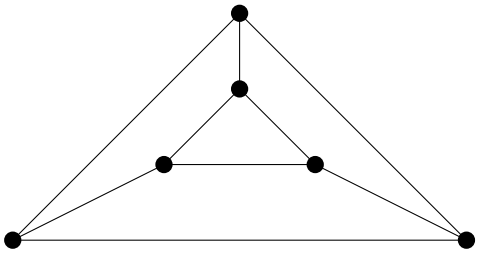


FIGURE 2.2 – Un $3-prisme$.

Un résultat sur le nombre chromatique dominé des graphes en échèlle a été donné indépendemment par A. E. PRABHA et A. VIJAYALEKSHMI [15] et S. ALIKHANI et M.R PIRI [3]

Théorème 2.3.2 *[15] Pour tout $n \geq 2$, $\chi_{dom}(L_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + r$ si $n \equiv r(mod3)$, avec $r = 0, 1, 2$.*

Théorème 2.3.3 *[3] Soit L_n un graphe en échelle et soit Y_n le n-prisme alors,*

1. *Pour tout* $n \geq 2$, $\chi_{dom}(L_n) = 2\lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.
2. *Pour* $n \geq 4$, $\chi_{dom}(L_n) = \chi_{dom}(Y_n)$.

Dans [15] A. E. PRABHA et A. VIJAYALEKSHMI ont donné le nombre chromatique dominé exacte des grilles .

Définition 2.3.3 *Une grille* $G_{n,m}$ *tel que* $n \geq 2$ *est un produit cartésien de deux chaînes* P_n *et* P_m.

Théorème 2.3.4 *[15] Soit* $G_{n,m}$ *la grille. Alors*

$$\chi_{dom}(G_{n,m}) = \lfloor \frac{mn}{3} \rfloor + r \text{ si } mn \equiv r(mod3), avec\ r = 0, 1, 2.$$

Dans ce qui suit et sur le même paramètre S. Alikhani et M.R. Piri [3] ont étudié certains graphes spécifiques.

Définition 2.3.4 *Un graphe* G *noté* $Q(m, n)$ *est dérivé de* K_m *et* m *copies de* K_n *en identifiant chaque sommet de* K_m *avec un sommet de* K_n.

Théorème 2.3.5 *[3] Pout tout* $m, n \geq 3$,

$$\chi_{dom}(Q(m, n)) = m(n - 1).$$

Théorème 2.3.6 *[3] Etant donné* H *un graphe quelconque, Si* $Q(m, H)$ *est un graphe obtenu en identifiant chaque sommet de* K_n *avec un sommet fixe de* H, *alors* $n(\chi_{dom}(H) - 1) \leq \chi_{dom}(Q(m, H)) \leq n\chi_{dom}(H)$.

Définition 2.3.5 *Le graphe de Friendship noté* F_n *est un graphe planaire avec* $2n+1$ *sommets et* $3n$ *arêtes, il peut être construit en joignant des* n *copies de* C_3 *avec un sommet commun.*

Le graphe de Friendship généralisé noté D_m^n est un ensemble de n cycles d'ordre m, se rejoignant en un sommet commun.

Théorème 2.3.7 *[3] Soit F_n le graphe de Friendship, et soit D_m^n le graphe de Friendship généralisé, alors*

1. *Pour $n \geq 2$, $\chi_{dom}(F_n) = 3$.*
2. $\chi_{dom}(D_m^n) \begin{cases} \chi_{dom}\left(D_m^{n-1} + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\right) & \text{Si } n \equiv 0 \bmod(4). \\ \chi_{dom}\left(D_m^{n-1} + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1\right) & \text{Si non.} \end{cases}$

2.3.3 Nombre chromatique dominée des cactus

Définition 2.3.6 *Un cactus triangulaire est un graphe dont les blocs sont des triangles, c'est-à dire un cactus 3-uniforme. Un sommet partagé par deux triangles ou plus est appellé un sommet d'articulation.*

On dit que G est un cactus triangulaire en chaîne noté T_n si chaque triangle d'un cactus triangulaire a au plus deux sommets chaque sommet d'articulation est partagé par exactement deux triangles.(Voir la Figure 2.3).

En remplaçant les triangles dans la définition préçédante par des cycles de longeur 4, nous obtenons des cactus carrés.

Définition 2.3.7 *Un cactus carré est un graphe dont les blocs sont des C_4. Notons que les carrés internes peuvent différer de la façon dont ils se connectent à leurs voisins. Si leurs sommets d'articulatios sont adjacents, un tel carré est appellé ortho-carré O_n, si non il est un para-carré Q_n. (Voir la Figure 2.4).*

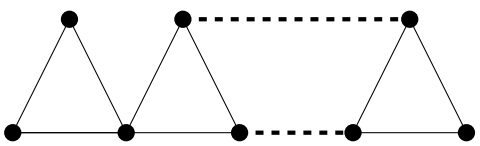


FIGURE 2.3 – Un cactus triangulaire en chaîne T_n.

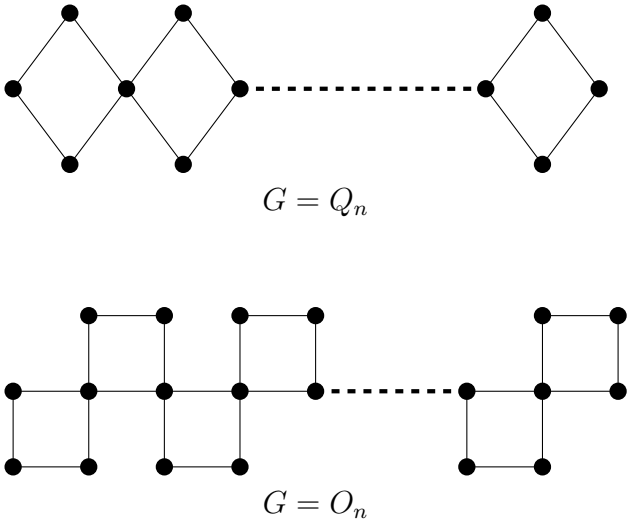


FIGURE 2.4 – Un cactus para-carré Q_n et un ortho-carré O_n.

