République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de YAHIA Farès de MEDEA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie de la Matière

Filière Génie Mécanique

Projet de Fin d'Etude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Génie Mécanique

Option : Conception Mécanique

Thème

Effet du cisaillement transverse sur

Le comportement statique des plaques composites

Présenté par :

- MAZIGHI Walid
- GHERABA Nacer

Encadré par :

- Dr BACHENE Mourad

Promotion : Juin 2016

Remerciement

Tout d'abord nous remercions Dieu pour nous avoir guidés vers le Chemin de la lumière et du savoir, pour nous avoir donné le courage et là Volonté afin de pouvoir réaliser ce travail, et nos parents pour leurs soutiens et leurs sacrifices.

Nous tenons à remercier vivement tous ceux qui nous ont aidés à élaborer cet ouvrage et en particulier notre Encadreur Dr. BACHENE Mourad pour son aide et ses orientations précieuses.

Nous tenon s'également à remercier les membres du jury, pour l'honneur qu'ils nous ont accordé, en acceptant de juger notre travail.

Nous remercions aussi l'ensemble des enseignants de département

De Génie Mécanique qui ont contribué à notre formation.

Quetous ceux et celles qui nous ont apporté leur soutien et qui nous ont

Aidé de près ou de loin pour l'achèvement de ce projet trouvent ici l'expression

De notre vive et sincère reconnaissance, en particulier nos familles etnos amis.

Dédicace

Je dédie ce travail en signe de respect et de reconnaissance :

A celle qui atout donné, tout sacrifié, à la femme qui règne
Sur mon cœur, " Ma Mère".

A celui qui m'a toujours dirigé, guidé, aidé et encouragé afin de me
Voir affronter la vie avec sérénité et courage, à l'homme qui a toujours
Souhaité me voir à la hauteur," Mon Père".

A mes frères « Houssam, Yasser, Mossaab » et ma sœur
« Habiba ».

A tout nombre de ma famille grand et petit spécialement ma
petite cousine « basma »

A mes chers amis Mohamed RABAHI, Hichem SID, Izou KACI,
Walid KHELIL CHERFI, Salim BEN KORTEBI, Salah TCHIKOU,
Boujou, Younes, Mohamed BENREKIA, Hamza, Ibrahim, Rahim,
Jaafer, HAMADACHE, Djamel, Redha BENZAID, Ahmed, Moulai
A mes amies qui m'a aidé : Ibtissam, Amira, Hadjer, Kaouther, Abla
Et à tous mes amis.

A mes très chers collègues et toute la promotion2016.

Et spécialement à Mr. REBHI Redha.

A la fin, je dédie très chaleureusement ce travail à

Mon binôme Nacer.

walid

Dédicace

Je dédie ce travail en signe de respect et de reconnaissance :

A celle qui atout donné, tout sacrifié, à la femme qui règne
Sur mon cœur, " ma mère ".
A celui qui m'a toujours dirigé, guidé, aidé et encouragé afin de me
Voir affronter la vie avec sérénité et courage, à l'homme qui a toujours
Souhaité me voir à la hauteur," mon père".

Ames frères et ma sœur.

A mes chers frères Islam, Walid, Aissa Dahmis, Adel,
Abdelfettah, Salim, Walid Kc

A mes chers amis Jaafer, Mohamed Hamadache, Djamel, Walid Ben Allel,
Dhiaa, Salim benkortbi, Younes, Mamadou

A mes chers sœurs Radhia, Imene, Randa, Samia, Fouzia, Ramla, Noussaiba

Spécialement « Siham »

A mes très chers collègues et toutelapromotion2016.

Nacer

RESUME

Les matériaux composites sont aujourd'hui largement utilisés et touche de nombreux secteurs industriels. Pour les besoins de la technologie moderne, une bonne connaissance du comportement mécanique dans la conception ou la vérification de ces structures est indispensable. Pour atteindre de tels objectifs, la détermination des caractéristiques statiques ou dynamiques est nécessaire.

Le but de ce travail est l'étude par la méthode des éléments finis du comportement statique des plaques composites stratifiées. Le travail réalisé est présenté en deux grandes parties. La première est consacrée au développement de la formulation du comportement statique des plaques stratifiées. La deuxième est une analyse par éléments finis suivie par une présentation d'un programme informatique développé à cet effet, où plusieurs applications relatives à l'influence de certains paramètres sur la déflexion maximale et les contraintes maximales ont été traitées à savoir ; l'influences de la géométrie de la plaque, de l'orientation des fibres, de l'anisotropie et des conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats de la littérature où une bonne corrélation à été constatée.

ABSTRACT

Composite materials are today widely used and founding many industries. For the needs of modern technology, a good knowledge of the mechanical behavior of these structures is essential in the design or verification in a static or dynamic environment. To achieve these objectives, the determination of static characteristics is required.

The aim of this work is to study the static behavior of laminated composite plates. The finite element method is used in the analysis. The work done is presented in two main parts: the first is devoted to the development of the static formulation of laminated plates. The second is a finite element analysis followed by a presentation of a computer program developed for this purpose, where multiple applications related to the influence of some parameters on the maximum deflection and maximum stresses were treated namely, effects of plate's geometry, fiber orientation, material's anisotropy and boundary conditions. The results were compared with literature one where good accuracy was found.

ملخص

إن استخدام المواد المركبة اليوم في الكثير من الصناعات لأغراض التكنولوجيا الحديثة يجعل من معرفة التصرف الميكانيكي لهذه الهياكل في التصميم أو التحقق من أي تشوه أمرا ضروريا.

الغرض من هذه الدراسة هو دراسة التصرف الميكانيكي الساكن للصفائح المركبة المتعددة الطبقات باستخدام طريقة العناصر المحددة. أنجز العمل في *قسمين* رئيسيين هما:

القسم الأول يحتوي على عرض موسع و شامل حول العلاقات الرياضية و الميكانيكية التي تسير التصرف الميكانيكي الساكن للصفائح المركبة.

والثاني هو تحليل لطريقة العناصر المحددة يتبع بعرض ل برنامج كمبيوتر. حيث تمت معلجة العديد من التطبيقات ذات الصلة. وقد تم تطوير برنامج كمبيوتر لحساب الانحراف الأقصى، والإجهاد الأقصى بين الطبقات و أيضا حساب الإجهاد الأقصى على السطح المتوسط للصفائح المركبة المتعددة الطبقات.

