République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Médéa

Faculté des Sciences



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de Master

En : Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par : *DOUIHASNI Djouher*

FODIL Imene

Calcul exact de l'énergie d'interaction coulombienne pour un système de l'effet Hall quantique entier au facteur de remplissage $\nu = 1$ dans une géométrie du disque

---

Soutenue publiquement, le 20/06/2018, *devant le jury composé de :*

L. DEKAR	MCA	*Univ.Médea*	Président
H. ZITOUNI	MCA	*Univ.Médéa*	Examinateurs 1
N. ZAGHOU	MCB	*Univ.Médéa*	Examinateurs 2
M. AHMED AMMAR	MAA	*Univ.Médéa*	Encadreur

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Ce travail a été effectué à l'université Dr Yahia Farès de Médéa, donc en seconde lieu nos remerciements vont à cette université pour son accueil chaleureux et les conditions de travail idéales dont nous avons pu bénéficier.

Nous tenons à remercier notre encadreur Monsieur *M. AHMED AMMAR*, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont aussi également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous souhaitons vivement à remercier tous les membres du jury, monsieur le Dr *L. DEKAR* pour avoir présidé notre jury de mémoire, monsieurs les docteurs *H. ZTOUNI et N. ZAGHOU* pour avoir accepté d'examiner notre manuscrit.

A nos familles et nos amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles. tous nos enseignants durant les années des études.

Enfin, Nos remerciements s'étendent également à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Nous vous disons, Tous, un grand Merci.

Dédicace -1-

Je dédie ce travail à mes très chèrs tendre parent que le dieu inchalah me les garde en bonne santé, et une longue et belle vie.

Ma mère, le symbole de tendresse.

Mon père, le symbole de la responsabilité.

A mes chèrs frères.

A mes chères sœurs.

A tous les membres de ma famille, petits et grands.

A mes très chères amies Amina, Kenza, Khadidja, Ileham.

Aux membres de promotion.

Djouher

Dédicace -2-

Je dédie ce travail à :

Mes parents :

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Mes frères et sœurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes professeurs qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

Mes chères amies, et mes collègues d'étude.

Imene

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Effet Hall Classique **3**

1.1 Introduction 3

1.2 L'électron et le système de Hall 3

1.3 Résistance de Hall 4

1.4 Conclusion 6

2 Électrons dans des hétérostructures à T$\rightarrow 0K$ **7**

2.1 Introduction 7

2.2 Semi conducteurs 7

2.2.1 Semi-conducteur intrinsèque : 8

2.2.2 Semi-conducteur extrinsèque : 8

2.3 Les hétérostructures GaAs/AlGaAs 8

2.4 Gaz d'électron bidimensionnel (GEB) 9

2.5 Intérêt des gaz d'électron bidimensionnel (GEB) 9

2.6 propriétés d'un gaz d'électron à 2D 10

3 Effet Hall qauntique entier **12**

3.1 Introduction 12

3.2 Observation expérimentale 12

3.3 Rôle du désordre 14

3.4 Electron dans un champ magnétique 15

3.5 Niveaux de Landau 16
3.6 Potentiel central 19
3.6.1 Mouvement d'une particule dans un potentiel central 20
3.7 Explication de l'effet Hall quantique entier 22
3.8 Conclusion : 22

4 Application de la Méthode Analytique à l'EHQE 23
4.1 Introduction 23
4.2 Méthode de Ciftja 24
4.2.1 Interaction électron-électron 24
4.2.2 Interaction substrat - substrat : 26
4.2.3 Interaction électron-substrat 26
4.3 Méthode analytique 27
4.3.1 Application numérique pour $N_e = 8$: 29
4.4 Résultats 32
4.5 Conclusion 34

Conclusion générale 34

A Interaction substrat - substrat 36

B Interaction électron- substrat 38

C interaction électron-électron 40

Nomenclature 44

Bibliographie 45

Table des figures

1.1 Effet Hall classique. 3
1.2 Résistance de Hall R_H en fonction du champ magnétique B. 6

2.1 Puits quantiques fabriqués avec Ga-Al-As. 9

3.1 Experience de VonKlitzing qui permet l'observation de l'EHQE. 12
3.2 L'énergie des niveaux de Landau augmente lorsque les trajectoires cyclotrons se rapprochent des bords. 14
3.3 Mouvement cyclotron d'un electron à la position $\vec{r}$ autour du centre de guidage $\vec{R}$. 16
3.4 Niveaux de Landau. n représente les niveaux, et m est associé à la dégénérescence de chaque niveau. 18

4.1 Graphe qui comparé les énregies de la méthode analytique(disque en rouge) et le modéle de Ciftja (rectangle bleu). 33

Liste des tableaux

4.1 Energies d'interactions par particules (unité $\frac{e_0^2}{l_0}$.) pour un système de l'effet Hall quantique entier. 33
4.2 Energies d'interactions par particules (unité $\frac{e_0^2}{l_0}$.) pour un système de l'effet Hall quantique entier (Ciftja 2011) 33

Introduction générale

L'effet Hall quantique entier (EHQE) découvert au début des années 80 est un thème de recherche majeur de la physique de la matière condensée[1]. Il apparaît lorsque le potentiel de désordre est beaucoup plus fort que les interactions, sans négliger ces dernières interactions. L'effet Hall quantique entier a été observé dans divers systèmes bidimensionnels. Au départ il s'agissait surtout de gaz d'électrons dans des hétérostructures ou puits quantiques à base de GaAs. Ont suivi de nombreux autres semi-conducteurs comme des puits quantiques de silicium, des hétérostructures Si/SiGe. Un unique électron sur une surface bidimensionnelle soumis à un champ magnétique possède un spectre très particulier, organisé en niveaux macroscopiquement dégénérés sont appelés " niveaux de Landau ".

Ce manuscrit du mémoire est organisé comme ceci. Le chapitre1 est une introduction générale sur l'effet Hall classique. Nous exposons les conditions expérimentales, la nature dans lequel il observé. Il s'explique par un modèle bidimensionnel simple d'électrons soumis à un champ magnétique perpendiculaire.

Le chapitre 2 met l'accent sur les systèmes à basse température et les électrons dans les hétérostructures.

Nous introduisons dans le chapitre 3 les concepts fondamentaux de l'EHQE. On fait un rappel sur le mouvement d'une particule dans un potentiel central,et nous décrirons la dynamique des électrons dans un gaz bidimensionnel, nous commençons par considérer le problème quantique minimal d'un électron sur un plan soumis à un champ magnétique perpendiculaire intense.

Finalement, dans le chapitre 4 nous présentons la méthode analytique appliquée à

l'EHQE, cette méthode basée sur la détermination de l'énergie d'interaction coulombienne pour un nombre fini d'électron $N_e = 2, 3, 4, ...$ jusqu'à 8 électrons.

Chapitre 1

Effet Hall Classique

1.1 Introduction

L'effet Hall a été découvert en 1879 par Edwin Herbert Hall. Il montre expérimentalement que sous champ magnétique un courant induit une tension dans la direction perpendiculaire et que cette tension est proportionnel au champ magnétique appliqué[2]. Cette tension, appelée tension de Hall .

1.2 L'électron et le système de Hall

Un système d'effet Hall classique est soumi à deux forces fondamentales (voir figure 1.1[4]) sont la force de Lorentz et la force électrostatique.

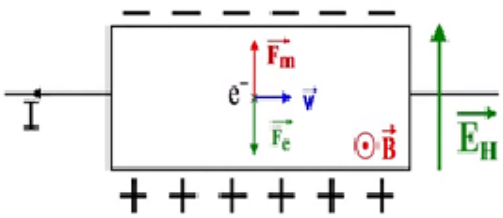


FIG. 1.1 – Effet Hall classique.

La force de Lorentz subie par une charge q dans un champ magnétique s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_m = q\left(\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B}\right), \tag{1.1}$$

où $q = -e$ est la charge de l'électron, $\overrightarrow{v}$ la vitesse des électrons, $\overrightarrow{B}$ l'induction magnétique.

La force électrostatique est définie par :

$$\overrightarrow{F}_e = q\overrightarrow{E}_H, \tag{1.2}$$

où $\overrightarrow{E}_H$ Champ de Hall.

1.3 Résistance de Hall

Si on applique la deuxième loi de Newton sur les deux forces :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = 0, \tag{1.3}$$

$$\overrightarrow{F}_m + \overrightarrow{F}_e = \overrightarrow{0}, \tag{1.4}$$

donc :

$$-e.\overrightarrow{E}_H + e(\overrightarrow{v}\ \Lambda\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}, \tag{1.5}$$

$$\overrightarrow{E}_H = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}, \tag{1.6}$$

$$E_H = vB\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \tag{1.7}$$

$$E_H = vB, \tag{1.8}$$

$$E_H = \ vB\ \sin(\frac{\pi}{2}), \tag{1.9}$$

alors :

$$E_H = vB. \tag{1.10}$$

D'autre part on crée un gradient de densité électronique perpendiculaire à la direction du courant. Ce gradient mène à une tension U :

$$E_H \equiv \frac{U_H}{w} = R_H.J_X, \tag{1.11}$$

$$J_X = q.E_H, \tag{1.12}$$

$$J_x = n_e.q.E_H, \tag{1.13}$$

tel que J_x la densité decourant et n_e la densité des charges .

On a aussi :

$$\begin{aligned} J_x &= n_e.q.V, \\ &= n_e.q.\frac{E_H}{B}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

alors le champ de Hall E_H s'écrit

$$\begin{aligned} E_H &= \frac{J_x}{n_e.q}.B, \\ &= R_H.J_X. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Par identification :

$$R_H = \frac{E_H}{J_x} = \frac{B}{n_e.q}. \tag{1.16}$$

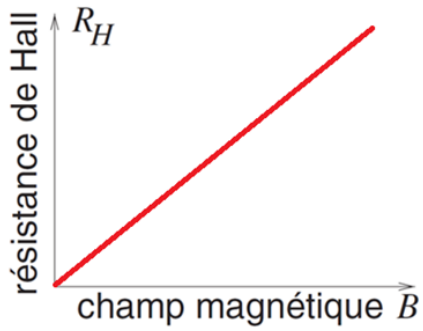


FIG. 1.2 – Résistance de Hall R_H en fonction du champ magnétique B.

Donc la résistance de Hall R_H est proportionnelle au champ magnétique B et inversement proportionnelle à la densité électroniqueFIG.1.2.

La résistance longitudinale R_x et de Hall R_H sont définies respectivement par :

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} \text{ et } R_H = \frac{U_H}{I_x} \tag{1.17}$$

Si on note L et W tel que : L est la longueur et$W$ la largeur de la plaque conductrice. Selon le long coté de l'échantillon (L) la densité de courant est uniforme $\overrightarrow{J}$, et le champ électrique E_H est aussi uniforme suivant le coté (W).

on peut prendre l'approximation suivante :

$$E_H = \frac{U_H}{W}. \tag{1.18}$$

Cette dernière approximation est vérifié pour un échantillon, où $L \ggg W$ [5].