Théorème 2.3.8 *[3] Soit T_n un cactus triangulaire en chaîne, et soit O_n un ortho-carré et Q_n un parra-carré alors,*

(i) Pour $n \geq 3$, $\chi_{dom}(T_n) = n + 1$.

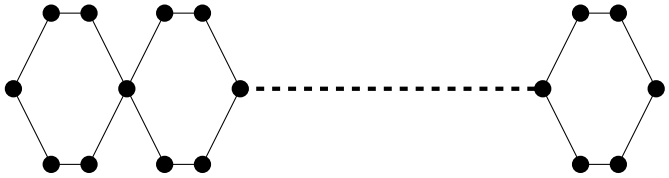
(ii) Pour $n \geq 2$, $\chi_{dom}(O_n) = \chi_{dom}(Q_n) = n + 1$.

Définition 2.3.8 *Un cactus hexagonal est un graphe dont les blocs sont des C_6. Si les sommets d'articulatios des hexagonaux internes sont adjacents, un tel hexagonal est appellé ortho-hexagonal H_n, si non il est un para-hexagonal M_n. (Voir la Figure 2.5).*

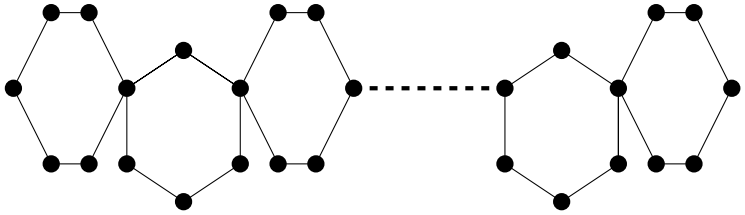
Théorème 2.3.9 *[3] Pour tout $n \geq 3$, $\chi_{dom}(H_n) = \chi_{dom}(M_n) = n + 4$.*

2.4 Coloration dominée des graphes obtenus à partir de deux graphes

La coloration dominée n'a pas été obtenue pour de nombreux graphes. Dans cette section nous donnons certains résultats d'un graphe avec combinaison de certains graphes, fournit par F. CHOOPANI et al. [8] .



$G = H_n$



$G = M_n$

FIGURE 2.5 – Un cactus ortho-hexagonal H_n et un para-hexagonal M_n.

Théorème 2.4.1 *[8] Soit i un entier positif et soit $\lfloor \frac{n}{2i} \rfloor = r$ et $n \equiv l(mod 2i)$. Alors*

$$\chi_{dom}(P_n^{i-1}) = \chi_{dom}(C_n^{i-1}) = \begin{cases} ri + l & 0 \leq l \leq i. \\ i(r+1) & i \leq l \leq 2i. \end{cases}$$

Définition 2.4.1 *Le graphe de Mycielsky G, noté $\mu(G)$ est un graphe simple dont l'ensemble de sommets est $V(\mu(G)) = V \cup U \cup \{w\}$ où $V = V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ qui est disjoint de l'ensemble V et son ensemble d'arêtes est $E(\mu(G)) = E(G) \cup \{u_i v : v \in NG(v_i) \cup \{w\}, i = 1, 2, ..., n\}$ où les sommets v_i et u_i sont appelés les jumeaux l'un de l'autre, et w est dit la racine de $\mu(G)$.*

Théorème 2.4.2 *[8] Pour tout graphe G,*

$$\chi_{dom}(\mu(G)) = \chi_{dom}(G) + 1.$$

Théorème 2.4.3 *[8] Étant donné deux graphes G et H,*

$$\chi_{dom}(G + H) = \chi(G) + \chi(H).$$

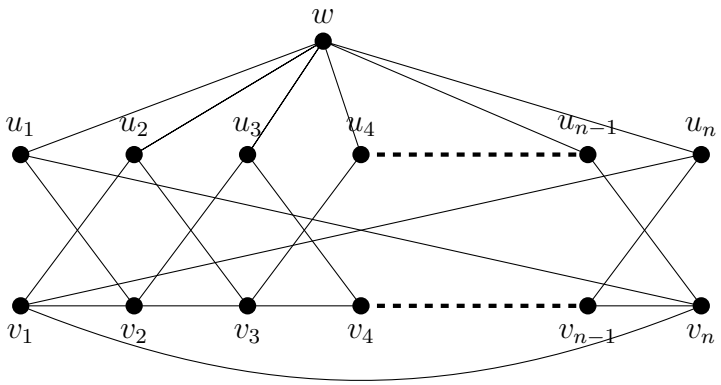


FIGURE 2.6 – Graphe Mycielski de C_n.