Sommaire

Introduction générale 1

chapitre I: Généralité sur les matériaux composites

I.1 Introduction 3
I.2 Définitions des composites 3
I.3 Constituants des matériaux composites 4
I.3.1 Renforts 4
I.3.2 La matrice 8
I.3.2.1 Les résines 9
I.3.2.2 Les charges et les additifs 11
I.3.3 Les fibres et tissu 13
I.3.3.1 Généralités 13
I.3.3.2 Formes linéiques 13
I.3.3.3 Fibres de formes surfaciques 13
I.3.3.4 Structures tissées unidirectionnel 14
I.4 Classification des matériaux composites 15
I.4.1 Classification selon la forme des constituants 15
I.4.2 Classification selon la nature des constituants 15
I.4.3 Classification suivant performance et diffusion 16
I.5 Les matériaux composites structuraux 16
I.5.1 Monocouches 16
I.5.2 Stratifiés 16
I.5.3 Sandwichs 17
I.6 But d'utilisation des matériaux composite 18
I.6.1 Des avantages 18
I.6.2. Les inconvénients 19
I.6.3 Applications des matériaux composites 21
I.7 Conclusion 23

chapitre II: Comportement mécanique des matériaux composites

II.1 Comportement Macroscopique des monocouches 24
II.1.1 Introduction 24
II.1.2 Quelques définitions de base 24

II.1.3 Loi de Hooke généralisée 30
II.1.3.1 Matériaux anisotropes (tricliniques) 31
II.1.3.2 Matériaux monocliniques 31
II.1.3.3 Matériaux orthotrope 31
II.1.3.4 Matériau unidirectionnel (isotrope transverse) 31
II.1.3.5 Matériau isotrope 32
II.1.4 Loi de Hooke pour un composite unidirectionnel 32
II.1.4.1 Hypothèse de contraintes planes 33
II.1.4.2 Forme bidimensionnelle de la loi de Hooke 33
II.1.4.3 Expressions de [Q] et [S] en fonction des modules de l'ingénieur 33
II.1.5 Loi de Hooke pour un composite unidirectionnel en d'hors de ses axes principaux 36
II.2 Comportement Microscopique des monocouches 40
II.2.1 Introduction 40
II.2.2 Fractions volumiques et massiques, masse volumiques 40
II.2.3 Modules d'élasticité 42
II.3 Comportement Mécanique des stratifiés 50
II.3.1 Introduction 50
II.3.2 Désignation d'un stratifie 50
II.3.3 Relation contraintes – déformations d'un stratifie 52
II.3.3.1 Hypothèses de base 52
II.3.3.2 Champ des déplacements 53
II.3.3.3 Champ des déformations 54
II.3.4 Résultantes et moments 55
II.3.5 Equation constitutive 56
II.4 Théorie des plaques Sandwiches 58
II.4.1 Introduction 58
II.4.2 Champs des déformations et des contraintes 58
II.4.2.1 Hypothèses de la théorie des sandwiches 58
II.4.2.2 Champ des Déplacements 59
II.4.2.3 Champ des déformations 60
II.4.2.4 Champ des contraintes 62
II.4.3 Relations fondamentales des plaques sandwiches 63
II.4.3.1 Equation constitutive 63

II.4.4 Sandwiches à peaux épaisses 65
II.5 Conclusion 67

Chapitre III: Formulation élément finis

III.1 Introduction 69
III.2 Discrétisation 69
III.3 Equations de l'énergie potentielle 73
III.3.1 Matrice de rigidité 74
III.3.2 Intégration de Gauss 75
III.4 Matrice de rigidité globale – vecteur force global 76
III.5 Résolution 76

chapitre IV: Présentation du programme informatique

IV.1 Introduction 78
IV.2 Introduction des données 80
IV.2.1 Données mécaniques 80
IV.2.2 Données géométriques 80
IV.3 Construction de la matrice de rigidité 83
IV.4 Construction de la matrice de masse 85
IV.5 Résolution 85
IV.6 Impression des résultats 86

Chapitre V: Résultats et discussions

V.1 Introduction 92
V.2 Applications 92
V.2.1 Validation 93
V.2.2 Influence du nombre des couches 98
V.2.3 Influence de l'orientation des fibres 100
V.2.4 Influence de la séquence d'empilement 102
V.2.5 plaques isotropes carrées simplement appuyées sous chargement uniforme 104
V.2.6 Plaque carrée à trois couches (0/90/0) sous chargement sinusoïdal : 105
V.2.7 Plaque carrée à sept couches (0/90/0/90/0/90/0) et cinq couches (0/90/0/90/0) sous chargement sinusoïdal et uniforme : 106
V.2.7 Plaque carrée à sept couches (0/90/0/90/0/90/0) et cinq couches (0/90/0/90/0) sous chargement sinusoïdal et uniforme : 109
Conclusion générale 111

Listes des figures

Figure I.1 *Schématisation des renforts noyés dans une matrice……03*

Figure I.2 *Principaux matériaux de renforts……05*

Figure I.3 *Différents types de fibre de verre……05*

Figure I.4 *Différents types des fibres de carbone……06*

Figure I.5 *Différents types des fibres d'aramide……06*

Figure I.6 *Différent type des résines……09*

Figure I.7 *Un pli unidirectionnel……16*

Figure I.8 *Nomenclature des stratifiés composites……17*

Figure I.9 *Les constituants des sandwichs……18*

Figure II.1. *Effort sur une section infinitésimale sur le repère arbitraire……24*

Figure II.2 *Effort sur un cuboïde infinitésimal……25*

Figure II.3 *Contraintes normale de cisaillement sur une section infinitésimale dans le repère (x-y) ……26*

Figure II.4 *Application de l'effort pour trouver la constante de technologie d'une couche Continu……34*

Figure II.5 *les axes globales et locale d'un angle de stratifie……36*

Figure II.6 *Élément représentatif de volume d'une couche continue……43*

Figure II.7 La *contrainte longitudinale appliquée a l'élément de volume représentatif pour calculer le module de Young longitudinal……43*