1.4 Conclusion

L'effet Hall classique est le fait qu'un électron dans un champ magnétique perpendiculaire acquiert une résistance qui varie linéairement avec le champ magnétique.

Chapitre 2

Électrons dans des hétérostructures à T$\rightarrow 0K$

2.1 Introduction

Le traitement quantique d'un système de l'effet Hall est basé sur certaine conditions expérimentales : un champ magnétique très fable jusqu'à 10 Tesla, la température doit être très fort (3-30 mK) et le mouvement des électrons doit être restreint à deux dimensions[3, 4]. Ce dernier, peut le définir comme un gaz d'électron à basse température.

Nous avons décrit brièvement dans ce chapitre la réalisation d'un gaz électronique bidimensionnel, l'intérêt et la propriété de ce gaz.

2.2 Semi conducteurs

Les semi-conducteurs sont des corps solides dont la conductivité électrique se situe entre celle des conducteurs et celle des isolants. Ils sont isolants s'ils sont purs et au zéro absolu, et leurs conductivité électrique augmente avec la température T[6], et en distingue deux types de semi-conducteurs :

2.2.1 Semi-conducteur intrinsèque :

Un semi-conducteur intrinsèque est un semi-conducteur pur, mais en réalité il existe un peut d'impureté. Cette dernière présente une propriété électronique négligeable : les électrons de la bande de conduction proviennent uniquement de la bande de valence et laissent des trous derrière eux. Si on appelle : n la densité d'électrons et p la densité de trous, on a dans un semi-conducteur intrinsèque n=p.

2.2.2 Semi-conducteur extrinsèque :

Un semi-conducteur extrinsèque ou semi conducteur dopé tout semi-conducteur qu'on a introduit volontairement des impuretés, et il existe :

Un semi-conducteur extrinsèque de type n : est un semi-conducteur dopé avec des impuretés dites donneuses, en faible concentration par rapport aux autres atomes du cristal : typiquement 10^{15} a $10^{18} cm^{-3}$. Les impuretés donneuses fournissent des électrons supplémentaires au système. Ce sont par exemple des atomes de Phosphore (ou Arsenic, ou tout élément de la colonne V du tableau périodique).

Un semi-conducteur extrinsèque de type p : est un semi-conducteur dopé avec des impuretés dites accepteuses, en faible concentration par rapport aux autres atomes du cristal : typiquement 10^{15} a $10^{18} cm^{-3}$. Les impuretés accepteuses fournissent des trous supplémentaires au système. Ce sont par exemple des atomes de Bore (ou Aluminium, ou Gallium, ou tout élément de la colonne III du tableau périodique).

2.3 Les hétérostructures GaAs/AlGaAs

Une hétérostructure est une jonction formée par la juxtaposition de deux matériaux de natures différentes. Les hétérostructures semi-conducteur-semi-conducteur sont généralement des hétéroépitaxies car les deux semi-conducteurs mis en présense ont la même structure cristallographique (cubique à faces centrées)[7].. Quand les deux semi-conducteurs ont une conductivité du même type, l'hétérostructure est dite isotype, et quand les deux semi-conducteurs ont une conductivité déférente, l'hétérostructure est dite anisotype[8].

De nombreux composants à hétérostructures sont aujourd'hui produit industriellement, la plupart étant des composants GaAs/GaAlAs : diode laser à double hétérostructures, transistors bipolaires hétérojonction, diode laser à puits quantiques.

2.4 Gaz d'électron bidimensionnel (GEB)

Le gaz d'électron bidimensionnel est la structure dans laquelle on arrive à obtenir des couches très minces entrecoupées de puits quantiques. Ces derniers étant produits à partir d'une série de couches du semi-conducteur placé de façon d'un superposées où bien un Sandwich. Par exemple : l'Arséniure de gallium (GaAs) et l'Arseniure d'aluminium (AlAs). L'énergie potentielle étant plus basse dans le GaAs, les électrons resteront dans ces couches-la, prise en sandwich par deux couches de AlAs (figure 1-1). Les fils quantiques sont obtenus lorsque les électrons sont situés dans deux directions de l'espace[9], en laissant le mouvement libre dans la troisième dimension.

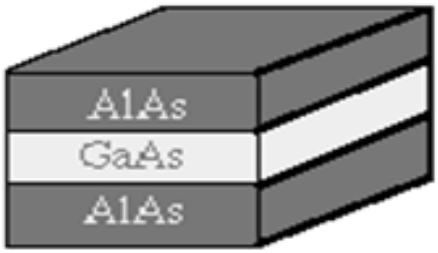


FIG. 2.1 – Puits quantiques fabriqués avec Ga-Al-As.

2.5 Intérêt des gaz d'électron bidimensionnel (GEB)

La concentration en porteurs libres dans un semi-conducteur massif tridimensionnel non dopé est très faible (de l'ordre de $n_e = 10^{11}/Cm^3$), on peut augmenter ce nombre d'électrons libres en introduisant des dopants au cours de la croissance du matériau c'est à dire en introduisant des impuretés comme : le silicium (Si) dans l'Arséniure de Gallium

(GaAs). L'ionisation de ces impuretés libérant un électron dans le cas de donneurs (dopage n), ou un trou pour les accepteurs (dopage p). Cette augmentation du nombre de porteurs libres contribue à augmenter la conductivité du matériau. La diffusion des porteurs libres par ces impuretés ionisées limite la conductivité même à basse température. Tout autant les centres de diffuseurs le nombre de porteurs augmente mécaniquement par la croissance de nombre de dopants. La solution des hétérojonctions à modulation de dopage consiste à séparer spatialement les porteurs libres des impuretés ionisées, ce qui permet de réduire énormément la diffusion. Lors d'un processus diffusif, le temps de relaxation dû aux défauts et aux impuretés est mesuré par la mobilité. En présence d'un champ électrique extérieur appliqué, les électrons acquièrent en régime stationnaire, une vitesse de dérivé dans la direction du champ appliqué. La mobilité est définie comme le rapport entre cette vitesse et le champ électrique. Séparer les porteurs libres des impuretés permet donc d'accroitre la mobilité. C'est sur ce principe que sont constitués les gaz bidimensionnels d'électrons à partir d'hétérojonctions à modulation de dopage que nous allons maintenant d´écrire [10].

2.6 propriétés d'un gaz d'électron à 2D

Le gaz d'électrons bidimensionnel ou bien les hétérojonctions GaAs/AlGaAs est caractérisé par des propriétés qui sont[10] :

- On trouve les électrons bidimensionnels du coté de GaAs dans la jonction et les donneurs chargés positivement dans l'autre coté de la jonction.
- L'effet des impuretés sur les électrons est négligeable, donc on peut réaliser des échantillons de gaz d'électrons bidimensionnel avec une très grande mobilité.
- La mobilité dans un gaz bidimensionnel d'électrons de concentration en porteur de $10^{12}/cm^2$ sur une épaisseur de $100A^\circ$ est $10^6 cm^2/Vs$ par contre dans un semiconducteur tridimensionnel dopé de concentration en porteurs de $10^{17}/cm^3$, la mobilité est de l'ordre de $10^4 cm^2/Vs$.
- Dans un système de l'effet Hall, le gaz d'électrons bidimensionnel sous un champ magnétique est considéré comme un système isotrope.

- Dans la structure des hétérojonctions GaAs/AlGaAs la distance moyenne entre électrons voisins est de l'ordre de 10 nm.

Chapitre 3

Effet Hall qauntique entier

3.1 Introduction

En 1980, von Klitzing et leurs collaborateurs ont réalisé des mesures très précises du tenseur de résistivité dans un échantillon de Si-MOS à très basse température et en présence d'un champ magnétique[1]. Il découvre que la résistance de Hall R_H varie par un nombre entier et représente des plateaux [11].

3.2 Observation expérimentale

L'observation expérimentale de l'effet Hall quantique entier par Von Klitzing montre que la résistance de Hall forme des plateaux sous les conditions présidentes[1] :

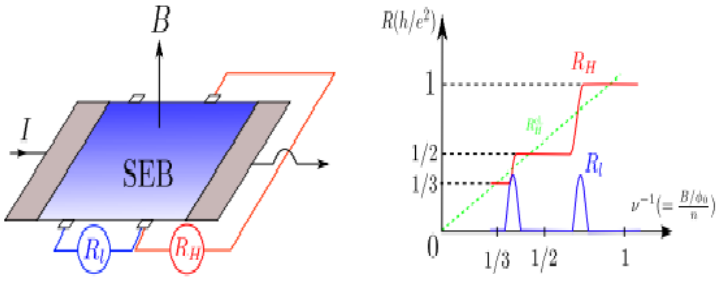


FIG. 3.1 – Experience de VonKlitzing qui permet l'observation de l'EHQE.

La résistance de Hall (schéma à droite) présente une succession de plateaux qui coïncident avec l'annulation de la résistance longitudinale. La ligne verte pointillée représente la variation de la résistance de Hall prédite par la théorie classique.

Ces plateaux correspondent a des facteurs de remplissage tel que [3]. :

$$\nu = \frac{N_e}{N_B}, \tag{3.1}$$

avec N_e nombre d'électron et N_B la dégénérescence des niveaux de Landau ou le nombre de quanta de flux. Ou encore

$$\upsilon = \frac{n_e}{n_B} = 2\pi l_B^2 n, \tag{3.2}$$

avec $n_B = N_B/S$ est la densité de flux, est S est l'aire du systeme.

La compréhension de l'EHQE se fait en deux temps. D'abord il faut montrer que l'expression de la résistance de Hall est la même en mécanique quantique qu'en mécanique classique. On la réécrit en introduisant le facteur de remplissage des Niveaux de Landau.

Pour un systéme à 2D :

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{E_H}{J_x} \\ &= \frac{B}{n_e e}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En remplaçant la densité d'électrons $n_e$par leur expression, on trouve :

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{B}{e^2}\frac{S}{N_e}\frac{e}{h}h \\ &= \frac{\Phi}{\Phi_0}\frac{1}{N_e}\frac{h}{e^2} \\ &= \frac{N_B}{N_e}\frac{h}{e^2} \\ &= \frac{h}{\nu e^2}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ν prend des valeur entier.