Théorème 2.4.4 *[8] Soit G un graphe connexe d'ordre n,*

Si $G \circ H$ est la couronne de deux graphes quelconque G et H, alors

$$\chi_{dom}(G \circ H) = n\chi_{_H}.$$

Définition 2.4.2 *Etant donné deux graphes quelconques G et H ,la couronne d'arêtes $G\Diamond H$ des graphes G et H est obtenue en prenant une copie de G et $m(G)$ copies disjointes de H affectées de manière biunivoque aux arêtes de G, et pour chaque arête $uv \in E(G)$ reliant u et v à chaque sommet de la copie de H associée à uv . Si $uv \in E(G)$, alors la copie de H dans $G\Diamond H$ correspondant à $e = uv$ sera notée H_{uv} (ou simplement H_e).*

Un autre résultat dans le cas de la couronne d'arêtes de deux graphes a été donné par Sandi Klavžar et Mostafa Tavakoli [10]

Théorème 2.4.5 *[10] Si G est un graphe sans sommets pendants, alors*

$$\chi_{dom}(G\Diamond H) \geq \alpha'(G)\chi(H) + \chi_{dom}(G).$$

Théorème 2.4.6 *[10] Si G est un graphe avec k sommets pendants, alors*

$$\chi_{dom}(G\Diamond H) \geq \alpha'(G)\chi(H) + k.$$

Théorème 2.4.7 *[10] Soit G et H deux graphes quelconques, alors*

$$\chi_{dom}(G\Diamond H) \leq \chi_{dom}(G) + \alpha_0(G)\chi(H).$$

Cette inégalié donne le corollaire suivant qui implique que la borne ci-dessus est atteinte dans un seul cas.

Corollaire 2.4.1 *[10] Si G est un graphe biparti sans sommets pendants, alors*

$$\chi_{dom}(G\Diamond H) = \chi_{dom}(G) + \alpha_0(G)\chi(H).$$

Théorème 2.4.8 *[8] Si $G \times H$ est le produit direct de deux graphes G et H, alors*

$$\chi_{dom}(G \times H) \leq \chi_{dom}(G)\chi_{dom}(H).$$

Théorème 2.4.9 *[8] Soit T un arbre d'ordre au moins deux, et H un graphe K_3-libre et sans sommets isolés. Alors*

$$\chi_{dom}(T \times H) = \chi_{dom}(T)\chi_{dom}(H).$$

2.5 Relations de type Nordhaus-Gaddum pour le nombre chromatique dominé

Une relation de type Nordhaus-Gaddum est une borne supérieure et inférieure pour la somme (produit) d'un paramètre sur un graphe et son complément. Dans cette section, nous donnons les résultats étudiés par F.CHOOPANI et al [8] sur les relations de type Nordhaus-Gaddum pour le nombre chromatique dominé.

Lemme 2.5.1 *[8] Si G est un graphe de diamètre d, alors $\chi_{dom}(G) \leq n - \lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor$.*

Lemme 2.5.2 *[8] Si G est un graphe de diamètre d, alors $\chi_{dom}(\overline{G}) \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$.*

De plus, si $d \geq 5$, alors $\chi_{dom}\left(\overline{G}\right) \leq n - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$.

Théorème 2.5.1 *[8] Si G est un graphe de diamètre d, alors*

1. $\chi_{dom}(G) + \chi_{dom}(\overline{G}) \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil + 2$.
2. $\chi_{dom}(G).\chi_{dom}(\overline{G}) \geq 2\lceil \frac{d}{2} \rceil$.

En outre, si $d \geq 5$, alors

1. $\chi_{dom}(G) + \chi_{dom}(\overline{G}) \leq 2n - 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$.
2. $\chi_{dom}(G).\chi_{dom}(\overline{G}) \leq (n - \lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor)(n - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor)$.

Théorème 2.5.2 *[8]Soit G un graphe $(K_3, C_4)-$libre, d'ordre n. Alors*

1. $\chi_{dom}\left(\overline{G}\right) \leq n - \alpha\prime(G)$.
2. $\chi_{dom}(G) + \chi_{dom}(\overline{G}) \leq n + \alpha\prime(G)$.

De plus s'il est sans triangle, alors

$$\chi_{dom}(G) \leq 2\alpha'(G).$$

2.6 Nombre chromatique dominé de certains graphes obtenus à partir des opérations

Dans cette section , S. ALIKHANI et M.R. PIRI [3] ont examiné l'effet sur $\chi_{dom}(G)$ lorsque G est modifié par la suppression d'un sommet ou d'une arête. Et ils ont étudié l'effet sur $\chi_{dom}(G)$, lorsque G est modifié en contractant un sommet et en contractant une arête. Ils ont considéré aussi un autre graphe obtenu par opération sur un sommet v dénoté par $G \odot v$ qui est un graphe obtenu de G par la suppression de toutes les arêtes entre toute paire de voisins de v. A la fin, ils ont fournit le nombre chromatique dominé de la subdivision du graphe G.

2.6.1 Suppression des sommets et des arêtes

Le graphe $G - v$ est un graphe obtenu en supprimant le sommet v et toutes les arêtes reliées à v du graphe G. Et le graphe $G - e$ est un graphe obtenu à partir de G en supprimant simplement l'arête e. Nous obtenons des bornes pour le nombre chromatique dominé de $G - e$ et $G - v$.

Théorème 2.6.1 *[3] Soit G un graphe connexe et $e = uv \in E(G)$ n'est pas un pont de G. Alors,*

$$\chi_{dom}(G) - 1 \leq \chi_{dom}(G - e) \leq \chi_{dom}(G) + 2.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est le graphe complet K_3.

Théorème 2.6.2 *[3] Soit G un graphe connexe, et $v \in V(G)$ n'est pas un sommet d'articulation de G. Alors :*

$$\chi_{dom}(G) - 1 \leq \chi_{dom}(G - v) \leq \chi_{dom}(G) + d(v) - 1.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si $G = K_n$.

2.6.2 Contraction des sommets et des arêtes

Soit v un sommet de G. La contraction de v dans G notée G/v est le graphe obtenu en supprimant v et en plaçant une clique sur le voisinage (ouvert) de v. Notez que cette opération ne crée pas d'arêtes parallèles. ; si deux voisins de v sont déjà adjacents, ils restent simplement adjacents . Dans un graphe G, la contraction d'une arête e ayant des extrémitées u, v est le remplacement de u et v par un seul sommet tel que les arêtes incidentes au nouveau sommet sont les autres arêtes que e qui étaient incidentes à u ou v. Le graphe résultant G/e a une arête de moins que G. Désignant ce graphe par G/e. Dans cette section, S. Alikhani et M.R. Piri [3] ont examiné les

effets sur $\chi_{dom}(G)$ lorsque G est modifié par une contraction d'arêtes et contraction de sommets. Considérant d'abord la contraction des arêtes.

