RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Fares, Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathémathiques et Informatique



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER
SPÉCIALITÉ : ***ANALYSE ET MODÉLISATION MATHÉMATIQUES***

Présenté par :
DJEDDOU Zohra

Intitulé :

Stabilisation uniforme d'une chaine de Kirchhoff qui se déplace axialement par un contrôle aux limites de type mémoire

Soutenu publiquement le 14 juin 2017 devant le jury composé de

N.AZROU	Président	Université. Y. F. Médéa
F.BOULARIAH	Promoteur	Université. Y. F. Médéa
W.GHRABA	Examinateur	Université. Y. F. Médéa
R.LEMDANI	Examinateur	Université. Y. F. Médéa
A.BOUTAGHOU	Invité	Université. Y. F. Médéa

Dédicace

Je m'incline devant Dieu le tout puissant qui m'a ouvert la porte du savoir et m'a aidée à la franchir.

Je dédie ce modeste travail :

A ma chère et tendre mère, source d'affection de courage et d'inspiration qui a autant sacrifié pour me voir atteindre ce jour.

A mon père source de respect, en témoignage de ma profonde reconnaissance pour tout l'effort et le soutien incessant qui m'a toujours apporté.

A mes frères : Ali et Smail

A mes soeurs : Massouda.

A toute la famille : Djeddou et Trig.

A mes chèrs amies : F.Zohra ; Khokha ; Fatima ; Soumia ; Djawida ; Merieme ; Amal ; Zahra ; Mouna.

A tous mes amis(es) de ma promotions.

A tous ceux que je porte dans mon coeur.

ZOHRA DJEDDOU

Remerciements

Avant tout je remercie ***ALLAH*** *tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.*

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à madame ***F.BOULARIAH*** *, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, d'avoir accepté d'encadrer mon mémoire, ainsi pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

Je remercie également Madame ***N.AZROU****, Maître de Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.*

Je remercie également Madame ***W.GHARABA****, Maître de Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de examiner le jury de ce mémoire.*

Je remercie également Monsieur ***R.LEMDANI****, Maître de Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de examiner le jury de ce mémoire.*

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur ***A.BOUTAGHOU****, Maître de Conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour son aide, sa disponibilité, et ses bons conseils.*

Enfin, merci d'avance à ceux ou celles qui voudront bien me lire ou m'écouter et surtout m'aider à progresser.

Résumé

Dans ce travail, on étudie la stabilisation de solution d'une chaine qui se déplace axialement du type de Kirchhoff par un contôle à la limite viscoélastique. On analyse que la dissipation produite par la limite viscoélastique est suffisante pour éliminer les vibrations transversales qui se produisent pendant le mouvement axial de la chaine, et on montre également à cela décroissance de déplacement de corde dans un taux arbitraire. En comparant avec les chaines immobiles, on conclu que le mouvement de la corde lui-même produit assez extra le découragement s'assure la stabilisation.

Mots-clés :
Chaine de Kirchhoff, axial de déplaçant, limite de contrôle de type de mémoire, décroissance arbitraire.

Abstract

In this memory, we study the stabilization of solutions of an axially moving string of kirchhoff type by a viscoelastic boundary control. We prove that the dissipation produced by the viscoelastic term is sufficient to suppress the transversal vibrations that occur during the axial motion of the string, and we also show that the string displacement decay in an arbitrary rate. When comparing with immobile strings, we conclude that the movement of the string itself produces enough extra damping ensuring the stabilization.

Key words :

Kirchhoff string, axial motion, boundary control of memory type, arbitrary decay.

Table des matières

Introduction générale **7**

1 Rappels **9**

2 L'existence et l'unicité **19**

2.1 Introduction 19

2.2 l'existence et l'unicité 21

3 Stabilisation d'une chaine de Kirchhoff par un contrôle aux limites **26**

3.1 Des estimations a priori 26

3.2 la stabilisation asymptotique en cas de déplacement $v \neq 0$ 30

3.3 Stabilité asymptotiquement dans le cas $v = 0$ 35

Conclusion **39**

Bibliographie **39**

Introduction générale

L'objectif de ce travail est de présenter quelques progrès récents sur l'analyse mathématique (en un sens pratique) du problème de type Kirchhoff. Ces problèmes traitent de la physique du point de vue mathématique, et plus particulirement du point de vue des équations aux dérivées partielles. Plus précisément, ce mémoire est composè de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et aux rappels de quelque on résultats de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans ce travail.
Dans le deuxième chapitre on étudie l'existence et l'unicité de la solution du modèle (2.1), en utilisant la méthode variationnelle.
Et dans le troisième chapitre on monte que le problème de type Kirchhoff du condition aux limites dynamique est stable.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback) ; elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note E(t) (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas.

Il existe plusieurs degrés de stabilité. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e :

$$E(t) \to 0, \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second degré, on s'intéresse à la dècroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e :

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \ \ \forall t > 0,$$

où C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième degré, il étudie les situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \quad \forall t > 0,$$

où C et α sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales. Dans ce cas, il faut prendre des données initiales plus régulières, dans le domaine de l'opérateur.

Chapitre 1

Rappels

Espace L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace des classes des fonctions $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_\Omega |f|^p dx < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$

Remarque 1.1 *L'espace L^2 muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg dx, \quad f, g \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.1 *Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq \infty$ et $[0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X et on note $L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions*

$f :]0,T[\to X$, *mesurables qui vérifient :*

$$i) \quad Si \quad 1 \leq p < \infty, \left(\int_0^T |f|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} := \|f\|_{L^p(0,T;X)} < \infty.$$
$$ii) \qquad Si \quad p = \infty, \quad \sup_X\text{-ess}\,|f| := \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} < \infty.$$

Proposition 1.1 *$L^p(0,T;X)$ muni de la norme $\|f\|_{L^p(0,T;X)}, 1 \leq p \leq \infty$ est un espace de Banach.*

Espaces de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ telque $1 \leq i \leq n$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens des distributions, on écrit

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

Espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \quad tel\ que \quad \forall i \in \{1,...,N\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}, \tag{1.1}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v.
En physique ou en mécanique l'espace de sobolev est souvent appelé espace d'énergie au sens où il est constitué des fonctions d'énergie finie (c'est-à-dire de norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ finie). Les fonctions d'énergie finie peuvent éventuellement être "singulières " ce qui a un sens physique possible.

Proposition 1.2 *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x)\right) dx \tag{1.2}$$

et de norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.1 *(de densité). Si* Ω *un ouvert borné régulier de classe* $\mathcal{C}^1$*, ou bien si* $\Omega = \mathbb{R}^N_+$*, ou encore si* $\Omega = \mathbb{R}^N$*, alors* $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ *est dense dans* $H^1(\Omega)$*.*

Espace $H_0^1(\Omega)$

Définie maintenant un autre espace sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.4 *Soit* $C_c^\infty(\Omega)$ *l'espace des fonctions de classe* C^∞ *à support compact dans* Ω*. L'espace de sobolev* $H_0^1(\Omega)$ *est défini comme l'adérence de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$*.*

Proposition 1.3 *Muni du produit scalaire (1.2)de* $H^1(\Omega)$*, l'espace de sobolev* $H_0^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Corollaire 1.4 *voir[10] Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *borné. Alors la semi-norme*

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ *équivalente à la norme usuelle induite par celle de* $H^1(\Omega)$

Espace $H^m(\Omega)$

On peut aisément généraliser la définition 1.3 de l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ aux fonctions qui sont m fois dérivable au sens faible. Commençons par donner une convention d'écriture bien utile. Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ un multi-indice, c'est-à-dire un vecteur à N composantes entières positives $\alpha_i \geq 0$. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^N$ et pour une fonction v,

$$\partial^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}(x).$$

Définition 1.5 *Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \quad tel\ que\ \ , \forall \alpha \quad avec\ \ |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}, \tag{1.3}$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible

Proposition 1.5 *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha u(x)\partial^\alpha v(x)dx \tag{1.4}$$

et la norme $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Les fonctions de $H^m(\Omega)$ ne sont pas toujours continues ou régulières (cela dépend de m et de N), mais si m est suffisament grand alors toute fonction de $H^m(\Omega)$ est continue.