Figure II.8 *La contrainte transversale appliquée a l'élément de volume représentatif utilisé pour calculer le module de Young transversal……45*

Figure II.9 *La contrainte longitudinale appliquée à un élément de volume représentatif pour calculer le coefficient de Poison……46*

Figure II.10 *La contrainte dans le plan de cisaillement appliquée à un élément de volume représentatif pour trouver le module de cisaillement plane……48*

Figure II.11 *Exemple de désignation d'un stratifie……..50*

Figure II.12 *Schématisation des déformations dans le cas de la théorie Classique stratifiée……54*

Figure II.13 *Forces et moments résultants sur un stratifié……55*

Figure II.14 *Notations d'une plaque sandwich……59*

Figure II.15 *Sandwich symétrique à peaux épaisses……66*

Figure III.1 *Changement donnant le cisaillement……70*

Figure III.2 *Elément de référence……70*

Figure IV.1 *Enchaînement des opérations de calcul des solutions propres……79*

Figure IV.2 *Système de numérotation pour un même nombre d'éléments……81*

Figure IV.3 *Exemple d'une plaque discrétisée en quatre éléments et encastrée sur ses deux côtés……..82*

Figure IV.4 *Répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque……83*

Figure IV.5 *Structure de la matrice de rigidité globale après élimination des degrés de liberté bloqués……85*

Figure V.1 *Représentation d'une plaque soumise à une charge sinusoïdale……93*

Figure V.2 *Flèche maximale adimensionnelle* (w^*) *en fonction du rapport (a/h) n=2, empilement (θ/- θ) avec θ=5°, charge sinusoïdale……95*

Figure V.3 *Flèche maximale adimensionnelle* (w^*) *en fonction du rapport (a/h) n=10, empilement (θ/- θ) avec θ=5°, charge sinusoïdale……95*

Figure V.4 *Variation des contraintes maximales en fonction du rapport (a/h) pour une plaque carrée sur appuis simples composée de deux couches (θ/- θ) avec θ=5……98*

Figure V.5 *Influence du nombre de couches "n" sur la flèche maximale adimensionnelle (w^*) Plaque carrée sur appuis simples, charge sinusoïdale, empilement (θ/-θ/θ/-θ…)……99*

Figure V.6 *Influence du nombre de couches sur les contraintes maximales d'une plaque carrée simplement appuyée constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique (-45°/45°/-45°…)……100*

Figure V.7 *Variation de la flèche maximale en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée simplement appuyée à une seule couche sous une charge sinusoïdale……101*

Figure V.8 *Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée simplement appuyée à une seule couche sous une charge sinusoïdale……102*

Figure V.9 *Influence de la séquence d'empilement sur la flèche maximale (w^*) pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale……103*

Figure V.10 *Influence de la séquence d'empilement sur la contrainte maximale σ_{xx}^* pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale……104*

Figure V.11 *Influence de la séquence d'empilement sur la flèche maximale (w^*) pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale – uniforme (n=7 empilement (0/90/0/90/0/90/0))……108*

Listes des tableaux

Tableau I.1 *caractéristiques des fibres et renforts……8*

Tableau V.1 *Flèches maximale adimensionnelle, ($w^* \times 10^2$), en fonction du nombre de couches, l'orientation des fibres, et le rapport a/h. Plaque carrée simplement appuyée, empilement (-θ/θ/-θ/...), Charge transversale sinusoïdale réparti (n =2 à 10, n= nombre de couches)……94*

Tableau V.2 *Contraintes adimensionnelles en fonction de nombre du couches, l'orientation des fibres, et le rapport a/h, pour une plaque carrée simplement appuyée, empilement (-θ/θ/-θ/...), Charge transversale sinusoïdale réparti (n=10, n= nombre de couches)……97*

Tableau V.3 *Flèches maximale adimensionnelle, ($w^* \times 10^2$), en fonction du rapport a/h. D'une plaque carrée simplement appuyée. Charge transversale uniforme. Pour (n=1, n=nombre de couche)……105*

Tableau V.4 *Déplacement transversal adimensionnelle, ($w^* \times 10^2$) d'une plaque stratifiée carrée à trois couches (0 / 90 / 0) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal. En fonction du rapport d'épaisseur h/a……105*

Tableau V.5 *cisaillement transversal adimensionnelle, et déflexion maximal d'une plaque carrée simplement appuyée sous chargement sinusoïdal - uniforme. En fonction du rapport a/h……107*

Tableau V.6 *cisaillement transversal adimensionnelle, et déflexion maximal d'une plaque carrée simplement appuyée sous chargement sinusoïdal - uniforme. En fonction du rapport a/h……110*

Nomenclatures

Symboles	Signification
σ_n	Contrainte normale.
τ_n	Contrainte tangentielle.
u(x,y,z)	Le déplacement suivant x
v(x,y,z)	Le déplacement suivant y
w(x,y,z)	Le déplacement suivant z
ε_x	La déformation suivant la direction x.
ε_y	La déformation suivant la direction y.
Υ_{xy}	La déformation due au cisaillement dans le plan (xy).
v_{12} , v_{21}	Les coefficients de poison.
G_{12}	Module de cisaillement dans le plan (1-2).
E_1, E_2	Module de Young respectivement longitudinale (direction1), transversale (direction2).
W	Énergie de déformation.
[Q]	Matrice de rigidité.
[S]	Matrice de souplesse.
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité réduite.
S_{ij}	Les coefficients de souplesse réduite.
[T]	Matrice de changement de base.