Théorème 2.6.3 *[3] Soit G un graphe connexe et $e \in E(G)$. Alors*

$$\chi_{dom}(G) - 2 \leq \chi_{dom}(G/e) \leq \chi_{dom}(G) + 1.$$

En vérifiant les graphes avec un petit ordre, S. Alikhani et M.R. Piri [3] ont observé que la borne supérieure du théorème peut être diminuée de un, mais ils n'ont pas en mesure de le prouver. Ils ont énonçé donc la conjecture suivante :

Conjecture 2.6.1 *[3]* $\chi_{dom}(G) - 1 \leq \chi_{dom}(G/e)$.

Corollaire 2.6.1 *[3] Supposons que G soit un graphe connexe et $e \in E(G)$ ne soit pas un isthme de G. Alors*

$$\frac{\chi_{dom}(G-e) + \chi_{dom}(G/e) - 3}{2} \leq \chi_{dom}(G) \leq \frac{\chi_{dom}(G-e) + \chi_{dom}(G/e) + 3}{2}.$$

Considérant maintenant la contraction des sommets du graphe G .

Théorème 2.6.4 *[3] Soit G un graphe connexe et v un sommet quelconque de G. Alors*

$$\chi_{dom}(G) - 1 \leq \chi_{dom}(G/v) \leq \chi_{dom}(G) + d(v) - 1.$$

Corollaire 2.6.2 *[3] Soit G un graphe connexe.Pour tous sommet $v \in V(G)$ ne soit pas un sommet d'articulation .Alors*

$$\frac{\chi_{dom}(G/v) + \chi_{dom}(G-v)}{2} - d(v) + 1 \leq \chi_{dom}(G) \leq \frac{\chi_{dom}(G/v) + \chi_{dom}(G-v)}{2} + 1.$$

Considérant ici une autre opération sur un sommet d'un graphe G dont les même auteur [3] ont examiné les effets sur $\chi_{dom}(G)$ en effectuant cette opération. Désignons

par $G \odot v$ le graphe obtenu à partir de G par la suppression de toutes les arêtes entre toute paire de voisins de v, notons que v n'est pas supprimé du graphe. Le théorème suivant dû à [3] donne une borne supérieure et une borne inférieure pour $\chi_{dom}(G \odot v)$.

Théorème 2.6.5 *[3] Soit G un graphe connexe et $v \in V(G)$. Alors*

$$\chi_{dom}(G) - degv + 1 \leq \chi_{dom}(G \odot v) \leq \chi_{dom}(G) + 1.$$

2.6.3 Subdivision

La k-subdivision de G, désignée par $G^{\frac{1}{k}}$, est construite en remplaçant chaque arête v_iv_j de G par un chemin de longueur k, notée $P^{\{v_i,v_j\}}$. Ces k-chemins sont appelés super-arête, tout nouveau sommet est un sommet interne,et est noté par $x_l^{\{v_i,v_j\}}$ s'il appartient à la super-arête $P^{\{v_i,v_j\}}$, $i < j$ avec une distance l du sommet v_i où $l \in \{1, 2, ..., k-1\}$.

Notons que pour $k = 1$, on a $G^{\frac{1}{1}} = G^1 = G$, et si le graphe G a n sommets et m arêtes, alors le graphe $G^{\frac{1}{k}}$ a $n + (k-1)m$ sommets et km arêtes.

Théorème 2.6.6 *[3] Si G est un graphe connexe d'ordre m et $k \geq 2$,alors*

$$\chi_{dom}(P_{k+1}) \leq \chi_{dom}(G^{\frac{1}{k}}) \leq (m-1)\chi_{dom}(P_k) + \chi_{dom}(P_{k+1}).$$

Remarque 2.6.1 *La borne supérieure est atteinte pour le graphe $K_{1,n}^{\frac{1}{3}}$.*

Théorème 2.6.7 *[3] Soit G un graphe connexe de taille m et de degré maximal Δ. Alors*

$$2+\Delta(G)\chi_{dom}(P_k-1)-1 \leq \chi_{dom}(G^{\frac{1}{k}}) \leq 2+\Delta(G)\chi_{dom}(P_k-1)-1+(m-\Delta(G))\chi_{dom(}P_k).$$

Remarque 2.6.2 *En considérant le graphe $K_{1,n}^{\frac{1}{5}}$, les bornes du théoreme sont at-*

teintes.

2.7 Application de la coloration dominée

De nombreux problèmes réels peuvent être modélisés comme des problème de coloration de graphes. Nous pouvons citer par exemple les problèmes d'ordonnancement et de planning de la vie de tous les jours.

En 2014, Chen [7] a fourni une application de la coloration dominée dans les réseaux sociaux pour trouver les groupes d'étrangers minimums qui peuvent devenir des amis plus tard par un intermédiaire.

En 2021,Sandi Klavžar et Mostafa Tavakoli [10] ont proposé une autre application dans les réseaux génétiques comme suit .