3.3 Rôle du désordre

Le désordre dans l'EHQE est le résultat du potentiel induit par des impuretés de substitution qui est à l'origine du dopage d'un semi-conducteur.Il est représenté par un potentiel aléatoire $V(\overrightarrow{r})$ à l'intérieur de l'échantillon, dont les variations spatiales sont lentes devant le rayon cyclotron$\left(l_B \left|\overrightarrow{\nabla} V\right| \ll \hbar\omega_c\right)$. Ainsi localement une trajectoire cyclotron est soumise à un champ électrique $\overrightarrow{E} = \frac{1}{e}\overrightarrow{\nabla} V$ et acquiert donc une vitesse de dérive [13] :

$$\overrightarrow{v_\perp} = \frac{1}{e}\frac{\left(\overrightarrow{\nabla} V \wedge \overrightarrow{B}\right)}{B^2} \tag{3.5}$$

Ce trajectoire ne peut pas contribuer au transport électronique, les états dans lesquels se trouvent ces électrons sont souvent qualifiés d'états localisés. Cependant le long de la direction x , la résistance est nulle. Celle-ci fait un problème de transport de courant ; qui sera expliqué par l'état de bord.

La caractérisation d'un bord est l'existance d'un potentiel de confinement. Ce potentiel est rapidement croissant au bord .

La modélisation de potentiel de confinement peut donner par[15] :

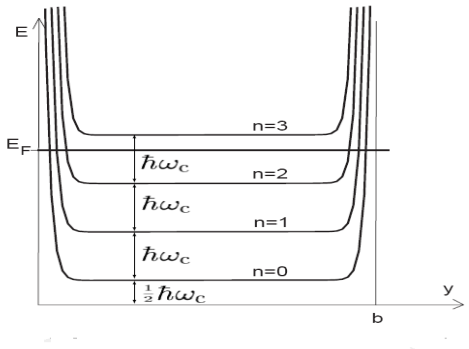


FIG. 3.2 – L'énergie des niveaux de Landau augmente lorsque les trajectoires cyclotrons se rapprochent des bords.

$$V(y) = 0; 0 < y < Ly, \tag{3.6}$$

$$V(y) = \infty; (y < 0) \text{ ou } (y > Ly) \tag{3.7}$$

Dans le cas où $l_B \frac{\partial V}{\partial y} \ll \hbar\omega_c$, on peut exprimer l'énergie des NL par :

$$E_{n;k} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c + V(y_c) \tag{3.8}$$

3.4 Electron dans un champ magnétique

Si on applique un champ magnétique suivant l'axe z perpendiculaire a un gaz bidimensionnel d'électrons situé dans le plan xy, la projection de la position r de l'électron, et V sa vitesse suivant l'axe z est nulles. Commençons maintenant la description de l'effet Hall quantique par l'introduction d'un champ magnétique $B = (0, 0, B)$ appliqué perpendiculairement au gaz bidimensionnel d'électrons[14].

L'électron est soumis à la force de Lorentz représenté par et l'équation (1.1). On pose $V_x = v_x$ et $V_y = v_y$.

Donc [16] :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_c v_y \\ \ddot{y} &= \omega_c v_x. \end{aligned} \tag{3.9}$$

On integre 3.9 ,on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_c(y - Y) \\ \dot{y} &= \omega_c(x - X) \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= X - r\ \sin(\omega_c t + \varphi) \\ y &= Y + r\ \cos(\omega_c t + \varphi). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors le mouvement de l'électron dans un champ magnétique est un mouvement cyclotron de centre $(X\ , Y)$, parcouru à la fréquence ω_c, comme schématisé sur la Figure FIG.3.3.

Où $\overrightarrow{r}$ représente la position de l'électron, $\overrightarrow{\eta}$ relie les deux vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{r}$.

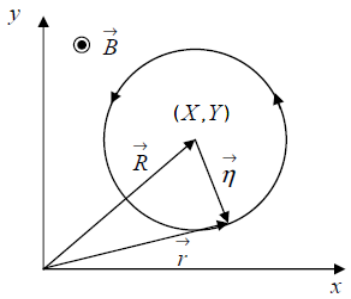


FIG. 3.3 – Mouvement cyclotron d'un electron à la position $\vec{r}$ autour du centre de guidage $\vec{R}$.

Le mouvement cyclotron d'un électron dans un champ magnétique $\vec{B}$ autour du centre de guidage $R(X,Y)$, où $\overrightarrow{R}$ est le centre de l'orbite cyclotron et considéré comme une constante du mouvement. L'équation (3.11) donne la relation entre $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{\eta}$[12] :

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta_x, \eta_y) \\ &= r - R. \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.5 Niveaux de Landau

Dans ce chapitre, on va étudier le problème d'une particule dans un champ magnétique B appliqué selon l'axe z. Ensuite, on va voir une approche intuitive du problème quantique. Nous utilisons la jauge symétrique qui consisté à écrire le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ sous la forme $\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}(-B_y, B_x, 0)$. Dans ce cas L'Hamiltonien du système s'écrit[17] :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m_e}\left[\overrightarrow{p} + e\overrightarrow{A}\right]^2 \\ &= \frac{\overrightarrow{\Pi}^2}{2m_e}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$\overrightarrow{p} = -\hbar\overrightarrow{\nabla}$ est l'opérateur implilsion, $\overrightarrow{A}$ le potentiel vecteur tel que $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_z$.

L'opérateur de la quantité de mouvement s'écrit $\overrightarrow{\Pi} = m_e\overrightarrow{v} = \overrightarrow{p} + e\overrightarrow{A}$. Dans ce cas, l'opérateur impulsion p ne commute pas avec l'hamiltonien H à cause de la dépendance

spatiale de A, par contre l'opérateur quantité de mouvement est commute, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\overrightarrow{\Pi}^2}{2m_e} \\ &= \frac{(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)}{2m_e} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Les relations de commutations est donné par :

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= e([p_x, A_y] + [A_x + p_y]) \\ &= -i\hbar e(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= -i\hbar e(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) \\ &= -ie\hbar B \\ &= -i\hbar^2/\ell^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ou ℓ : est la longueur magnétique(ou "rayon de Larmor") tel que $\ell = \sqrt{\hbar/eB}$.

Nous considérons $\overrightarrow{B} = B_z$ avec $B \geq 0$.

On reconnaît, à un facteur multiplicatif près, les relations de commutations entre variables canoniques.

Ainsi, l'Hamiltonien(3.13) a une même structure algébrique qu'un oscillateur harmonique à 1D. On définit donc les opérateurs de création et d'annihilation :

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x - i\Pi_y), \text{ et } a^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y), \tag{3.15}$$

$$[a, a^+] = 1. \tag{3.16}$$

Alors l'Hamiltonien H peut être réécrit en termes de a et a^+ tel que :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar^2}{2ml_B^2}(aa^+ + a^+a) \\ &= \hbar\omega_c(aa^+ + \frac{1}{2}), \end{aligned} \tag{3.17}$$

avec $\omega_c = \frac{e|B|}{m_e}$la pulsation cyclotronique, $aa^+ = n$ est la valeurs propres de N.

Les énergies possibles s'organisent par niveaux selon :

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) \tag{3.18}$$

Le spectre est donc séparé en niveaux, appelés "niveaux de Landau"[3].

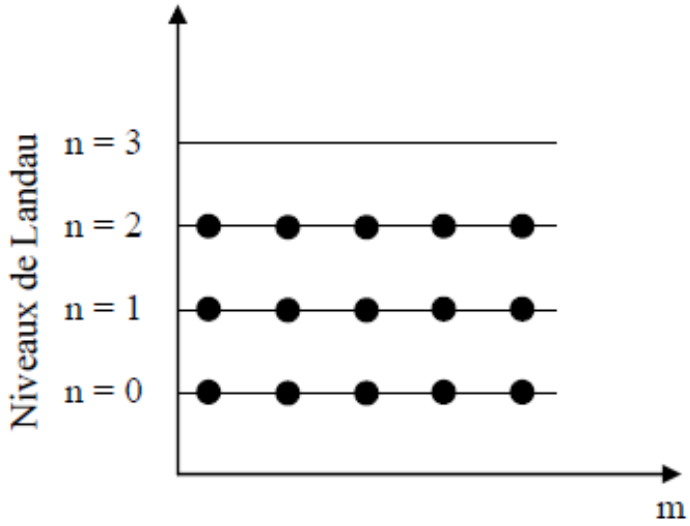


FIG. 3.4 – Niveaux de Landau. n représente les niveaux, et m est associé à la dégénérescence de chaque niveau.

On peut voir ce système comme deux oscillateurs harmoniques tel que l'équation (2.13) devient :

$$E_n = \hbar\omega_c(aa^+ + \frac{1}{2}) + \hbar\omega'(b^+b + \frac{1}{2}), \tag{3.19}$$

où la deuxième fréquence de l'oscillateur est nulle, et $b^+b = m$, le deuxième nombre quantique (valeur propre).

Les opérateurs b et b^+ sont donnés par :

$$b^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(X - iY), \text{ et } b = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(X + iY), \tag{3.20}$$

$$X = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(b^+ + b), \text{ et } Y = \frac{il_B}{\sqrt{2}}(b^+ - b). \tag{3.21}$$

L'ensemble des états propres de H sont exprimés par les deux nombres quantiques n, m par :

$$\begin{aligned} a^+ \quad | \quad n,m\rangle &= \sqrt{n+1}\mid n+1,m\rangle, \\ a \quad | \quad n,m\rangle &= \sqrt{n}\mid n-1,m\rangle, (n\rangle 0), \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} b^+ \quad | \quad n,m\rangle &= \sqrt{m+1}\mid n,m+1\rangle, \\ b \quad | \quad n,m\rangle &= \sqrt{m}\mid n,m-1\rangle, (m\rangle 0) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Lorsqu' un des deux nombres quantique est égal à zéro, on obtient :

$$\begin{aligned} a \quad | \quad 0,m\rangle &= 0, \\ b \quad | \quad n,0\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

A l'aide des opérateurs d'échelle, un état arbitraire peut par conséquent être construit à partir de l'état $\mid 0,0\rangle$ [16] :

$$\mid n,m\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}\frac{(b^+)^m}{\sqrt{m!}} \mid 0,0\rangle \tag{3.25}$$

3.6 Potentiel central

Un potentiel central est un potentiel qui ne dépend que de la position de la particule qu'à travers sa norme[19]. Il intervient dans de nombreux systèmes physiques dont l'un des plus importants est celui d'une particule plongée dans un potentiel coulombien[20]. On étudiera également le cas d'un système de deux particules dont l'interaction, qui est décrite par un potentiel $V\left(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}\right)$, dépendant seulement de leurs positions relatives $\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}$, $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ étant les vecteurs positions des deux particules dans un référentiel d'inertie d'origine O.