$\overline{Q_{ij}}$	Les coefficients de rigidité exprimée dans le repère globale
$\overline{S_{ij}}$	Les coefficients des souplesses exprimées dans le repère global
$\Theta_{c,f,m}$	Volume respectivement du composite, des fibres et de la matrice.
$\rho_{c,f,m}$	Masse volumique respectivement du composite, des fibres et de la matrice.
$V_{f,m}$	Fraction volumique respectivement des fibres et de la matrice.
$M_{c,f,m}$	Masse respectivement du composite, des fibres et de lamatrice.
$W_{f,m}$	Fraction massique respectivement des fibres et de la matrice.
$\sigma_{c,f,m}$	Les contraintes normales dans les composites, les fibres et la matrice.
$\varepsilon_{c,f,m}$	Les déplacements dans les composites, les fibres et la matrice.
δ_c	Le déplacement transversale du composite due au cisaillement.
$\delta_{f,m}$	Le déplacement effectué respectivement par la fibre et de la matrice.
$\gamma_{c,f,m}$	Les déformations angulaires respectivement du composite, des fibres et de la matrice.
$N(x,y)$	Les résultantes en membrane dans la couche K.
$M(x,y)$	Les moments de flexion et de torsion.
ω^*	La flèche maximale adimensionnelle.
Ω	Flèche maximale dimensionnelle.
Θ	L'angle de l'orientation
σ_{xx},σ_{yy}	Contraintes normale

$\boldsymbol{\sigma_{xy}}$	Contrainte tangentielle.
a,b,c	Longueur, largeur, l'épaisseur
NTH	Nanotube de carbone
$\mathbf{E_p}$	Épaisseur de la peau
$\mathbf{E_c}$	Épaisseur du cœur

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, le développement rapide des technologies modernes requiert que l'on utilise des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées (bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'amples qualités). Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent à ces exigences. Ils deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la marine, le transport, la navigation, les sports, les applications aérospatiales et ils ont été utilisés récemment dans les structures de génie civil comme des compléments aux matériaux classiques (acier, bois et béton).

Parmi les composites les plus convoités, on peut distinguer deux grandes catégories de matériaux composites structuraux: les stratifiés et les sandwichs. Les stratifiés sont des matériaux couramment rencontrés dans les éléments structuraux. Ces derniers sont constitués par l'empilement de plusieurs couches où chaque couche peut avoir une orientation différente, i.e. les caractéristiques mécaniques varient selon les directions considérées. Les sandwichs sont des structures composites dont l'utilisation connaît un essor important. Ces structures se composent de trois couches principales dont les caractéristiques mécaniques sont différentes: deux peaux fines, généralement stratifiées, possédant de très bonnes caractéristiques mécaniques (module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction), collées sur une âme épaisse, légère et de faibles caractéristiques mécaniques (mousse, bois) dont le rôle principal est de résister aux efforts de cisaillement. Ces différentes couches sont liées entre elles par collage ou par soudure.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉ SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

I.1 Introduction

Les origines des matériaux composites sont inconnues mais tous les écrits historiques contiennent des références à certaines formes des matériaux [1]. Par exemple, la paille a été utilisée par les arabes pour renforcer les briques ; le contreplaqué a été utilisé par les anciens Egyptiens afin d'obtenir une meilleure résistance tant aux chargements mécaniques qu'a l'environnement, les épées et les armures médiévales ont été fabriquées par des couches des différents matériaux. Aujourd'hui, les matériaux composites font partie courante de notre vie que cela soit des objets très excitants et à la mode comme la canne de golf et le kayak, ou beaucoup plus usuels tels que le contreplaqué et le béton.

I.2 Définitions des composites

Un matériau composite peut être défini comme une combinaison d'au moins deux matériaux différents a l'échelle macroscopique ou plusieurs matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion), l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les *renforts* qui sont noyés dans une *matrice* dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible (figure 1-1). La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les matériaux ainsi obtenus sont très hétérogènes et anisotropes.

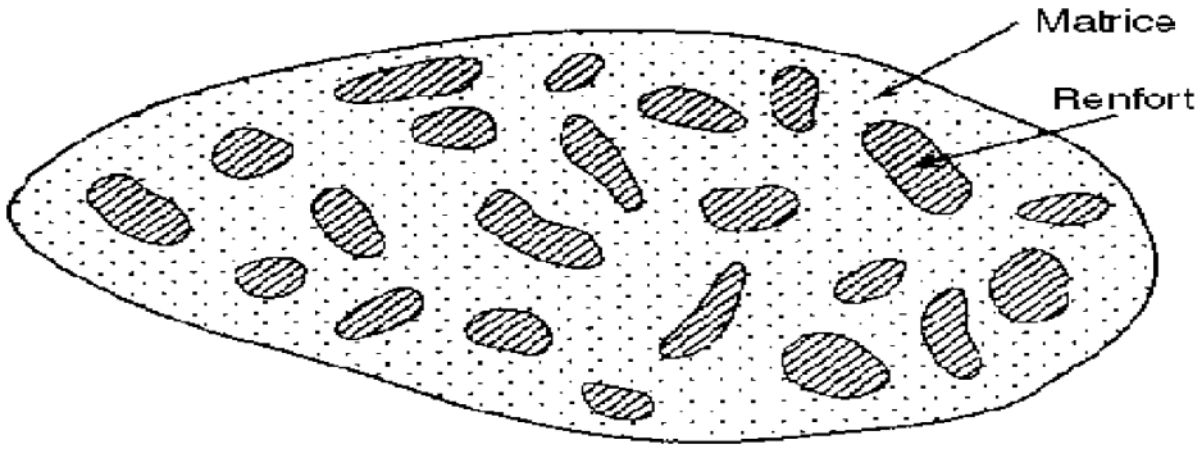


Figure I.1 *Schématisation des renforts noyés dans une matrice*[1].

I.3 Constituants des matériaux composites

- **Le renfort :** est une armature, ou squelette de la structure qui il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou non organiques).
- **La matrice :** elle lie les fibres renforts, elle répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion), et elle assure la protection chimique. Par définition, c'est un polymère ou une résine organique. En plus de ces deux constituants de base, il existe : une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmettant les contraintes de l'un a l'autre sans déplacement relatif. Des produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. ... qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

I.3.1 Renforts

Ils peuvent se présenter sous de nombreuses formes : fibres courtes ou fibres continues (tissus ou textures multidirectionnelles) en fonction de l'application envisagée. Les fibres possèdent généralement une bonne résistance à la traction mais une résistance à la compression faible. Les composites artificiels sont souvent renforcés soit par des fibres, soit par des composants fabriqués à base de fibres (torons, assemblage de fibres tordues ensemble; tissus ; mats, ou nappes). Chacune d'entre elles s'impose dans une application particulière en raison de ses propriétés spécifiques et de son prix Les principaux matériaux de renforts, sont résumés dans l'organigramme suivant[1][2] :