Dans un réseau d'interaction génétique G, les gènes (protéines) sont représentés comme des sommets (nœuds) et leurs relations comme des arêtes. Certains gènes (protéines) n'ont pas d'interactions directes entre eux, mais ils peuvent être régulés par un gène (protéine) commun. En fait, le gène (protéine) commun peut réguler la fonction des autres gènes (protéines). Par conséquent, la coloration dominée consiste à trouver les groupes minimums de gènes (protéines) dans le réseau d'interaction génétique (protéine) avec deux propriétés ci-dessous :

1. Les gènes (protéines) d'un même groupe n'ont pas d'interactions directes entre eux.
2. Les gènes (protéines) du même groupe sont régulés par un gène (protéine) commun.

Chapitre 3

Détermination du nombre chromatique dominé de certains graphes

Nous avons déja vu dans le chapitre 2 que le problème de détermination du nombre chromatique dominé est NP-complet en général. Ce résultat de NP-complétude nous a motivé d'étudier le nombre chromatique dominé de certains graphes particuliers.

3.1 Quelques définitions

Dans cette partie, nous citons les notions et les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce chapitre.

Définition 3.1.1 *(Hamada et Yoshimura) [9] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe milieu de G noté $M(G)$ est défini comme suit :L'ensemble des sommets de $V(M(G))$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x,y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— x,$y \in E(G)$ *et* x *est adjacent à* y *dans* G.

— $x \in V(G)$,$y \in E(G)$ *et* x *est incident à* y *dans* G.

Définition 3.1.2 *(Behzad) [4] Soit* $G = (V, E)$ *un graphe simple. Le graphe total de* G *noté* $T(G) = (V \cup E, E')$ *qui est obtenu en subdivisant une fois les arêtes de* G *créant des nouveaux sommets, et deux sommets* x, y *de* $T(G)$ *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— x,$y \in V(G)$ *et* x, y *sont adjacents dans* G.

— x,$y \in V(G)$ *et* x *est adjacent à* y *dans* G.

— $x \in V(G), y \in E(G)$ *et* x *est incident à* y *dans* G.

Définition 3.1.3 *Pour un graphe donné* G *d'ordre* n*, le graphe central de* G *est obtenu en subdivisant chaque arête de* E *exactement une fois et en joignant tous les sommets non adjacents de* G.

3.2 Nombre chromatique dominée du graphe milieu, total et central de certains graphes

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique dominé du graphe milieu, total et central de certains graphes classiques, comme le cycle, la chaîne et l'étoile.

Théorème 3.2.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 2$. *Alors*

$$\chi_{dom}(M(P_n)) = n.$$

Preuve. *Soit* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 2$ *d'ensemble de sommets* $V(P_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *et d'ensemble d'arêtes* $E(P_n) = \{u_1u_2, u_2u_3, ..., u_{n-1}u_n\}$. *Et soit*

$\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ *l'ensemble des sommets ajoutés au milieu de l'arête* $\{u_i u_{i+1}\}$ *pour la constitution de* $M(P_n)$. *Voir la figure 3.1. Par une simple vérification, on peut constater que* $M(P_n)$ *est un graphe sans griffe d'ordre* $2n-1$ *et par suite, la Proposition 2.2.6 implique que* $\chi_{dom}(M(P_n)) \geq \lceil \frac{2n-1}{2} \rceil = n$. *Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de donner une* χ_{dom}*-coloration* c *de* $M(P_n)$ *avec* n *couleurs définie de la façon suivante. Poser* $c(u_1) = 1$ *et pour* $i \in \{2, ...n-1\}$, *poser* $c(u_i) = i-1$. *Ensuite pour* $j \in \{1, ...n\}$, *poser* $c(v_j) = j+1$. *Il est clair que* c *est une coloration dominée de* $M(P_n)$ *utilisant* n *couleurs. Donc* $\chi_{dom}(M(P_n)) = n$. ■

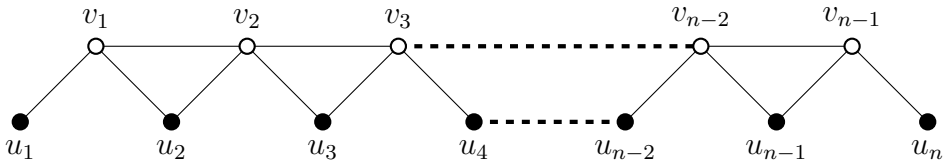


FIGURE 3.1 – graphe milieu de P_n.

Dans ce qui suit, nous déterminons la valeur exacte de $\chi_{dom}(M(C_n))$ en utilisant les mêmes étapes du Théorème 3.2.1.

Théorème 3.2.2 *Tout cycle* C_n *d'ordre* $n \geq 3$ *satisfait*

$$\chi_{dom}(M(C_n)) = \begin{cases} 4 & Si\ n = 3. \\ n & Si\ n \geq 4. \end{cases}$$

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(C_n)$=$\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(C_n) = \{u_1u_2, u_2u_3, ..., u_{n-1}u_n, u_1u_n\}$. Et soit $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ l'ensemble des sommets ajoutés au milieu de l'arête $\{u_i u_{i+1}\}$ pour la constitution de $M(C_n)$. Voir Figure 3.2. Tout d'abord, il est facile de vérifier que le nombre chromatique dominé du graphe $M(C_3)$ est égal à 4.