3.6.1 Mouvement d'une particule dans un potentiel central

Considérons une particule de masse M en mouvement dans un potentiel central de sorte que $V(r)$ ne dépend que de la distance $r = |r|$ et l'hamiltonien H de la particule s'écrit[20] :

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \frac{-\hbar^2}{2M}\Delta + V(r), \end{aligned} \tag{3.26}$$

où Δ est le laplacien,et $M = M_1 + M_2$

Pour un système de deux particules de masse M_1 et M_2 l'hamiltonien devient :

$$H = \frac{-\hbar^2}{2M_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2M_2}\Delta_2 + V(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}). \tag{3.27}$$

On a $P = i\hbar\nabla$, donc l'hamiltonien 3.27 on peut écrite comme suite :

$$H = \frac{p_1^2}{2M_1} + \frac{p_2^2}{2M_2} + V(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}), \tag{3.28}$$

où $\overrightarrow{P_1} = M_1\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{P_2} = M_2\overrightarrow{V_2}$ sont les quantités de mouvement des deux particules.

On définit les coordonnées du centre de masse G du ce système par :

$$\overrightarrow{r_G} = \frac{M_1\overrightarrow{r_1} + M_2\overrightarrow{r_2}}{M}. \tag{3.29}$$

Alors on déduire :

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_G} + \frac{M_2}{M}\overrightarrow{r}, \tag{3.30}$$

$$\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_G} + \frac{M_1}{M}\overrightarrow{r}. \tag{3.31}$$

D'après les équations3.30et3.31 :

$$\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r}.$$

L'équation3.28devient :

$$\begin{aligned} H &= H_G + H_r \\ &= \frac{p_G^2}{2M} + \frac{Mp^2}{2M_1M_2} + V(\overrightarrow{r}), \end{aligned} \tag{3.32}$$

tel que :

$H_G = \frac{p_G^2}{2M}$ est l'hamiltonien du centre de masse dans le référentiel du centre de masse se terme est nul $\left(\overrightarrow{P_G} = 0\right)$, et $H_r = \frac{Mp^2}{2M_1M_2} + V(\overrightarrow{r})$ est l'hamiltonien relative et représente l'énergie du système des deux particules dans le référentiel du centre de masse [20].

Dans le cas d'un système dont l'interaction est décrite par le potentiel coulombien [21] :

$$V(r) = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{-e^2}{r}, \tag{3.33}$$

où r est la distance des deux particules et $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$, et $\mu = \frac{M_1M_2}{M}$est la masse réduite du système.

Alors l'hamiltonien relative devient :

$$H_r = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}. \tag{3.34}$$

L'hamiltonien relative l'équation 3.34 peut représente par équation aux valeurs propres suivant :

$$[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\Delta - \frac{e^2}{r}]\Psi(\overrightarrow{r}) = E\ \Psi(\overrightarrow{r}) \tag{3.35}$$

L'étude de l'effet Hall quantique mérite un traitement du mouvement d'un électron dans un champ magnétique, et pour décrire ce phénomène, nous avons décrit brièvement l'hamiltonien d'une particule dans un potentiel central, ainsi que l'énergie d'un système de deux particules dont l'interaction est décrite par le potentiel coulombien $\frac{1}{r}$. Dans le cinquième chapitre, cette étude d'énergie sera complétée par une méthode analytique, pour vérifier que l'état fondamental de la fonction d'onde de Laughlin pour la fraction $\nu = 1$.

3.7 Explication de l'effet Hall quantique entier

L'effet Hall quantique entier explique tout d'abord que les plateaux de résistance se produisant autour de $B_i = \frac{h\rho}{i\ e}$ et ils correspondent à un facteur de remplissage :

$$\nu = \frac{\rho}{B/\Phi_0} = i \qquad \text{(avec } i \text{ entier)}.$$

La même chose pour le champ magnétique, la formule classique de la résistance de Hall donne : $R_H = \frac{h}{i\ e^2}$ce qui est égale à la valeur obtenue expérimentalement. Ainsi, a priori, le fait que la résistance de Hall ait cette valeur pour ce champ magnétique n'est pas surprenant ; le point qui mérite d'être expliqué c'est que la résistance de Hall soit constante quand le champ magnétique est au voisinage de cette valeur[18]. Ainsi qu'un plateau indique que pour une certaine valeur de champ B le système devient incompressible à cause de la densité d'électrons n_e qui reste accrochée à celle du quanta de flux n_B pour garder le rapport $\nu = \frac{n_e}{n_B} = p$ constant.

3.8 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre les propriétés des électrons d'un gaz d'électrons à 2D soumis à un champ magnétique intense. Nous recherchons explicitement les états propres de l'hamiltonien H dans la jauge symétrique. Pour des champs plus intenses, la résistance de Hall présente des plateaux alors que la résistivité longitudinale s'annule et on obtenir l'effet Hall quantique entier (EHQE).

Chapitre 4

Application de la Méthode Analytique à l'EHQE

4.1 Introduction

L'effet Hall quantique entier est beaucoup plus complexe et nécessite une compréhension profonde d'introduire le problème de Ne électrons en interaction coulombienne. Dans ce chapitre nous présentons les fonctions d'onde de Laughlin qui sont de très bonnes approximations du fondamental lorsque le facteur de remplissage est $\nu = 1$.

Considérons d'abord les électrons libres, pour un champ magnétique uniforme homogène $B = (0, 0, -B)$.

On introduit les variables complexes z et $\overline{z}$ avec $z = x + iy$. La fonction d'onde de Laughlin associe a ces variables complexe s'écrit[22] :

$$\Psi(z_1, z_2, ..., z_{N_e}) = C_{N_e} \prod_{i<j}^{N_e} (z_i - z_j) \exp(-\sum_{j=1}^{N_e} |z_i^2|/4l_B^2). \tag{4.1}$$

Les vecteurs de position on coordonnées polaires[23] en notation complexe $z_j = x_j + y_j = r_j e^{i\varphi_j}$, avec r est la distance radiale et φ est l'angle polaire.

Pour un système dans la géométrie du disque avec Ne électrons et un facteur de remplissage $\nu = 1$ les électrons polarisés dans le sens du champ magnétique et occupent tous les plus bas niveaux du Landau (PBNL). La densité électronique de ce système est

donné par $\rho_0 = \frac{Ne}{\Omega_N}$ (nombre d'électrons par unité de l'aire) ou bien on peut récrire :

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi l_0^2 m}, \tag{4.2}$$

où $l_0 = \sqrt{\hbar/(eB)}$ est la longueur magnétique et $\hbar$ la constante de Planck. On réduire le rayon de disque tel que ce dernier est varie en fonction de Ne :

$$\frac{R_{Ne}}{l_0} = \sqrt{2Ne}. \tag{4.3}$$

Nous étudions analytiquement les fonctions d'ondes d'un système d'électrons ($N_e = 1, ..., 8$) de l'EHQE dans la géométrie du disque. On peut ensuite comparer ces résultats avec celui obtenu par le modèle proposé par Ciftja [24] de l'état fondamental à $\nu = 1$.

4.2 Méthode de Ciftja

L'énergie d'interaction par particule de l'état fondamental[24, 25]est :

$$\epsilon = \epsilon_{ee} + \epsilon_{eb} + \epsilon_{bb}, \tag{4.4}$$

où $\epsilon_{ee} = \frac{\langle \hat{V}_{ee} \rangle}{N_e}$, $\epsilon_{eb} = \frac{\langle \hat{V}_{eb} \rangle}{N_e}$ et $\epsilon_{bb} = \frac{\langle \hat{V}_{bb} \rangle}{N_e}$ sont respectivement l'énergie totale, l'énergie d'interaction électron-électron, électron-substrat et substrat-substrat.

4.2.1 Interaction électron-électron

On peut écrire ϵ_{ee} comme suite :

$$\epsilon_{ee} = \epsilon_{ee}^d + \epsilon_{ee}^x, \tag{4.5}$$

où ϵ_{ee}^d est l'énergie d'interaction directe, ϵ_{ee}^x est l'énergie d'interaction d'échange.

Pour calculer ϵ_{ee}^d et ϵ_{ee}^x respectivement nous avons :

$$\epsilon_{ee}^d = \frac{1}{2N_e} \int d^2 r_1 \int \upsilon(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \rho(\overrightarrow{r_1}) \rho(\overrightarrow{r_2}) d^2 r_2, \tag{4.6}$$

$$\epsilon_{ee}^{x} = \frac{-1}{2N_e}\int d^2r_1 \int \upsilon(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \mid \rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) \mid^2 d^2r_2, \tag{4.7}$$

avec $\rho(\overrightarrow{r_i})$ est la fonction de la densité depend de r_i et ne dépende pas de $\phi_i (i = 1, 2)$, et défini comme suite :

$$\begin{aligned} \rho(\overrightarrow{r_i}) &= \sum_{j=0}^{N_e-1} \mid \Psi_j(\overrightarrow{r_i}) \mid^2 & (4.8)\\ &= \rho_0 F(\frac{r_i}{l_0}), (i = 1, 2), & (4.9) \end{aligned}$$

où

$$F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{j=0}^{N_e-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^j, \tag{4.10}$$

avec $\rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2})$ est la matrice de la densité électronique de deux particules :

$$\begin{aligned} \rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) &= \sum_{j=0}^{N_e-1} \Psi_j(\overrightarrow{r_1})^* \Psi_j(\overrightarrow{r_2}) & (4.11)\\ &= \rho_0 e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2l_0^2}} \sum_{j=0}^{N_e-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{r_1 r_2}{2}\right)^j e^{ij(\phi_2-\phi_1)}, & (4.12) \end{aligned}$$

avec leur complexe conjugue est :

$$\rho^*(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) = \rho_0 e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2l_0^2}} \sum_{j,=0}^{N_e-1} \frac{1}{j,!} \left(\frac{r_1 r_2}{2}\right)^{j,} e^{ij,(\phi_2-\phi_1)}. \tag{4.13}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mid \rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) \mid^2 &= \rho^*(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) \rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2})\\ &= \rho_0 e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2l_0^2}} \{ \sum_{j=0}^{N_e-1} \sum_{j,=0}^{N_e-1} \frac{1}{j!j,!} \left(\frac{r_1 r_2}{2l_0^2}\right)^{jj,} e^{i(j-j,)(\phi_2-\phi_1)} \}. & (4.14) \end{aligned}$$

4.2.2 Interaction substrat - substrat :

On défini l'énergie d'intéraction substrat- substrat par :

$$\epsilon_{bb} = \frac{\left\langle \widehat{V}_{bb} \right\rangle}{N_e} = \frac{e^2\rho_0^2}{2N_e}\int_{\Omega_{N_e}} d^2r \int_{\Omega_{N_e}} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - r'|}dr'. \tag{4.15}$$

D'aprés les calcules on trouve :

$$\epsilon_{bb} = \frac{8}{3\pi}\sqrt{\frac{N_e}{2}}\frac{e^2}{l_0}. \tag{4.16}$$

D'après l'équation (4.16), l'énergie d'interaction substrat - substrat varie suivant la relation[24] $\left\langle \widehat{V}_{bb} \right\rangle \propto N_e^{\frac{3}{2}}$.