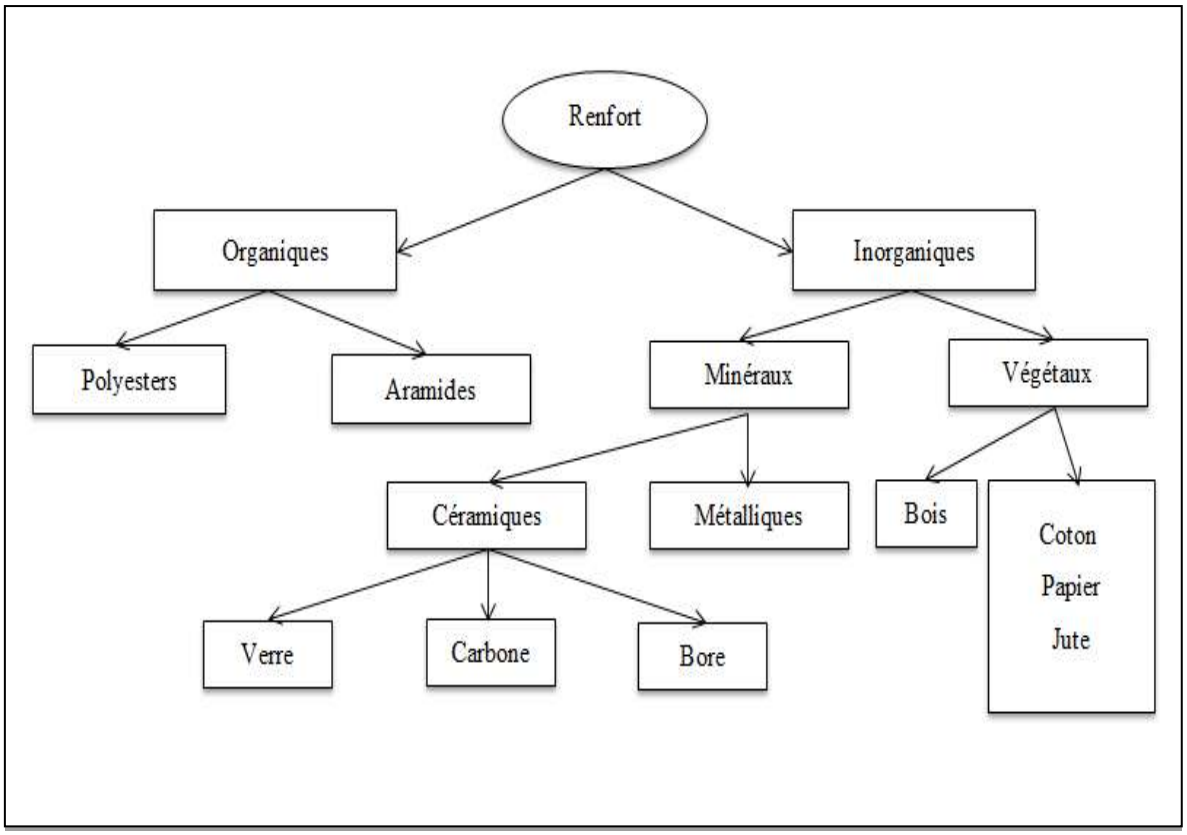


Figure I.2 *Principaux matériaux de renforts*[3].

Parmi les différents types de renforts, on peut citer [4] :

Les fibres de verre : sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 a 2mm de diamètre, puis étirées jusqu'a obtenir des diamètres de 5 a 15mm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés (E,R,S) selon la proportion de chaque composant (SiO2, Al2O3,B2O3, CaO, MgO)

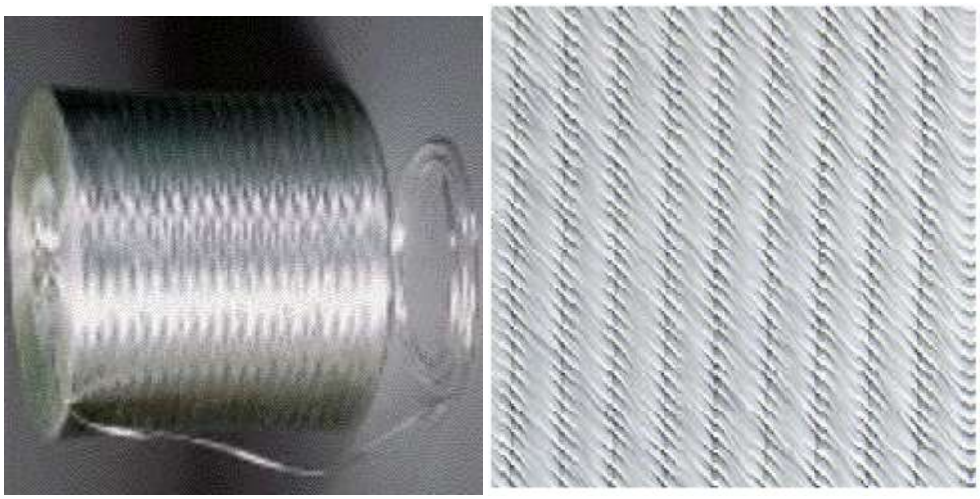


Figure I.3 *Différents types de fibre de verre.*

Les fibres de carbone : doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites de graphite qui les composent. Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère (par exemple polyacrylonitrile) préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200 C°), puis pyrolyse (1500 à 2500 C°). On distingue deux types de fibres (figure I.4) :

- fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ;
- fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