Théorème 1.2 *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, et si $m > N/2$, alors $H^m(\Omega)$ est un sous-espace de l'ensemble $C(\bar{\Omega})$ des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.*

Théorème 1.3 *(de trace).*
Soit Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace γ_0

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) & \to & L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\bar{\Omega}) \\ v & \to & \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{array} \tag{1.5}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Théorème 1.4 *Soit Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. On définit l'application trace γ_1*

$$\begin{array}{ccc} H^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) & \to & L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\bar{\Omega}) \\ v & \to & \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} \end{array} \tag{1.7}$$

avec $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla u.n$. Cette application γ_1 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout fonction $v \in H^2(\Omega)$, on a

$$\|\frac{\partial v}{\partial n}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est définit par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \text{tel que}\ \ \partial_i u \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens de la définition 1.1.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.2 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \quad pour \quad u, v \in H^m(\Omega).$$

Lemme 1.6 *Soit $v \in L^2(\Omega)$. Pour $1 \leq i \leq N$ on peut définir une forme linéaire continue $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ par la formule*

$$\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \phi \rangle_{H^{-1}, H^1_0(\Omega)} = -\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \quad pour\ tout \phi \in H^1_0(\Omega). \tag{1.9}$$

qui vérifie

$$\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si $v \in H^1(\Omega)$, alors la forme linéaire continue $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ coïncide avec la dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ de v.

Inégalités

Notation :Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On note par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.7 *: (Inégalité de Hölder). Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tel que $1 \leq p, q \leq +\infty$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors,$fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si $p = q = 2$ on aura l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Lemme 1.8 *: (Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière.*

Alors

$$\|u\|_2 \leq B\|\nabla u\|_2, \quad pour \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

où $B^{-1} = \inf\limits_{\|u\|\neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}$.

Lemme 1.9 *:(Inégalité de Sobolev-Poincaré). Soit p un nombre avec $0 \leq p < +\infty (n = 1, 2)$ ou $0 \leq p \leq \frac{4}{n-2} (n > 2)$. Alors il existe une constante $C(p, \Omega)$ telle que*

$$\|u\|_{p+1} \leq C(p, \Omega)\|\nabla u\|_2, \quad pour \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

Lemme 1.10 *:(de Gronwall). Soient g une fonction $\in L^\infty(0, T), g(t) \geq 0, p.p.t \in [0, T]$, a une fonctions $\in L^1(0, T)$ et β positive*

une fonction $a(t) \geq 0, p.p.t \in [0, T]$.

On suppose

$$g(t) \leq \int_0^t a(s)g(s)ds + \beta, p.p.t \in [0, T].$$

Alors

$$g(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), p.p.t \in [0, T].$$

Formulation variationnelle des problèmes elliptiques

Dans cette section, on s'intéresse à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique. En règle générale ces équations elliptiques correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. On va montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution, unique, et dépendant continûment des données.

L'approche qu'on va suivre est appelée approche variationnelle. On reprend cette approche variationnelle pour les problèmes d'évolution en temps (e.d.p. de type parabolique ou hyperbolique).

Au cous de cette section et des suivants, l'exemple prototype d'équation aux dérivées partielles de type elliptique sera le Laplacien pour lequel on étudie le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.10}$$

Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par partie dans l'établissement de formulation variationnelle, on commençe par donner quelques résultats essentiels à ce sujet .

Formule de Green et formule d'intégration par partie

Théorème 1.5 *(Formule de Green). Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit w une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(x)n_i(x)ds, \tag{1.11}$$

où n_i est la i-ème composant de la normale extérieure unité de Ω.

Corollaire 1.11 *(Formule d'intégration par partie). Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit u et v deux fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elle vérifie la*

formule d'intégration par partie

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds. \tag{1.12}$$

Corollaire 1.12 *Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds, \tag{1.13}$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq N}$ est le vecteur gradient de u.

Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, on suppose que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre f de (1.10)est continu sur $\bar{\Omega}$. Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivant.

Proposition 1.13 *Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$.Soit*

$$X = \{\phi \in C^1(\bar{\Omega}) \ \ telque \ \ \phi = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega\}.$$

Alors u est une solution du problème aux limites (1.10) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \ \ \forall v \in X. \tag{1.14}$$

L'égalité (1.14) est applée la formulation variationnelle du problème aux limites (1.10).

Remarque 1.3 *En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (1.14)sous la forme : trouver $u \in X$ tel que*

$$a(u,v) = L(v) \quad pour\ toute\ fonction \quad v \in X,$$

avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx,$$

où$a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur X et $L(.)$ est une forme linéaire sur X. C'est sous cette forme abstraite que on résoudre (avec quelques hypothèses) la formulation variationnelle dans la prochaine sous-section.

Théorie de Lax-Milgram

Cadre abstrait

On décrive une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert. On note V un espace de Hilbert réel de scalaire $\langle , \rangle$ et de norme $\| \|$. Suivant la remarque de sous-section précédente on considére une formulation variationnelle du type :

$$\text{trouve } \ u \in V \ \text{ tel que } \ a(u,v) = L(v) \ \text{ pour toute fonction } \ v \in V \tag{1.15}$$

Les hypothèses sur **a** et **L** sont

1. **L(.)** est une forme linéaire continue sur **V**, c'est-à-dire que $v \to L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que

$$|L(v)| \leq C\|v\| \ \text{ pour tout } \ v \in V$$

2. **a**(.,.)est une forme bilinéaire sur V, c'est-à-dire que $w \to a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$,et $v \to a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$

3. **a**(.,.)est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(w,v)| \leq M\|w\|\|v\| \ \text{ pour tout } \ w, v \in V \tag{1.16}$$

4. **a**(.,.)est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$a(v,v) \geq \nu\|v\|^2 \ \text{ pour tout } \ v \in V. \tag{1.17}$$

Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (1.15). En particulier, la coercivité de $a(.,.)$ est essentielle.

Théorème 1.6 *(Lax-Milgram)*

Soit V un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation (1.15) admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.

Chapitre 2

L'existence et l'unicité

2.1 Introduction

Le modèle mathématique de Kirchhoff du mouvement d'une chaîne (câble) qui se déplace entre deux oeillets avec une vitesse constante v avec $0 \leq v \leq 1$ est régie par l'équation suivante

$$y_{tt} + 2vy_{xt} = \left(1 - v^2 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_{xx}, \quad x \in [0,1], \quad t \geq 0$$

un des oeillets est serré sur un corps rigide définie par une première condition au bord : $y(0,t) = 0, \quad t \geq 0$, tandis que l'autre est serré sur un corps à propriétés viscoelastique donnée par une deuxième condition au bord, donnée par

$$\left(1 - v^2 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_x(1,t) + \int_0^t h(t-s)y_t(1,s)ds = 0, \quad t \geq 0,$$

La distance entre les deux oeillets est supposée égale à 1.

La dynamique de la chaine peut être représentée par le modèle (2.1) ci- dessous (voir [16]), qui est dérivée en utilisant le principe de Hamilton généralisé (voir [5])

$$\begin{cases} y_{tt} + 2vy_{xt} = \left(1 - v^2 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_{xx}, \quad x \in [0,1], \quad t > 0, \\ y(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ \left(1 - v^2 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_x(1,t) + \int_0^t h(t-s)y_t(1,s)ds = 0, \quad t \geq 0, \\ y(x,0) = f(x), y_t(x,0) = g(x), \quad x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où y(x,t) représente le déplacement transversal de la chaine et b est un constant positive.

L'équation (2.1) nous informe que ce modèle se caractérisè par le fait que la tension dans la chaine est donnée par

$$T(t) = 1 + b\int_0^1 y_x^2 dx, \quad \forall t \geq 0.$$

La première condition aux limite dans Eq.(2.1) indique la fixation de la chaine (corde) au x=0, et la seconde condition aux limite exprime le fait que la flexible est serré dans un corps avec des propriétés viscoelastic à x=1.