Pour $n \geq 4$, le graphe $M(C_n)$ est sans $K_{1,3}$ d'ordre $2n$, selon la Proposition 2.2.6, on a $\chi_{dom}(M(C_n)) \geq \lceil \frac{2n}{2} \rceil = n$. Maintenant, en donnant une χ_{dom}-coloration c avec

n couleurs, on obtient la deuxième inégalité. Nous faisons ça comme suit. Dans un premier temps, pour $i \in \{1, ..., n-1\}$, nous colorons les sommets de C_n par la couleur $i+1$, et on affecte au dernier sommet u_n la couleur 1. Ensuite pour $j \in \{1, ..., n-1\}$ colorons v_j par la couleur j. Il est facile de voir que cela donne une χ_{dom}-coloration de $M(C_n)$ avec n couleurs. Ceci achève la preuve du Théorème. ■

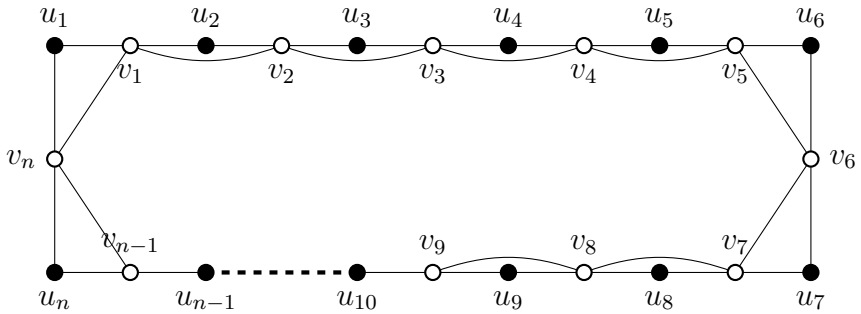


FIGURE 3.2 – Graphe milieu de C_n.

Théorème 3.2.3 *Soit $K_{1,n}$ une étoile d'ordre $n+1$. Alors*

$$\chi_{dom}(M(K_{1,n})) = \chi_{dom}(T(K_{1,n})) = n.$$

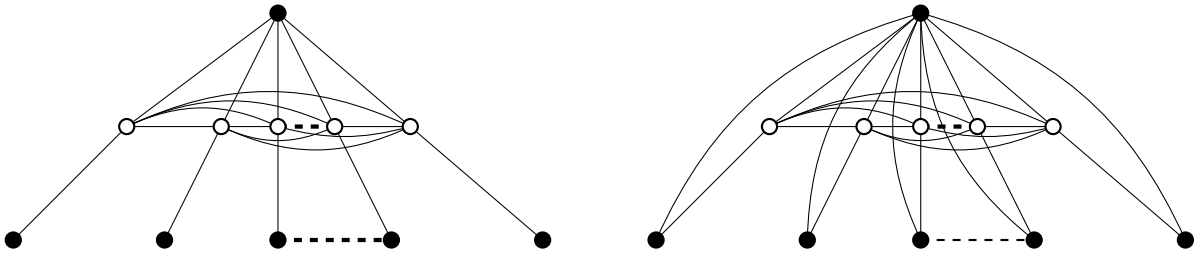
Preuve. Dans la Figure 3.3, on peut aisément, voir que $M(K_{1,n})$ (respectivement, $T(K_{1,n})$) est un graphe scindé dont sa clique maximum $\omega(G)$ est d'ordre $n+1$. Dans de tels cas, en appliquant la Proposition 2.2.1, on a $\chi_{dom}(M(K_{1,n})) = \chi_{dom}(T(K_{1,n})) = n$. ■

Dans le but de déterminer le nombre chromatique dominé du graphe total des chaînes et des cycles, nous allons établir les résultats suivants.

Théorème 3.2.4 *Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$. Alors*

$$\chi_{dom}(T(P_n)) = n.$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ d'ensemble de sommets $V(P_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(P_n) = \{u_1u_2, u_2u_3, ..., u_{n-1}u_n\}$. Et soit



$G = M(K_{1,n})$ $\qquad$ $G = T(K_{1,n})$

FIGURE 3.3 – Graphe milieu et graphe total de $K_{1,n}$.

$\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ l'ensemble des sommets ajoutés en subdivisant chaque arête $\{u_i u_{i+1}\}$ exactement une fois pour obtenir $T(P_n)$. Voir Figure 3.4. Començons par prouver la première inégalité en utilisant le fait que le graphe $T(P_n)$ est sans griffe d'ordre $2n-1$, et au vu de la Proposition 2.2.6, on a $\chi_{dom}(T(P_n)) \geq \lceil \frac{2n-1}{2} \rceil = n$. Pour prouver l'égalité, nous exposons une χ_{dom}-coloration de $T(P_n)$ en utilisant n couleurs, comme suit. Affectons la couleur $1, 3, 2, 1$ pour les sommets u_1, u_2, v_1, v_2 respectivement. Nous assignons la couleur $i-1$ au sommet u_i pour $i = 3, 4, ..., n$. Et nous assignons la couleur $j+1$ au sommet v_j pour $j = 3, 4, ..., n-1$. Nous obtenons une χ_{dom}-coloration de $T(P_n)$ avec n couleurs. Par conséquent, $\chi_{dom}(T(P_n)) = n$. ■

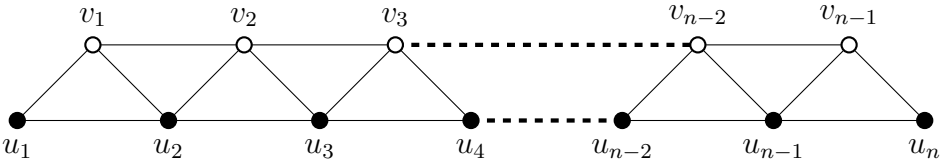


FIGURE 3.4 – Graphe total de P_n.

Théorème 3.2.5 *Pour tout cycle C_n d'ordre $n \geq 3$ on a,*

$$\chi_{dom}(T(C_n)) = n.$$

Preuve. Par un raisonnement semblable au Théorème 3.2.4, et en notant que $T(C_n)$ est d'ordre $2n$, on acquérit la première inégalité qui est $\chi_{dom}(T(C_n)) \geq \lceil \frac{2n}{2} \rceil = n$.