4.2.3 Interaction électron-substrat

On défini l'équation de l'énergie d'interaction électron- substrat par :

$$\epsilon_{eb} = \frac{\langle \widehat{V}_{eb} \rangle}{N_e} = \frac{-e^2\rho_0}{N_e}\int d^2r_1\rho\left(\overrightarrow{r}_1\right)\int_{\Omega_{N_e}} \frac{1}{|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}|}d^2r. \tag{4.17}$$

A partire de les détailles du calcul de ϵ_{eb} (voir annexe B) on trouve :

$$\epsilon_{eb} = \frac{-e^2}{l_0}\sqrt{\frac{2}{N_e}}\int_0^\infty \frac{dq}{q}J_1\left(q\sqrt{2N_e}\right)e^{\frac{-q^2}{2}}L_{n-1}^1\left(\frac{q^2}{2}\right), \tag{4.18}$$

avec :

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+k}e^{-x}), \tag{4.19}$$

tel que L_n^k sont les polynômes de Laguerre associés d'ordre $n = 0, 1, ...$et de degré $k = 0, 1, ...$

On peut écrire ces polynômes de Laguerre comme suit :

$$L_n^k(x) = (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}[L_{n+k}(x)], \tag{4.20}$$

Où :

$$L_n = L_n^0(x) \tag{4.21}$$

4.3 Méthode analytique

L'hamiltonien de système précédent est :

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}, \tag{4.22}$$

où $\hat{T}$ est le terme qui représente l'opérateur de l'énergie cinétique avec le choix de symétrie de Jauge $\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$:

$$\widehat{T} = \frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^{N_e} \left[\widehat{\overrightarrow{p}}_i + e\overrightarrow{A_i} \right]^2. \tag{4.23}$$

Cette dernière énergie est considéré comme une constante $\langle \frac{T}{N} \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega$, et $\widehat{V}$ est l'opérateur d'énergie d'interaction colombienne :

$$\widehat{V} = \widehat{V}_{ee} + \widehat{V}_{eb} + \widehat{V}_{bb}, \tag{4.24}$$

tel que $\widehat{V}_{ee}$ est l'opérateur d'énergie d'interaction colombienne électron-électron :

$$V_{ee} = \sum_{i<j}^{N_e} \frac{e_0^2}{|r_i - r_j|}, \tag{4.25}$$

avec $\widehat{V}_{eb}$ est l'opérateur d'énergie d'interaction colombienne électron- substrat :

$$V_{eb} = -\rho \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S_{Ne}} d^2r \, \frac{e_0^2}{|r_i - r|}, \tag{4.26}$$

et $\widehat{V}_{bb}$ est l'opérateur d'énergie d'interaction colombienne substrat- substrat :

$$V_{bb} = \frac{\rho^2}{2} \int_{S_{Ne}} d^2r \int_{S_{Ne}} d^2r' \, \frac{e_0^2}{|r - r'|}. \tag{4.27}$$

L'énergie fondamentale de se système est la somme des potentiels énergétique avec l'unité d'énergie $\frac{e^2}{l_0}$ où l'expression d'interaction est :

$$H\Psi(z_1, ..., z_{N_e}) = E\Psi(z_1, ..., z_{N_e}). \tag{4.28}$$

Pour trouver les résultats analytique exact de l'interaction colombienne. Nous calculons la valeur de l'énergie d'interaction d'un état :

$$E(N_e) = \frac{\langle\Psi|V|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}, \tag{4.29}$$

où $\langle\Psi|\Psi\rangle$ sont les fonctions d'ondes non normalisé[26].

$$\begin{aligned} \langle\Psi(z_1, ..., z_{N_e})|\Psi(z_1, ..., z_{N_e})\rangle &= |\Psi(z_1, ..., z_{N_e})|^2 \\ &= F_{N_e}(\overrightarrow{r}_1, ..., \overrightarrow{r}_{N_e}) e^{\left[\frac{-S_{N_e}(\overrightarrow{r}_1, ..., \overrightarrow{r}_{N_e})}{2l_0}\right]}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

tel que :

$$F_{N_e}(\overrightarrow{r}_1, ..., \overrightarrow{r}_{N_e}) = \prod_{i/>j}^{N_e} (\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_j)^2, \tag{4.31}$$

et :

$$S_{N_e}(\overrightarrow{r}_1, ..., \overrightarrow{r}_{N_e}) = \sum_{j=1}^{N_e} r_j^2. \tag{4.32}$$

Pour calculer V_{ee}, V_{eb} et V_{bb} il faut faire un traitement analytique basé sur des outils mathématiques ainsi que une simulation numérique par le code Mathématica[27].

Pour notre système de N_e électrons le polynôme de Laughlin est :

$$\begin{aligned} P_L &= Det\left[\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & . & . & z_{N_e}^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & . & . & z_{N_e}^1 \\ . & . & . & . & . \\ z_1^{N_e-1} & z_2^{N_e-1} & . & . & z_{N_e}^{N_e-1} \end{pmatrix}\right] \\ &= \prod_{i<j} (z_i - z_j), \end{aligned} \tag{4.33}$$

où : $z_j = r_j e^{-i\phi_j}$.

D'après la transformation de Jacobi :

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1 - z_2, \\ Z_2 &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3, \\ &\cdots\cdots \\ Z_i &= \frac{z_1}{i} + \cdots + \frac{z_i}{i} - z_{i+1}, \\ &\cdots\cdots \\ Z_{N_e} &= R = \frac{z_1}{N_e} + \cdots + \frac{z_{N_e}}{N_e}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

tel que R est le centre de masse des coordonnées de notre système, Z_i sont les coordonnées complexes de Jacobi ($i = 1, 2, ..., N_e$), z_i sont les vecteurs de position à $2D$ à la représentation complexe ($i = 1, 2, ..., N_e$).

Cette dernière est vérifié les relations suivantes :

$$\int \prod_{k=1}^{Ne} d^2 z_k = \int \prod_{k=1}^{N_e} d^2 Z_k; N_e \geqslant 2, \tag{4.35}$$

$$\sum_{k=1}^{N_e} z_k^2 = N_e R^2 + \sum_{j=1}^{N_e - 1} \frac{j}{j+1} Z_k^2; N_e \geqslant 2. \tag{4.36}$$

On calcule la matrice inverse pour déterminer les z_i en fonction Z_i, et on remplace les z_i dans la fonction d'onde de Laughlin (4.33) et on déduire le polynôme de Jacobi.

4.3.1 Application numérique pour $N_e = 8$:

Les coordonnées complexes de Jacobi Z_i :

$$\begin{aligned}
Z_1 &= z_1 - z_2, \\
Z_2 &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3, \\
Z_3 &= \frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{3} + \frac{z_3}{3} - z_4, \\
Z_4 &= \frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} + \frac{z_4}{4} - z_5, \\
Z_5 &= \frac{z_1}{5} + \frac{z_2}{5} + \frac{z_3}{5} + \frac{z_4}{5} + \frac{z_5}{5} - z_6, \\
Z_6 &= \frac{z_1}{6} + \frac{z_2}{6} + \frac{z_3}{6} + \frac{z_4}{6} + \frac{z_5}{6} + \frac{z_6}{6} - z_7, \\
Z_7 &= \frac{z_1}{7} + \frac{z_2}{7} + \frac{z_3}{7} + \frac{z_4}{7} + \frac{z_5}{7} + \frac{z_6}{7} + \frac{z_7}{7}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

On calcule la matrice inverse pour déterminé les z_i, on obtient :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + \frac{Z_4}{5} + \frac{Z_5}{6} + \frac{Z_6}{7} + \frac{Z_7}{8} + Z_8, \\
z_2 &= -\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + \frac{Z_4}{5} + \frac{Z_5}{6} + \frac{Z_6}{7} + \frac{Z_7}{8} + Z_8, \\
z_3 &= -\frac{2Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + \frac{Z_4}{5} + \frac{Z_5}{6} + \frac{Z_6}{7} + \frac{Z_7}{8} + Z_8, \\
z_4 &= -3\frac{Z_3}{4} + \frac{Z_4}{5} + \frac{Z_5}{6} + \frac{Z_6}{7} + \frac{Z_7}{8} + Z_8, \\
z_5 &= \frac{-4Z_4}{5} + \frac{Z_5}{6} + \frac{Z_6}{7} + \frac{Z_7}{8} + Z_8, \\
z_6 &= \frac{-5Z_5}{6} + \frac{Z_6}{7} + \frac{Z_7}{8} + Z_8, \\
z_7 &= \frac{-6Z_6}{7} + \frac{Z_7}{8} + Z_8, \\
z_8 &= -\frac{7Z_7}{8} + Z_8.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Lorsque on remplace z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 et z_8 dans Le polynôme de Laughlin :

$$
\begin{aligned}
P_L \;=\; & Z_1\left(-\frac{Z_1}{2}+Z_2\right)\left(\frac{Z_1}{2}+Z_2\right)\left(-\frac{2Z_2}{3}+Z_3\right)\left(-\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+Z_3\right)\left(\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+Z_3\right)\\
& \left(-\frac{3Z_3}{4}+Z_4\right)\left(-\frac{2Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+Z_4\right)\left(-\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+Z_4\right)\\
& \left(\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+Z_4\right)\left(-\frac{4Z_4}{5}+Z_5\right)\left(-\frac{3Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+Z_5\right)\\
& \left(-\frac{2Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+Z_5\right)\left(-\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+Z_5\right)\\
& \left(\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+Z_5\right)\left(-\frac{5Z_5}{6}+Z_6\right)\left(-\frac{4Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+Z_6\right)\\
& \left(-\frac{3Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+Z_6\right)\left(-\frac{2Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+Z_6\right)\\
& \left(-\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+Z_6\right)\left(\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+Z_6\right)\\
& \left(-\frac{6Z_6}{7}+Z_7\right)\left(-\frac{5Z_5}{6}+\frac{Z_6}{7}+Z_7\right)\left(-\frac{4Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+\frac{Z_6}{7}+Z_7\right)\\
& \left(-\frac{3Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+\frac{Z_6}{7}+Z_7\right)\left(-\frac{2Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+\frac{Z_6}{7}+Z_7\right)\\
& \left(-\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+\frac{Z_6}{7}+Z_7\right)\left(\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+\frac{Z_3}{4}+\frac{Z_4}{5}+\frac{Z_5}{6}+\frac{Z_6}{7}+Z_7\right)
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

Pour une fonction d'onde $\Psi\left(r_1,.....,r_{Ne}\right)$ l'interaction colombienne est :