Et le terme de convolution représente le contrôle aux limites. Pour plus de détails sur la signification physique de cette condition voir par exemple [12].

Les deux fonctions f(x) et g(x) représentent le déplacement initial et la vitesse initiale de la chaine, respectivement. Au moins une des fonctions f, g n'est pas identiquement nulle sur [0,1].

Le contrôle aux limite de type mémoire a été utilisé par plusieurs auteurs, et de nombreux résultats sur l'existence et la stabilité des solutions ont été établis pour les structures immobiles.

En plus, il existe differents modèles qui peuvent décrire la dynamique d'une chaine de déplacement axial : modèles linéaires et modèles non linéaires voir par exemple [1, 2, 3, 8, 9, 11, 18, 19]. La stabilité d'une chaine de type Kirchhoff qui se déplace axialement à l'aide d'un contrôle au limite a attiré de nombreux recherches en raison de leur commodité dans les applications.

Le problème (2.1) a d'abord été étudié dans l'article de Shahruz dans [15] avec le contrôle de frontière suivant

$$u(t) = -ky_t(1,t), \quad \forall t \geq 0.$$

où $k > 0$. Il a prouvé que la chaine est stable et a noté que la chaine est stable sans un contrôle au limite lorsque l'on autorise une de ses extrémités à se déplacer librement transversal. Le même modèle a été étudié par Kim et al[5] avec un contrôle au limite différent

$$u(t) = -k(t)y_t(1,t) - \theta(t)sint, \quad \forall t \geq 0.$$

où $k, \theta \in C^1[0,\infty[$. Il est prouvé que ce contrôle au limites est suffisant pour stabiliser la chaine exponentiellement.

Notre objectif dans ce travail est de stabiliser le même modèle que dans [5] mais en utilisant une atténuation beaucoup plus faible à savoir un contrôle au limite du type mé-

moire. Quand $v = 0$ nous montrons que le contrôle aux limites est capable de stabiliser asymptotiquement le système (chapitre 3), en utilisant le principe inverse de LaSalle.

Dans le troisième chapitre, on énonce l'hypothèse sur la fonction de relaxation et présentons une certaine notation qui sera utilisée, donnée par :
(A) $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et il existe une fonction non décroissante $\alpha(t)$ tel que $\alpha'(t)\backslash\alpha(t) = \eta(t)$ est un fonction décroissante qui vérifie :

$$\int_0^\infty h(s)\alpha(s)ds < \infty.$$

et il existe des fonction satisfaisant l'hypothèse (A) par exemple :

1. On pose $h(t) = a(1+t)^{-p}, \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$.

   Le rendement simple de calcul de h satisfait toutes les conditions dans (A) avec

   $$\alpha(t) = b(1+t)^{\beta}, \alpha'(t) = b\beta(1+t)^{\beta-1}, \eta(t) = b\beta(1+t)^{-1} \quad avec \quad b, p > 0 \quad et \quad p-\beta > 1.$$

2. $h(t) = a(1+t)^b e^{-pt}$,$b > 0, p > 0$ est un exemple qui vérifie (A) avec

   $$\alpha(t) = (1+t)^{\beta}e^{qt}, \alpha'(t) = \beta(1+t)^{\beta-1}e^{qt} + q(1+t)^{\beta}e^{qt}, 0 < q < p \quad et \quad \beta > 0,$$

   $$\eta(t) = (1+t)^{-1}[\beta + q(1+t)].$$

3. $h(t) = e^{-pt}, \alpha(t) = e^{qt}, \alpha'(t) = qe^{qt}, 0 < q < p, \eta(t) = q.$

Dans la présente partie, on va démentrer l'existence et l'unicité des solutions au problème (2.1) dans l'espace utilisé est donnée par

$$V = \left\{u \in H^1(0,1), u(0) = 0\right\}.$$

2.2 l'existence et l'unicité

Comme dans ce chapitre, se décompose en trois étapes : premièrement (section 2.1), on établit une formulation variationnelle, deuxièmement (section 2.2), on démontre l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle en utilisant une base hilbertienne de fonctions propres, troisièmement (section 2.3), on montre que cette solution variationnelle vérifie bien le problème aux limites.

Formulation variationnelle

L'idée est d'écrire une formulation variationnelle qui ressemble à une équation ordinaire du deuxième ordre. On multiple donc l'équation (2.1) par une fonction test $w(x)$ qui dépend pas du temps t. A cause de la condition aux limites on demandé à ce que w s'annule sur le bord de l'ouvert Ω. Un calcul formel conduit à

$$\int_\Omega y_{tt}(x,t)w(x)dx + 2v\int_\Omega y_{xt}(x,t)w(x)dx - \left(1-v^2+b\int_\Omega y_x^2 dx\right)\int_\Omega y_{xx}(x,t)w(x)dx = 0$$

par intégration par partie on obtient

$$\int_\Omega y_{tt}(x,t)w(x)dx - 2v\int_\Omega y_t(x,t)w_x(x)dx + \left(1-v^2+b\int_\Omega y_x^2 dx\right)\int_\Omega y_x(x,t)w_x(x)dx = 0$$

donc on a

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega y(x,t)w(x)dx - 2v\frac{d}{dt}\int_\Omega y(x,t)\nabla w(x)dx + \left(1-v^2+b\int_\Omega y_x^2 dx\right)\int_\Omega \nabla y(x,t)\nabla w(x)dx = 0 \tag{2.2}$$

Il est clair que l'espace naturale pour la fonction test w est $H_0^1(\Omega)$. On introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ est la forme bilinéaire $a(y,w)$ définie par

$$\langle y,w\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega y(x)w(x)dx \quad \text{et} \quad \langle y,\nabla w\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega y(x)\nabla w(x)dx$$

et

$$a(y,w) = \left(1-v^2+b\int_\Omega (\nabla y(x))^2 dx\right)\int_\Omega \nabla y(x)\nabla w(x)dx$$

Soit un temps final $T>0$ (éventuellement égal à $+\infty$), on se donne des conditions initieles $y_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ et $y_1 \in H_0^1(\Omega)$. La formulation variationnelle déduite de (2.2) est donc : trouver une solution y dans $C([0,T],H^2(\Omega))\cap C^1([0,T],H_0^1(\Omega))\cap C^2([0,T],L^2(\Omega))$ telle que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\langle y(t),w\rangle_{L^2(\Omega)} + a(y,w) - 2v\frac{d}{dt}\langle y(t),\nabla w\rangle_{L^2(\Omega)} = 0 & \forall w \in H_0^1(\Omega), 0<t<T, \\ y(t=0)=y_0, \quad \frac{dy}{dt}(t=0)=y_1 & . \end{cases} \tag{2.3}$$

Les données initiales ont bien un sens (2.3) grâce au choix de l'espace d'énergie $C([0,T],H^2(\Omega))\cap C^1([0,T],H_0^1(\Omega))\cap C^2([0,T],L^2(\Omega))$ pour la solution y. On justifie encore ce choix un peu plus loin en établissant son lien avec des égalités d'énergie.

Finalement la dérivée en temps dans la formulation variationnelle (2.3) doit être prise au sens faible puisqu'a priori la fonction $t \to \langle y(t),w\rangle_{L^2(\Omega)}$ n'est que deux fois dérivable

en temps puisqu'elle appartient à $C^2(0,T)$ et a priori la fonction $t \to \langle y(t), \nabla w\rangle_{L^2(\Omega)}$ n'est qu'une fois dérivable en temps puisqu'elle appartient à $C^1(0,T)$ (voir le Lemme 1.6 et la Remarque 2.1 pour plus de précisions).

Un résultat général

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (2.3), nous revenons encore au cadre général de de l'opérateur Laplacien et nous ramener à la résolution d'une famille de simples équations differentielles ordinaires du deuxième ordre. Soit H et V et G trois espaces de Hilbert tel que $H \subset V \subset G$ avec injection dense et compact (typiquement $H = H^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$ et $G = L^2(\Omega)$).