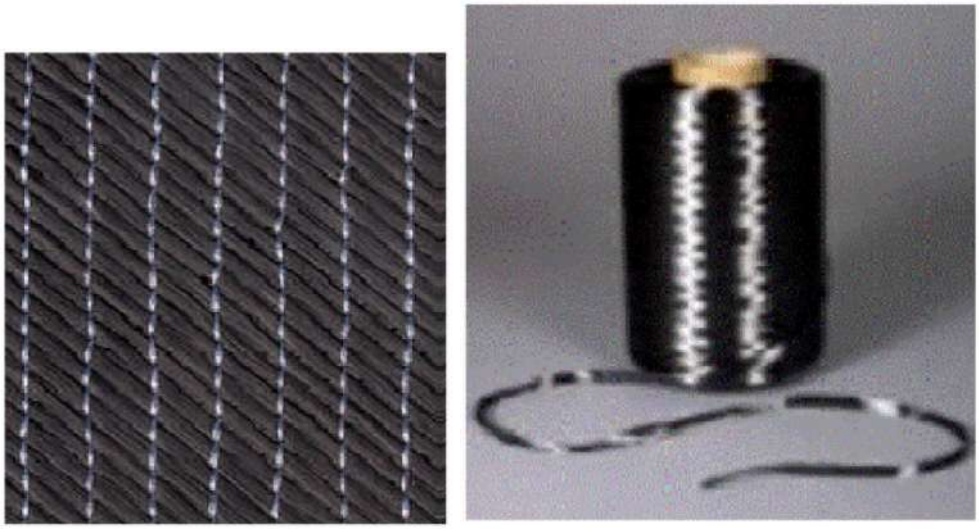


Figure I.4 *différents types des fibres de carbone.*

Fibre d'aramide : Souvent appelée KEVLAR® de prix élevé (20 euros/kg), la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes (figure I-5)[1]:

-les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;

- les fibres hautes modulent : employées dans le renforcement pour les composites hautes Performances.

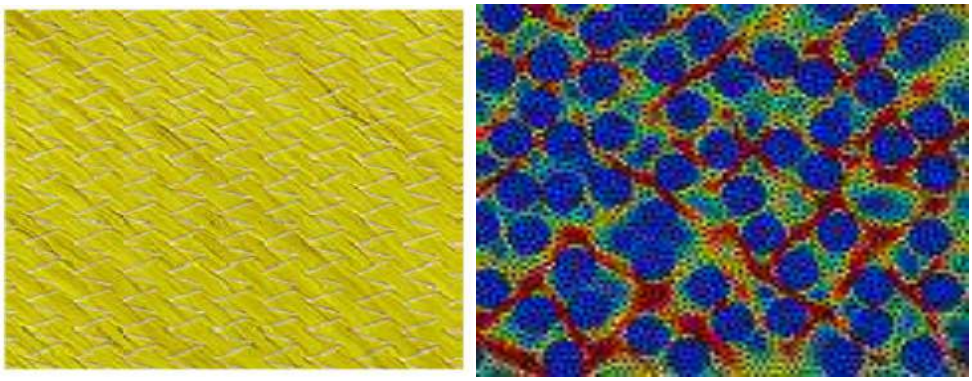


Figure I.5 *différents types des fibres d'aramide.*

Les fibres métalliques ou céramiques : sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100°C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15mm de diamètre. Le diamètre résultant est de 100 à 200mm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium(SiC). Les derniers développements concernent la production de trichites, ("whiskers") qui sont des monocristaux filamentaires obtenus par décomposition d'un sel métallique en ambiance réductrice. Leur longueur est de quelques millimètres, pour un diamètre d'environ 1mm. Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.

Les microbilles : pleines ou creuses peuvent être produites en verre, carbone ou polystyrène. Elles ont des diamètres compris entre 10 et 150mm ; le taux volumique de charge peut atteindre 50%. Le composite résultant a des propriétés mécaniques isotropes.

Les renforts minéraux : Les principaux renforts minéraux sont le mica et l'amiante.

L'un et l'autre sont des composes naturels dont les propriétés ne permettent pas d'atteindre, les résistances obtenues avec les fibres. Le mica se présente sous forme de paillettes, dont l'intérêt est d'offrir un renforcement bidirectionnel. L'amiante (mélange d'oxydes de magnésium, de silice et d'eau, comportant également du sodium, du fer,...) se présente sous forme de fibrilles de 20nm, dont il est possible de détacher des fibres de plusieurs centimètres. Son caractère cancérigène a maintenant conduit à un abandon complet.

Autres fibres :

Il existe d'autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques, et dont l'utilisation est réservée à la recherche de :

- produits à bas prix de revient.
- produits à haute isolation thermique.
- produits de bonne conductivité thermique ou électrique.

Parmi ces fibres nous avons :

a) les fibres d'origine végétale

- le bois, utilisé sous forme de fibres orientées, feutres, papiers imprégnés, etc.
- le sisal, le jute, le lin, de moins en moins utilisés au profit des fibres de verre.

b) les fibres d'origine minérale

- l'amiante (interdite dans certaines utilisations).
- la silice.

c) les fibres synthétiques

- fibres polyesters (tergal, dacron, térylène, etc.).

- fibres polyamides.

d) les fibres métalliques

- acier, cuivre, aluminium.

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques afin d'obtenir des composites:

- de bonne conductivité thermique et électrique,

- de caractéristiques thermomécaniques élevées.

Doit leurs caractéristiques élastiques et mécaniques sont résumées dans le tableau I.1.

Tableau I.1 *caractéristiques des fibres et renforts*[3].

Renforts	**Diamètre du filament (µm)**	**Masse volumique (kgm^3)**	**Module d'élasticité longitudinal (MPa)**	**Module cisaillement (MPa)**	**Coefficient de Poisson**	**Contrainte de rupture (traction) MPa**	**Allongement à rupture %**	**Coefficient de dilatation thermique $°C^{-1}$**
	D	Mv	E	G	k	C_r	A	α
Verre E	16	2 600	74 000	30 000	0.25	2 500	3.5	$0.5*10^{-5}$
Verre R	10	2 500	86 000		0.2	3 200	4	$0.3*10^{-5}$
Carbone HM	6.5	1 800	390 000	20 000	0.35	2 500	0.6	$0.08*10^{-5}$
Carbone HR	7	1750	230 000	50 000	0.3	3 200	1.3	$0.02*10^{-5}$
Kevlar 49	12	1 450	130 000	12 000	0.4	2 900	2.3	$-0.2*10^{-5}$
Bore	100	2 600	400 000			3 400	0.8	$0.4*10^{-5}$
Silicate D'alumine	10	2 600	200 000			3 000	1.5	
Polyéthylène		960	100 000			3 000		

I.3.2 La matrice

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, répartir les contraintes subies, apporter la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit.

Il existe différent types de résines (figure I.6) on utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes se développe fortement.

