République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'Enseignement Superieur Et De La Recherche Scientifique
Université Dr Yahia Fares Médéa
Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques Et Informatique



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

En : MATHÉMATHIQUES

Spécialité : RECHERCHE OPERATIONNELLE

Présenté par : BEN HELAL Chaimaa

Sujet

Étude des Normes Spectrales de Certaines Matrices Circulantes et r-Circulantes

Soutenu publiquement le 13/07/2021, devant le jury composé de :

M^{me}	AIT-AMRANE N. Rosa	M.A.A.	U.Y.F.M.	Présidente
M^{r}	AIT-AMRANE Lyes	M.C.A.	E.S.I.(Alger)	Encadreur
M^{me}	GUETTAI Ghania	M.C.B.	U.Y.F.M.	Examinatrice

Remerciements

Loué soit **Dieu**, le tout puissant, qui m'a guidé vers le chemin de la lumière et du savoir et qui m'a donné la force et la détermination de terminer cette étude. merci **ALLAH**.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon encadreur M^r **AIT-AMRANE Lyes**, qui m'a beaucoup appris et m'a initié à la recherche scientifique, je le remercie pour sa disponibilité, sa patience et surtout ses judicieux conseils.

Je remercie, M^{me} **AIT-AMRANE N. Rosa** qui a présidé le jury.

Je remercie également, M^{me} **GUETTAI Ghania** qui a examiné mon travail.

Je remercie aussi tous mes professeurs de l'université Dr Yahia Fares Médéa et toutes les personnes qui m'ont soutenu lors de la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce présent travail à mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A l'âme de mon frère Abd El Aziz qui m'a accompagné jusqu'au bout, qu'il repose en paix.

A mes chères soeurs Amina, Asmaa et Bouchra pour leurs soutiens et leurs encouragements continus.

A tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé, même avec un mot.

A tous ceux qui liront ce mémoire.

Table des matières

RÉSUMÉ V
ABSTRACT VI
Introduction VII
Notations IX

1 Généralités sur les matrices **1**
1.1 Définitions et propriétés 1
1.2 Matrices circulantes 6
1.2.1 Diagonalisation d'une matrice circulante 7
1.3 Graphe circulante 11

2 Suites récurrentes linéaires **15**
2.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre p 15
2.1.1 Sous-espace vectoriel de dimension p 15
2.1.2 Terme général 16
2.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 16
2.3 Les nombres de Fibonacci 17
2.3.1 Le nombre d'or 17
2.3.2 Les formes de Binet 18
2.3.3 La Q-matrice 18
2.3.4 Quelques identités 21
2.3.5 Le graphe de Fibonacci 24
2.4 Les nombres de Lucas 25
2.4.1 La forme de Binet 25
2.4.2 Relation entre la suite de Fibonacci et la suite de Lucas 26
2.5 Les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas 26
2.5.1 Quelque propriétés des nombre hyper-Fibonacci et hyper-Lucas 28
2.6 Les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas généralisés 32
2.6.1 Les formules de Binet 33
2.6.2 L'identité de Cassini 33
2.6.3 Quelque propriétés des nombres hyper-Fibonacci et de hyper-Lucas généralisés 34
2.7 Les nombres bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas 35
2.7.1 Quelques identités 38
2.7.2 Quelque propriétés des nombres bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas 39

3 Étude des normes spectrales de certaines matrices circulantes et r-circulantes **40**
3.1 Les normes matricielles 40
3.2 Étude des normes spectrales de matrices circulantes et r-circulantes avec les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas 42

3.3 Étude des normes spectrales de matrices circulantes et r-circulantes avec les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas généralisés 52
3.4 Étude des normes spectrales des matrices circulantes et r-circulantes avec les nombres bi-périodique de Fibonacci et les nombres bi-périodique de Lucas . . . 54

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on étudie les nombres de Fibonacci, les nombres de Lucas et leurs généralisations, en les utilisant comme coefficients de matrices circulantes et r-circulantes. Notre objectif est d'étudier la norme spectrale de ces matrices en s'inspirant des travaux de Solak [17], Bahşī [4], Shen et Cen [16] et autres, et d'établir quelques résultas et propriétés.

Mots-clés : Matrice circulante, matrice r-circulante, les nombres de Fibonacci, les nombres de Lucas, les nombres hyper-Fibonacci, les nombres hyper-Lucas, les nombres bi-périodiques de Fibonacci, les nombres bi-périodiques de Lucas, la norme spectrale, la norme euclidienne, le produit de Hadamard, le produit de Kronecker.

ABSTRACT

In this dissertation, we study Fibonacci numbers, Lucas numbers and their generalizations, using them as coefficients of circulant matrices and r-circulant matrices. Our objective is to study the spectral norm of these matrices by drawing inspiration from the work of Solak [17], Bahşī [4], Shen and Cen [16] and others, and to establish some results and properties.

Keywords : Circulant matrix, r-circulant matrix, Fibonacci numbers, Lucas numbers, hyper-Fibonacci numbers, hyper-Lucas numbers, bi-periodic Fibonacci numbers, bi-periodic Lucas numbers, spectral norm, Euclidean norm, Hadamard product, Kronecker product.

Introduction

Les matrices circulantes et les matrices r-circulantes ont fait l'objet de recherche de plusieurs auteurs. Les matrices circulantes ont de nombreux liens avec des problèmes de physique, de traitement d'images, d'analyse de Fourier, de probabilité et de statistique, d'analyse numérique, de théorie des nombres et de géométrie [7]. De nombreux résultas sur les normes spectrales de matrices circulantes et de matrices r-circulantes dont les éléments sont des nombres de certaines suites classiques ont été obtenus. En 2005, Solak [17] a trouvé un encadrement de la norme spectrale des matrices circulantes

$$F = Circ(F_0, F_1, ..., F_{n-1}) \quad \text{et} \quad L = Circr(L_0, L_1, ..., L_{n-1})$$

dont les éléments sont des nombres de Fibonacci et des nombres de Lucas respectivement. Par exemple, dans le cas de la matrice F, l'encadrement est donné par

$$\sqrt{F_{n-1}F_n} \leq ||F||_2 \leq F_{n-1}F_n.$$

En 2010, Shen et Cen [16] ont trouvé un encadrement pour la norme spectrale des matrices r-circulantes

$$F' = Circr(F_0, F_1, ..., F_{n-1}) \quad \text{et} \quad L' = Circr(L_0, L_1, ..., L_{n-1}).$$

Dans le cas de la matrice F', l'encadrement est donné par

$$\begin{cases} \sqrt{F_{n-1}F_n} \leq ||F'||_2 \leq |r|\, F_{n-1}F_n & \text{si } |r| \geq 1 \\ |r| \sqrt{F_{n-1}F_n} \leq ||F'||_2 \leq \sqrt{(n-1)F_{n-1}F_n} & \text{si } |r| \geq 1 \end{cases}.$$

En 2011, Ipek [11] améliore le travail de Solak [17] en calculant la norme spectrale des matrices F et L. Il a donc obtenu les résultats suivants

$$||F||_2 = F_{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad ||L||_2 = L_{n+1} - 1.$$

Depuis, plusieurs chercheurs ont généralisé les travaux de Shen et Cen [16] et Ipek [11] à d'autres suites récurrentes linéaires. On peut citer le travail de Bahsi et Solak [5] qui ont calculé la norme spectrale des matrices circulantes

$$F = Circ\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, ..., F_{n-1}^{(k)}\right) \quad \text{et} \quad L = Circ\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, ..., L_{n-1}^{(k)}\right)$$

dont les éléments sont des nombres hyper-Fibonacci et des nombres hyper-Lucas respectivement. Ils ont aussi déterminé un encadrement pour la norme spectrale des matrices r-circulantes

$$F' = Circr\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, ..., F_{n-1}^{(k)}\right) \quad \text{et} \quad L' = Circr\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, ..., L_{n-1}^{(k)}\right).$$

En 2015, Bahsi [4] a trouvé un encadrement pour la norme spectrale de matrices circulantes et r-circulante dont les éléments sont des nombres de Fibonacci et de Lucas généralisés. En 2017, Köme et Yazlik [12] ont trouvé un encadrement pour la norme spectrale des matrices r-circulantes

$$Q_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right),$$

et

$$L_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$$

dont les éléments sont des nombres bi-périodiques de Fibonacci et des nombres bi-périodiques de Lucas respectivement.

En 2021, Ait-Amrane et Behloul [2] ont calculé la norme spectrale des matrices circulantes

$$U = Circ\left((u_0^{(k)}, u_1^{(k)}, ..., u_{n-1}^{(k)}\right) \quad \text{et} \quad V = Circ\left(v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, ..., v_{n-1}^{(k)}\right)$$

dont les éléments sont des nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas généralisés respectivement. Ils ont aussi déterminé un encadrement pour la norme spectrale des matrices r-circulantes

$$U' = Circr\left(u_0^{(k)}, u_1^{(k)}, ..., u_{n-1}^{(k)}\right) \quad \text{et} \quad V' = Circr\left(v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, ..., v_{n-1}^{(k)}\right).$$

Notations

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers positifs.

$\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers strictement positifs.

$\mathbb{Z}$: anneau des entiers relatifs.

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

$\mathbb{K}$: corps désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$M_{m,n}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$M_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n (ou de taille n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

A^t : transposée d'une matrice A.

A^* : adjointe d'une matrice A.

A^{-1} : inverse d'une matrice carrée inversible A.

$\overline{A}$: conjuguée d'une matrice A.

I_n : matrice identité d'ordre n.

$Circ(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$: matrice circulante.

$Circr(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$: matrice r-circulante.

$K[X]$: anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K.

$\|A\|_E$: la norme euclidien d'une matrice A.

$\|A\|_2$: la norme spectrale d'une matrice A.

$\varrho(A)$: le rayon spectrale d'une matrice carrée A.

$\|A\|_\infty$: la norme infinie d'une matrice A.

$[[1, n]] = \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre 1

Généralités sur les matrices

Dans ce chapitre, nous étudions quelques généralités sur les matrices, et nous parlerons sur les matrices circulantes et r-circulantes et de leurs valeurs propres et leurs vecteurs propres, et nous verrons quelques graphes circulants et leurs matrices adjacentes.

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. *Une* ***matrice*** *de type (m, n) est un tableau rectangulaire de mn éléments disposés sur m lignes et n colonnes comme suit :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Une matrice A est souvent notée $A = (a_{ij})$ où a_{ij} représente l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i^{ieme} ligne et de la j^{ieme} colonne. On dit que a_{ij} désigne le terme général de la matrice A.

L'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ possédant m lignes et n colonnes est noté $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Lorsque $m = n$ on note plus simplement $M_n(\mathbb{K})$ et on l'appelle ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.2. *On appelle* ***matrice conjuguée*** *d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ la matrice $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ telle que :*

$$b_{ij} = \overline{a}_{ij}, \qquad \forall (i, j) \in [[1, m]] \times [[1, n]]$$

où $\overline{a}_{ij}$ est le conjugué complexe de a_{ij}.On note par $\overline{A}$ la matrice conjuguée de A.

Définition 1.3. *On appelle* ***matrice adjointe*** *(ou* ***matrice transconjuguée****) d'une matrice A, et on note A^*, la matrice :*

$$A^* = \overline{A}^t.$$

Remarque 1. *Si A est réelle alors la matrice adjointe est la matrice transposée de A, i.e.,*

$$A^* = A^t.$$

Définition 1.4. *Une matrice $D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ est dite* ***diagonale*** *si :*

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ d_{i,j} = 0.$$

Définition 1.5. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note par I_n la matrice carrée de taille n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et dont les autres coefficients sont nuls, elle est appelée* ***matrice identité*** *de taille n.*

$$I_1 = (1),\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, ...$$

donc

$$I_n = (\delta_{i,j}) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}.$$

Proposition 1.1. *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on a :*

$$I_m A = A I_n = A.$$

Définition 1.6. *Une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ est dite* ***inversible*** *s'il existe une matrice $Q \in M_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$PQ = I_n \ \text{ et } \ QP = I_n.$$

Dans ce cas, la matrice Q est unique et est appelée la ***matrice inverse*** *de P.*

Notation :

- On note par P^{-1} la matrice inverse d'une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$.
- Puisque une matrice diagonale est entièrement déterminée par la liste de ses éléments diagonaux, la notation suivante plus concise est souvent adoptée :

$$\text{diag}(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite* ***diagonalisable*** *sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D à coefficients dans $\mathbb{K}$ satisfaisant la relation :*

$$A = PDP^{-1}.$$

Définition 1.7. *Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite* ***normale*** *si elle vérifie l'égalité suivante :*

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A.$$

Théorème 1.1. *[7] Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est* ***normale*** *si et seulement si les valeurs propres de $A \cdot A^*$ sont $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.*

Définition 1.8. *Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.* ***Le produit de Hadamard*** *de A et B est défini par :*

$$A \circ B = (a_{ij} b_{ij}).$$

Définition 1.9. *Soient $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,r}(\mathbb{K})$.* ***Le produit de Kronecker*** *de A et B est défini par :*

$$A \otimes B = (a_{ij} B).$$

Définition 1.10. *Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, noté $P_A(X)$, est défini par :*

$$P_A(X) := \det(XI_n - A) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n+2} X^{n-2} + \ldots + a_1 X + a_0, \tag{1.1}$$

$$P_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i),$$

les λ_i sont des valeurs propres de la matrice A.