Théorème 2.1 *voir[10]. Soient V et H et G trois espaces de Hilbert tel que $H \subset V \subset G$ avec injection compact et H est dense dans V, et V est dense dans G. Soit $a(y,w)$ une forme biliniéaire symétrique continue et ceorcive dans V. Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $(y_0, y_1) \in V \cap H \times V$. Alors le problème.*

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\langle y(t), w\rangle_{L^2(\Omega)} + a(y,w) - 2v\frac{d}{dt}\langle y(t), \nabla w\rangle_{L^2(\Omega)} = 0 & \forall w \in V, 0 < t < T, \\ y(t=0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(t=0) = y_1 & . \end{cases} \tag{2.4}$$

(où l'équation (2.4) a lieu sens faible dans $]0,T[$) a une unique solution $y \in C([0,T[) \cap C^1([0,T],V) \cap C^2([0,T],G)$.

Remarque 2.1 *(délicate) voir[10].*

Pour le lecteur épris de rigueur mathématique, nous revenous sur le sens de la dérivée en temps dans la formulation variationnelle (2.3). Au vu des espaces dans lequel nous cherchons la solution $y(t)$, la fonction $t \to \langle y(t), w\rangle_G$ n'est pas dérivable au sens classique : elle appartient à $C(0,T)$ et à $C^1(0,T)$ et à $C^2(0,T)$.

On peut néonnois définie sa dérivée au sens faible du Lemme 1.6 (ou au sens des distributions). Plus précisément , $\frac{d^2}{dt^2}\langle y(t), w\rangle_H$ et $\frac{d}{dt}\langle y(t), \nabla w\rangle_H$ est défini comme un élément de $H^{-1}(0,T)$ (c'est-à-dire une forme linéaire continue sur $H_0^1(0,T)$) par les formules

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2}{dt^2}\langle y(t), w\rangle_H, \phi(t) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1(0,T)} &= \int_0^T \langle y(t), w\rangle_H \frac{d^2\phi}{dt^2}(t)dt \quad \forall \phi \in H_0^1(0,T) \\ \left\langle \frac{d}{dt}\langle y(t), \nabla w\rangle_H, \phi(t) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1(0,T)} &= -\int_0^T \langle y(t), \nabla w\rangle_H \frac{d\phi}{dt}(t)dt \quad \forall \phi \in H_0^1(0,T). \end{aligned}$$

Par conséquent, dire que l'équation de (2.4) a lien au sens faible dans $]0,T[$ *est équivalent à dire que*

$$\int_0^T \langle y(t),w\rangle_H \frac{d^2\phi}{dt^2}(t)dt + \int_0^T a(y(t),w)\phi(t)dt + 2v\int_0^T \langle y(t),\nabla w\rangle_H \frac{d\phi}{dt}(t)dt = 0$$

pour tout $w \in V$ *et tout* $\phi \in C_c^\infty(]0,T[)$ *puisque* $C_c^\infty(]0,T[)$ *est dense dans* $H_0^1(0,T)$. *Pour conclure, rassurons le lecteur : si y est solution de (2.4), alors, par l'égalité même qu'est (2.4), la dérivée* $\frac{d^2}{dt^2}\langle y(t),w\rangle_H$ *appartient à* $C^2(0,T)$ *et la dérivée* $\frac{d}{dt}\langle y(t),\nabla w\rangle_H$ *appartient à* $C^1(0,T)$ *et on peut donc dire que (2.4)a lieu presque partout dans]0,T[.*

Application

On applique maintenant le résultat abstrait du théorème 2.1 à l'équation (2.1), et on prouve que cette approche variationnelle a bien permis de résoudre l'équation aux dérivées partielles d'origine.

Définition 2.1 *On pose* $0 < T \leq \infty$ *, nous disons que y est une solution forte de système (2.1)en [0,T] avec*

$$y \in C([0,T];H^2(0,1)) \cap C^1([0,T];V) \cap C^2([0,T];L^2(0,1))$$

et y satisfait (2.1) pour tout $t \in [0,T]$ *et presque tous x dans (0,1).*
Avec notre hypothèse(A), le problème (1) peut être formulé comme équation intégrale évolutionnaire du type variationnel ([12],[13]).

Théorème 2.2 *voir[10]. Soit* Ω *un ouvert borné régluier de* $\mathbb{R}^N$, *et un temps final* $T > 0$. *On considère une donnée initiale* $(y_0,y_1) \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. *Alors l'équation (2.1)admet une unique solution* $y \in C([0,T],H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T],H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T],L^2(\Omega))$.

Preuve. On applique le théoreme (2.1) à la formule variationnelle (2.3) de l'équation (2.1) (ses hypothèses sont facilement vérifiées $H = H^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$ et $G = L^2(\Omega)$) et on montre que $a(y(t),w)$ est bilinéaire, continue et coercive :

– $a(y(t),w)$ et bilinéaire car l'intégrale et linéaire

– la continuité de $a(y(t), w)$

$$\begin{aligned}
|a(y(t),w)| &= |\left(1-v^2+b\int_\Omega(\nabla y(x,t))^2dx\right)\int_\Omega \nabla y(x,t)\nabla w(x)dx| \\
&\leq |1-v^2+b\int_\Omega(\nabla y(x,t))^2dx||\int_\Omega \nabla y(x,t)\nabla w(x)dx| \\
&\leq (1-v^2)\int_\Omega|\nabla y(x,t)||\nabla w(x)|dx+\left(b\int_\Omega(\nabla y(x,t))^2dx\right)\int_\Omega|\nabla y(x,t)||\nabla w(x)|dx \\
&\quad \text{d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schawarz} \\
&\leq \max(1-v^2, b\int_\Omega(\nabla y(x,t))^2dx)\left(\int_\Omega|\nabla y(x,t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\nabla w(x)|^2\right)^{1/2} \\
&\leq C\|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

avec $C = \max(1-v^2, b\int_\Omega(\nabla y(x,t))^2dx)$ tel que $C > 0$.

– la coercivité de $a(y(t), w)$

$$\begin{aligned}
|a(w,w)| &= |\left(1-v^2+b\int_\Omega(\nabla w(x))^2dx\right)\int_\Omega(\nabla w(x))^2dx| \\
&= |(1-v^2)\int_\Omega(\nabla w(x))^2dx+\left(b\int_\Omega(\nabla w(x))^2dx\right)\int_\Omega(\nabla w(x))^2dx| \\
&\geq \min(1-v^2, b\int_\Omega(\nabla w(x))^2dx)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq C_1|w|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

$C_1 = \min(1-v^2, b\int_\Omega(\nabla w(x,t))^2dx)$ tel que $C > 0$.

Donc il reste à montrer que l'unique solution $y \in C([0,T], H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T], H^1_0(\Omega)) \cap C^2([0,T], L^2(\Omega))$ de cette formulation variationnelle est bien une solution de (2.1). Tout d'abord la condition aux limites de Dirichlet se retrouve par application du Théorème 1.4 et Théorème 1.3 de trace à $y(t) \in H^1_0(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$, et la condition initiale est justifiée par la continuité de $y(t)$ en $t = 0$ comme fonction à valeurs dans $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et de $dy/dt(t)$ en $t = 0$ comme fonction à valeurs dans $H^1_0(\Omega)$. ∎

Chapitre 3

Stabilisation d'une chaine de Kirchhoff par un contrôle aux limites

3.1 Des estimations a priori

Théorème 3.1 *voir[14] L'énergie associée à Eq.(2.1) est donnée par*

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2dx+\frac{1}{2}(1-v^2)\int_0^1 y_x^2dx+\frac{b}{4}\left[\int_0^1 y_x^2dx\right]^2,\quad t\geq 0$$