Interaction électron- électron :

$$
V_{ee} \;=\; \frac{N_e\left(N_e-1\right)\int\frac{e_2^2}{|z_1-z_2|}\left|\Psi\left(z_1,.....,z_{N_e}\right)\right|^2 d^2z_1....d^2z_{N_e}}{2\int\left|\Psi\left(z_1,.....,z_{N_e}\right)\right|^2 d^2z_1....d^2z_{N_e}}, \tag{4.40}
$$

$$
\varepsilon_{ee} \;=\; \frac{\left(N_e-1\right)\int\frac{e_2^2}{|z_1-z_2|}\left|\Psi\left(z_1,.....,z_{N_e}\right)\right|^2 d^2z_1....d^2z_{N_e}}{2\int\left|\Psi\left(z_1,.....,z_{N_e}\right)\right|^2 d^2z_1....d^2z_{N_e}}. \tag{4.41}
$$

Interaction électron-substrat :

$$
V_{eb}=-\rho N_e\frac{\int d^2r_1...d^2r_{N_e}|\Psi(r_1,\ldots,r_{N_e})|^2\int_{S_{N_e}}d^2r\frac{e_0^2}{|r_1-r|}}{\int d^2r_1...d^2r_{N_e}|\Psi(r_1,\ldots,r_{N_e})|^2}, \tag{4.42}
$$

où :

$$\int_{S_N} d^2r \frac{e_0^2}{|r_1 - r|} = \frac{2e_0^2 S_{N_e}}{R_{N_e}} \int_0^\infty J_1(q) J_0\left(\frac{qr_1}{R_{N_e}}\right) \frac{dq}{q}. \tag{4.43}$$

Donc :

$$V_{eb} = -\frac{2e_0^2 \rho N_e S_{N_e}}{R_{N_e}} \frac{\int_0^\infty J_1(q) \frac{dq}{q} \int d^2r_1 ... d^2r_{N_e} |J_0\left(\frac{qr_1}{R_N}\right) \Psi(r_1, \ldots, r_{N_e})|^2}{\int d^2r_1 ... d^2r_{N_e} |\Psi(r_1, \ldots, r_{N_e})|^2}. \tag{4.44}$$

D'après la transformation on a trouvé :

$$V_{eb} = -\frac{2e_0^2 \rho N_e S_{N_e}}{R_{N_e}} \frac{\int_0^\infty J_1(q) \frac{dq}{q} \int d^2z_1 ... d^2z_{N_e} J_0\left(\frac{q|z_1|}{R_{N_e}}\right) |\Psi(z_1, \ldots, z_{N_e})|^2}{\int d^2z_1 ... d^2z_{N_e} |\Psi(z_1, \ldots, z_{N_e})|^2} \tag{4.45}$$

Ou : $J_1(q)$ et $J_0\left(\frac{q|z_1|}{R_N}\right)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro.

Donc :

$$\varepsilon_{eb} = -\frac{2e_0^2 \rho S_{N_e}}{R_{N_e}} \frac{\int_0^\infty J_1(q) \frac{dq}{q} \int d^2z_1 ... d^2z_{N_e} J_0\left(\frac{q|z_1|}{R_{N_e}}\right) |\Psi(z_1, \ldots, z_{N_e})|^2}{\int d^2z_1 ... d^2z_{N_e} |\Psi(z_1, \ldots, z_{N_e})|^2}. \tag{4.46}$$

Interaction substrat -substrat

Le potentielle d'Interaction substrat -substrat est :

$$V_{bb} = \frac{8}{3} e_0^2 \rho_0 N_e R_{N_e} = \sqrt{\frac{\nu N_e}{2}} \frac{8}{3\pi} \frac{e^2}{l_0}. \tag{4.47}$$

Le facture de remplissage $\nu = 1$, alors :

$$\varepsilon_{bb} = \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{N_e}{2}} \frac{e^2}{l_0}. \tag{4.48}$$

4.4 Résultats

D'après les calcules qu'on a fait par un code mathematica, nous arrivons jusqu'à 8 particules. Les énergies caractéristiques de la fraction $\nu = 1$ sont résumées dans le tableau suivant :

	$N_e = 4$	$N_e = 5$	$N_e = 6$	$N_e = 7$	$N_e = 8$
ε_{ee}	0.556813	0.695198	0.821184	0.937565	1.046229
ε_{eb}	-2.25835	$-2.55.644$	-2.813950	-3.055411	-3.279657
ε_{bb}	1.200422	1.342112	1.47021	1.588009	1.697653
ε	-0.501121	-0.513334	-0.522556	-0.529837	-0.535775

TAB. 4.1 – Energies d'interactions par particules (unité$\frac{e_0^2}{l_0}$.) pour un système de l'effet Hall quantique entier.

En comparant nos résultats avec ce obtenu par Ciftja[24].

	$N_e = 4$	$N_e = 5$	$N_e = 6$	$N_e = 7$	$N_e = 8$
ε_{ee}	0.556813	0.695198	0.821184	0.937565	1.046229
ε_{eb}	-2.25835	$-2.55.644$	-2.813950	-3.055411	-3.279657
ε_{bb}	1.200422	1.342112	1.47021	1.588009	1.697653
ε	-0.501121	-0.513334	-0.522556	-0.529837	-0.535775

TAB. 4.2 – Energies d'interactions par particules (unité$\frac{e_0^2}{l_0}$.) pour un système de l'effet Hall quantique entier (Ciftja 2011) .

On peut résume ces deux tablaux par le graphe suivant :

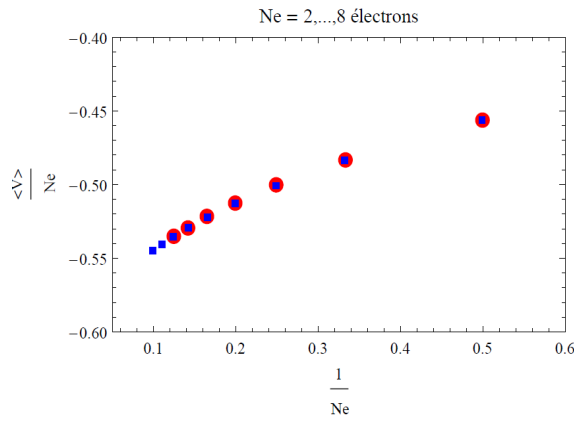


FIG. 4.1 – Graphe qui comparé les énregies de la méthode analytique(disque en rouge) et le modéle de Ciftja (rectangle bleu).

D'après la comparaison de deux tableaux et la représentation graphique on remarque qu'on a obtenu le même résultat.

4.5 Conclusion

La fonction d'onde de Laughlin s'écrit comme de simples déterminants de Slater présenté au moyen d'un package Mathématica. Cette base est couramment utilisée pour décrire les systèmes quantiques à 2D.

Conclusion générale

Au cours de ce mémoire, nous avons étudie deux modèles différents appliqués à l'effet Hall quantique entier dans une géométrie du disque. L'étude de l'EHQE avec le potentiel de Coulomb, dans la géométrie du disque, serait bien évidemment très intéressante. On a déterminé l'énergie d'interaction coulombienne dans le plus bas niveau de Landau dans des systèmes de petite taille jusqu'à 8 électrons. Par conséquent, nos résultats sont également liés à la physique plus générale d'autres systèmes de matière condensée 2D fortement corrélés.

L'énergie totale par particule dans la limite thermodynamique ($N_e \to \infty$) est égale à -0.626657. Dans ce cas, les énergies calculées sur la géométrie du disque sont les analogues des énergies calculées sur la géométrie de sphère[24]

Finalement, on peut dire que l'application de l'EHQE est très vaste, à titre d'exemples on peut citer, l'EHQE dans le cadre de la théorie quantique des champs et dans la théorie des cordes appliquée aux trous noirs.

Annexe A

Interaction substrat - substrat

L'énergie d'interaction substrat-substrat est donnée par[24] :

$$\epsilon_{bb} = \frac{\left\langle \widehat{V}_{bb} \right\rangle}{N_e} = \frac{e^2\rho_0^2}{2N_e} \int_{\Omega_{N_e}} d^2r \int_{\Omega_{N_e}} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - r'|} dr', \tag{A.1}$$

avec $\Omega_{N_e} = \pi R_{N_e}^2$ est l'aire de disque.

Pour calculer l'intégrale de $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$ on utilise la formule suivant :

$$\frac{1}{|\ \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\ |} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} j_m(kr_1) j_m(kr_2) dk, \tag{A.2}$$

où $j_m(x)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre m.

À l'aide de cette formule on peut trouvée l'intégrale sur les variables angulaires :

$$\int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\ \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\ |} d\phi_2 = (2\pi)^2 \int_0^{+\infty} j_0(kr)\, j_0(kr')\, dk \tag{A.3}$$

L'intégrale sur les varaibles radiales est :

$$\int_0^{\infty} x J_0(x)\, dx = \alpha J_1(\alpha) \tag{A.4}$$

Donc :

$$\epsilon_{bb} = \frac{e^2\rho_0^2}{2N_e} (2\pi)^2 R_{N_e}^2 \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} J_1^2(kR_{N_e}) \tag{A.5}$$

On sait que :

$$\int_0^\infty dx \left[\frac{J_1(x)}{x}\right]^2 = \frac{4}{3\pi} \tag{A.6}$$

Alors :

$$\epsilon_{bb} = \frac{e^2\rho_0^2}{2N_e}(2\pi)^2 \frac{4R_{N_e}^3}{3\pi} \tag{A.7}$$

On utilisé l'equation 4.3 pour simplifie l'equation A.7 :

$$\epsilon_{bb} = \frac{8}{3\pi}\sqrt{\frac{N_e}{2}}\frac{e^2}{l_0} \tag{A.8}$$

Annexe B

Interaction électron- substrat

Nous définissons l'énergie d'interaction électron- substrat comme suite[24] :

$$\epsilon_{eb} = \frac{-e^2\rho_0}{N_e}\int d^2r_1\rho\left(\overrightarrow{r}_1\right)\int_0^{R_{N_e}} rdr\int_0^{2\pi}\frac{1}{|\overrightarrow{r}_1-\overrightarrow{r}|}d\phi \tag{B.1}$$

Où :$\rho\left(\overrightarrow{r}_1\right)$ est la fonction de la densité d'une particule.

D'après l'équationA.3 on trouve :

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{|\overrightarrow{r}_1-\overrightarrow{r}|}d\phi = 2\pi\int_0^{\infty} J_0\left(kr_1\right)J_0\left(kr\right)dk \tag{B.2}$$

Nous utilisons l'équationA.4 on trouve :

$$\epsilon_{eb} = \frac{-2\pi e^2\rho_0 R_{N_e}}{N_e}\int_0^{\infty}\frac{dk}{k}J_1\left(kR_{N_e}\right)\int\rho\left(\overrightarrow{r}_1\right)J_0\left(kr\right)d^2r_1, \tag{B.3}$$

avec $\rho(\overrightarrow{r_i}) = \rho_0 F(\frac{r_i}{l_0}), (i = 1, 2)$.