Remarque 2. *Si A est une matrice diagonale ou plus généralement une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux a_{ii} de A.*

Proposition 1.3. *Soit une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$\det(XI_n - A) = (-1)^n \det(A - XI_n).$$

Théorème 1.2. (***Théorème de Cayley-Hamilton***) *Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $P \in \mathbb{K}[X]$ son polynôme caractéristique. Alors $P(A)$ est la matrice nulle,i.e., si $P = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$, alors :*

$$P(A) = p_n A^n + p_{n-1} A^{n-1} + p_{n+2} A^{n-2} + \ldots + p_1 A + p_0 I_n = 0. \tag{1.2}$$

Proposition 1.4. *Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :*

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A).$$

Démonstration. Si $P(X) = a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_lX^l$ et $Q(X) = b_0+b_1X+b_2X^2+\ldots+b_mX^m$, alors

$$(PQ)(X) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \ldots$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(A)Q(A) &= (a_0I_n + a_1A + \ldots)(b_0I_n + b_1A + \ldots) \\ &= a_0b_0I_n + (a_0b_1 + a_1b_0)A + \ldots \\ &= PQ(A). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1. *Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent,i.e.,*

$$P(A)Q(A) = Q(A)P(A). \tag{1.3}$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.4, on a :

$$\begin{aligned} P(A)Q(A) &= PQ(A) \\ &= a_0b_0I_n + (a_0b_1 + a_1b_0)A + \ldots \\ &= b_0a_0I_n + (b_0a_1 + b_1a_0)A + \ldots \\ &= QP(A) \\ &= Q(A)P(A). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.5. *Soient $Q(X) = b_0 + b_1X + ... + b_mX^m \in \mathbb{K}[X]$ et $D \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, alors $Q(D)$ est une matrice diagonale. Plus précisément, si*

$$D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n),$$

alors

$$Q(D) = diag(Q(d_1), Q(d_2), \cdots, Q(d_n)).$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} Q(D) &= b_0I_n + b_1D + \ldots + b_mD^m \\ &= b_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} + \ldots + b_m \begin{pmatrix} d_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q(d_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.6. *Soit $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme et $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, alors $Q(M)$ est diagonalisable.*

Démonstration. Posons $Q(X) = b_0 + b_1X + \ldots + b_mX^m$ et soit $P, D \in M_n(\mathbb{K})$ telles que P est inversible, D diagonale et $M = PDP^{-1}$, alors :

$$\begin{aligned} Q(M) &= Q(PDP^{-1}) \\ &= b_0I_n + b_1(PDP^{-1}) + \ldots + b_m(PDP^{-1})^m \\ &= b_0(PI_nP^{-1}) + b_1(PDP^{-1}) + \ldots + b_m(PD^mP^{-1}) \\ &= P(b_0I_n + b_1D + \ldots + b_mD^m)P^{-1} \\ &= PQ(D)P^{-1}. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.5, $Q(D)$ est diagonale, on en déduit que $Q(M)$ est diagonalisable. □

Définition 1.11. *On appelle matrice **compagnon** d'un polynôme unitaire :*

$$P = a_0 + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in K[X],$$

la matrice carrée suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.7. *Le polynôme caractéristique $P_C(X)$ de la matrice C ci-dessus est :*

$$P_C(X) = P(X).$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} P_C(X) &= det(XI_n - C) \\ &= \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_n \\ X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} + X \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En remplaçant C_1 par $C_1 + XC_2 + \cdots + X^{n-1}C_n$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} X^{j-1}C_j \quad C_2 \quad C_3 \quad \cdots \quad C_n \\
P_C(X) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X & -1 \\ P(X) & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1}+X \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(P(X)) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X & -1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}P(X) = P(X).
\end{aligned}
$$

□

1.2 Matrices circulantes

Définition 1.12. *Une matrice $C \in M_n(\mathbb{K})$ est appelée **circulante** si elle est de la forme :*

$$
C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}
$$

On a :

$$
(C)_{ij} = \begin{cases} c_{j-i} & \text{si } j-i \geq 0 \\ c_{n-i+j} & \text{si } j-i < 0 \end{cases}. \tag{1.5}
$$

Une matrice circulante C est donc entièrement déterminée par les éléments de sa première ligne, on la noté :

$$C = Circ(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}).$$

Définition 1.13. *Soit $r \in \mathbb{K}$. On dit qu'une matrice $C_r \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice **r-circulante** si elle est de la forme :*

$$
C_r = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ rc_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ rc_1 & rc_2 & rc_3 & \cdots & rc_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}
$$

La matrice C_r est définie donc par les éléments de sa première ligne et r, on la note :

$$C_r = Circr(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}).$$

Pour $r = 1$, la matrice $C_1 = C$ est la matrice circulante (1.4).

1.2.1 Diagonalisation d'une matrice circulante

Soit $C = Circ(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) \in M_n(K)$, on a :

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $J = Circ(0, 1, 0, \ldots, 0) \in M_n(\mathbb{K})$. On peut constater que toute matrice circulante s'écrit sous forme :

$$C = c_0 I_n + c_1 J + c_2 J^2 + \cdots + c_{n-1} J^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k J^k.$$

Si on pose : $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$, alors $C = Q(J)$.

Le polynôme Q est appelé le polynôme représentant de C.

Remarque 3. *On a :* $J = Circ(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $J^2 = Circ(0, 0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $J^{n-1} = Circ(0, 0, 0, \cdots, 1)$, *donc :*

$$J^n = Circ(1, 0, 0, \cdots, 0) = I_n.$$

Quelques propriétés des matrices circulantes :

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices circulantes, alors :

- $A^t, A^*, A + B$ et AB sont des matrices circulantes.
- Si A est inversible, alors A^{-1} est une matrice circulante.

Dans la Proposition suivante, on va montrer que les matrices circulantes de mêmes ordre commutent entre elles, puis on va en déduire que toute matrice circulante est normale.

Pour plus de propriétés sur les matrices circulantes, voir [7].

Proposition 1.8. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices circulantes, alors :*

$$AB = BA.$$

Démonstration. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices circulantes et soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ les polynômes représentants de A et B respectivement. Posons

$$P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1} \quad \text{et} \quad Q(X) = b_0 + b_1X + ... + b_{n-1}X^{n-1},$$

alors d'après le Corollaire 1.1, on a :

$$AB = P(J)Q(J) = Q(J)P(J) = BA.$$

□

Corollaire 1.2. *Toute matrice circulante est normale.*

Démonstration. Soit $C \in M_n(K)$ une matrice circulante, puisque sont adjointe C^* est circulante d'ordre n, alors d'après la Proposition 1.8, on a $CC^* = C^*C$, i.e., C est normale. □

Les valeurs propres de J :

Puisque J est la matrice compagnon du polynôme $Q = (X^n - 1)$, alors d'après la Proposition 1.7 $Q_J(X) = X^n - 1$. On en déduit que les valeurs propres de J sont les racines n^{ieme} de l'unité $\omega^k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}, 0 \leq k \leq n-1$. Ces n valeurs propres sont distinctes deux à deux, donc J est diagonalisable.

Les vecteurs propres de J :

Soit $X_k = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur vérifiant : $JX_k = \omega^k X_k$, alors :

$$JX_k = \omega^k X_k \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \omega^k x_0 \\ x_2 = \omega^k x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega^k x_{n-2} \\ x_0 = \omega^k x_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \omega^k x_0 \\ x_2 = \omega^{2k} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega^{(n-1)k} x_0 \\ x_0 = \omega^{nk} x_0 \end{cases}$$

on peut donc prendre

$$X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $B = (X_k, 0 \leq k \leq n-1)$ est une base propre (i.e., base de $\mathbb{C}$ formée de vecteurs propres de J). On a :

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \end{array},$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base propre et

$$D = P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1. *Pour $n = 4$, on a $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} = i$ et*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix},$$

et

$$D = P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de C :

Puisque J est diagonalisable et $C = Q(J)$, avec $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$ le polynôme représentant de C, alors d'après la Proposition 1.6, C est diagonalisable.

$$D = P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^{n-1} \end{pmatrix},$$

donc

$$Q(D) = \begin{pmatrix} Q(1=\omega^0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q(\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Q(\omega^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Q(\omega^{n-1}) \end{pmatrix},$$

donc les n valeurs propres de C sont : $Q(\omega^l) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \omega^{lk} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\frac{2\pi i l k}{n}}$, avec $0 \leq l \leq n-1$.

1.3 Graphe circulante

Pour commencer, nous désignons par graphe G un couple (V, E) où V est un ensemble fini et E un ensemble de paires d'éléments de V, les éléments de V sont appelés sommets de G et les éléments de E sont appelés arcs (ou arêtes) du graphe orienté (ou non orienté) G, on note $G = (V, E)$. Deux sommets v et v' d'un graphe G sont dits adjacents s'il existe $e \in E$ un arc du graphe G tell que $e = (v, v')$, en dite v est l'extrémité initiale de e et v' l'extrémité finale de e.

Exemple 2. *La figure (1.1) est un graphe non orienté $G_1 = (V, E)$ de 5 sommets et 6 arcs, et la figure (1.2) est un graphe orienté $G_2 = (V, E)$ de 5 sommets et 6 arêtes.*

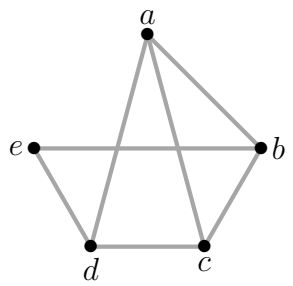


FIGURE 1.1 – Le graphe non orienté $G_1 = (V, E)$

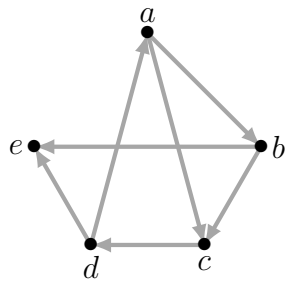


FIGURE 1.2 – Le graphe orienté $G_2 = (V, E)$

Chemin et circuit

Définition 1.14. *On définit dans un graphe orienté*

- *Un **chemin** conduisant d'un sommet a à un sommet b est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arcs, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arc est encadré à gauche par son sommet origine et à droite par son sommet destination.*
- *Un **circuit** est un chemin dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes.*

Chaîne et cycle

Définition 1.15. *On définit dans un graphe non orienté*

- *Une* ***chaîne*** *est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadrent dans la liste.*
- *Le premier et le dernier élément de la liste sont les* ***extrémités*** *initiale et finale de la chaîne.*
- *Le nombre d'arêtes qui composent une chaîne est appelé* ***longueur*** *de la chaîne.*
- *On appelle* ***chaîne fermée*** *toute chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident.*
- *On appelle* ***cycle*** *toute chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.*

Exemple 3. *On peut voir par exemple dans le graphe $G_1 = (V, E)$ (figure (1.1)), (a, b, c, d, e) est un chemin, (a, b, c, d, a) et un circuit. Dans le graphe $G_2 = (V, E)$ (figure (1.2)), (b, a, d, c) est une chaîne, (b, a, d, c, b) et un cycle.*

Matrice d'adjacence

Définition 1.16. *Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe orienté simple, où $|V| = n$. Supposons aussi que les sommets de G sont numérotés arbitrairement $\{v_1, \ldots, v_n\}$.* ***La matrice d'adjacence*** *A de G se rapportant à cet ensemble de sommets est la matrice carrée de dimension $n \times n$, avec*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Exemple 4. *La matrice d'adjacence A du graphe G_1 (figure (1.1)) est :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Remarque 4. *La matrice d'adjacence d'un multi-graphe $G = (V, E)$ est une matrice carrée de dimension $n \times n$. La variable a_{ij} représente le nombre des arcs entre i et j, ou il vaut mieux dire a_{ij} est le nombre des chemins de longueur 1 entre i et j.*

Définition 1.17. *Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe non orienté simple, avec $|V| = n$.* ***La matrice d'adjacence*** *A de G se rapportant à cet ensemble de sommets est la matrice carrée de dimension $n \times n$, avec*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête entre } v_1 \text{ et } v_2, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Exemple 5. *La matrice d'adjacence A de graphe G_2 (figure (1.2)) est :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Remarque 5. *On remarque que les matrices d'adjacences des graphes orientés ne sont pas symétriques, par contre les matrices d'adjacences des graphes non orientés sont symétriques.*

Proposition 1.9. *Une matrice d'adjacence à la puissance n permet de connaître le nombre de chemins de longueurs n entre n'importe quel couple de points du graphe.*

Graphe connexe

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit connexe si quels que soient les sommets u et v de V, il existe une chaîne reliant u à v.

Graphe circulant

Définition 1.18. *Un graphe G non orienté, simple et connexe est dite circulant si sa matrice d'adjacence est une matrice circulante.*

Exemples

On va voir quelques exemples sur les graphes circulantes.

Cycle

Le graphe cycle C_n est constitué d'un unique cycle élémentaire de longueur n (pour $n \geq 3$). C'est un graphe connexe non-orienté d'ordre n à n arêtes. Il est 2-régulier, c'est-à-dire que chacun de ses sommets est de degré 2. Le graphe C_n est un graphe circulant car sa matrice adjacence est définie par $A = Circ(0, 1, 0, \ldots, 0, 1)$

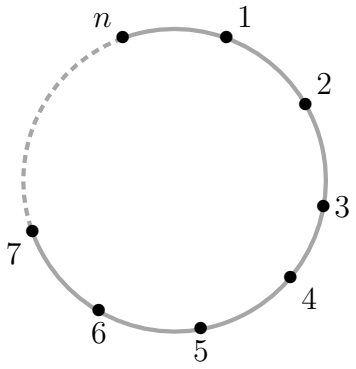


FIGURE 1.3 – Le graphe C_n

Graphe complet

Le graphe complet K_n est un graphe connexe non-orienté d'ordre n à C_n^2 arêtes tel que tous les sommets sont 2 à 2 adjacents. Le graphe K_n est un graphe circulant car sa matrice d'adjacence est définie par $A = Circ(0, 1, 1, \ldots, 1, 1)$.
La matrice adjacence du graphe K_5 est définie par $A = Circ(0, 1, 1, 1, 1)$.

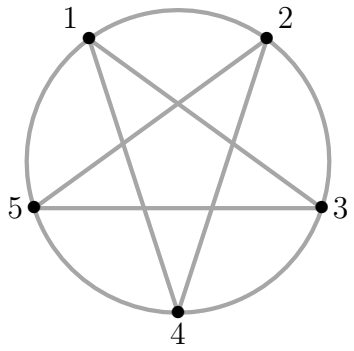


FIGURE 1.4 – Le graphe K_5

Graphe d'Andrásfai

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, le graphe d'Andrásfai d'ordre n, noté $And(n)$, est un graphe circulant sur $3n-1$ sommets dans lequel tout sommet k est reliée par une arête aux sommets $k \pm j$, pour tout entier $j \equiv 1(mod 3)$, sa matrice d'adjacence est définie par $A = circ(0, 1, 0, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1)$.
La matrice d'adjacence du graphe $And(4)$ est définie par $A = Circ(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$.

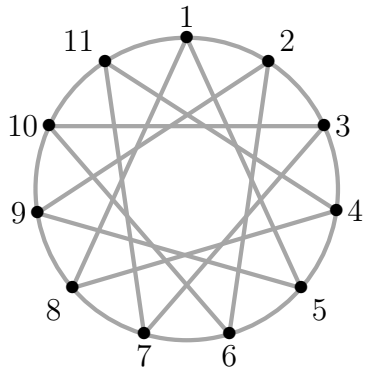


FIGURE 1.5 – Le graphe $And(4)$

Chapitre 2

Suites récurrentes linéaires

Dans ce chapitre on étudie quelques propriétés des suites récurrentes linéaires. Dans le cas particulier des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, nous parlerons de quelques suites classiques, comme la suite de Fibonacci et Lucas, nous donnerons les formules de binet associées et quelques identités comme : l'identité de Cassini et l'identité de Catalan, ensuite nous verrons une généralisation de la suite de Fibonacci et après cela nous passons aux nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas et leurs généralisations.
Dans le cas des suites bi-périodiques, qui sont équivalentes à des suites récurrentes linéaires d'ordre 4, nous donnerons quelques propriétés.

2.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Définition 2.1. *On appelle* ***suite récurrente linéaire d'ordre p*** *toute suite à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *définie, pour tout* $n \geq n_0$, *par une relation de récurrence linéaire de la forme :*

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + a_2 u_{n+2} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}, \qquad n \geq n_0, \tag{2.1}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ sont p scalaires fixés de $\mathbb{K}$ (a_0 non nul).
Une telle suite est donc entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence (2.1).