Preuve. On multiple l'Eq (2.1) par y_t et on intégre entre [0,1], on obtient

$$\int_0^1 y_{tt}y_tdx+v\int_0^1 2y_{xt}y_tdx=\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)\int_0^1 y_{xx}y_tdx$$

on intégrant par parties par rapport au temps, on obtient

$$\left[y_t^2(x,t)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d}{dt}y_t^2dx+v\left[y_t^2(x,t)\right]_0^1=\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)\left[[y_x(x,t)y_t(x,t)]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d}{dt}y_x^2dx\right]$$

par les conditions aux bord on trouve

$$y_t^2(1,t)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d}{dt}y_t^2dx+vy_t^2(1,t)=\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)\left[y_x(1,t)y_t(1,t)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d}{dt}y_x^2dx\right]$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2dx+\frac{1}{2}(1-v^2)\int_0^1 y_x^2dx+\frac{b}{4}\left[\int_0^1 y_x^2dx\right]^2\right\} &= \left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)y_x(1,t)y_t(1,t)\\ &- vy_t^2(1,t)-y_t^2(1,t)\end{aligned}$$

Alors

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2 dx + \frac{1}{2}(1-v^2)\int_0^1 y_x^2 dx + \frac{b}{4}\left[\int_0^1 y_x^2 dx\right]^2, \quad t \geq 0$$

■

Lemme 3.1 *À partir d'Eq. (2.1), la fonction E(t) vérifie*

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\frac{1}{2}(v-\delta)y_t^2(1,t) + \frac{1}{2}\|h\|_1\left(\frac{1}{\delta} + \frac{v}{1-v^2}\right)\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds, \tag{3.1}$$

pour tout $t \geq 0$ *et* $\delta > 0$

Preuve. Par le théorème de transport de Reynolds (voir[7]), le dérivé de E(t) est égal à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\widetilde{E}(x,t)dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E}(x,t)\right)dx + \left[v\widetilde{E}(x,t)\right]_0^1 \\ &= \int_0^1 y_t y_{tt}dx + \left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2 dx\right)\int_0^1 y_x y_{xt}dx + \left[v\widetilde{E}(x,t)\right]_0^1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

telque

$$\widetilde{E}(x,t) = \frac{1}{2}y_t^2(x,t) + \frac{1}{2}\left(1-v^2+\frac{b}{2}\int_0^1 y_x^2(x,t)dx\right)y_x^2(x,t), \quad t \geq 0 \tag{3.3}$$

A l'aide des conditions aux limites dans Eq.(2.1) et la définition (3.3) on obtient

$$\left[\widetilde{E}(x,t)\right]_0^1 \leq \frac{1}{2}y_t^2(1,t)dx + \frac{1}{2}\left(1-v^2+\frac{b}{2}\int_0^1 y_x^2 dx\right)y_x^2(1,t), \quad t \geq 0 \tag{3.4}$$

En remplaçant y_{tt} d'Eq.(2.1) dans Eq. (3.2), et on utilise l'intégrale par partie on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \int_0^1 y_t\left[\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2 dx\right)y_{xx} - 2vy_{xt}\right]dx \\ &+ \left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2 dx\right)\int_0^1 y_x y_{xt}dx + \left[v\widetilde{E}(x,t)\right]_0^1 \\ &\leq \int_0^1 \left[\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2 dx\right)y_{xx}y_t - 2vy_{xt}y_t\right]dx \\ &+ \left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2 dx\right)\int_0^1 y_x y_{xt}dx \\ &+ \frac{v}{2}y_t^2(1,t) + \frac{v}{2}\left(1-v^2+\frac{b}{2}\int_0^1 y_x^2 dx\right)y_x^2(1,t)\end{aligned}$$

$$\leq \left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)\left[\int_0^1 (y_{xx}y_t+y_xy_{xt})dx\right]-v\int_0^1 2y_{xt}y_tdx$$

$$+ \frac{v}{2}y_t^2(1,t)+\frac{v}{2}\left(1-v^2+\frac{b}{2}\int_0^1 y_x^2dx\right)y_x^2(1,t)$$

$$\leq \left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}y_ty_x\right)dx\right]-vy_t^2(1,t)$$

$$+ \frac{v}{2}y_t^2(1,t)+\frac{v}{2}\left(1-v^2+\frac{b}{2}\int_0^1 y_x^2dx\right)y_x^2(1,t)$$

$$\leq \left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)y_t(1,t)y_x(1,t)-\frac{v}{2}y_t^2(1,t)$$

$$+ \frac{v}{2}\left(1-v^2+\frac{b}{2}\int_0^1 y_x^2dx\right)y_x^2(1,t)$$

Donc

$$\frac{d}{dt}E(t)\leq \left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)y_t(1,t)y_x(1,t)-\frac{v}{2}y_t^2(1,t)$$
$$+\frac{v}{2}\left(1-v^2+\frac{b}{2}\int_0^1 y_x^2dx\right)y_x^2(1,t). \tag{3.5}$$

On pose

$$1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\geq 1-v^2$$

à partir des conditions aux limites dans Eq.(2.1), on obtient

$$\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)y_x(1,t)=-\int_0^t h(t-s)y_t(1,s)ds$$

Alors

$$y_x^2(1,t)=\frac{1}{\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)^2}\left(\int_0^t h(t-s)y_t(1,s)ds\right)^2$$

Donc on obtient l'Eq suivant :

$$\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)y_x^2(1,t) \leq \frac{1}{1-v^2}\left(\int_0^t h(t-s)y_t(1,s)ds\right)^2$$
$$\leq \frac{\|h\|_1}{1-v^2}\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds. \tag{3.6}$$

par estimation de première limite dans du membre de droite du Eq.(3.5), on a

$$\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_t(1,t)y_x(1,t)$$

$$\leq \frac{\delta}{2}y_t^2(1,t)+\frac{1}{2\delta}\left(1-v^2+\frac{b}{2}\int_0^1 y_x^2 dx\right)^2 y_x^2(1,t)$$

$$\leq \frac{\delta}{2}y_t^2(1,t)+\frac{\|h\|_1}{2\delta}\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds, \delta>0, t\geq 0. \tag{3.7}$$

d'aprés l'Eqs. (3.5), (3.6), et (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &\leq \frac{\delta}{2}y_t^2(1,t)+\frac{\|h\|_1}{2\delta}\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds \\ &- \frac{v}{2}y_t^2(1,t)+\frac{v}{2}\frac{\|h\|_1}{1-v^2}\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds \\ &\leq -\frac{1}{2}(v-\delta)y_t^2(1,t)+\frac{1}{2}\|h\|_1\left(\frac{1}{\delta}+\frac{v}{1-v^2}\right)\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds\end{aligned}$$

Il est clair que la dérivée de l'énergie classique $\frac{dE(t)}{dt}$ de signe non deni, cependant, en posant

$$\phi_1(t)=\int_0^1 xy_x(y_t+vy_x)dx, \quad t\geq 0$$

et

$$\phi_2(t)=\int_0^1 H_\alpha(t-s)y_t^2(1,s)ds, \quad t\geq 0$$

telque

$$H_\alpha(t)=\alpha(t)^{-1}\int_t^\infty h(s)\alpha(s)ds.$$

Ce qui permet de denir la fonction modifié par

$$F(t)=E(t)+\lambda_1\phi_1(t)+\lambda_2\phi_2(t), \quad t\geq 0.$$

Le premier résultat prouve que F(t) et $E(t)+\phi_2(t)$ sont équivalents. ∎

Proposition 3.2 *Il existe $\beta_i>0, i=1,2$ tels que*

$$\beta_1[E(t)+\phi_2(t)]\leq F(t)\leq \beta_2[E(t)+\phi_2(t)] \tag{3.8}$$

Pour tout $t\geq 0$ et pour λ_i assez petit,$i=1,2$.

Preuve.