Afin d'obtenir l'égalité, on donne une χ_{dom}-coloration c avec n couleurs définies de la manière suivante. Poser $c(u_i) = i+1$ pour $i \in \{1, 2..., n-1.\}$ et $c(u_n) = 1$. Ensuite, pour $j \in \{1, 2..., n.\}$ on pose $c(v_j) = j$. Il n'est pas difficile de vérifier que c est une coloration dominée de $T(C_n)$ utilisant n couleurs. ■

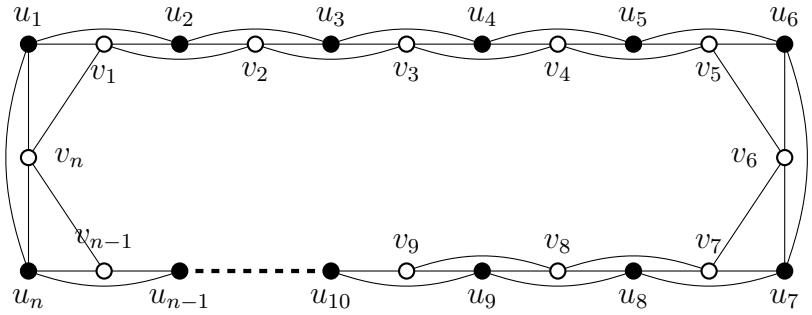


FIGURE 3.5 – Graphe total de C_n.

Dans ce qui suit, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique dominé du graphe central de chaîne, cycle et de l'étoile.

Théorème 3.2.6 *Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_{dom}(C(P_n)) = \chi_{dom}(C(C_n)) \begin{cases} 3 & Si\ n = 3, 4. \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & Si\ n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ d'ensemble de sommets $V(P_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(P_n) = \{u_1u_2, u_2u_3, ..., u_{n-1}u_n\}$. Et soit $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ l'ensemble des sommets ajoutés en subdivisant chaque arête $\{u_iu_{i+1}\}$ une seule fois. Pour l'illusration, voir la Figure 3.6.Tout d'abord, il est facile de vérifier que si $n = 3$ ou 4, le nombre chromatique dominé du graphe $C(P_n)$ est égal à 3.

Pour $n \geq 5$, comme le graphe obtenu $C(P_n)$ est sans $K_{1,5}$ d'ordre $2n-1$, il en découle d'aprés la Proposition 2.2.6 que $\chi_{dom}(C(P_n) \geq \lceil \frac{2n-1}{4} \rceil = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. La deuxième inégalité est obtenue en exhibant une coloration dominée c avec $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ couleurs définie comme suit. Nous avons 2 cas à traiter

Cas 3.2.1 *n est pair.*

Pour $i \in \{1, ..., \frac{n}{2}+1\}$, $c(u_i) = c(u_{i+1}) = i$ *si* $i \equiv 1 \bmod(2)$, *et pour* $i \in \{\frac{n}{2}+2, ..., n\}$, $c(u_i) = c(u_{i-1}) = i$ *si* $i \equiv 0 \bmod(2)$.

Pour $j \in \{1, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$, $c(v_j) = c(v_{j-1}) = j$ *si* $j \equiv 0 \bmod(2)$, *et pour* $j \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, ..., n-1\}$, $c(v_j) = c(v_{j+1}) = j$ *si* $j \equiv 1 \bmod(2)$.

Cas 3.2.2 *n est impair.*

Pour $i \in \{1, ..., \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $c(u_i) = c(u_{i+1}) = i$ *si* $i \equiv 1 \bmod(2)$, *et pour* $i \in \{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, ..., n\}$, $c(u_i) = c(u_{i-1}) = i$ *si* $i \equiv 0 \bmod(2)$.

Pour $j \in \{1, ..., \frac{n-1}{2} + 1\}$, $c(v_j) = c(v_{j-1}) = j$ *si* $j \equiv 0 \bmod(2)$, *et pour* $j \in \{\frac{n-1}{2} + 2, ..., n-1\}$, $c(v_j) = c(v_{j+1}) = j$ *si* $j \equiv 1 \bmod(2)$.

■

Avec un raisonnement similaire à celui utilisé ci-dessus, sauf que $C(C_n)$ est d'ordre $2n$ et on affecte au sommet v_n la couleur du sommet $u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, pour cette raison nous omettons les détails et nous obtenons le résultat pour les cycles.

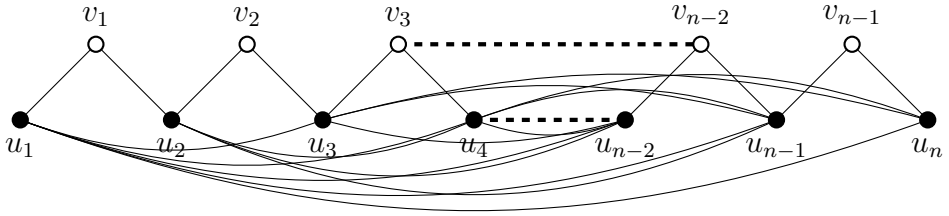


FIGURE 3.6 – Graphe central de P_n.