Définition 2.2. *On appelle* ***polynôme caractéristique*** *associé à une suite vérifiant la relation de récurrence (2.1), le polynôme définie par :*

$$P(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - a_{p-2}X^{p-2} - \ldots - a_1 X - a_0. \tag{2.2}$$

Définition 2.3. *Soit* $P(X)$ *le polynôme caractéristique associé à une suite* (u_n) *vérifiant (2.1). On appelle équation caractéristique associée à* (u_n), *l'équation donnée par :*

$$P(x) = 0.$$

2.1.1 Sous-espace vectoriel de dimension p

Si l'on appelle (R_p) la relation de récurrence dons (2.1) et si l'on note E_{R_p} l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant (R_p), on démontre que E_{R_p} est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Cela tient à la linéarité de la relation de récurrence.

De plus, ce sous-espace est de dimension p. En effet, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E_{R_p} et $\mathbb{K}^p$ qui à chaque suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_{R_p} associe le p-uplet $(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$. Il suffit alors de connaître une famille libre de p suites vérifiant (R_p), l'ensemble E_{R_p} est alors engendré par cette famille libre.

2.1.2 Terme général

La recherche du terme général et des suites particulières s'effectue en travaillant sur $\mathbb{K}^p$, à chaque suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on associe la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit une relation de récurrence sur $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$U_{n+1} = AU_n,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix},$$

est la matrice compagnon du polynôme caractéristique P de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le terme général de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors déterminé par

$$U_n = A^n U_0.$$

Le problème semble alors terminé, mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n. En général on préfère déterminer une base de l'espace vectoriel $E_{\mathbb{R}_p}$. Dans le cas particulier p=2, on donnera un exemple en utilisant les deux méthodes.

2.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2.4. *Soient $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{K}^2$ et :*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

La suite (u_n) est appelée suite récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est l'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Trois cas se présentent :

— Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Dans ce cas il existe un unique couple de réels (α, β) vérifiant :

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une unique solution (réelle) r_0. Dans ce cas il existe un unique couple de réels (α, β) vérifiant :

$$u_n = (\alpha + n\beta)r_0^n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées distinctes $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \overline{r_1} = \rho e^{-i\theta}$ (avec ρ dans $\mathbb{R}_+^*$ et θ dans $\mathbb{R}$). Dans ce cas il existe un unique couple de réels (α, β) vérifiant :

$$u_n = (\alpha cos\,(n\theta) + \beta sin\,(n\theta))\,\rho^n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Dans ce qui suit, nous parlerons de deux cas particuliers de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 qui sont la suite des nombres de Fibonacci et la suite des nombres de Lucas.

La suite des nombres de Fibonacci est l'une des suites les plus connues et possède plusieurs applications dans différents domaines tels que les mathématiques, les statistiques et la physique.

2.3 Les nombres de Fibonacci

La suite des nombres de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définis par :

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2. \end{cases} \tag{2.7}$$

La suite de Fibonacci généralisée est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie pour tous entiers positifs a, b, par [15, 3] :

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2}, \qquad n \geq 2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Voici quelques cas particuliers de la suite de Fibonacci généralisée :

- Si $a = b = 1$, on obtient la suite de Fibonacci classique (2.7).

- Si $a = 2$ et $b = 1$, on obtient la suite de Pell $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 0, P_1 = 1 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad n \geq 2. \end{cases}$$

- Si $a = 1$ et $b = 2$, on obtient la suite de Jacobsthal $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} J_0 = 0, J_1 = 1 \\ J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \qquad n \geq 2. \end{cases}$$

2.3.1 Le nombre d'or

Définition 2.5. *Le nombre d'or est l'unique solution positive de l'équation caractéristique associé à la suite de Fibonacci. Il est donnée par :*

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Remarque 6. *Les solution* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *de l'équation* $x^2 - x - 1 = 0$ *vérifient les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{lll} \alpha+\beta=1, & \alpha\beta=-1, & \alpha-\beta=\sqrt{5}, \\ \alpha^2=\alpha+1, & \beta^2=\beta+1, & \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-1. \end{array}$$

2.3.2 Les formes de Binet

Ces formules peuvent être obtenues en utilisant (2.4) et les deux premiers termes [3] :

- La suite de Fibonacci classique :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad (n \geq 0). \tag{2.9}$$

- La suite de Pell :

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right), \quad (n \geq 0). \tag{2.10}$$

- La suite de Jacobsthal :

$$J_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right), \quad (n \geq 0). \tag{2.11}$$

2.3.3 La Q-matrice

La Q-matrice a été étudié par Charles H. King en 1960. Elle est définie par :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Un simple calcul donne :

$$Q = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix},$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix},$$

$$Q^3 = Q^2Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix},$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous permet de déduire le résultat général suivant.

Proposition 2.1. *Soit Q la matrice définie précédemment.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$Q^n = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} & \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. .

1. Pour $n = 1$, (2.13) est évidemment vérifiée. Supposons que (2.13) est vraie pour un entier $n \geq 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. On a :

$$Q^{n+1} = Q^n Q = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

   d'où (2.13) est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. Commençons par calculer le polynôme caractéristique $P_Q(X)$ de la matrice Q. On a :

$$\begin{aligned} P_Q(X) &= \det(XI_2 - Q) \\ &= \begin{vmatrix} X - 1 & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} \\ &= X^2 - X - 1. \end{aligned}$$

   D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$P_Q(Q) = 0,$$

   Donc :

$$Q^2 - Q - I_2 = 0.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la division euclidienne de X^n par $P_Q(X)$ donne :

$$X^n = P_Q(X)S(X) + R(X), \quad \text{avec } \deg(R) \leq 1, \tag{2.14}$$

   donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R(X) = aX + b$. D'où :

$$Q^n = R(Q) = aQ + bI_2. \tag{2.15}$$

   Soient α et β les racines de P_Q, on déduit de (2.14) le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha^n = a\alpha + b \\ \beta^n = a\beta + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ b = \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \end{cases}. \tag{2.16}$$

   On remplaçant dans (2.15), on obtient :

$$
\begin{aligned}
Q^n &= a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\\ \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{\alpha^{n-1}(\alpha+1)-\beta^{n-1}(\beta+1)}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\\ \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\\ \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\end{pmatrix}. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 2.1. *On a pour tout $n \geq 1$:*

$$F_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}. \qquad (2.18)$$

Démonstration. On déduit de la Proposition 2.1 que :

$$\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\\ \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\end{pmatrix}$$

En particulier :

$$F_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}, \qquad n \geq 1.$$

□

Remarque 7. *Le Corollaire 2.1 donne une preuve de la formule de Binet (2.9) en utilisant la Q-matrice. On peut aussi démontrer (2.9) en utilisant (2.4).En effet, on déduit de (2.4) que :*

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.19)$$

En utilisant les deux premiers termes, on obtient les système suivant :

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}a+b=0\\ a\alpha+b\beta=1\end{cases} \iff \begin{cases}b=-a\\ a(\alpha-\beta)=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}b=\dfrac{-1}{\alpha-\beta}\\ a=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\end{cases}. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

En remplaçant (2.20) dans (2.19), on obtient :

$$F_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}.$$

Corollaire 2.2. *On a pour tout $n \geq 0$:*

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n. \tag{2.21}$$

Démonstration. En utilisant la formule de Binet (2.18), on a :

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^n \frac{\left(\alpha^{-n} - \beta^{-n}\right)(\alpha\beta)^n}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^n \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^{n+1} F_n. \end{aligned}$$

□

2.3.4 Quelques identités

Il existe plusieurs identités des nombres de Fibonacci [13].

Identité de Cassini

L'identité de Cassini est l'une des identités les plus importantes des nombres de Fibonacci [1, 2, 18]. Elle est donnée par :

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.22}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = 1, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Identité de Catalan

L'identité de Catalan est donnée par :

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r} F_r^2, \quad n, r \in \mathbb{Z}. \tag{2.23}$$

L'identité de Cassini est un cas particulier de l'identité de Catalan pour $r = 1$.

Identité de D'Ocagne

L'identité de D'Ocagne est donnée par :

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{2.24}$$

L'identité de Cassini est un cas particulier de l'identité de D'Ocagne pour $m = n + 1$.

Identité de Vajda

L'identité de Vajda est donnée par :

$$F_{k+i} F_{k+j} - F_k F_{k+i+j} = (-1)^k F_i F_j, \quad i, j, k \in \mathbb{Z}. \tag{2.25}$$

L'identité de Catalan est un cas particulier de l'identité de Vajda pour $i = j = r$ et $k = n - r$.

Trois preuves de l'identité de Cassini

Dans ce qui suit, on se propose de démontrer l'identité de Cassini par trois méthodes différentes

1. Par récurrence sur n≥1 :

Pour $n = 1$, on a :

$$F_2 F_0 - F_1^2 = -1 = (-1)^1,$$

donc (2.22) est vérifiée.
Supposons que l'identité de Cassini (2.22) est vraie pour un entier $n \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 &= F_{n+2} F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) \\ &= F_n(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1} F_{n-1} \\ &= F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} \\ &= (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

on en déduit que :

$$F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

2. Par la Q-matrice :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= |Q^n| \\ &= |Q|^n \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

3. Par la formule de Binet :

En utilisant la formule (2.18) et les propriétés de α et β données dans la Remarque 6, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - \alpha^{n+1}\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{-\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{-(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{(-1)^n(\alpha^2 + \beta^2) + 2(-1)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{(-1)^n(\alpha^2 + \beta^2 + 2)}{\alpha^2 + \beta^2 + 2} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Remarque 8. *La formule de Cassini est évidemment vérifiée pour n=0. Pour la prolonger aux indices négatifs, on utilise l'identité (2.21). En effet, soit $m < 0$ et posons $n = -m > 0$, alors :*

$$\begin{aligned} F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 &= F_{-n+1}F_{-n-1} - F_{-n}^2 \\ &= F_{-(n-1)}F_{-(n+1)} - F_{-n}^2 \\ &= \left[(-1)^n F_{n-1}\right]\left[(-1)^{n+2}F_{n+1}\right] - \left[(-1)^{n+1}F_n\right]^2 \\ &= (-1)^{2n+2}F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^{2n+2}F_n^2 \\ &= F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 \\ &= (-1)^n \\ &= (-1)^m. \end{aligned}$$

2.3.5 Le graphe de Fibonacci

Proposition 2.2. *Le graphe de Fibonacci F=(V,E) est un graphe orienté d'ordre 2, tels que* $V = \{a, b\}$.

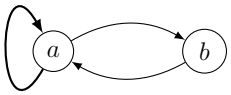


FIGURE 2.1 – Le graphe de Fibonacci F=(V,E)

Le nombre de Fibonacci F_n représente le nombre de chemins de longueur p du sommet a au même sommet a.

n	*les chemins de longueur* $p = n - 1$	F_n
0	$\{\}$	*0*
1	$\{\epsilon\}$	*1*
2	$\{aa\}$	*1*
3	$\{aaa\}$ $\{aba\}$	*2*
4	$\{aaaa\}$ $\{abaa\}$ $\{aaba\}$	*3*
5	$\{aaaaa\}$ $\{abaaa\}$ $\{aabaa\}$ $\{aaaba\}$ $\{ababa\}$	*5*
$\vdots$		

Chemins dans le graphe de Fibonacci.

où ϵ est un chemin vide (d'après le treillis de Young-Fibonacci [14]).

Démonstration. La matrice d'adjacence du graphe de Fibonacci est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc :

$$M^p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} m_{(a,a)} & m_{(a,b)} \\ m_{(b,a)} & m_{(b,b)} \end{pmatrix}.$$

Par définition, $m_{(a,b)}$ est le nombre des chemins de longueur p du sommet a au sommet b. On remarque que la Q-Matrice (2.12) est égale à la matrice d'adjacence M, alors :

$$M^p = Q^p = \begin{pmatrix} F_{p+1} & F_p \\ F_p & F_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Donc le nombre de Fibonacci F_n représente le nombre des chemins de longueur $p+1$ du sommet a au même sommet a.

□

2.4 Les nombres de Lucas

La suite des nombres de Lucas est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définis par[15, 3] :

$$\begin{cases} L_0 = 2\ ,\ L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad (n \geq 2). \end{cases} \tag{2.26}$$

La suite de Lucas généralisée est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie pour tous entiers positifs a et b par :

$$\begin{cases} L_0 = 2\ ,\ L_1 = b \\ L_n = bL_{n-1} + aL_{n-2}, \quad (n \geq 2). \end{cases} \tag{2.27}$$

Voici quelques cas particuliers de la suite de Lucas généralisée :

- Si $a = b = 1$, on obtient les nombres de Lucas classique (2.26).
- Si $a = 1$ et $b = 2$, on obtient la suite de Pell-Lucas définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 2\ ,\ P_1 = 2 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

- Si $a = 2$ et $b = 1$, on obtient la suite de Jacobsthal-Lucas définie par :

$$\begin{cases} J_0 = 2\ ,\ J_1 = 1 \\ J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

2.4.1 La forme de Binet

Cette formule peut être obtenue en utilisant (2.4) et les deux premiers termes L_0 et L_1.

$$L_n = \alpha^n + \beta^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad (n \geq 0). \tag{2.28}$$

L'identité de Cassini

Pour $n \geq 1$, on a :

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}.$$

Démonstration. En utilisant la formule (2.28) et les propriétés de α et β données dans la remarque 6, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n \\ &= (\alpha\beta)^{n-1}\alpha^2 + (\alpha\beta)^{n-1}\beta^2 - (\alpha\beta)^{n-1}2\alpha\beta \\ &= (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \\ &= (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha - \beta)^2 \\ &= 5(-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

□

2.4.2 Relation entre la suite de Fibonacci et la suite de Lucas

1. On a pour tous $n \geq 1$,

$$L_n = F_n + 2F_{n-1}. \tag{2.29}$$

2. On a pour tous $n, m \geq 1$,

$$L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_m F_{n-1}.$$

3. On a pour tous $n \geq 0$,

$$F_{2n} = L_n F_n.$$

4. On a pour tous $n \geq k \geq 1$,

$$F_{n+k} - (-1)^k F_{n-k} = L_n F_k. \tag{2.30}$$

5. On a pour tous $n \geq k \geq 1$,

$$L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k} = 5F_n F_k. \tag{2.31}$$

6. D'apprêt (2.30), on a :

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_{n+2} - F_{n-2} = \frac{F_{n+3} + F_{n-3}}{2} = ...$$

7. D'apprêt (2.31), on a :

$$F_n = \frac{L_{n+1} + L_{n-1}}{5} = \frac{L_{n+2} - L_{n-2}}{5} = \frac{L_{n+3} + L_{n-3}}{10} = ...$$

2.5 Les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas

Dil et Mezö [8] ont introduit les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas.