On a

$$F(t) = E(t) + \lambda_1\phi_1(t) + \lambda_2\phi_2(t), \quad t \geq 0$$

Alors pour tout C positive

$$F(t) \leq CE(t) + \lambda_2\phi_2(t)$$

donc

$$min\{C, \lambda_2\}[E(t) + \phi_2(t)] \leq F(t) \leq max\{C, \lambda_2\}[E(t) + \phi_2(t)]$$

et on appliqué l'inégalité de Young au fonction $\phi_1(t)$ et considérant $\lambda_i, i = 1, 2$ suffisamment petite, la relation (3.8) suit immédiatement. ∎

3.2 la stabilisation asymptotique en cas de déplacement $v \neq 0$

Dans cette section, on énonce et prouve notre résultat de décroissance, on commençe par estimer la dérivé de $\phi_1(t)$

Lemme 3.3 *À partir d'Eq.(2.1). Une différenciation de la fonction $\phi_1(t)$ vérifie :*

$$\frac{d}{dt}\phi_1(t) \leq -E(t) + \frac{\|h\|_1}{2(1-v^2)}\left[1 + \frac{v(1+2v)}{1-v^2}\right]\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds$$
$$+ \frac{1}{2}(1+v)y_t^2(1,t), t \geq 0. \tag{3.9}$$

Preuve. On a

$$\frac{d}{dt}\phi_1(t) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\widetilde{\phi}_1(x,t)dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\phi}_1(x,t)\right)dx + \left[v\widetilde{\phi}_1(x,t)\right]_0^1$$
$$= \int_0^1 xy_x(y_{tt} + vy_{xt})dx + \int_0^1 xy_{xt}(y_t + vy_x)dx + \left[v\widetilde{\phi}_1(x,t)\right]_0^1, t \geq 0 \tag{3.10}$$

telque

$$\widetilde{\phi}_1(x,t) = xy_x(x,t)(y_t(x,t) + vy_x(x,t)), t \geq 0. \tag{3.11}$$

A l'aide des conditions aux bord dans Eq.(2.1), et la définition (3.11), on trouve

$$\left[\widetilde{\phi}_1(x,t)\right]_0^1 \leq \frac{1}{2}y_t^2(1,t) + \frac{1}{2}(1+2v)y_x^2(1,t), t \geq 0. \tag{3.12}$$

En remplaçant y_{tt} d'Eq.(2.1) dans Eq.(3.10) et à partir de la relation (3.12), on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi_1(t) &\leq \int_0^1 xy_x\left[\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)y_{xx}-2vy_{xt}+vy_{xt}\right]dx \\
&+ \int_0^1 xy_{xt}(y_t+vy_x)dx \\
&+ \frac{v}{2}y_t^2(1,t)+\frac{v}{2}(1+2v)y_x^2(1,t) \\
&\leq \int_0^1 xy_x\left[\left(1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right)y_{xx}-vy_{xt}\right]dx \\
&+ \int_0^1 xy_{xt}y_tdx+v\int_0^1 xy_xy_{xt}dx \\
&+ \frac{v}{2}y_t^2(1,t)+\frac{v}{2}(1+2v)y_x^2(1,t), t\geq 0.
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi_1(t) \leq -2v\int_0^1 xy_xy_{xt}dx+\left[1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right]\int_0^1 xy_xy_{xx}dx \\
+2v\int_0^1 xy_xy_{xt}dx+\int_0^1 xy_{xt}y_tdx+\frac{v}{2}y_t^2(1,t)+\frac{v}{2}(1+2v)y_x^2(1,t), t\geq 0.
\end{aligned}$$

On intégre par partie, et on utilisant les conditions aux limites dans Eq.(2.1), alors il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi_1(t) &\leq \left[1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right]\left(\left[\frac{1}{2}xy_x^2(x,t)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 y_x^2dx\right)+\left[\frac{1}{2}xy_t^2(x,t)\right]_0^1 \\
&- \frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2dx+\frac{v}{2}y_t^2(1,t)+\frac{v}{2}(1+2v)y_x^2(1,t) \\
&\leq \left[1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right]\left(\frac{1}{2}y_x^2(1,t)-\frac{1}{2}\int_0^1 y_x^2dx\right)+\frac{1}{2}y_t^2(1,t) \\
&- \frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2dx+\frac{v}{2}y_t^2(1,t)+\frac{v}{2}(1+2v)y_x^2(1,t) \\
\frac{d}{dt}\phi_1(t) &\leq -E(t)+\frac{1}{2}\left[1-v^2+b\int_0^1 y_x^2dx\right]y_x^2(1,t)+\frac{1}{2}(1+v)y_t^2(1,t) \\
&+ \frac{v}{2}(1+2v)y_x^2(1,t), t\geq 0. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

alors d'apés l'Eqs(3.6) et (3.13), en conclue l'équation(3.9) ∎

Théorème 3.2 *Supposez que l'hypothèse (A) à vérifie. Si* $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \eta = 0$, *alors*

$$E(t) \leq Ae^{-\gamma \int_0^t \eta(s)ds}, \;\; t \geq 0$$

et si $\eta \neq 0$, *alors*

$$E(t) \leq Ae^{-\gamma t}, \;\; t \geq 0$$

Pour quelques constantes positives A *et* γ, *à condition que* $H_\alpha(0)\|h\|_1 < \frac{v^2(1-v^2)}{2(2-v^2)}$.

Preuve. On dérive $\phi_2(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi_2(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t H_\alpha(t-s)y_t^2(1,s)ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}H_\alpha(t-s)y_t^2(1,s)\right)ds + \left[H_\alpha(t-s)y_t^2(1,s)\right]_0^t \\
&= H_\alpha(0)y_t^2(1,t) + \int_0^t H'_\alpha(t-s)y_t^2(1,s)ds \\
&= H_\alpha(0)y_t^2(1,t) \\
&+ \int_0^t \left[-\frac{\alpha'(t-s)}{\alpha^2(t-s)}\int_{t-s}^\infty h(s)\alpha(s) + \alpha^{-1}(t-s)\left(\int_{t-s}^\infty h(s)\alpha(s)\right)'\right] y_t^2(1,s)ds \\
&= H_\alpha(0)y_t^2(1,t) \\
&+ \int_0^t \left[-\frac{\alpha'(t-s)}{\alpha(t-s)}\alpha^{-1}(t-s)\int_{t-s}^\infty h(s)\alpha(s) + \alpha^{-1}(t-s)\left(\int_{t-s}^\infty h(s)\alpha(s)\right)'\right] y_t^2(1,s)ds \\
&= H_\alpha(0)y_t^2(1,t) + \int_0^t \left[-\frac{\alpha'(t-s)}{\alpha(t-s)}H_\alpha(t-s) + \alpha^{-1}(t-s)\left(\int_{t-s}^\infty h(s)\alpha(s)\right)'\right] y_t^2(1,s)ds \\
&= H_\alpha(0)y_t^2(1,t) - \int_0^t \frac{\alpha'(t-s)}{\alpha(t-s)}H_\alpha(t-s)y_t^2(1,t)ds - \int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds
\end{aligned}$$

on va poser l'hypothèse que $\alpha'(t)/\alpha(t) = \eta(t)$ est une fonction décroissante, on obtient

$$\frac{d}{dt}\phi_2(t) \leq H_\alpha(0)y_t^2(1,t) - \eta(t)\int_0^t H_\alpha(t-s)y_t^2(1,t)ds - \int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds, \quad t \geq 0 \;\; (3.14)$$