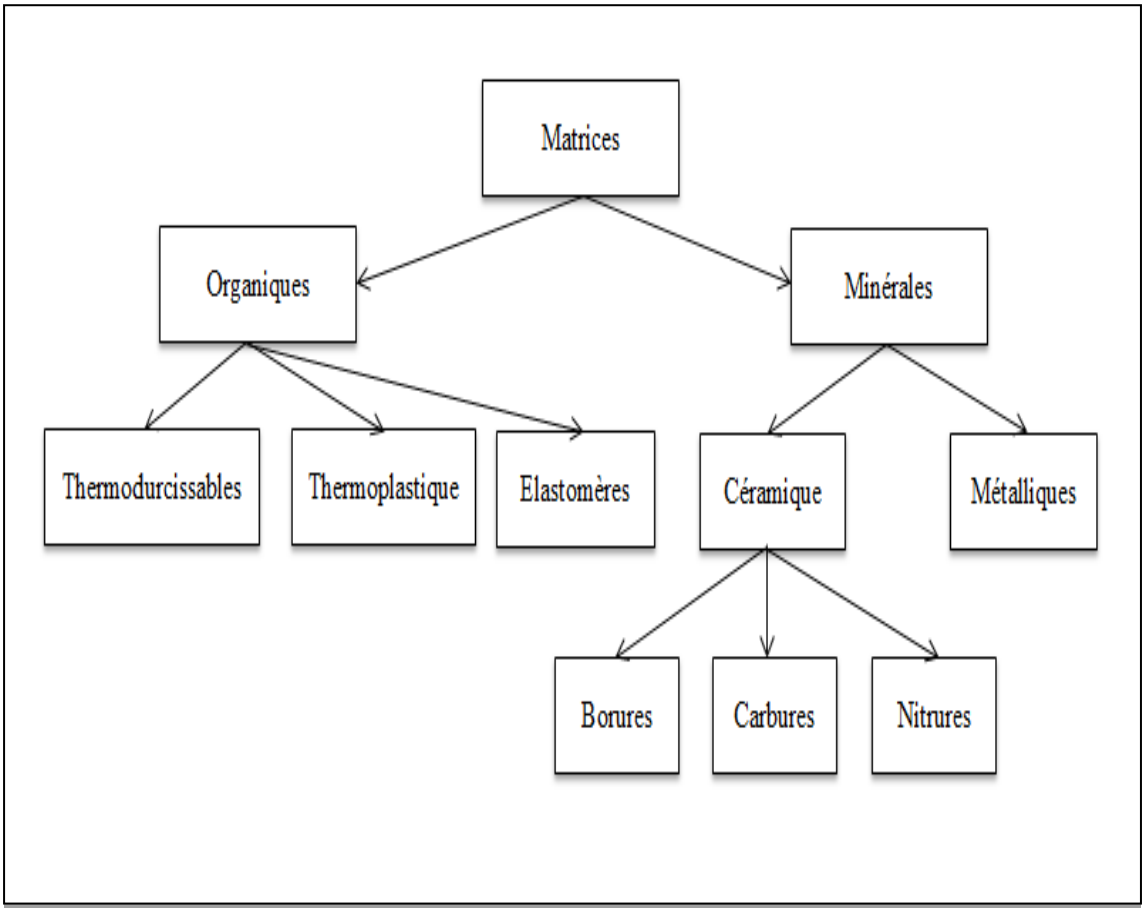


Figure I.6 *Différent type des résines*[3].

I.3.2.1 Les résines

Les résines polymères se subdivisent en deux grandes familles : résines thermodurcissables et résines thermoplastiques [1 et 3].

I.3.2.1.1 Les résines thermodurcissables

Après polymérisation par traitement thermique (chaleur, radiation) ou physicochimique (catalyseur, durcisseur) ou par l'association des deux, ce type de résines se transforment en produits essentiellement infusibles et insolubles [5], elles ne peuvent être mises en œuvre qu'une seule fois. Leurs propriétés mécaniques et thermo mécaniques remarquables font d'elles les résines les plus utilisées pour la mise en œuvre des matériaux composites, les principales résines employées dans ce domaine sont par ordre d'importance décroissant :

a) Les résines polyesters insaturées

Les composites à base de résines polyesters connaissent le plus important développement industriel grâce à leur grande diversité (polyesters condensés, vinylesters, dérivés allyliques, etc.), bonne mouillabilité des fibres et tissus, facilité de mise en œuvre (procédés automatisés)

ainsi qu'à leur faible coût. Les résines de type polyesters rigides possèdent une bonne stabilité dimensionnelle et tenue chimique, mais leur utilisation est limitée aux températures inférieures à 120 °C, elles sont inflammables, sensibles aux chocs, à l'humidité et aux rayons ultraviolets.

b) Les résines de condensation

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques :

- Les résines phénoliques, parmi lesquelles on trouve la bakélite, sont les plus anciennes résines thermodurcissables. Elles se caractérisent par une bonne tenue à la chaleur et au fluage. Elles ont une excellente stabilité dimensionnelle, un faible retrait et de bonnes propriétés mécaniques et chimiques. Leur utilisation est pénalisée par de faibles cadences de production, une non adaptation aux utilisations alimentaires et par les couleurs foncées des produits.
- Les résines aminoplastes de caractéristiques semblables à celles des résines phénoliques, offrent en plus la compatibilité avec les produits alimentaires et la possibilité d'être colorées.
- Les résines furaniques sont peu utilisées en raison de leur coût élevé, cependant elles présentent des propriétés intéressantes en terme de rapidité de durcissement (cadence de production élevée) et de résistance aux agents chimiques (fabrication de citernes, tuyaux, bacs, etc).

c) Les résines époxydes

En raison de leur coût élevé et de leurs bonnes caractéristiques mécaniques (traction, flexion, compression, choc, fluage, etc.), les résines époxydes sont essentiellement employées pour l'élaboration de matériaux composites à hautes performances (aéronautique, espace, balistique, etc.), utilisables jusqu'à des températures de l'ordre de190 °C ou en milieu agressif. La mise en œuvre des composites est facilitée par la très bonne mouillabilité des renforts et la compatibilité avec les différents types de fibres (verre, carbone, Kevlar). Leur faible retrait lors du moulage (<1%) permet d'obtenir des pièces précises. L'obtention de performances optimales requiert un temps de polymérisation assez long, ce qui se répercute sur le coût de fabrication.