On pose : $\frac{r_1}{l_0} = x$ et $kl_0 = q$;on trouve :

$$\epsilon_{eb} = \frac{-e^2}{l_0}\sqrt{\frac{2}{N_e}}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q}J_1\left(q\sqrt{2N_e}\right)\int_0^{\infty}F\left(x\right)xJ_0\left(qx\right)dx, \tag{B.4}$$

où :

$$F\left(x\right) = e^{\frac{-x^2}{2}}\sum_{j=0}^{N_e-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^j, \tag{B.5}$$

et on défini l'intégrale sur x :

$$\int_0^\infty x^{2j} e^{\frac{-x^2}{2}} x J_0(qx)\, dx = 2^j j! e^{\frac{-q}{2}} L_j\left(\frac{-q^2}{2}\right), \tag{B.6}$$

tel que $L_j(x)$ est le polynôme de Laguerre et $L_p^1(x)$ est le polynôme de Laguerre associe :

$$\sum_{n=0}^{p} L_n(x) = L_p^1(x), \tag{B.7}$$

donc :

$$\int_0^\infty F(x)\, x J_0(qx)\, dx = e^{\frac{-q^2}{2}} L_{N_e-1}^1\left(\frac{q^2}{2}\right), \tag{B.8}$$

alors l'énergie d'interaction d'électron- background est :

$$\epsilon_{eb} = \frac{-e^2}{l_0}\sqrt{\frac{2}{N_e}} \int_0^\infty \frac{dq}{q} J_1\left(q\sqrt{2N_e}\right) e^{\frac{-q^2}{2}} L_{N_e-1}^1 \tag{B.9}$$

Annexe C

interaction électron-électron

L'interaction électron-électron directe donné par[24] :

$$\epsilon_{ee}^{d} = \frac{e^2}{2N_e}\int d^2r_1\rho(\overrightarrow{r_1})\int \frac{1}{\mid \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} \mid}\rho(\overrightarrow{r_2})d^2r_2 \tag{C.1}$$

Où :$\rho\,(\overrightarrow{r}_i)$ est la fonction de la densité d'une particule deponde de r_i et indépondament que $\varphi_i(i = 1, 2)$.

Avec $\rho(\overrightarrow{r_i}) = \rho_0 F(\frac{r_i}{l_0}), (i = 1, 2)$. L'équation C.1 devient :

$$\epsilon_{ee}^{d} = \frac{e^2{\rho_0}^2}{2N_e}\int d^2r_1 F(\frac{r_1}{l_0})\int \frac{1}{\mid \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} \mid}F(\frac{r_2}{l_0})d^2r_2 \tag{C.2}$$

A partir de la formuleA.2 on peut calculer l'intégrale sur les variables angulaires :

$$\int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}d\phi_2 = (2\pi)^2 \int_0^{+\infty} j_0\,(kr_1)\,j_0\,(kr_1)\,dk \tag{C.3}$$

Où $j_0(kr_i); (i = 1, 2)$ sont les fonctions de Bessel du premier type et ordre intégral 0.

On remplacéC.3 dans C.2, on obtenir :

$$\epsilon_{ee}^{d} = \frac{e^2{\rho_0}^2(2\pi)^2}{2N_e}\int_0^{\infty}[F(\frac{r_1}{l_0})j_0(kr_1)r_1dr_1]^2dk \tag{C.4}$$

On pose : $\frac{r_1}{l_0} = x$ et $k_{\,0} = q$:

$$\epsilon_{ee}^{d} = \frac{e^2}{2N_e}\int_0^{+\infty}[F(x)j_0(qx)xdx]^2dq \tag{C.5}$$

On a :

$$\int_0^{+\infty} F(x) j_0(qx) x dx = e^{\frac{-q^2}{2}} L^1_{N_e-1}(\frac{q^2}{2}) \tag{C.6}$$

En fin L'expression de l'energie d'intéraction électron-électron direct est :

$$\epsilon^d_{ee} = \frac{e^2}{2N_e l_0} \int_0^{+\infty} [e^{\frac{-q^2}{2}} L^1_{N_e-1}(\frac{q^2}{2})]^2 dq \tag{C.7}$$

Pour calculer L'énergie d'interaction d'échange ϵ^x_{ee} :

$$\epsilon^x_{ee} = \frac{-e^2}{2N_e} \int d^2 r_1 \int \frac{1}{|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|} \mid \rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) \mid^2 d^2 r_2 \tag{C.8}$$

Où $\rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2})$ est la densité électronique de deux particules :

$$\rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) = \sum_{j=0}^{N_e-1} \Psi_j(\overrightarrow{r_1})^* \Psi_j(\overrightarrow{r_2}) \tag{C.9}$$

Donc l'expression de la matrice de la densité électronique est donné par :

$$\rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) = \rho_0 e^{-\frac{r_1^2 + r_2^2}{2l_0^2}} \sum_{j=0}^{N_e-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{r_1 r_2}{2}\right)^j e^{ij(\phi_2 - \phi_1)} \tag{C.10}$$

Donc :

$$\mid \rho(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) \mid^2 = \rho_0 e^{-\frac{r_1^2 + r_2^2}{2l_0^2}} \{ \sum_{j=0}^{N_e-1} \sum_{j'=0}^{N_e-1} \frac{1}{j! j'!} \left(\frac{r_1 r_2}{2l_0^2}\right)^{jj'} e^{i(j-j')(\phi_2 - \phi_1)} \} \tag{C.11}$$

On peut aussi récrire énergie :

$$\epsilon^x_{ee} = \epsilon^x_1 + \epsilon^x_2 \tag{C.12}$$

Tel que :

$$\epsilon^x_1 = -\frac{e^2 \rho_0^2}{2N_e} \int d^2 r_1 \int d^2 r_2 \frac{e^{\frac{-r_1^2 + r_2^2}{2l_0^2}}}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|} \sum_{j=0}^{N_e-1} \left[\frac{1}{j!} \left(\frac{r_1 r_2}{2l_0^2}\right)^j \right]^2 \tag{C.13}$$

Et :

$$\epsilon_2^x = -\frac{e^2\rho_0^2}{2N_e}\int d^2r_1\int d^2r_2\frac{e^{\frac{-r_1^2+r_2^2}{2l_0^2}}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\sum_{j\neq j'}^{N_e-1}\sum_{j=0}^{N_e-1}\frac{1}{j!j'!}\left(\frac{r_1r_2}{2l_0^2}\right)^{j+j'}e^{i(j-j')(\varphi_2-\varphi 1)} \tag{C.14}$$

Avec :

$$\left[\frac{1}{j!}\left(\frac{r_1r_2}{2l_0^2}\right)^j\right]^2 = \frac{1}{j!2^j}\left(\frac{r_1}{l_0}\right)^{2j}\frac{1}{j!2^j}\left(\frac{r_2}{l_0}\right)^{2j} \tag{C.15}$$

$$\epsilon_1^x = -\frac{e^2}{2l_0N_e}\sum_{j=0}^{N_e-1}\int_0^\infty dq\left[\int_0^\infty xj_0(qx)\frac{x^{2j}e^{\frac{-x^2}{2l_0^2}}}{j!2^j}dx\right]^2 \tag{C.16}$$

$$\epsilon_1^x = -\frac{e^2}{2l_0N_e}\int_0^\infty dq\left[L^1_{N_e-1}\left(\frac{q^2}{2}\right)\right]^2 e^{-q^2} \tag{C.17}$$

On calculer ϵ_2^x :

$$\epsilon_2^x = \frac{-e^2\rho_0^2}{2N_e}\sum_{j\neq j'}^{N_e-1}\sum_{j=0}^{N_e-1}\frac{1}{j!j'!2^{j+j'}}\int d^2r_1r_1e^{\frac{-r_1^2}{2l_0^2}}\left(\frac{r_1}{l_0^2}\right)^{j+j'}\int d^2r_2e^{\frac{-r_2^2}{2l_0^2}}\left(\frac{r_2}{l_0^2}\right)^{j+j'}\frac{e^{i(j-j')(\phi_2-\phi_1)}}{|\overrightarrow{r}_1-\overrightarrow{r}_2|} \tag{C.18}$$

Avec :

$$\int_0^{2\pi}d\phi_1\int_0^{2\pi}e^{i[m(j-j')](\phi_2-\phi_1)} = 2\pi\delta_{m,j-j,} \tag{C.19}$$

$$\int_0^{2\pi}d\phi_1\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(j-j')(\phi_2-\phi_1)}}{|\overrightarrow{r}_1-\overrightarrow{r}_2|}d\phi_2 = (2\pi)^2\int_0^\infty J_{j-j'}(kr_1)J_{j-j'}(kr_2)\,dk \tag{C.20}$$

$$\epsilon_2^x = \frac{-(2\pi)^2e^2\rho_0^2}{2N}\sum_{j\neq j'}^{N_e-1}\sum_{j=0}^{N_e-1}\frac{1}{j!j'!2^{j+j'}}\int_0^\infty dk\left[\int_0^\infty dr_1r_1J_{j-j'}(kr_1)\,e^{\frac{-r_1^2}{2l_0^2}}\left(\frac{r_1}{l_0^2}\right)^{j+j'}\right]^2, \tag{C.21}$$

où :

$$\sum_{j\neq j'}^{N_e-1}\sum_{j=0}^{N_e-1}\rightarrow 2\sum_{j=j'+1}^{N_e-1}\sum_{j'=0}^{N_e-2}. \tag{C.22}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\epsilon_2^x &= \frac{-(2\pi)^2 e^2\rho_0^2}{N_e}\sum_{j=j'+1}^{N_e-1}\sum_{j'=0}^{N_e-2}\frac{1}{j!j'!2^{j+j'}}\int_0^\infty dk\left[\int_0^\infty dr_1 r_1 J_{j-j'}(kr_1)\, e^{\frac{-r_1^2}{2l_0^2}}\left(\frac{r_1}{l_0^2}\right)^{j+j'}\right]^2 \\ &= \frac{-e^2}{N_e l_0}\sum_{j\neq j'}^{N_e-1}\sum_{j=0}^{N_e-1}\frac{1}{j!j'!2^{j+j'}}\int_0^\infty dq\left[\int_0^\infty dx x J_{j-j'}(qx)\, e^{\frac{-x^2}{2l_0^2}}(qx)^{j+j'}\right]^2 \qquad \text{(C.23)}\end{aligned}$$

On a l'intégrale suivant :

$$\int_0^\infty y J_\nu(qy) e^{-\alpha y^2} y^{2n+\nu} dy = \frac{n!}{2\alpha^{n+1+\nu}}\left(\frac{q}{2}\right)^\nu \times e^{\frac{-q^2}{4\alpha}} L_n^\nu\left(\frac{q^2}{4\alpha}\right), (n+\nu) > -1 \qquad \text{(C.24)}$$

Avec : $\nu = j - j', \alpha = \frac{1}{2}$ et $n = j'$,et conséquence $(n+\nu) = j = 1, 2, \ldots\ldots > -1$ et $(2n+\nu) = j + j'$.