La dérivé de F(t) à partir d'Eq.(2.1) a l'aide d'Eqs.(3.1),(3.9), et de (3.14) est estimé comme suit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}(E(t)+\lambda_1\phi_1(t)+\lambda_2\phi_2(t)) \\
&= \frac{d}{dt}E(t)+\lambda_1\frac{d}{dt}\phi_1(t)+\lambda_2\frac{d}{dt}\phi_2(t) \\
&\leq -\frac{1}{2}(v-\delta)y_t^2(1,t)+\frac{1}{2}\|h\|_1\left(\frac{1}{\delta}+\frac{v}{1-v^2}\right)\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds \\
&+ \lambda_1\left(-E(t)+\frac{\|h\|_1}{2(1-v^2)}\left[1+\frac{v(1+2v)}{1-v^2}\right]\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds\right) \\
&+ \lambda_2\left(H_\alpha(0)y_t^2(1,t)-\eta(t)\int_0^t H_\alpha(t-s)y_t^2(1,t)ds-\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds\right) \\
&\leq -\lambda_1 E(t)-\left[\frac{1}{2}(v-\delta)-\lambda_2 H_\alpha(0)-\lambda_1\frac{(1+v)}{2}\right]y_t^2(1,t)- \\
&- \left\{\lambda_2-\frac{1}{2}\|h\|_1\left(\frac{1}{\delta}+\frac{v}{1-v^2}\right)-\lambda_1\frac{\|h\|_1}{2(1-v^2)}\left[1+\frac{v(1+2v)}{1-v^2}\right]\right\} \\
&\times\int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds-\lambda_2\eta(t)\int_0^t H_\alpha(t-s)y_t^2(1,t)ds, \quad t\geq 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

on prend $\delta=\frac{v}{2}$ et λ_2 choisi de sorte que

$$\frac{1}{2}\|h\|_1\left(\frac{2}{v}+\frac{v}{1-v^2}\right)<\lambda_2<\frac{v}{4H_\alpha(0)}.$$

on pose

$$H_\alpha(0)\|h\|_1<\frac{v^2(1-v^2)}{2(2-v^2)}.$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &\leq -\lambda_1 E(t) - \left[\frac{1}{2}(v-\frac{v}{2}) - \frac{v}{4H_\alpha(0)}H_\alpha(0) - \lambda_1\frac{(1+v)}{2}\right] y_t^2(1,t) \\
&- \left\{\frac{1}{2}\|h\|_1\left(\frac{1}{\delta}+\frac{v}{1-v^2}\right) - \frac{1}{2}\|h\|_1\left(\frac{1}{\delta}+\frac{v}{1-v^2}\right) - \lambda_1\frac{\|h\|_1}{2(1-v^2)}\left[1+\frac{v(1+2v)}{1-v^2}\right]\right\} \\
&\times \int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds - \lambda_2\eta(t)\int_0^t H_\alpha(t-s)y_t^2(1,t)ds \\
&\leq -\lambda_1 E(t) - \left[-\lambda_1\frac{(1+v)}{2}\right] y_t^2(1,t) - \left\{-\lambda_1\frac{\|h\|_1}{2(1-v^2)}\left[1+\frac{v(1+2v)}{1-v^2}\right]\right\} \\
&\times \int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds - \lambda_2\eta(t)\int_0^t H_\alpha(t-s)y_t^2(1,t)ds
\end{aligned}$$

Puis, on choisie λ_1 assez petit, alors on a

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\lambda_1 E(t) - \lambda_2\eta(t)\int_0^t H_\alpha(t-s)y_t^2(1,t)ds, \quad t \geq 0.$$

Si la $\lim_{t\to\infty}\eta(t) = 0$, alors quelque soit $C_1 > 0$ il existe $t_*(C_1) \geq 0$ tels que $\eta(t) \leq C_1$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &\leq -\lambda_1 E(t) - \lambda_2\eta(t)\phi_2(t) \\
&\leq -max\{\lambda_1,\lambda_2\}\eta(t)[E(t)+\phi_2(t)]
\end{aligned}$$

Par conséquent, a partir de la Proposition (3,2), on obtient

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -C_2\eta(t)F(t), \quad t \geq t_* = t_*(C_2) \tag{3.16}$$

Pour C_2 constante positive. L' intégration d'Eq.(3.16) nous donne

$$\frac{d}{dt}F(t)/F(t) \leq -C_2\eta(t), \quad t \geq t_*$$

on intégre entre (t_*, t)

$$\int_{t_*}^t \frac{d}{ds}F(s)/F(s)ds \leq -C_2\int_{t_*}^t \eta(s)ds, \quad t \geq t_*$$

implique que

$$\ln F(t) \leq -C_2\int_{t_*}^t \eta(s)ds, \quad t \geq t_*.$$

donc

$$F(t) \leq C_3 e^{-C_2 \int_{t_*}^{t} \eta(s)ds}, \quad t \geq t_*.$$

Pour tout C_3 constante positive, et par la continuité et la proposition (3,2), on obtient

$$E(t) \leq A e^{-\gamma \int_0^t \eta(s)ds}, \quad t \geq 0$$

Pour quelques constantes positives A etγ.

Si la $\lim_{t\to\infty} \eta(t) \neq 0$, alors il exist $\hat{t} \geq 0$ et $C_4 > 0$ tels que $\eta(t) \geq C_4$ pour $t \geq \hat{t}$.

Ainsi,

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -C_5 F(t), \quad t \geq \hat{t}$$

Pour $C_4 > 0$ qui donné par

$$E(t) \leq A e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0$$

Pour quelques constantes positives A etγ . Ceci achève la preuve. ∎

3.3 Stabilité asymptotiquement dans le cas $v = 0$

Dans cette section, on traite le problème (2.1) au cas où la chaine serait immobile (v=0)(le principe réciproque de LaSalle voir[6]). On considére le système suivant

$$\begin{cases} y_{tt} = \left(1 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_{xx}, \quad x \in [0,1], \quad t > 0, \\ y(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ \left(1 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_x(1,t) + \int_0^t h(t-s) y_t(1,s) ds = 0, \quad t \geq 0, \\ y(0,x) = f(x), y_t(x,0) = g(x), \quad x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.17}$$

On a mentionné dans les sections précédentes que la chaine dans l'état mobile produit l'atténuation de frais supplémentaires représentée dans le terme $-\frac{v}{2} y_t^2(1,t)$. Dans ce cas-ci, cet terme n'apparaît pas. Pour ceci, on considére la condition aux limite dans Eq.(3.17) au lequel est équivalent le même dans l'état mobile. Nous immobile aurons la stabilité asymptotique mais sans n'importe quel taux explicite. On définie l'énergie classique associée à Eq.(3.17) par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 y_x^2 dx + \frac{b}{4}\left[\int_0^1 y_x^2 dx\right]^2, \quad t \geq 0$$

On définit l'énergie modifié par

$$\mathcal{E}(t) = E(t) - \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)ds\right) y^2(1,t) + \frac{1}{2}(h \circ y)(1,t), \quad t \geq 0$$

où

$$(h \circ y)(t) = \int_0^t h(t-s)|y(t) - y(s)|^2 ds, \quad t \geq 0.$$

On suppose que le noyau vérifie

$$h(t) > 0 \quad et \quad h'(t) \leq 0 \quad pourtout \quad t \geq 0$$

tel que

$$1 - \int_0^\infty h(s)ds > 0.$$

Comme $y(0,t) = 0$ et $y^2(1,t) \leq \int_0^1 y_x^2 dx$ qui implique que $\mathcal{E}(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Proposition 3.4 *La dérivé de l'énergie modifiée E(t) à partir d'Eq.(3.17) est*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left(h' \circ y\right)(1,t) - \frac{1}{2}h(t)y^2(1,t), \quad t \geq 0.$$

Preuve. Multiplication d'Eq.(3.17) par y_t, et on intègre dans intervale [0.1], en utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\int_0^1 y_{tt}y_t dx = \left(1 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right)\int_0^1 y_{xx}y_t dx$$

d'après le preuve du théoreme 3.1, on a :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 y_x^2 dx + \frac{b}{4}\left[\int_0^1 y_x^2 dx\right]^2\right\} = \left(1 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_x(1,t)y_t(1,t) - y_t^2(1,t)$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \left(1 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_x(1,t)y_t(1,t) - y_t^2(1,t) \\ &= y_t(1,t)\int_0^t h(t-s)y_t(1,s)ds - y_t^2(1,t)\end{aligned}$$

et l'identité suivante :

$$y_t(1,t)\left(\int_0^t h(t-s)y(1,s)ds - y_t(1,t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(h' \circ y)(1,t) + \left(\int_0^t h(s)ds\right) y_t(1,t)y(1,t) - \frac{1}{2}(h \circ y)'(1,t)$$

$$= \frac{1}{2}(h' \circ y)(1,t) - \frac{1}{2}(h \circ y)'(1,t) - \frac{1}{2}h(t)y^2(1,t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t h(s)ds\right) y^2(1,t)\right]$$

où

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \frac{d}{dt}E(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t h(s)ds\right) y^2(1,t)\right] + \frac{1}{2}(h \circ y)'(1,t)$$

$$= y_t(1,t)\left(\int_0^t h(t-s)y(1,s)ds\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t h(s)ds\right) y^2(1,t)\right] + \frac{1}{2}(h \circ y)'(1,t)$$

$$= \frac{1}{2}(h' \circ y)(1,t) - \frac{1}{2}(h \circ y)'(1,t) - \frac{1}{2}h(t)y^2(1,t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t h(s)ds\right) y^2(1,t)\right]$$

$$- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t h(s)ds\right) y^2(1,t)\right] + \frac{1}{2}(h \circ y)'(1,t)$$