Les nombres hyper-Fibonacci sont définis pour un entier $k \geq 1$, par :

$$\begin{cases} F_n^{(0)} = F_n, \quad F_0^{(k)} = 0, \quad F_1^{(k)} = 1, \\ F_n^{(k)} = \sum_{s=0}^{n} F_s^{(k-1)}, \quad (n \geq 0). \end{cases} \tag{2.32}$$

Le nombre $F_n^{(k)}$ est appelé le n^{ieme} nombre hyper-Fibonacci de génération k.

Les nombres hyper-Lucas sont définis pour un entier $k \geq 1$, par :

$$\begin{cases} L_n^{(0)} = L_n, \quad L_0^{(k)} = 2, \quad L_1^{(k)} = 2k+1, \\ L_n^{(k)} = \sum_{s=0}^{n} L_s^{(k-1)}, \quad (n \geq 0). \end{cases} \tag{2.33}$$

Les nombres hyper-Fibonacci vérifient la relation suivante :

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + F_n^{(k-1)}. \tag{2.34}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} F_n^{(k)} &= \sum_{s=0}^{n} F_s^{(k-1)} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} F_s^{(k-1)} + F_n^{(k-1)} \\ &= F_{n-1}^{(k)} + F_n^{(k-1)}. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$L_n^{(k)} = L_{n-1}^{(k)} + L_n^{(k-1)}. \tag{2.35}$$

Pour $k = 1, 2, 3$, $F_n^{(k)}$ et $L_n^{(k)}$ ont les formes plus explicites suivantes :

$$F_n^{(1)} = F_{n+2} - 1, \quad F_n^{(2)} = F_{n+4} - n - 3, \quad F_n^{(3)} = F_{n+6} - \frac{n^2 + 7n + 16}{2}. \tag{2.36}$$

$$L_n^{(1)} = L_{n+2} - 1, \quad L_n^{(2)} = L_{n+4} - n - 5, \quad L_n^{(3)} = L_{n+6} - \frac{n^2 + 11n + 32}{2}. \tag{2.37}$$

Définition 2.6. *Le coefficient binomial C_n^k est défini pour un entier $n \geq 0$ et un entier $k \in \mathbb{Z}$ par :*

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } n \geq k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.38}$$

Pour un entier $n < 0$ et un entier $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$C_n^k = \begin{cases} (-1)^k C_{-n-k-1}^k & \text{si } k \geq 0, \\ (-1)^{n-k} C_{-k-1}^{n-k} & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.39}$$

Proposition 2.3. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq p$, on a :*

$$\sum_{s=p}^{n} C_s^p = C_{n+1}^{p+1}. \tag{2.40}$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \geq p$. Pour $n = p$, on a :

$$\sum_{s=p}^{p} C_s^p = C_p^p = 1 = C_{p+1}^{p+1}.$$

Supposons que (2.40) est vraie pour $n \geq p$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{s=p}^{n+1} C_s^p &= \sum_{s=p}^{n} C_s^p + C_{n+1}^p \\
&= C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} + \frac{(n+1)!}{(p)!(n+1-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!(n-p+1)}{(p+1)!(n-p+1)!} + \frac{(n+1)!(p+1)}{(p+1)!(n-p+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!\left((n-p+1)+(p+1)\right)}{(p+1)!(n-p+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!(n+2)}{(p+1)!(n-p+1)!} \\
&= \frac{(n+2)!}{(p+1)!(n+2-(p+1))!} \\
&= C_{n+2}^{p+1}.
\end{aligned}$$

D'où, (2.40) est vraie pour tout $n \geq p$. □

2.5.1 Quelque propriétés des nombre hyper-Fibonacci et hyper-Lucas

Proposition 2.4. *Pour tout $k \geq 0$ on a :*

$$\sum_{s=0}^{k} F_n^{(s)} = F_{n+1}^{(k)} - F_{n-1}, \qquad n \geq 0. \tag{2.41}$$

Démonstration. Par récurrence sur $k \geq 0$. Pour $k = 0$, on a :

$$F_n = F_{n+1} - F_{n-1}.$$

Supposons que (2.41) est vraie pour un entier $k \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{k+1} F_n^{(s)} &= \sum_{s=0}^{k} F_n^{(s)} + F_n^{(k+1)} \\
&= F_{n+1}^{(k)} - F_{n-1} + F_n^{(k+1)} \\
&= F_{n+1}^{(k)} - F_{n-1} + \sum_{s=0}^{n} F_s^{(k)} \\
&= \sum_{s=0}^{n+1} F_s^{(k)} + F_{n-1} \\
&= F_{n+1}^{(k+1)} - F_{n-1}.
\end{aligned}$$

D'où, (2.41) est vraie pour tout $k \geq 0$.

□

De même, on a :

$$\sum_{s=0}^{k} L_n^{(s)} = L_{n+1}^{(k)} - L_{n-1}, \qquad n \geq 0. \tag{2.42}$$

Proposition 2.5. *Pour tout $k \geq 1$, on a :*

$$F_n^{(k)} = F_{n+2k} - \sum_{s=0}^{k-1} C_{n+k-s-1}^{k-s-1} F_{2s+1}, \qquad n \geq 0. \tag{2.43}$$

Démonstration. Par récurrence sur $k \geq 1$. Pour $k = 1$, on a :

$$F_n^{(1)} = F_{n+2} - \sum_{s=0}^{k-1} C_{n-s}^{-s} F_{2s+1}$$

$$F_n^{(1)} = F_{n+2} - C_n^0 F_1 = F_{n+2} - 1.$$

Supposons que (2.43) est vraie pour un entier $k \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned}
F_n^{(k+1)} &= \sum_{l=0}^{n} F_l^{(k)} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \left(F_{l+2k} - \sum_{s=0}^{k-1} C_{l+k-s-1}^{k-s-1} F_{2s+1} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{n} F_{l+2k} - \sum_{l=0}^{n} \sum_{s=0}^{k-1} C_{l+k-s-1}^{k-s-1} F_{2s+1} \\
&= \sum_{l=0}^{n+2k} F_l - \sum_{s=0}^{2k-1} F_s - \sum_{s=0}^{k-1} F_{2s+1} \sum_{l=0}^{n} C_{l+k-s-1}^{k-s-1} \\
&= F_{n+2k}^{(1)} - F_{2k-1}^{(1)} - \sum_{s=0}^{k-1} C_{n+k-s}^{k-s} F_{2s+1} \\
&= F_{n+2k+2} - F_{2k+1} - \sum_{s=0}^{k-1} C_{n+k-s}^{k-s} F_{2s+1} \\
&= F_{n+2k+2} - \sum_{s=0}^{k} C_{n+k-s}^{k-s} F_{2s+1}.
\end{aligned}$$

D'où, (2.18) est vraie pour tout $k \geq 1$. □

De même, on a :

$$L_n^{(k)} = L_{n+2k} - \sum_{s=0}^{k-1} C_{n+k-s-1}^{k-s-1} L_{2s+1}, \qquad n \geq 0. \tag{2.44}$$

Proposition 2.6. *Pour tout $k \geq 0$, on a :*

$$F_n^{(k+1)} = F_{n+2}^{(k)} - C_{n+k+1}^{(k)}. \tag{2.45}$$

Démonstration. Par récurrence sur $k \geq 0$. Pour $k = 0$, on a :

$$F_n^{(1)} = F_{n+2} - C_{n+1}^0 = F_{n+2} - 1,$$

(est vraie d'après (2.36)).

Supposons que (2.45) est vraie pour un entier $k \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
F_n^{(k+2)} &= \sum_{s=0}^{n} F_s^{(k+1)} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \left(F_{s+2}^{(k)} - C_{s+k+1}^k \right) \\
&= \sum_{s=0}^{n} F_{s+2}^{(k)} - \sum_{s=0}^{n} C_{s+k+1}^k \\
&= \sum_{l=2}^{n+2} F_l^{(k)} - \sum_{l=2}^{n+2} C_{l+k-1}^k \\
&= \sum_{l=0}^{n+2} F_l^{(k)} - F_0^{(k)} - F_1^{(k)} - \sum_{l=0}^{n+2} C_{l+k-1}^k + C_{k-1}^k + C_k^k \\
&= F_{n+2}^{(k+1)} - C_{n+k+2}^{k-1}.
\end{aligned}$$

D'où, (2.45) est vraie pour tout $k \geq 0$.

□

De même, on a :

$$L_n^{(k+1)} = L_{n+2}^{(k)} - C_{n+k+1}^{(k)}. \tag{2.46}$$

Corollaire 2.3. *Pour tous $k \geq 0$ et $n \geq 0$, on a :*

$$F_n^{(k+1)} = F_{n+2}^{(k+1)} - F_{n+1}^{(k+1)} - C_{n+k+1}^k. \tag{2.47}$$

Démonstration. D'après (2.32), on a :

$$F_{n+2}^{(k)} = F_{n+2}^{(k+1)} - F_{n+1}^{(k+1)}.$$

En remplaçant dans (2.45), on trouve :

$$\begin{aligned}
F_n^{(k+1)} &= F_{n+2}^{(k)} - C_{n+k+1}^k \\
&= F_{n+2}^{(k+1)} - F_{n+1}^{(k+1)} - C_{n+k+1}^k.
\end{aligned}$$

□

De même, on a :

$$L_n^{(k+1)} = L_{n+2}^{(k+1)} - L_{n+1}^{(k+1)} - C_{n+k+1}^{k}. \tag{2.48}$$

Proposition 2.7. *[1] Pour tout $k \geq 0$, on a :*

$$F_{n+k+2}^{(k)} = \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^{k-s}(C_k^s - C_{k+1}^{s-1})F_{n+s}^{(k)}, \qquad n \geq -k. \tag{2.49}$$

et

$$L_{n+k+2}^{(k)} = \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^{k-s}(C_k^s - C_{k+1}^{s-1})L_{n+s}^{(k)}, \qquad n \geq -k. \tag{2.50}$$

Remarque 9. *La Proposition 2.7 montre que la suite des nombres hyper-Fibonacci et la suite des nombres hyper-Lucas sont des suites récurrentes linéaires d'ordre $k+2$.*

Proposition 2.8. *Pour tous $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a :*

$$F_n^{(k)} + L_n^{(k)} = 2F_{n+1}^{(k)}. \tag{2.51}$$

Démonstration. Par récurrence sur $k \geq 0$. Pour $k = 0$, d'après la relation (2.29), on a :

$$\begin{aligned} F_n + L_n &= F_n + F_n + 2F_{n-1} \\ &= 2F_n + 2F_{n-1} \\ &= 2(F_n + F_{n-1}) \\ &= 2F_{n+1}\ . \end{aligned}$$

Supposons que (2.51) est vraie pour un entier $k \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_n^{(k+1)} + L_n^{(k+1)} &= \sum_{s=0}^{n} F_s^{(k)} + \sum_{s=0}^{n} L_s^{(k)} \\ &= \sum_{s=0}^{n} (F_s^{(k)} + L_s^{(k)}) \\ &= \sum_{s=0}^{n} 2F_{s+1}^{(k)} \\ &= 2\sum_{l=1}^{n+1} F_l^{(k)} \\ &= 2\sum_{l=0}^{n+1} F_l^{(k)} - 2F_0^{(k)} \\ &= 2F_{n+1}^{(k+1)}. \end{aligned}$$

D'où, (2.51) est vraie pour tout $k \geq 0$.

□

Proposition 2.9. *Pour tous $n \geq 0$ et $k \geq 1$, on a :*

$$F_n^{(k)} - L_n^{(k)} = -2F_{n+1}^{(k-1)}. \tag{2.52}$$

Démonstration. D'après les relations (2.51) et (2.34), on a :

$$\begin{aligned} F_n^{(k)} - L_n^{(k)} &= F_n^{(k)} - 2F_{n+1}^{(k)} + F_n^{(k)} \\ &= 2F_n^{(k)} - 2F_{n+1}^{(k)} \\ &= 2(F_n^{(k)} - F_{n+1}^{(k)}) \\ &= 2(F_n^{(k)} - F_n^{(k)} - F_{n+1}^{(k-1)}) \\ &= -2F_{n+1}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

□

2.6 Les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas généralisés

Ait-amrane et Behloul [1] ont introduit, pour $a, b \in \mathbb{Z}$ les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas généralisés,

- Les nombres hyper-Fibonacci généralisés sont définis, pour tous entier a et b, par

$$\begin{cases} u_n^{(0)} = u_n,\ u_0^{(k)} = 0,\ u_1^{(k)} = 1 \\ u_n^{(k+1)} = \sum_{s=0}^{n} a^{n-s} u_s^{(k)}. \end{cases} \tag{2.53}$$

c'est une généralisation de la suite Fibonacci généralisée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1, \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad n \geq 0, \end{cases}$$

- Les nombres hyper-Lucas généralisés sont définies pour tous entier a et b, par :

$$\begin{cases} v_n^{(0)} = v_n,\ v_0^{(k)} = 2,\ v_1^{(k)} = (2k+1)a \\ v_n^{(k+1)} = \sum_{s=0}^{n} a^{n-s} v_s^{(k)}. \end{cases} \tag{2.54}$$

c'est une généralisation de la suite Lucas généralisée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2,\ v_1 = a, \\ v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \ \ \{n \geq 0\}, \end{cases}$$

Pour $a = b = 1$, on obtient les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas classiques.
L'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$x^2 - ax - b = 0. \tag{2.55}$$

Remarque 10. *Les solutions* $\alpha = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ *de l'équation (2.55), vérifient les propriétés suivants :*

$$\begin{array}{lll} \alpha+\beta = a, & \alpha\beta = -b, & \alpha-\beta = \sqrt{a^2+4b}, \\ \alpha^2 = a\alpha + b, & \beta^2 = a\beta + b, & \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta} = -\dfrac{a}{b}. \end{array}$$

2.6.1 Les formules de Binet

- Les nombres Fibonacci généralisés u_n :

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad (n \geq 0). \tag{2.56}$$

- Les nombres Lucas généralisés v_n :

$$v_n = \alpha^n + \beta^n, \quad (n \geq 0). \tag{2.57}$$

2.6.2 L'identité de Cassini

Proposition 2.10. *On a pour tous* $n \geq 0$ *:*

- *L'identité de Cassini pour les nombres de Fibonacci généralisés :*

$$u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = -(-b)^n. \tag{2.58}$$

- *L'identité de Cassini pour les nombres de Lucas généralisé :*

$$v_n v_{n+2} - v_{n+1}^2 = (-b)^n(a^2+4b). \tag{2.59}$$

Démonstration. En utilisant deux méthodes différentes

- Pour les nombres de Fibonacci généralisés, en utilisant la formule de Binet (2.56) et les propriétés de α et β données dans la Remarque 10, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}-\alpha^n\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}\beta^n-\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}+2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{-(\alpha\beta)^n(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= -(\alpha\beta)^n \\ &= -(-b)^n \end{aligned}$$