Théorème 3.2.7 *Tout graphe* $G = K_{1,n}$ *d'ordre* $n+1$, *satisfait*

$$\chi_{dom}(C(K_{1,n})) = n + 1.$$

Preuve. Supposons au contraire, $\chi_{dom}(C(K_{1,n}) < n + 1$, c'est-à-dire le graphe $C(K_{1,n})$ sera coloré par au plus n couleurs différentes. Commençons par une description de la structure de $C(K_{1,n})$. Alors $V(C(K_{1,n}))$ peut être partitionné en trois

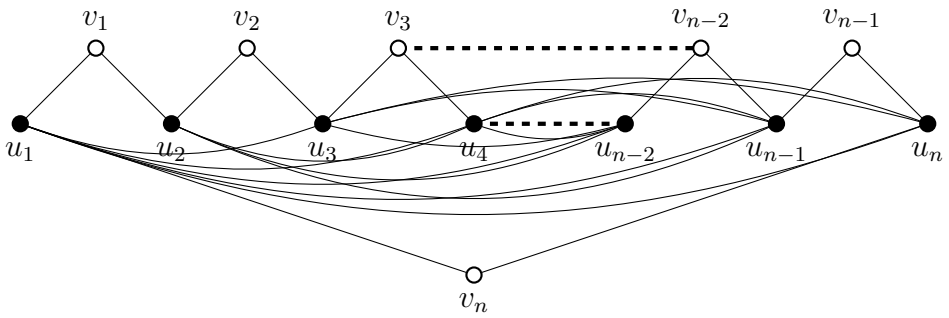


FIGURE 3.7 – Graphe central de C_n.

sous-ensembles disjoints $\{x_1\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ et $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ tels que $\{x_1\}$est le sommet centre de $K_{1,n}$, Y est l'ensemble des sommet ajoutés et Z est une clique de $C(K_{1,n})$(Pour l'illustration voir la Figure 3.8) . Soit c une χ_{dom}-coloration de $C(K_{1,n})$ utilisant n couleurs. Comme Z est une clique maximum d'ordre n, alors $\chi_{dom}\,(C(K_{1,n}) = n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que les sommets de Z sont colorés différemment avec n couleurs disons $1, 2, ..., n$ et le sommet x_1 porte une couleur i tels que $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Maintenant, supposons que les sommets de Y portent les $n - 1$ couleurs restantes. Dans ce cas, il existe deux sommets différents qui portent la même couleur. Par observation, et au vu de la domination, aucune couleur ne peut apparaître deux fois dans l'ensemble Y, car sinon c ne sera plus une coloration dominée, ce qui conduit à une contradiction. Cette contradiction achève la preuve du fait. ■

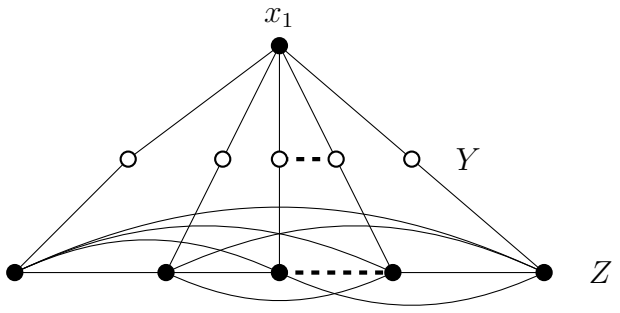


FIGURE 3.8 – Graphe central de $K_{1,n}$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la notion de la coloration dominée dans les graphes. La détermination du nombre chromatique dominé est un problème NP-complet pour un graphe quelconque. De ce fait et après avoir faire un recueil des notions élémentaires utilisées dans ce travail nous avons présenté quelques résultats sur la coloration dominée de certains graphes.

Notre travail s'est articulé autour de trois types de graphes. Plus en détail, nous avons déterminé, en premier lieu, la valeur exacte du nombre chromatique dominé du graphe milieu des chaînes, des cycles et de l'étoile. En second lieu, et pour les mêmes graphes, on a visé la recherche des valeurs exactes du nombre chromatique dominé pour leurs graphes totaux. A la fin nous nous sommes intéréssées au graphe central.

Les travaux accomplis durant ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. Voici une liste de problèmes qui se situent dans le prolongement de cette thèse.

— Etablir des bornes supérieures et inférieures qui encadrent le plus possible le paramètre étudié et caractériser les graphes extrémaux atteignant ces bornes.
— Déterminer la valeur exacte du nombre chromatique dominé du graphe milieu, total et central des autres graphes.

Bibliographie

[1] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., 21 : 429 - 490, 1977.

[2] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths., 21 : 491 - 567, 1977.

[3] S. Alikhani et M.R. Piri. ON The dominated chromatic number of certain graphs. Transactions on Combinatorics ISSN (print) : 2251-8657, ISSN (online) : 2251-8665 Vol. 9 No. 4 (2020), pp. 217-230.

[4] M. Behzad : A criterion for the total graph of a graph. proc. Camb. Philos. Soc. 63 : 679-681, 1967.

[5] C. Berge. Graphs. North Holland,1985.

[6] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194 - 197, 1941.

[7] Yen Hung Chen. The Dominated Coloring Problem and Its Application. in : B.Murgante, et al. (Eds.), Computatinal science and its application, ICCSA, 8584, Springer, Cham, 2014, pp. 132 - 14. Lecture Notes Com. Sci.

[8] F. CHOOPANI, A. JAFARZADEH, A. ERFANIAN, D.A. MOJDEH, On dominated coloring of graphs and some Nordhaus–Gaddum-type relations, Turkish J. Math., 2018 ; 42 : 2148 – 2156.

[9] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math. 14 : 247-256 ; 1976.

[10] Sandi Klavžar, Mostafa Tavakoli. Dominated and dominator colorings over (edge) corona and hierarchical products. Applied Mathematics and Computation 390 (2021) 125647.

[11] S. Kouider Aiad. Cours Formulation des problèmes d'ordonnancement. Université Yahia Farès de Médéa.

[12] H.B Merouane, thèse de doctorat. Coloration dominante et dominée dans les graphes, Blida, 2014.

[13] H.B Merouane, Haddad M, Chellali M, Kheddouci H. Dominated colorings of graphs. Graphs and Combinatorics. 31 : 713-727, 2015.

[14] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175 - 177, 1965.

[15] A. E. Prabha and A. Vijayalekshmi.Color class dominating sets in ladder and grid graphs, Vol. 9, No. 1, 993 - 995, 2021.