Donc on obtient

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(h' \circ y)(1,t) - \frac{1}{2}h(t)y^2(1,t), \quad t \geq 0.$$

■

Théorème 3.3 *Dans la nouvelle hypothèse sur le noyau h, le système (3.17) est asymptotiquement stable.*

Preuve. La proposition (3,4) indique que toutes les orbites sont liées en $V \times L^2(0,1)$ D'ailleurs, $E'(t) = 0$ si $y(1,t) = 0, t \geq 0$. Si on regarde $\mathcal{E}(t)$ comme $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(y)$, puis un argument simple dans la proposition (3,4) donne

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(y_t) = \frac{1}{2}(h' \circ y_t)(1,t) - \frac{1}{2}h(t)y_t^2(1,t), \quad t \geq 0.$$

Les liés du ce (énergie du second degré) et premier impliquent les pracompact de la trajectoire (voir[4]). Par le Principe d'invariance de La Salle (voir[6],[17]), la trajectoire tend au sous-ensemble invariable maximal de

$$B = \left\{y : \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0\right\}.$$

On réclame que B réduit à la solution zéro. Pour celui, on montre que la seule solution d'Eq.(3.17) avec $y(1,t) = 0$ est l'insignifiante. On considére la fonction suivante :

$$F(t) = \mathcal{E}(t) + \lambda_1 \phi_1(t), \quad t \geq 0$$

Où

$$\phi_1(t) = \int_0^1 x y_x y_t dx, \quad t \geq 0.$$

Les calculs semblables comme dans le lemme (3.3) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \lambda_1 \frac{d}{dt}\phi_1(t) \\
&= \lambda_1 \frac{d}{dt}\phi_1(t) \\
&= \lambda_1 \frac{d}{dt}\int_0^1 x y_x y_t dx \\
&= \lambda_1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(x y_x y_t) dx \\
&= \lambda_1 \int_0^1 (x y_{xt} y_t + x y_x y_{tt}) dx
\end{aligned}$$

En remplaçent le y_{tt} d'Eq (3.17). et en intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \lambda_1 \int_0^1 \left[x y_{xt} y_t + x y_x \left(1 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) y_{xx} \right] dx \\
&= \lambda_1 \int_0^1 x y_{xt} y_t + \lambda_1 \left(1 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) \int_0^1 x y_x y_{xx} \\
&= \lambda_1 \left(\frac{1}{2}y_t^2(1,t) - \frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2 dx\right) + \lambda_1 \left(1 + b\int_0^1 y_x^2 dx\right) \left(\frac{1}{2}y_x^2(1,t) - \frac{1}{2}\int_0^1 y_x^2 dx\right) \\
&= -\lambda_1 E(t) + \frac{\lambda_1}{2}y_t^2(1,t) + \frac{\lambda_1}{2}y_x^2(1,t)
\end{aligned}$$

ainsi que y(1,t)=0 nous donne

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\lambda_1 E(t), \quad t \geq 0$$

qui implique que F(t) se décroissance exponentiellement à zéro et

$$\mathcal{E}(t) = E(t) = Cst \leq M e^{-ct}, \quad t \geq 0.$$

on conclu que E(t)=0. C'est-à-dire, on a la solution zéro .

■

Conclusion

Dans ce mémoire on a prouvé l'existence et l'unicité de la solution du problème de type Kirchhoff en utilisant la méthode variationnelle .Nous avons aussi obtenu la décroissance exponentielle de l'énergie associée à la solution dans deux cas, cas où la vitesse ne s'annulle pas $v \neq 0$ et dans le cas où la vitesse est nulle $v = 0$.
Le terme mémoire h(t) utilisé qui vérifie l'hypothése suivante :

$$\int_0^\infty h(s)\alpha(s)ds < \infty.$$

perspectives

Les résultats obtenus dans ce mémoire on suppose entrevoir plusieurs pistes de recherche. Tout d'abord au sujet du modèle considéré et des résultats obtenus. On peut étendre ces résultats à des situations plus générale.

1. par exemple dans le cas où on change la tension T(t) (posé un problème).
2. une autre hypothèse sur le terme mémoire h(t) (il existe même problème avec une notre hypothèse).
3. annuller le terme mixte dans le problème (où notre problème devient un problème simple et situé à été simple de démontrer l'existence et l'unicité).

Bibliographie

[1] VA. Bapat, P. Srinivasan. Nonlinear transverse oscillations in traveling strings by the method of harmonic balance. J Appl Mech. 1967 ;34 :775-7.

[2] GF. Carrier. On the nonlinear vibration problem of the elastic string. Q Appl Math. 1965 ;3 :157-65.

[3] CH. Chung, CA. Tan. Active vibration control of the axially moving string by wave cancellation. J Vib Acoust. 1995 ;117 :49-55.

[4] K-J. Engel, R. Nagel. One parameter semigroups for linear evolution equations, vol. 194 of Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer ; 2000.

[5] D. Kim, YH. Kang, JB. Lee, GR. Ko, IH. Jung. Stabilization of a nonlinear Kirchhoff equation by boundary feedback control. J Eng Math. 2012 ;77(1) :197-209.

[6] J. La Salle, S. Lefschetz. Stability by Liapunov's direct method with applications. San Diego : Academic ; 1961.

[7] LG. Leal. Advanced transport phenomena : fluid mechanics and connective transport processes. Cambridge : Cambridge University Press ; 2007, p. 912.

[8] SY. Lee, CD. Mote. Vibration control of an axially moving string by boundary control. J Dyn Syst Meas Control. 1996 ;118 :66-74.

[9] T. Li, Z. Hou. Exponential stabilization of an axially moving string with geometrical nonlinearity by linear boundary feedback. J Sound Vib. 2006 ;296 :861-70.

[10] J. Louis. Analyse Numérique et Optimisation. Lions. Pr. Ecole Polytechnique ;1966-1986.

[11] CD. Mote. Dynamic stability of axially moving materials. Shock Vib Dig. 1972 ;4(4) :2-11.

[12] J. Prüss. Evolutionary integral equations and applications. Basel : Birkhäuser ; 1993.

[13] G. Propst, J. Prüss. On wave equations with boundary dissipation of memory type. J Integral Equations Appl. 1995 ;8(1) :99-123.

[14] N-E. Tatar, A. Kelleche, A. Khemmoudj. Uniform stabilization of an axially moving Kirchhoff string by a boundary control of memory type. J Dyn Control Syst. 2015 :1-13.

[15] SM. Shahruz. Boundary control of the axially moving Kirchhoff string. Automatica. 1998 ;34(10) :1273-77.

[16] SM. Shahruz, Kurmaji DA. Vibration suppression of a non-linear axially moving string by boundary control. J Sound Vib. 1997 ;201(1) :145-52.

[17] JA. Walker. Dynamical systems and evolution equations, theory and applications. New York : Plenum ; 1980.

[18] JA. Wickert, CD. Mote. Classical vibration analysis of axially moving continua. J Appl Mech. 1990 ;57 :738-44.

[19] JA. Wickert, CD. Mote. Current research on the vibration and stability of axially-moving materials. Shock Vib Dig. 1988 ;20(5) :3-13.