- Pour les nombres de Lucas généralisés, on va prouver cette identité par récurrence sur $n \geq 0$:
  on a pour $n = 0$,

$$v_0 v_2 - v_1^2 = 2(a^2+2b) - a^2 = a^2+4b = (-b)^0(a^2+4b)$$

  Supposons que (2.59) est vraie pour un entier $n \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1}v_{n+3} - v_{n+2}^2 &= v_{n+1}(av_{n+2} + bv_{n+1}) - v_{n+2}(av_{n+1} + bv_n) \\ &= av_{n+1}v_{n+2} + bv_{n+1}^2 - av_{n+2}v_{n+1} - bv_nv_{n+2} \\ &= -b(v_nv_{n+2} - v_{n+1}^2) \\ &= -b((-b)^n(a^2+4b)) \\ &= (-b)^{n+1}(a^2+4b) \end{aligned}$$

□

2.6.3 Quelque propriétés des nombres hyper-Fibonacci et de hyper-Lucas généralisés

Proposition 2.11. *Les nombres hyper-Fibonacci généralisés vérifient la relation suivante :*

$$u_n^{(k)} = au_{n-1}^{(k)} + u_n^{(k-1)}. \tag{2.60}$$

Démonstration. On a pour tous $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_n^{(k)} &= \sum_{s=0}^{n} a^{n-s}u_s^{(k-1)} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} a^{n-s}u_s^{(k-1)} + u_n^{(k-1)} \\ &= a\sum_{s=0}^{n-1} a^{n-1-s}u_s^{(k-1)} + u_n^{(k-1)} \\ &= au_{n-1}^{(k)} + u_n^{(k-1)}. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$v_n^{(k)} = av_{n-1}^{(k)} + v_n^{(k-1)}. \tag{2.61}$$

□

Proposition 2.12. *Pour tous $n \geq 0$, on a :*

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{b}u_{n+2} - \frac{a^{n+1}}{b} \tag{2.62}$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$ l'équation (2.62) est vérifiée. Supposons que (2.62) est vraie pour un entier $n \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{(1)} &= \sum_{s=0}^{n+1} a^{n+1}u_s \\ &= a\sum_{s=0}^{n} a^n u_s + u_{n+1} \\ &= au_n^{(1)} + u_{n+1} \\ &= a\left(\frac{1}{b}u_{n+2} - \frac{a^{n+1}}{b}\right) + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{b}u_{n+3} - \frac{a^{n+2}}{b} \end{aligned}$$

De même, on a :

$$v_n^{(1)} = \frac{1}{b} v_{n+2} - \frac{a^{n+2}}{b}. \tag{2.63}$$

□

2.7 Les nombres bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas

Edson et Yayenie [9] et Bilgici [6] ont introduit respectivement, pour $a, b \in \mathbb{Z}$, les nombres bi-périodiques de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0^{(a,b)} = 0 \text{ et } F_1^{(a,b)} = 1, \\ F_n^{(a,b)} = a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} F_{n-1}^{(a,b)} + F_{n-2}^{(a,b)}, \qquad n \geq 2, \end{cases} \tag{2.64}$$

et sa suite compagnon la suite des nombres bi-périodiques de Lucas

$$\begin{cases} L_0^{(a,b)} = 2 \text{ et } L_1^{(a,b)} = a, \\ L_n^{(a,b)} = a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} L_{n-1}^{(a,b)} + L_{n-2}^{(a,b)}, \qquad n \geq 2. \end{cases} \tag{2.65}$$

avec $\xi(n) = n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,i.e.,

$$\xi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2 , \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2 . \end{cases}$$

Pour éviter des notations lourdes, notons $F_n^{(a,b)}$ par q_n et $L_n^{(a,b)}$ par l_n. Si $a = b = 1$ on obtient les nombres de Fibonacci et Lucas classiques.

Proposition 2.13. *La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 4 à coefficients constants. Plus précisément, On a :*

$$\begin{cases} q_0 = 0, q_1 = 1, q_2 = a, q_3 = ab + 1, \\ q_n = (ab + 2)q_{n-2} - q_{n-4}, \qquad n \geq 4. \end{cases}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} q_n &= a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} q_{n-1} + q_{n-2} \\ &= a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} \left[a^{1-\xi(n-1)} b^{\xi(n-1)} q_{n-2} + q_{n-3} \right] + q_{n-2} \\ &= (ab + 1)q_{n-2} + a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} q_{n-3} \\ &= (ab + 1)q_{n-2} + (q_{n-2} - q_{n-4}) \\ &= (ab + 2)q_{n-2} - q_{n-4} \end{aligned}$$

□

De même, on a la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 4 à coefficients constants. Plus précisément, On a :

$$\begin{cases} l_0 = 2, l_1 = a, l_2 = a^2+2, l_3 = b(a^2+2)+a, \\ l_n = (ab+2)l_{n-2} - l_{n-4}, \qquad n \geq 4. \end{cases}$$

Conséquence : L'équation caractéristique de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$x^4 - (ab+2)x^2 + 1 = 0 \tag{2.66}$$

Remarque 11. *Les solutions* $\alpha = \dfrac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$, *de l'équation* $y^2-(ab)y-ab=0$ *vérifient les propriétés suivants :*

$$(\alpha+1)(\beta+1) = 1, \qquad \alpha+\beta = ab, \qquad \alpha\beta = -ab, \qquad \alpha+1 = \frac{\alpha^2}{ab},$$
$$\beta+1 = \frac{\beta^2}{ab}, \qquad -\beta(\alpha+1) = \alpha, \qquad -\alpha(\beta+1) = \beta.$$

Proposition 2.14. *La formule de Binet de* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

$$q_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{ab^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right). \tag{2.67}$$

Démonstration. Posons $t = x^2$ dans (2.66), on obtint :

$$t^2 - (ab+2)t + 1 = 0 \tag{2.68}$$

de discriminant $\Delta = a^2b^2 + 4ab$. Les solutions de (2.68) sont :

$$t_1 = \frac{ab+2+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2} = 1+\alpha \quad et \quad t_2 = \frac{ab+2-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2} = 1+\beta,$$

on en déduit que les racines de (2.66) sont :

$$x_1 = \sqrt{1+\alpha}, \;\; x_1 = -\sqrt{1+\alpha}, \;\; x_1 = \sqrt{1+\beta} \; et \; x_1 = -\sqrt{1+\beta}.$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$q_n = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n + Dx_4^n \tag{2.69}$$

où A,B,C et D sont des constantes que l'on peut déterminer grâce aux quatre premiers termes de la suite $(q_n)_n$. On a :

$$\begin{cases} q_0 = A + B + C + D = 0 \\ q_1 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 1 \\ q_2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_4^2 = a \\ q_3 = Ax_1^3 + Bx_2^3 + Cx_3^3 + Dx_4^3 = ab + 1 \end{cases} \tag{2.70}$$

Ainsi,

$$(2.70) \iff \begin{cases} A + B + C + D = 0 \\ A\sqrt{1+\alpha} - B\sqrt{1+\alpha} + C\sqrt{1+\beta} - D\sqrt{1+\beta} = 1 \\ A(1+\alpha) + B(1+\alpha) + C(1+\beta) + D(1+\beta) = a \\ A(1+\alpha)^{\frac{3}{2}} - B(1+\alpha)^{\frac{3}{2}} + C(1+\beta)^{\frac{3}{2}} - D(1+\beta)^{\frac{3}{2}} = ab + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (A+B) + (C+D) = 0 \\ (A+B)(1+\alpha) + (C+D)(1+\beta) = a \\ (A-B)\sqrt{1+\alpha} + (C-D)\sqrt{1+\beta} = 1 \\ (A-B)(1+\alpha)^{\frac{3}{2}} + (C-D)(1+\beta)^{\frac{3}{2}} = ab + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A + B = \dfrac{a}{\alpha - \beta} \\ C + D = -\dfrac{a}{\alpha - \beta} \\ A - B = \dfrac{ab - \beta}{\sqrt{\alpha+1}(\alpha - \beta)} \\ C - D = \dfrac{\alpha - ab}{\sqrt{\beta+1}(\alpha - \beta)} \end{cases}$$

En remplaçant dans (2.69), on obtient :

$$\begin{aligned} q_{2n} &= Ax_1^{2n} + Bx_2^{2n} + Cx_3^{2n} + Dx_4^2 n \\ &= (A+B)(1+\alpha)^n + (C+D)(1+\beta)^n \\ &= \frac{a}{\alpha - \beta}\left[(1+\alpha)^n - (1+\beta)^n\right] \\ &= \frac{a}{\alpha - \beta}\left[\frac{(ab + ab\alpha)^n - (ab + ab\beta)^n}{(ab)^n}\right] \\ &= \frac{a}{(ab)^n}\left[\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}\right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_{2n+1} &= Ax_1^{2n+1} + Bx_2^{2n+1} + Cx_3^{2n+1} + Dx_4^2 n + 1 \\ &= (A-B)(\sqrt{1+\alpha})^{2n+1} + (C-D)(\sqrt{1+\beta})^{2n+1} \\ &= \frac{ab-\beta}{\sqrt{\alpha+1}(\alpha-\beta)}(\sqrt{1+\alpha})^{2n+1} + \frac{\alpha-ab}{\sqrt{\beta+1}(\alpha-\beta)}(\sqrt{1+\beta})^{2n+1} \\ &= \frac{ab-\beta}{\alpha-\beta}(1+\alpha)^n + \frac{\alpha-ab}{\alpha-\beta}(1+\beta)^n \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\frac{(ab+ab\alpha)^n}{(ab)^n} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\frac{(ab+ab\beta)^n}{(ab)^n} \\ &= \frac{1}{(ab)^n}\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

En regroupant ces derniers résultats, on obtient :

$$q_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{ab^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}\right), \qquad n \geq 0.$$

□

Proposition 2.15. *La formule de Binet de* $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

$$l_n = \frac{a^{\xi(n)}}{ab^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}\left(\alpha^n + \beta^n\right). \tag{2.71}$$

Démonstration. Cette propriété peut être prouvé en utilisant une méthode similaire à la méthode de la preuve de la Proposition 2.14. □

2.7.1 Quelques identités

Identité de Cassini

- L'identité de Cassini des nombres bi-périodiques de Fibonacci est donnée par [9] :

$$a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}q_{n-1}q_{n+1} - a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}q_n^2 = a(-1)^n. \tag{2.72}$$

- L'identité de Cassini des nombres bi-périodiques de Lucas est donnée par [6] :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+1)} l_{n+1}l_{n-1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} l_n^2 = (-1)^{n+1}(ab+4). \tag{2.73}$$

Identité de Catalan

L'identité de Catalan des nombres bi-périodiques de Fibonacci est donnée par [9] :

$$a^{\xi(n-r)}b^{1-\xi(n-r)}q_{n-r}q_{n+r} - a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}q_n^2 = a^{\xi(r)}b^{1-\xi(r)}(-1)^{n+1-r}q_r^2. \tag{2.74}$$

Identité d'Ocagne

L'identité d'Ocagne des nombres bi-périodiques de Fibonacci est donnée par [9] :

$$a^{\xi(mn+m)}b^{\xi(mn+n)}q_m q_{n+1} - a^{\xi(mn+n)}b^{\xi(mn+m)}q_{m+1}q_n = a^{\xi(m-n)}(-1)^n q_{m-n}. \tag{2.75}$$

2.7.2 Quelque propriétés des nombres bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas

Théorème 2.1. *[12] Pour $n > 0$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2 = \left(\frac{1}{a}\right) q_n q_{n+1}. \tag{2.76}$$

Théorème 2.2. *[12] Pour $n > 0$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 = \left(\frac{1}{a}\right) l_n l_{n+1} - 2. \tag{2.77}$$

Théorème 2.3. *[6] Pour $n > 0$, on a :*

$$l_n = q_{n-1} + q_{n+1}, \tag{2.78}$$

et

$$(ab + 4)\, q_n = l_{n-1} + l_{n+1}. \tag{2.79}$$

Proposition 2.16. *[6] Pour $n > 0$, on a :*

$$l_{2n} = \frac{1}{2}\left[\left(a^2b^2 + 4ab\right)\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\xi(n+1)}\left(\frac{1}{ab}\right)^{\xi(n)} q_n^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2\right], \tag{2.80}$$

$$q_{2n} = q_n l_n. \tag{2.81}$$

Chapitre 3

Étude des normes spectrales de certaines matrices circulantes et r-circulantes

Dans ce chapitre on va calculer et donne les bornes inférieures et supérieures des normes spectrales des matrices circulantes et r-circulantes avec les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas, avec les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas généralisés et avec les nombres bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas. Par conséquent, il est nécessaire d'abord de donner quelques propriétés sur les normes matricielles.

3.1 Les normes matricielles

Définition 3.1. *Une* ***norme*** *sur $M_n(\mathbb{K})$ est une application :*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & M_n(\mathbb{K}) & \longmapsto & \mathbb{R}^+ \\ & A & \longmapsto & \|A\| \end{array}$$

telle que pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
- $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Définition 3.2. *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.* ***La norme euclidienne*** *de A est définie par :*

$$\|A\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2\right)}. \tag{3.1}$$

Définition 3.3. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle* ***rayon spectrale*** *de A et on note $\varrho(A)$, la quantité :*

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Définition 3.4. *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.* ***La norme spectrale*** *de A est définie par :*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^*A)},$$

où $\varrho(A^*A)$ est le rayon spectrale de A^*A.

Il existe une relation connue entre la norme euclidienne et la norme spectrale d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ [5] :

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\|A\|_2. \tag{3.2}$$

Définition 3.5. *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.* ***La norme infini*** *de A est définie par :*

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right).$$

Lemme 3.1. *[5] Soient $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on a :*

$$\|A \circ B\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2.$$

Lemme 3.2. *[5] Soient $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on a :*

$$\|A \circ B\|_2 \leq r_1(A)c_1(B),$$

avec $r_1(A) = \max_{1\leq i\leq m}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ *et* $c_1(A) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|b_{ij}|^2}$.