Par identification :

$$\int_0^\infty x J_{j-j'}(qx) e^{-\frac{x^2}{2}} x^{j+j'} dx = j'! 2^{j'} q^{j-j'} e^{\frac{-q^2}{2}} L_{j'}^{j-j'}\left(\frac{q^2}{2}\right) \qquad \text{(C.25)}$$

On remplacé C.25 dans C.23 on obtenir :

$$\epsilon_2^x = \frac{-e^2}{N_e l_0}\sum_{j=j'+1}^{N_e-1}\sum_{j'=0}^{N_e-2}\frac{j'!2^{j'}}{j!2^j}\int_0^\infty dq q^{2(j-j')} e^{-q^2}\left[L_{j'}^{j-j'}\left(\frac{q^2}{2}\right)\right]^2 \qquad \text{(C.26)}$$

Nomenclature

Sigle	Signification
$EHQE$	Effet Hall Quantique Entier
GEB	Gaz d'électron bidimentionnel
NL	Niveau de Landau
$PBNL$	Plus Bas Niveau de Landau

Sigle	Signification
B	Champ magnétique
E	Champ électrique
I	Courant électrique
J	Densité de courant électrique
T	Température
l_B	Longueur magnétique
N_e	Nombre d'électrons
$N_B = \frac{\phi}{\phi_0}$	Nombre de quanta de flux
n	Niveau de Landau
ν	Facteur de remplissage
$\phi_0 = \frac{h}{e}$	Quantum de flux
$\omega_c = \frac{eB}{m}$	Pulsation cyclotron
$n_e = \frac{N}{S}$	Densité des charges.
$\phi = B.S$	Flux total du champ B
n_B	Densité de flux
P_J	Polynôme de Jacobi
P_L	Polynôme de Laughlin
S	Aire du système utilisé
R_c	Rayon cyclotron
R_N	Rayon du disque
m_e	Masse réelle de l'électron

Bibliographie

[1] K.VON KLITZING, G.DORDA et M. PEPPER phys.Rev.Lett., 45, 494, 1980.

[2] R.SOUKHAL HAROUN, effet Hall quantique : Cours, Université M'hamed BOUGARA Boumerdes, 2017.

[3] M. AHMED AMMAR, Effet hall quantique fractionnaire, Cours, Université de Médéa, 2017.

[4] K.LADJAL et H.S.MIHOUBI, étude analytique et numérique de l'effet Hall quantique fractionnaire par la méthode de Laughlin et de Jain aux fermions composites, mémoire master, Université de Médéa, 2017.

[5] Chandelier FREDERIC, Quelques applications de la théorie des champs à la physique de la matère condensée : l'effet Hall quantique dans tous ses états, thèse de doctorat, Université Paris 11-orsay, 2003.

[6] Z.MAKHLOUF, Etude classique et quantique de l'hétérojonction AlGaAs/GaAS, Université KHIDER Med Biskra, 2013.

[7] R.AOUATI, Etude de la nanostructure AlAs/GaAs/AlAs par cathodoluminescence et la méthode Monte Carlo, Université MENTOURI Constantine, 2007.

[8] I.MOUSSAOUI, A. RAHMOUNE, Etude par simulation des propriétés électriques des composants HEMTs à base d'hétérostructure AlGaAs/GaAs. 2015.

[9] Jagannathan ANURADHA, Initiation à la physique des solides, Cours, Université Paris-Sud, 2007.

[10] Manuel ARANZANA, Étude des jonctions entre canaux de bord de l'effet hall quantique fractionnaire, Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 2005.

[11] Goldman NATHAN Aspects fractal et topologique du transport quantique,université libre de Bruxelles, Faculté des sciences,Service de chimie-physique, 2005.

[12] Thiébaut NICOLAS, Effet Hall quantique fractionnaire dans la bicouche et le puits large. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2015.

[13] Badreddine MAMRI, Thèse magiste GaAS-AlGaAs, 2014.

[14] Mark Oliver GOERBIG, Pascal Lederer, Électrons bidimensionnels sous champ magnétique fort : la physique des effets Hall quantiques, Notes de cours, Université Paris Sud, 2006.

[15] K.VON KLITZING, The quantized Hall effect. Rev.Mod.Phys. 58, 519, 1986.

[16] Mark.O GOERBIG, P.LEDERER, Electrons bidimensionnels sous champ magnétique fort :la physique des effets Hall quantiques, cours, Université Paris-Sud, 2006.

[17] Paul SOULE , Bords des phases de l'Effet Hall quantique fractionnaire dans la géométrie d'un contact ponctuel quantique, Thèse de doctorat, Université Paris II – Orsay, 2015.

[18] A.STERDYNIAK ,Etude de l'intrication dans l'effet Hall quantique fractionnair, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2013.

[19] Y. SORTAIS, V. JOSSE, D. BOIRON, H. CAYLA, M. PERRIER, cours du Physique Atomique, institut d'optique graduate school, Avril 2013.

[20] Habib BOUCHRIHA , Introduction à la physique quantique : cours et applications, 2002.

[21] Jean-Louis BASDEVANT et Jean DALIBARD, Mécanique quantique : Cours de l'Ecole polytechnique, 2002.

[22] O.CIFTJA, Exact results for systemes of electrons in the fractional quantum Hall regime, 2009.

[23] O.CIFTJA, C.Wexler, Phys.Rev.B 67 075304, 2003.

[24] O. CIFTJA, Exact results for finite quantum Hall systems of electrons at filling factor one : Disk geometry,journal of Mathematical Physics, 2011.

[25] M.AHMED AMMAR, Z. BENTALHA, S. BEKHECHI, Method of computation of energies in the fractional quantum Hall effect regime. Condensed Matter Physics, vol. 19, No. 3, 33702, 2016.

[26] G.MACDONLALD, symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Champaign, Illinois, 1999.

[27] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 4.0.

ملخص:

بالتوسع في صناعة المواد أشباه الموصلات أصبح من الممكن استخدام تطبيقات لانهائية لتأثير هول الكمي. فيما يخص التأثير الكمي لهذه الظاهرة فهو يحدث عند تعرض أشباه الموصلات الموضوعة في درجة حرارة منخفضة جدا تقارب الصفر كيلفن إلـــى مجال مغناطيسي قوي جدا. في هذه الحالة فان المقاومة في أشباه الموصلات الناتجة من قسمة جهد هول على التيار لا يتغير بشكل خطـي فقط وإنما يتغير بكميات محدد مقدارها حسب ثابت فون كليتزينج (h/e^2).

في هذا العمل سنقدم بعض النتائج الدقيقة للأنظمة المختصرة للإلكترونات في مفعول هول الكمـي الصحيح في عامل ملء يساوي الواحد. كما نستعمل إحداثيات جاكوبي لتسهيل حساب مختلف الكميات. كما أن استعمال إحداثيات جاكوبـي تسهل حساب التكاملات المعقدة و التي تحتوي على عدة متغيرات و ذلك للحساب الدقيق للكميات المطلوبة الخاصة بالإلكترونات. لكل إلكترون. ε^x و المتبادلة ε^d مقارنة مع ما قد سلف سنعرض نموذجا رياضيا لسفيدجا لتحديد طاقة التفاعل المباشرة

النتائج التي توصلنا إليها باستعمال الطريقة التحليلية تتماشى ونتائج الطريقة الرياضية التي استعملها سيفيتجا.

الكلمات المفتاحية: مفعول هول الكلاسيكي، مفعول هول الكمي الصحيح، الطريقة التحليلية، النموذج الرياضي.

Résumé :

En développant la fabrication de matériaux semi-conducteurs, il est devenu possible d'utiliser des applications infinies pour l'effet Hall quantique. En ce qui concerne l'effet quantique de ce phénomène, il se produit lorsque les semi-conducteurs placés à très basse température près de 0 K à un champ magnétique très intense. Dans ce cas, la résistance dans les semi-conducteurs résultant de la division de la tension de Hall sur le courant ne change pas uniquement en forme linéaire, mais change en quantités spécifiques, selon la constante de Von Klitzing (h/e^2).

Dans ce travail nous présentons quelques résultats exacts correspondant aux systèmes réduits des électrons dans le régime de l'effet hall quantique entier au facteur de remplissage 1. L'utilisation des coordonnées de Jacobi est l'outil principal qui facilite le calcul exact de diverses quantités. Des expressions fait intervenir des intégrales numériques de beaucoup de variables sont considérablement simplifiées à l'aide des coordonnées de Jacobi nous permettant de calculer exactement de diverses quantités correspondant aux systèmes à plusieurs électrons. En comparaison de ce qui précède, nous présenterons un modèle mathématique pour Ciftja pour déterminer l'énergie d'interaction par particule directe ε^d et d'échange ε^x de chaque électron.

Les résultats que nous avons obtenus par calcul analytique est en accord avec les résultats obtenus par le modèle mathématique proposé par Ciftja.

Mots-clés : L'Effet Hall Classique, l'Effet Hall Quantique Entier, méthode analytique, modèle mathématique.

Abstract:

By developing the fabrication of semiconductor materials, it has become possible to use infinite applications for the quantum Hall effect. Regarding the quantum effect of this phenomenon, it occurs when semiconductors placed at very low temperatures near 0K at a very intense magnetic field. In this case, the resistance in the semiconductors resulting from the division of the Hall voltage on the current does not change only in linear form, but changes in specific quantities, according to the von Klitzing constant (h/e^2).

In this work we present some exact results corresponding to small systems of electrons in the integer quantum Hall effect at filling factors one.

Use of Jacobi coordinates is the key tool that facilitates the exact calculation of various quantities. Expressions involving integrals over many variables are considerably simplified with the help of Jacobi coordinates allowing us to calculate exactly various quantities corresponding to systems with several electrons. In comparison with the above, we will present a mathematical model of Ciftja to determine the direct interaction energy per particle ε^d and exchange ε^x of each electron.

The results that we obtained by analytical calculation are in good agreement with the results obtained by the mathematical model proposed by Ciftja.

Keywords: Classical Hall Effect, Integer Quantum Hall Effect, analytical method, the mathematical model.