Lemme 3.3. *[5] Soient $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on a :*

$$\|A \otimes B\|_2 = \|A\|_2\|B\|_2.$$

Lemme 3.4. *Soit $M \in M_n(K)$ une matrice normale, alors*

$$\|M\|_2 = \varrho(M).$$

Démonstration. On sait, d'après le Théorème 1.1, que M est normale si et seulement si les valeurs propres de M^*M sont

$$|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, ..., |\lambda_n|^2,$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les n valeurs propres de M. Puisque $\varrho(M) = max\{|\lambda_i|, 1 \leq i \leq n\}$, alors il existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\varrho(M) = |\lambda_k|$, donc :

$$\begin{aligned}\|M\|_2 &= \sqrt{\varrho(M^*M)}\\ &= \sqrt{|\lambda_k|^2}\\ &= |\lambda_k|\\ &= \varrho(M).\end{aligned}$$

□

Lemme 3.5. *Soient $\|\cdot\|$ une norme matricielle et $M \in M_n(K)$, alors :*

$$\varrho(M) \leq \|M\|.$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de M et v un vecteur propre de M associé à λ. Notons par N la matrice carrée d'ordre n dont la première colonne est v et les autres colonnes sont nulles. Puisque $Mv = \lambda v$, alors $MN = \lambda N$. On en déduit que :

$$|\lambda| \cdot \|N\| = \|\lambda \cdot N\| = \|M \cdot N\| \leq \|M\| \cdot \|N\|.$$

Puisque $v \neq 0$, alors $N \neq 0$, ce qui donne $\|N\| \neq 0$. On peut donc simplifier par $\|N\|$ pour obtenir :

$$\|\lambda\| \leq \|M\|.$$

Comme λ est quelconque, alors on en déduit que :

$$\varrho(M) \leq \|M\|.$$

□

3.2 Étude des normes spectrales de matrices circulantes et r-circulantes avec les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas

Théorème 3.1. *La norme spectrale de la matrice circulante $F = Circ\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$ est :*

$$\|F\|_2 = F_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. D'après le Corollaire 1.2, la matrice circulante F est normale, ce qui nous donne, d'après le Lemme 3.4, que sa norme spectrale est égale à son rayon spectral, i.e., $\|F\|_2 = \varrho(F)$. Considérons le vecteur $v = (1, 1, ..., 1)^t$, alors

$$
\begin{aligned}
F \cdot v &= \begin{pmatrix} F_0^{(k)} & F_1^{(k)} & \cdots & F_{n-1}^{(k)} \\ F_{n-1}^{(k)} & F_0^{(k)} & \cdots & F_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & \cdots & F_0^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} F_j^{(k)} \\ \sum_{j=0}^{n-1} F_j^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} F_j^{(k)} \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} F_j^{(k)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= F_{n-1}^{(k+1)} \cdot v.
\end{aligned}
$$

Puisque $v \neq 0$, alors $F_{n-1}^{(k+1)}$ est une valeur propre de F, donc :

$$F_{n-1}^{(k+1)} \leq \varrho(F). \tag{3.3}$$

D'un autre côté, puisque $F_j^{(k)} \geq 0$, pour $0 \leq j \leq n-1$, alors :

$$\|F\|_\infty = \sum_{j=0}^{n-1} F_j^{(k)} = F_{n-1}^{(k+1)}.$$

D'après le Lemme 3.5, on a $\varrho(F) \leq \|F\|_\infty$, i.e.,

$$\varrho(F) \leq F_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.4}$$

De (3.3) et (3.4) on déduit que $\varrho(F) = F_{n-1}^{(k+1)}$, et donc c'est que $\|F\|_2 = F_{n-1}^{(k+1)}$.

□

Exemple 6. *D'après le Théorème 3.1 et les équations (2.36), on a :*

$$\|F\|_2 = \begin{cases} F_{n+1} - 1, & si\ k = 0, \\ F_{n+3} - n - 2, & si\ k = 1, \\ F_{n+5} - \dfrac{n^2 + 5n + 10}{2}, & si\ k = 2. \end{cases}$$

Corollaire 3.1. *Soit $\|F\|_E$ la norme euclidien de la matrice $F = Circ\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$, On a :*

$$F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F\|_E \leq \sqrt{n} F_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Découle du Théorème 3.1 et la relation (3.2). □

Corollaire 3.2. *Pour la somme des carrées des nombres hyper-Fibonacci, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}F_{n-1}^{(k+1)} \leq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(F_s^{(k)}\right)^2} \leq F_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. On a d'après le Corollaire 3.1 :

$$F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F\|_E \leq \sqrt{n}F_{n-1}^{(k+1)},$$

donc pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}F_{n-1}^{(k+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|F\|_E \leq F_{n-1}^{(k+1)},$$

et on a $\|F\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid f_{ij} \mid^2\right)} = \sqrt{\left(n\sum_{s=0}^{n-1}|F_s^{(k)}|^2\right)} = \sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(F_s^{(k)}\right)^2}$,

alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}F_{n-1}^{(k+1)} \leq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(F_s^{(k)}\right)^2} \leq F_{n-1}^{(k+1)}.$$

□

Théorème 3.2. *La norme spectrale de la matrice* $L = Circ\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$ *est :*

$$\|L\|_2 = L_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. On peut utiliser la même méthode que dans la démonstration du Théorème 3.1, mais nous allons utiliser une autre méthode.
Puisque L est une matrice circullante, alors ses n valeurs propres sont donnés par :

$$\lambda_m = \sum_{s=0}^{n-1} L_s^{(k)}\omega^{ms} = \sum_{s=0}^{n-1} L_s^{(k)}e^{\frac{2\pi ims}{n}}, \qquad 0 \leq m \leq n-1.$$

On a pour $m = 0$:

$$\lambda_0 = \sum_{s=0}^{n-1} L_s^{(k)} = L_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.5}$$

On a aussi pour tout $0 \leq m \leq n-1$:

$$\begin{aligned}
|\lambda_m| &= \left|\sum_{s=0}^{n-1} L_s^{(k)}e^{\frac{2\pi ims}{n}}\right| \\
&\leq \sum_{s=0}^{n-1}\left|L_s^{(k)}e^{\frac{2\pi ims}{n}}\right| \\
&= \sum_{s=0}^{n-1} L_s^{(k)}e^{\frac{2\pi ims}{n}} \\
&\leq \sum_{s=0}^{n-1} L_s^{(k)} \\
&= L_{n-1}^{(k+1)} = \lambda_0,
\end{aligned}$$

donc :

$$\|L\|_2 = \max_{0\leq m\leq n-1} |\lambda_m| = \lambda_0, \tag{3.6}$$

de (3.5) et (3.6), on déduit que :

$$\|L\|_2 = L_{n-1}^{(k+1)}.$$

□

Exemple 7. *D'après le Théorème 3.2 et les équations (2.37), on a :*

$$\|L\|_2 = \begin{cases} L_{n+1} - 1, & si\ k = 0, \\ L_{n+3} - n - 4, & si\ k = 1, \\ L_{n+5} - \dfrac{n^2+9n+22}{2}, & si\ k = 2. \end{cases}$$

Corollaire 3.3. *Soit $\|L\|_E$ la norme euclidienne de la matrice $L = Circ\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$, On a :*

$$L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L\|_E \leq \sqrt{n} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Découle du Théorème 3.2 et la relation (3.2). □

Corollaire 3.4. *Pour la somme des carrées des nombres hyper-Lucas, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(L_s^{(k)}\right)^2} \leq L_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. On a d'après le Corollaire 3.3 :

$$L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L\|_E \leq \sqrt{n} L_{n-1}^{(k+1)},$$

donc pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|L\|_E \leq L_{n-1}^{(k+1)},$$

et on a $\|L\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\ l_{ij}\ |^2\right)} = \sqrt{\left(n\sum_{s=0}^{n-1} |L_s^{(k)}|^2\right)} = \sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(L_s^{(k)}\right)^2}$,

alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(L_s^{(k)}\right)^2} \leq L_{n-1}^{(k+1)}.$$

□

Corollaire 3.5. *La norme spectrale du produit de Hadamard des matrices circulantes $F = Circ\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$ et $L = Circ\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$ est donnée par :*

$$\|F \circ L\|_2 \leq F_{n-1}^{(k+1)} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Découle du Lemme 3.1 et des Théorèmes 3.1 et 3.2. □

Corollaire 3.6. *La norme spectrale du produit de Kronecker des matrices circulantes* $F = Circ\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$ *et* $L = Circ\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$ *est donnée par :*

$$\|F \otimes L\|_2 = F_{n-1}^{(k+1)} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Découle du Lemme 3.3 et des Théorèmes 3.1 et 3.2. □

Théorème 3.3. *Soit* $F_r = Circr\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$ *une matrice r-circulante, alors :*

- *Si* $|r| \geq 1$, *on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r\|_2 \leq |r| \left(F_{n-1}^{(k+1)}\right)^2.$$

- *Si* $|r| < 1$, *on a :*

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r\|_2 \leq \sqrt{n-1} F_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Puisque la matrice r-circulante F_r est définie par :

$$\begin{pmatrix} F_0^{(k)} & F_1^{(k)} & \cdots & F_{n-1}^{(k)} \\ rF_{n-1}^{(k)} & F_0^{(k)} & \cdots & F_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rF_1^{(k)} & rF_2^{(k)} & \cdots & F_0^{(k)} \end{pmatrix},$$

alors sa norme euclidienne est donnée par :

$$\|F_r\|_E = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (n-s) \left(F_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2 \left(F_s^{(k)}\right)^2}.$$

- Pour $|r| \geq 1$ et d'après le Corolaire 3.2, on a :

$$\|F_r\|_E \geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (n-s) \left(F_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s \left(F_s^{(k)}\right)^2} = \sqrt{n \sum_{s=0}^{n-1} \left(F_s^{(k)}\right)^2} \geq F_{n-1}^{(k+1)},$$

et on a d'après (3.2)

$$\|F_r\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.7}$$

Soient $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$B = \begin{pmatrix} rF_0^{(k)} & 1 & \cdots & 1 \\ rF_{n-1}^{(k)} & rF_0^{(k)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rF_1^{(k)} & rF_2^{(k)} & \cdots & rF_0^{(k)} \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} F_0^{(k)} & F_1^{(k)} & \cdots & F_{n-1}^{(k)} \\ 1 & F_0^{(k)} & \cdots & F_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & F_0^{(k)} \end{pmatrix},$$

de sorte que $F_r = B \circ C$, avec :

$$r_1(B) = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{nj}|^2} = |r| \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(F_s^{(k)}\right)^2},$$

et

$$c_1(C) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(F_s^{(k)}\right)^2}.$$

donc, d'après le Lemme 3.2 et le Corollaire 3.2, on a :

$$\|F_r\|_2 = \|B \circ C\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) \leq |r| \left(F_{n-1}^{(k+1)}\right)^2. \tag{3.8}$$

De (3.7) et (3.8), on déduit l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r\|_2 \leq |r| \left(F_{n-1}^{(k+1)}\right)^2.$$

- Pour $|r| < 1$ et d'après le Corolaire 3.2, on a :

$$\begin{aligned} \|F_r\|_E &= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (n-s) \left(F_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2 \left(F_s^{(k)}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (n-s)|r|^2 \left(F_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2 \left(F_s^{(k)}\right)^2} \\ &= |r| \sqrt{n \sum_{s=0}^{n-1} \left(F_s^{(k)}\right)^2} \geq |r| F_{n-1}^{(k+1)}, \end{aligned}$$

et on a d'après (3.2)

$$\|F_r\|_2 \geq \frac{|r|}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.9}$$

Soient $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$B = \begin{pmatrix} F_0^{(k)} & 1 & \cdots & 1 \\ r & F_0^{(k)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & \cdots & F_0^{(k)} \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} F_0^{(k)} & F_1^{(k)} & \cdots & F_{n-1}^{(k)} \\ F_{n-1}^{(k)} & F_0^{(k)} & \cdots & F_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & \cdots & F_0^{(k)} \end{pmatrix},$$

de sorte que $F_r = B \circ C$, avec :

$$r_1(B) = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{1j}|^2} = \sqrt{F_0^{(k)} + n - 1} = \sqrt{n-1}.$$

et

$$c_1(C) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(F_s^{(k)}\right)^2},$$

donc, d'après le Lemme 3.2 et le Corollaire 3.2, on a :

$$\|F_r\|_2 = \|B \circ C\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) \leq \sqrt{n-1} F_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.10}$$

De (3.9) et (3.10), on déduit l'encadrement suivant :

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r\|_2 \leq \sqrt{n-1} F_{n-1}^{(k+1)}.$$

□

Exemple 8. *D'après le Théorème 3.3 et les équations (2.36), si $|r| \geq 1$, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (F_{n+1} - 1) \leq \|F_r\|_2 \leq |r| (F_{n+1} - 1)^2, \qquad si\ k = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (F_{n+3} - n - 2) \leq \|F_r\|_2 \leq |r| (F_{n+3} - n - 2)^2, \qquad si\ k = 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(F_{n+5} - \frac{n^2+5n+10}{2}\right) \leq \|F_r\|_2 \leq |r| \left(F_{n+5} - \frac{n^2+5n+10}{2}\right)^2, \qquad si\ k = 2,$$

et si $|r| \geq 1$, on a :

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} (F_{n+1} - 1) \leq \|F_r\|_2 \leq \sqrt{n-1} (F_{n+1} - 1), \qquad si\ k = 0,$$

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} (F_{n+3} - n - 2) \leq \|F_r\|_2 \leq \sqrt{n-1} (F_{n+3} - n - 2), \qquad si\ k = 1,$$

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} \left(F_{n+5} - \frac{n^2+5n+10}{2}\right) \leq \|F_r\|_2 \leq \sqrt{n-1} \left(F_{n+5} - \frac{n^2+5n+10}{2}\right), \qquad si\ k = 2.$$

Théorème 3.4. *Soit $L_r = Circr\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$ une matrice r-circulante, alors :*

- *Si $|r| \geq 1$, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L_r\|_2 \leq |r| \left(L_{n-1}^{(k+1)}\right)^2.$$

- *Si $|r| < 1$, on a :*

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Puisque la matrice circulante L_r est définie par :

$$\begin{pmatrix} L_0^{(k)} & L_1^{(k)} & \cdots & L_{n-1}^{(k)} \\ rL_{n-1}^{(k)} & L_0^{(k)} & \cdots & L_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rL_1^{(k)} & rL_2^{(k)} & \cdots & L_0^{(k)} \end{pmatrix},$$

alors sa norme euclidienne est donnée par :

$$\|L_r\|_E = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(L_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2\left(L_s^{(k)}\right)^2}.$$

- Pour $|r| \geq 1$ et d'après le Corolaire 3.4, on a :

$$\|L_r\|_E \geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(L_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s\left(L_s^{(k)}\right)^2} = \sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(L_s^{(k)}\right)^2} \geq L_{n-1}^{(k+1)},$$

et on a d'après (3.2)

$$\|L_r\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.11}$$

Soient $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ rL_{n-1}^{(k)} & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rL_1^{(k)} & rL_2^{(k)} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} L_0^{(k)} & L_1^{(k)} & \cdots & L_{n-1}^{(k)} \\ 1 & L_0^{(k)} & \cdots & L_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & L_0^{(k)} \end{pmatrix},$$

de sorte que $L_r = B \circ C$, avec :

$$\begin{aligned} r_1(B) &= \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|b_{nj}|^2} = \sqrt{1+\sum_{s=1}^{n-1}|r|^2\left(L_s^{(k)}\right)^2} \\ &= \sqrt{L_0^{(k)}+\sum_{s=1}^{n-1}|r|^2\left(L_s^{(k)}\right)^2} \leq \sqrt{|r|^2\left(L_0^{(k)}\right)^2+\sum_{s=1}^{n-1}|r|^2\left(L_s^{(k)}\right)^2} \\ &= |r|\sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(L_s^{(k)}\right)^2}, \end{aligned}$$

et

$$c_1(C) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(L_s^{(k)}\right)^2},$$

donc, d'après le Lemme (3.2) et le Corollaire 3.4, on a :

$$\|L_r\|_2 = \|B \circ C\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) = |r| \left(L_{n-1}^{(k+1)}\right)^2 \tag{3.12}$$

De (3.11) et (3.12), on obtient l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L_r\|_2 \leq |r| \left(L_{n-1}^{(k+1)}\right)^2.$$

- Pour $|r| < 1$ et d'après le Corolaire 3.4, on a :

$$\begin{aligned}
\|L_r\|_E &= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(L_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2 \left(L_s^{(k)}\right)^2} \\
&\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)|r|^2\left(L_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2 \left(L_s^{(k)}\right)^2} \\
&= |r|\sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(L_s^{(k)}\right)^2} \geq |r| L_{n-1}^{(k+1)},
\end{aligned}$$

et on a d'après (3.2)

$$\|L_r\|_2 \geq \frac{|r|}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.13}$$

Soient $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

, et

$$C = \begin{pmatrix} L_0^{(k)} & L_1^{(k)} & \cdots & L_{n-1}^{(k)} \\ L_{n-1}^{(k)} & L_0^{(k)} & \cdots & L_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1^{(k)} & L_2^{(k)} & \cdots & L_0^{(k)} \end{pmatrix}$$

,
de sorte que $L_r = B \circ C$, avec :

$$r_1(B) = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2} = \sqrt{n},$$

et

$$c_1(C) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(L_s^{(k)}\right)^2} = L_{n-1}^{(k+1)},$$

donc, d'après le Lemme (3.2) et le Corollaire 3.4, on a :

$$\|L_r\|_2 = \|B \circ C\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) = \sqrt{n} L_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.14}$$

De (3.13) et (3.14), on obtient l'encadrement :

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

□

Exemple 9. *D'après le Théorème 3.3 et les équations (2.37), si* $|r| \geq 1$, *on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(L_{n+1}-1\right) \leq \|L_r\|_2 \leq |r|\left(L_{n+1}-1\right)^2, \qquad si\ k=0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(L_{n+3}-n-4\right) \leq \|L_r\|_2 \leq |r|\left(L_{n+3}-n-4\right)^2, \qquad si\ k=1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(L_{n+5}-\frac{n^2+9n+22}{2}\right) \leq \|L_r\|_2 \leq |r|\left(L_{n+5}-\frac{n^2+9n+22}{2}\right)^2, \qquad si\ k=2,$$

et si $|r| \geq 1$, *on a :*

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}}\left(L_{n+1}-1\right) \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n-1}\left(L_{n+1}-1\right), \qquad si\ k=0,$$

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}}\left(L_{n+3}-n-4\right) \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n-1}\left(L_{n+3}-n-4\right), \qquad si\ k=1,$$

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}}\left(L_{n+5}-\frac{n^2+9n+22}{2}\right) \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n-1}\left(L_{n+5}-\frac{n^2+9n+22}{2}\right), \qquad si\ k=2.$$

Corollaire 3.7. *Pour la norme spectrale du produit de Hadamard des matrices r-circulantes* $F_r = Circr\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$ *et* $L_r = Circr\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$, *on a :*

- *Si* $|r| \geq 1$, *on a :*

$$\|F_r \circ L_r\|_2 \leq |r|^2 \left(F_{n-1}^{(k+1)}\right)^2 \left(L_{n-1}^{(k+1)}\right)^2.$$

- *Si* $|r| < 1$, *on a :*

$$\|F_r \circ L_r\|_2 \leq \sqrt{n(n-1)} F_{n-1}^{(k+1)} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Découle du Lemme 3.1 et des Théorèmes 3.3 et 3.4. □

Corollaire 3.8. *Pour la norme spectrale du produit de Kronecker des matrices r-circulantes* $F_r = Circr\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$ *et* $L_r = Circr\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$, *on a :*

- *Si* $|r| \geq 1$, *on a :*

$$\frac{1}{n} F_{n-1}^{(k+1)} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r \otimes L_r\|_2 \leq |r|^2 \left(F_{n-1}^{(k+1)}\right)^2 \left(L_{n-1}^{(k+1)}\right)^2.$$

- *Si* $|r| < 1$, *on a :*

$$\frac{|r|^2}{n} F_{n-1}^{(k+1)} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r \otimes L_r\|_2 \leq \sqrt{n(n-1)} F_{n-1}^{(k+1)} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Découle du Lemme 3.3 et des Théorèmes 3.3 et 3.4. □

3.3 Étude des normes spectrales de matrices circulantes et r-circulantes avec les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas généralisés

Soit $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ une des suites $\left(u_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ ou $\left(v_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ définies par (2.53) et (2.54) respectivement et soient α et β comme dans la Remarque 10. Pour notre objectif nous devons avoir tous les $x_n^{(k)} \geq 0$, mais ce n'est pas le cas pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$. Ainsi, nous devons faire des conditions suffisantes sur a et b. Il est clair que si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $x_n^{(k)} \geq 0$. Lorsque $a \geq 0$ et $b < 0$, alors :
- Si $a^2+4b > 0$, alors d'après les formules de Binet (2.56) et (2.57), on remarque que $\alpha > \beta > 0$, il en résulte que $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, i.e., $x_n \geq 0$ et donc $x_n^{(k)} \geq 0$.
- Si $a^2 + 4b = 0$, alors en utilisant la formule (2.5) on obtient $u_n = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$et $v_n = 2\left(\frac{a}{2}\right)^n$ qui sont clairement positifs.
On pose donc les conditions $a \geq 0$ et $a^2 + 4b \geq 0$ dans cette section.

Théorème 3.5. *La norme spectrale de la matrice circulante*

$$M = Circ\left(a^{n-1}x_0^{(k)}, a^{n-2}x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}\right),$$

est :

$$\|M\|_2 = x_{n-1}^{(k+1)}. \tag{3.15}$$

Démonstration. On peut prouver ce théorème par la même méthode de preuve du Théorème 3.1 ou du Théorème 3.2. □

Corollaire 3.9. *Soit $\|M\|_E$ La norme euclidienne de la matrice circulante*

$$M = Circ\left(a^{n-1}x_0^{(k)}, a^{n-2}x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}\right),$$

On a :

$$x_{n-1}^{(k+1)} \leq \|M\|_E \leq \sqrt{n}x_n^{(k+1)}. \tag{3.16}$$

Démonstration. Découle du Théorème 3.5 et l'encadrement 3.2 □

Corollaire 3.10. *Pour la somme de carrée de suit $(x_n^{(k)})_{k,n\geq 0}$, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(x_{n-1}^{(k+1)}\right) \leq \sqrt{\left(\sum_{s=0}^{n-1}\alpha^{n-1-s}x_s^{(k)}\right)^2} \leq x_{n-1}^{(k+1)}.$$

Démonstration. Découle du Corolaire 3.9. □

Théorème 3.6. *Soit $M_r = Circr\left(a^{n-1}x_0^{(k)}, a^{n-2}x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}\right)$ matrices r-circulante*

- *Si $|r| \geq 1$, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}x_{n-1}^{(k+1)} \leq \|M_r\|_2 \leq |r|\sqrt{n}x_{n-1}^{(k+1)}.$$

- *Si* $|r| < 1$, *on a :*

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} x_{n-1}^{(k+1)} \leq \|M_r\|_2 \leq \sqrt{n} x_n^{(k+1)}.$$

Démonstration. D'après la Relation (3.2), on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|M_r\|_E \leq \|M_r\|_2 \leq \|M_r\|_E \tag{3.17}$$

- Si $|r| \geq 1$, on a :

$$\|M\|_E \leq \|M_r\|_E \leq \|rM\|_E \tag{3.18}$$

D'après (3.18) et (3.16), on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} x_{n-1}^{(k+1)} \leq \|M_r\|_2 \leq |r|\sqrt{n} x_{n-1}^{(k+1)}.$$

- Si $|r| < 1$, on a :

$$\|rM\|_E \leq \|M_r\|_E \leq \|M\|_E \tag{3.19}$$

D'après (3.19) et (3.16), on a :

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} x_{n-1}^{(k+1)} \leq \|M_r\|_2 \leq \sqrt{n} x_n^{(k+1)}.$$

□

Corollaire 3.11. *Soit* $F_r = Circr\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$ *une matrices r-circulante avec les nombres hper-Fibonacci, alors :*

- *Si* $|r| \geq 1$, *on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r\|_2 \leq |r|\sqrt{n} F_{n-1}^{(k+1)}.$$

- *Si* $|r| < 1$, *on a :*

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r\|_2 \leq \sqrt{n} F_n^{(k+1)}.$$

Démonstration. On utilise le Théorème 3.6 pour $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\geq 0} = \left(u_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ et $a = b = 1$. □

Corollaire 3.12. *Soit* $L_r = Circr\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$ *une matrices r-circulante avec les nombres hyper-Lucas, alors :*

- *Si* $|r| \geq 1$, *on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L_r\|_2 \leq |r|\sqrt{n} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

- *Si* $|r| < 1$, *on a :*

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n} L_n^{(k+1)}.$$

Démonstration. On utilise le Théorème 3.6 pour $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\geq 0} = (v_n^{(k)})_{n\geq 0}$ et $a = b = 1$. □

3.4 Étude des normes spectrales des matrices circulantes et r-circulantes avec les nombres bi-périodique de Fibonacci et les nombres bi-périodique de Lucas

Dans cette section, on suppose que $a, b \geq 1$, de sorte que $q_n \geq 0$ et $l_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.7. *La norme spectrale de la matrice circulante*

$$Q = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right),$$

est :

$$\|Q\|_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k.$$

Démonstration. D'après le Corollaire 1.2, la matrice circulante Q est normale, ce qui nous donne, d'après le Lemme 3.4, que sa norme spectrale est égale à son rayon spectral, i.e., $\|Q\|_2 = \varrho(Q)$. Considérons le vecteur $v = (1, 1, ..., 1)^t$, alors

$$\begin{aligned}
Q \cdot v &= \begin{pmatrix}
\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} \\
\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \\
\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \\
\vdots \\
\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k
\end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \cdot v.
\end{aligned}$$

Puisque $v \neq 0$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k$ est une valeur propre de Q, donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \leq \varrho(Q). \tag{3.20}$$

D'un autre côté, puisque $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \geq 0$, pour $0 \leq j \leq n-1$, alors :

$$\|Q\|_\infty = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k.$$

D'après le Lemme 3.5, on a $\varrho(Q) \leq \|Q\|_\infty$, i.e.,

$$\varrho(Q) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k. \tag{3.21}$$

De (3.20) et (3.21) on déduit que $\varrho(Q) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k$, et donc c'est que

$$\|Q\|_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k.$$

□

Corollaire 3.13. *Soit $\|Q\|_E$ la norme euclidienne de la matrice*

$$Q = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right).$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \leq \|Q\|_E \leq \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k. \tag{3.22}$$

Démonstration. Découle de l'encadrement (3.2) et du Théorème 3.7. □

Corollaire 3.14. *Pour la somme des carrées des nombres bi-périodiques de Fibonacci, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \leq \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right) q_{n-1} q_n} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k.$$

Démonstration. On a d'après la relation (3.22) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \leq \|Q\|_E \leq \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k,$$

donc pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|Q\|_E \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k,$$

et on a $\|Q\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\ q_{ij}\ |^2\right)} = \sqrt{\left(n \sum_{s=0}^{n-1} \left|\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(s+1)}{2}} q_s\right|^2\right)}$

alors, d'après l'équation (2.76), on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \leq \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right) q_{n-1}q_n} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k.$$

□

Théorème 3.8. *La norme spectrale de la matrice circulante*

$$L = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$$

est :

$$\|L\|_2 = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k.$$

Démonstration. Ce théorème peut être prouvé en utilisant une méthode similaire à la méthode de la preuve du Théorème 3.7. □

Corollaire 3.15. *Soit $\|L\|_E$ la norme euclidienne de la matrice*

$$L = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right).$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k \leq \|L\|_E \leq \sqrt{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k. \tag{3.23}$$

Démonstration. Découle de l'encadrement (3.2) et du Théorème 3.8. □

Corollaire 3.16. *Pour la somme de carrée des nombres bi-périodiques de Lucas, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k \leq \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right) l_{n-1}l_n - 2} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k.$$

Démonstration. On a d'après la relation (3.23) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k \leq \|L\|_E \leq \sqrt{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k,$$

donc pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|L\|_E \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k,$$

et on a $\|L\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid l_{ij} \mid^2\right)} = \sqrt{\left(n\sum_{s=0}^{n-1}\left|\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(s)}{2}} l_s\right|^2\right)}$

alors, d'après l'équation (2.77), on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k \leq \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right) l_{n-1}l_n - 2} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k.$$

□

Corollaire 3.17. *Pour la norme spectrale du produit de Hadamard des matrices circulantes*

$$Q = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right)$$

et

$$L = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$$

on a :

$$\|Q \circ L\|_2 \leq \sqrt{\frac{q_{n-1}q_n}{a}\left(\frac{l_{n-1}l_n}{a} - 2\right)}.$$

Démonstration. On a d'après le Lemme 3.2 :

$$\|Q \circ L\|_2 \leq r_1(Q)c_1(L),$$

avec :

$$r_1(Q) = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |q_{ij}|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right) q_{n-1}q_n}$$

et

$$c_1(L) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right) l_{n-1}l_n - 2},$$

donc

$$\|Q \circ L\|_2 \leq \sqrt{\frac{q_{n-1}q_n}{a}\left(\frac{l_{n-1}l_n}{a} - 2\right)}.$$

□

Corollaire 3.18. *La norme spectrale du produit de Kronecker des matrices circulantes*

$$Q = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right)$$

et

$$L = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$$

est donnée par :

$$\|Q \otimes L\|_2 = \sqrt{\frac{q_{n-1}q_n}{a}\left(\frac{l_{n-1}l_n}{a} - 2\right)}.$$

Démonstration. découle du Lemme 3.3 et des Théorèmes 3.7 et 3.8 □

Lemme 3.6. *Les nombres bi-périodiques de Fibonacci d'indices pairs sont divisibles par a, i.e., $a \mid q_{2n}$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. On veut montrer que :

$$q_{2n} \equiv 0 \pmod{a}, \qquad n \geq 0, \tag{3.24}$$

par récurrence sur $n \geq 0$.

Pour $n = 0$, on a $q_0 = 0 \equiv 0 \pmod{a}$. Supposons que (3.24) est vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$. On a par définition :

$$q_{2n+2} = aq_{2n+1} + q_{2n},$$

donc :

$$q_{2n+2} \equiv 0 \pmod{a}.$$

D'où (3.24) est vraie pour tout entier $n \geq 0$, alors les nombres bi-périodiques de Fibonacci d'indices pairs sont divisibles par a.

□

Théorème 3.9. *Soit* $Q_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right)$ *une matrice* r*-circulante, alors :*

- *Si* $|r| \geq 1$, *on a :*

$$\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \leq \|Q_r\|_2 \leq |r|\frac{q_n q_{n-1}}{a}.$$

- *Si* $|r| < 1$, *on a :*

$$|r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \leq \|Q_r\|_2 \leq \sqrt{(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}}.$$

Démonstration. La matrice r-circulante Q_r est définie par :

$$Q_r = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 \end{pmatrix}$$

et sa norme euclidienne est donnée par :

$$\|Q_r\|_E = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2 + s|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2}.$$

- Pour $|r| \geq 1$ et d'après le Corolaire 3.2, on a :

$$\begin{aligned} \|Q_r\|_E &\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2 + s\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2} \\ &= \sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2} = \sqrt{n\frac{q_{n-1}q_n}{a}} \end{aligned}$$

et d'après (3.2), on obtient :

$$\|Q_r\|_2 \geq \sqrt{\frac{q_{n-1}q_n}{a}}. \tag{3.25}$$

Soient $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$B = \begin{pmatrix} r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & 1 & \dots & 1 \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \dots & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} \\ 1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 \end{pmatrix},$$

de sorte que $Q_r = B \circ C$. Puisque $a, b \geq 1$, alors pour tout $k \in [[1, n-1]]$, on a :

- Si k est impair, alors

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k = q_k \geq 1. \tag{3.26}$$

- Si k est pair, on a :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)} q_k,$$

et d'après le Lemme 3.6, on a :

$$\frac{q_k}{a} = p_k,$$

où p_k est un entier, donc :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k = \sqrt{ab} p_k \geq 1. \tag{3.27}$$

De (3.26) et (3.27), on a pour tout $k \in [[1, n-1]]$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k \geq 1.$$

On en déduit que :

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{nj}|^2} = |r| \sqrt{\frac{q_{n-1} q_n}{a}},$$

et

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{in}|^2} = \sqrt{\frac{q_{n-1} q_n}{a}},$$

donc, d'après le Lemme (3.2), on a :

$$\|Q_r\|_2 = \|B \circ C\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) = |r| \frac{q_{n-1} q_n}{a}. \tag{3.28}$$

D'où, de (3.25) et (3.28), on a :

$$\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \leq \|Q_r\|_2 \leq |r| \frac{q_n q_{n-1}}{a}.$$

- Pour $|r| < 1$ et d'après le Corolaire 3.2, on a :

$$\begin{aligned}\|Q_r\|_E &= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2 + s|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2} \\ &\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2 + s|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2} \\ &= |r|\sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s+1)} q_s^2} = |r|\sqrt{n}\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}},\end{aligned}$$

et d'après (3.2), on obtient :

$$\|Q_r\|_2 \geq |r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}}. \tag{3.29}$$

Soient $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$B = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & 1 & \cdots & 1 \\ r & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 \end{pmatrix},$$

de sorte que $Q_r = B \circ C$, avec :

$$r_1(B) = \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|b_{1j}|^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 + n - 1} = \sqrt{n-1},$$

et

$$c_1(C) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(s+1)}{2}} q_s\right)^2} = \sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}}$$

donc, d'après le Lemme 3.2, on a :

$$\|Q_r\|_2 = \|B \circ C\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) = \sqrt{(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}}. \tag{3.30}$$

D'où, de (3.29) et (3.30), on a :

$$|r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \leq \|Q_r\|_2 \leq \sqrt{(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}}.$$

□

Lemme 3.7. *Les nombres bi-périodiques de Lucas d'indices impairs sont divisibles par a, i.e., $a \mid l_{2n+1}$ pour $n \geq 0$.*

Démonstration. Découle du Lemme 3.6 et de la relation (2.78).

□

Théorème 3.10. *Soit $L_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$ une matrice r-circulante, alors :*

- *Si $|r| \geq 1$, on a :*

$$\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \leq \|L_r\|_2 \leq |r| \left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right).$$

- *Si $|r| < 1$, on a :*

$$|r|\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right)}.$$

Démonstration. La matrice r-circulante L_r est définie par :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \ldots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \ldots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} l_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & \ldots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 \end{pmatrix},$$

et sa norme euclidienne est donnée par :

$$\|L_r\|_E = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2}.$$

- Pour $|r| \geq 1$ et d'après le Corolaire 3.2, on a :

$$\begin{aligned} \|L_r\|_E &\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} \\ &= \sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} \geq \sqrt{n}\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}, \end{aligned}$$

et d'après (3.2), on obtient :

$$\|L_r\|_2 \geq \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}. \tag{3.31}$$

Soient $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} \\ 1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} l_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 \end{pmatrix},$$

de sorte que $L_r = B \circ C$. Puisque $a, b \geq 1$, pour tout $k \in [[1, n-1]]$, on a :

- Si k est pair, alors

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k = l_k \geq 1. \tag{3.32}$$

- Si k es impair, alors

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)} l_k,$$

et d'après le Lemme 3.7, on a :

$$\frac{l_k}{a} = m_k,$$

où m_k est un entier, alors :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k = \sqrt{ab} m_k \geq 1. \tag{3.33}$$

De (3.32) et (3.33), on a pour tout $k \in [[1, n-1]]$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k \geq 1.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} r_1(B) &= \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{nj}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{s=1}^{n-1} |r|^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} \\ &\leq \sqrt{|r|^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(0)} l_0^2 + \sum_{s=1}^{n-1} |r|^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} \\ &= |r| \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} \\ &= |r| \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}, \end{aligned}$$

et

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} = \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2},$$

donc, et d'après le Lemme 3.2, on a :

$$\|L_r\|_2 \|B \circ C\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) \leq |r| \left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right). \tag{3.34}$$

D'où, de (3.31) et (3.34), on a :

$$\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2} \leq \|L_r\|_2 \leq |r|\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2\right).$$

- Pour $|r|<1$ et d'après le Corolaire 3.2, on a :

$$\begin{aligned}\|L_r\|_E &= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} \\ &\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} \\ &= |r|\sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} n\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(s)} l_s^2} = |r|\sqrt{n\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2\right)},\end{aligned}$$

et d'après (3.2), on obtient :

$$\|L_r\|_2 \geq |r|\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2}. \tag{3.35}$$

Soient $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} l_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $L_r = B \circ C$, avec :

$$r_1(B) = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2} = \sqrt{n}$$

et

$$c_1(C) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(0)} l_s^2} = \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2},$$

donc, d'après le Lemme 3.2, on a :

$$\|L_r\|_2 \|B\circ C\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) = \sqrt{n\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2\right)}. \tag{3.36}$$

D'où, de (3.35) et (3.36), on a :

$$|r|\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2} \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2\right)}.$$

□

Corollaire 3.19. *Pour la norme spectrale du produit de Hadamard des matrices r-circulantes*

$$Q_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right)$$

et

$$L_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right),$$

on a :

- *Si* $|r| \geq 1$, *alors :*

$$\|Q_r \circ L_r\|_2 \leq |r|^2 \frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right).$$

- *Si* $|r| < 1$, *alors :*

$$\|Q_r \circ L_r\|_2 \leq \sqrt{n(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right)}.$$

Démonstration. découle du Lemme 3.2 et des Théorèmes 3.9 et 3.10 □

Corollaire 3.20. *Pour la norme spectrale du produit de Kronecker des matrices r-circulantes*

$$Q_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right)$$

et

$$L_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$$

on a :

- *Si* $|r| \geq 1$, *alors :*

$$\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right)} \leq \|Q_r \otimes L_r\|_2 \leq |r|^2 \frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right).$$

- *Si* $|r| < 1$, *alors :*

$$|r|^2\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right)} \leq \|Q_r \otimes L_r\|_2 \leq \sqrt{n(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right)}.$$

Démonstration. découle du Lemme 3.3 et des Théorèmes 3.9 et 3.10 □

Conclusion

Ce mémoire a pour ambition d'étudier la norme spectrale des certaines matrices circulantes et r-circulantes.

Il a fallu dans un premier temps définir quelques généralités sur les matrices et donner la définition des matrices circulantes et r-circulantes et définir leurs valeurs propres et leurs vecteurs propres. Par souci de clarté, nous avons fourni quelques graphes circulants qui se distinguent par leur matrice d'adjacence et qui est elle-même considéré une matrice circulante. Comme nous l'avons également mentionné, les matrices circulantes sont entièrement déterminées par les éléments de leurs premières lignes.

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques matrices circulantes, qui se distinguent par les éléments de leurs premières lignes, qui représentent des suites récurrentes linéaires d'ordre p. Nous avons étudié certaines propriétés de ces suites. Dans le cas particulier des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, nous avons parlé de quelques suites classiques, comme les suites de Fibonacci et de Lucas, leurs généralisations, puis nous sommes passés aux nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas et leurs généralisations. Nous avons terminé notre étude par les suites bi-périodiques, qui sont équivalentes à des suites récurrentes linéaires d'ordre 4.

- La norme spectrale des matrices circulantes avec les nombres hyper-Fibonacci et hyper-Lucas

$$F = Circ\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right),$$

et

$$L = Circ\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right),$$

est donnée par :

$$\|F\|_2 = F_{n-1}^{(k+1)} \quad et \quad \|L\|_2 = L_{n-1}^{(k+1)}.$$

- L'encadrement obtenu de la norme spectrale de la matrice r-circulante avec les nombres hyper-Fibonacci

$$F_r = Circr\left(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, \ldots, F_{n-1}^{(k)}\right)$$

est donnée par :

- Si $|r| \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r\|_2 \leq |r| \left(F_{n-1}^{(k+1)}\right)^2.$$

- Si $|r| < 1$, on a :

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|F_r\|_2 \leq \sqrt{n-1} F_{n-1}^{(k+1)}.$$

- L'encadrement obtenu de la norme spectrale de matrice r-circulante avec les nombres hyper-Lucas

$$L_r = Circr\left(L_0^{(k)}, L_1^{(k)}, \ldots, L_{n-1}^{(k)}\right)$$

est donnée par :

- Si $|r| \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L_r\|_2 \leq |r| \left(L_{n-1}^{(k+1)}\right)^2.$$

- Si $|r| < 1$, on a :

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} L_{n-1}^{(k+1)} \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n} L_{n-1}^{(k+1)}.$$

- La norme spectrale des matrices circulantes avec les nombres hyper-Fibonacci généralisés et hyper-Lucas généralisés

$$M = Circ\left(a^{n-1}x_0^{(k)}, a^{n-2}x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}\right),$$

est donnée par :

$$\|M\|_2 = x_{n-1}^{(k+1)},$$

telle que $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ une des suites $\left(u_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ ou $\left(v_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$.

- La norme spectrale des matrices r-circulantes avec les nombres hyper-Fibonacci généralisés et hyper-Lucas généralisés

$$M_r = Circr\left(a^{n-1}x_0^{(k)}, a^{n-2}x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}\right)$$

est donnée par :

- Si $|r| \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} x_{n-1}^{(k+1)} \leq \|M_r\|_2 \leq |r|\sqrt{n} x_{n-1}^{(k+1)}.$$

- Si $|r| < 1$, on a :

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} x_{n-1}^{(k+1)} \leq \|M_r\|_2 \leq \sqrt{n} x_n^{(k+1)}.$$

- La norme spectrale de la matrice circulante avec les nombres bi-périodiques de Fibonacci

$$Q = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right),$$

est donnée par :

$$\|Q\|_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k.$$

Il est donc intéressant de calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}} q_k$.

- La norme spectrale de matrice circulante avec les nombres bi-périodiques de Lucas

$$L = Circ\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$$

est donnée par :

$$\|L\|_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k.$$

Il est donc intéressant de calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k$.

- L'encadrement obtenu de la norme spectrale de matrice r-circulante avec les nombres bi-périodiques de Fibonacci

$$Q_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right)$$

est donnée par :

- Si $|r| \geq 1$, on a :

$$\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \leq \|Q_r\|_2 \leq |r|\frac{q_n q_{n-1}}{a}.$$

- Si $|r| < 1$, on a :

$$|r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \leq \|Q_r\|_2 \leq \sqrt{(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}}.$$

- L'encadrement obtenu pour la norme spectrale de la matrice r-circulante avec les nombres bi-périodiques de Lucas

$$L_r = Circr\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$$

est donnée par :

- Si $|r| \geq 1$, on a :

$$\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \leq \|L_r\|_2 \leq |r|\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right).$$

- Si $|r| < 1$, on a :

$$|r|\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \leq \|L_r\|_2 \leq \sqrt{n\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right)}.$$

Bibliographie

[1] L. Ait-Amrane, D. Behloul, *Cassini determinant involving the (a, b)-hyper-Fibonacci numbers*. Malaya J. Mat. 8 (2020), no. 3, 939–944.

[2] L. Ait-Amrane, D. Behloul, *Generalized hyper-Lucas numbers and applications*, Indian J. Pure Appl. Math. (2021), DOI 10.1007/s13226-021-00013-y.

[3] E. Andrade, D. Carrasco-Olivera, C. Manzaneda, *On circulant like matrices properties involving Horadam, Fibonacci, Jacobsthal and Pell numbers*. Linear Algebra Appl. 617 (2021), 100–120.

[4] M. Bahsi, *On the norms of circulant matrices with the generalized Fibonacci and Lucas numbers*. TWMS J. Pure Appl. Math. 6 (2015), no. 1, 84–92.

[5] M. Bahsi, S. Solak, *On the norms of r-circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers*. J. Math. Inequal. 8 (2014), no. 4, 693–705.

[6] G. Bilgici, *Two generalizations of Lucas sequence*. Appl. Math. Comput. 245 (2014), 526–538.

[7] J. P. Davis, *Circulant matrices. A Wiley-Interscience Publication*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1979.

[8] A. Dil, I. Mezo, *A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers*. Appl. Math. Comput. 206 (2008), no. 2, 942–951.

[9] M. Edson, S. Lewis, O. Yayenie, *The k-periodic Fibonacci sequence and an extended Binet's formula*. Integers 11 (2011), A32, 12 pp.

[10] A. F. Horadam, *A generalized Fibonacci sequence*. Math. Monthly 68 (1961), 455–459.

[11] A. Ipek, *On the spectral norms of circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries*. Appl. Math. Comput. 217 (2011), no. 12, 6011–6012.

[12] C. Köme, Y. Yazlik, *On the spectral norms of r-circulant matrices with the biperiodic Fibonacci and Lucas numbers*. J. Inequal. Appl. 2017, Paper No. 192, 12 pp.

[13] C. L. Lang, M. L. Lang, *Fibonacci numbers and identities*. Fibonacci Quart. 51 (2013), no. 4, 330–338.

[14] J. Nzeutchap, *Young-Fibonacci insertion, tableauhedron and Kostka numbers*. J. Combin. Theory Ser. A 116 (2009), no. 1, 143–167.

[15] Y. K. Panwar, B. Singh, V. K. Gupta, *Generalized Fibonacci sequences and its properties*. Palest. J. Math. 3 (2014), no. 1, 141–147.

[16] S. Shen,J. Cen , *On the bounds for the norms of r-circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers*. Appl. Math. Comput. 216 (2010), no. 10, 2891–2897.

[17] S. Solak , *On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers*. Appl. Math. Comput. 160 (2005), no. 1, 125–132.

[18] A. P. Stakhov, *Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory*. Chaos Solitons Fractals 30 (2006), no. 1, 56–66.