I.3.2.1.2 Les résines thermoplastiques

Ce type de polymères a la particularité de pouvoir être alternativement ramollis par chauffage et durcis par refroidissement dans un intervalle de températures spécifique à chaque matériau [4]. Contrairement aux résines thermodurcissables, ils sont recyclables, mais présentent des

propriétés mécaniques et thermomécaniques plus faibles. Ces résines sont appelées aussi «plastiques», elles comportent une large gamme de produits : polychlorure de vinyle (PVC), polyéthylène, polypropylène, polyamide, polycarbonate, etc., regroupés en plastiques de grande diffusion et plastiques techniques. Les premiers sont mis en œuvre par injection pour obtenir des pièces moulées ou par extrusion pour obtenir des films, des plaques, des tubes, des profilés, etc. Les seconds sont mis en œuvre par injection. Leur intérêt réside dans le faible coût de la matière première et le rendement élevé des procédés utilisés (injection, extrusion). Toutefois, leur emploi dans la mise en œuvre de matériaux composites est limitée en raison de la nécessité de faire appel à des transformations à hautes températures de produits solides (granulés, plaques feuilles ou films).

I.3.2.1.3 Autres types de résines

En plus des thermoplastiques et des thermodurcissables, il existe deux autres classes de résines à usages spécifiques :

- Les résines thermostables : on les retrouve aussi bien parmi les résines thermodurcissables que thermoplastiques, elles se distinguent par leurs performances thermiques (stabilité thermique jusqu'à 300 °C). Elles sont développées essentiellement dans les domaines aéronautique et spatial.
- Les élastomères : renforcés de fibres, ils sont utilisés dans diverses applications du domaine de l'automobile.

I.3.2.2 Les charges et les additifs

Différents produits peuvent être ajoutés à la résine pour améliorer ses caractéristiques mécaniques et physiques, faciliter sa mise en œuvre ou simplement pour en diminuer le coût. On parlera de charges quand la quantité ajoutée est de quelques dizaines de %, et d'additifs lorsque cette quantité ne dépasse pas quelques %.

I.3.2.2.1 Les charges

a) Les charges renforçantes

Elles sont incorporées aux résines pour améliorer leurs caractéristiques mécaniques, selon leur forme géométrique elles sont classées en[5] :

- **Charges sphériques**: sphères de faible diamètre, de 10 à 150 m généralement, appelées aussi microbilles. La forme sphérique évite les concentrations de contraintes dans la matrice et diminue par conséquent sa sensibilité à la fissuration. Les microbilles de verre creuses représentent 99% des charges sphériques utilisées.

-Charges non sphériques : le mica sous forme d'écaillés est le matériau le plus utilisé.

Des écailles de dimensions allant de 100 à 500 µm et d'une épaisseur de 1 à 20 µm sont incorporées à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables pour des applications électriques et électroniques

b) Les charges non renforçantes

Les charges non renforçantes sont ajoutées pour diminuer le coût de la résine sans altérer ses performances, ou bien pour améliorer certaines de ses propriétés :

- Charges de faible coût : extraites de roches ou de minerais (carbonates, silicates, silices, etc.), leur incorporation augmente le module d'élasticité, la dureté, la viscosité et la stabilité dimensionnelle mais diminue la résistance à la traction et à la flexion.
- Charges ignifugeantes : ont pour rôle de réduire ou d'empêcher la combustion de la résine.
- Charges conductrices et antistatiques : ces charges sont utilisées pour rendre la matrice conductrice de chaleur et d'électricité dans certaines applications.

I.3.2.2.2 Les additifs

a) Les lubrifiants et agents de démoulage

Ils sont utilisés pour faciliter le façonnage de la résine et réduire sa tendance à adhérer aux moules et mandrins.

b) Les pigments et colorants

En fonction de la nature de la résine et de l'utilisation du matériau composite, ce dernier est coloré soit par des pigments (particules insolubles d'oxydes ou de sels métalliques) dispersés dans une pâte, soit par des colorants (composés organiques solubles dans l'eau ou dans un solvant).

c) Les agents anti-retrait et les agents de fluage

Le retrait de la résine après polymérisation peut aboutir à un mauvais état de surface, à un gauchissement ou à des microfissurations des pièces moulées. L'ajout de produits spécifiques anti-retrait, à base de thermoplastiques ou d'élastomères, permet de diminuer ou même d'annuler le phénomène.

d) Les agents anti-ultraviolet

Ils ont pour rôle de protéger la résine des rayons ultraviolets contenus dans le rayonnement solaire. En les absorbant, ils évitent une dégradation prématurée de la résine par rupture de liaisons atomiques ou par photo-oxydation.

I.3.3 Les fibres et tissu

I.3.3.1 Généralités

Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques des matériaux de renfort : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Le choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques d'un composite : comportement thermique, tenue à la température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Pour élaborer des composites performants, les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : caractéristiques mécaniques élevées, masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en œuvre, faible coût, etc. La nature des renforts (organique, minérale, synthétique..) et leurs formes sont fonctions de l'application. Toutefois les plus utilisés sont sous formes de fibres et se présentent sous différentes formes commerciales[5]:

- ✓ Sous forme linéique (fils, mèches, etc.) ;
- ✓ Sous forme de tissu surfacique (tissus simples, mats, etc.) ;
- ✓ Sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

Les renforts les plus performants développés à ce jour sont des fibres courtes particulières appelées Trichites ou Whiskers, formées à base de monocristaux.

I.3.3.2 Formes linéiques

Les fibres sont élaborées en filaments unitaires de 5 à 15 μm de diamètre, appelés mono filaments. Ces filaments sont ensuite réunis en fils ou en mèches pour faciliter leur utilisation. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéique dont l'unité est le tex qui représente la masse en gramme d'un fil de 1 Km de longueur, soit :1 tex = 1g/km ou 1 tex = 10-6 kg/m

L'utilisation directe des formes linéiques pour la mise en œuvre de composites est limitée à quelques procédés particuliers tels que l'enroulement filamentaire et la pultrusion.

I.3.3.3 Fibres de formes surfaciques

Les fils sont transformés par les techniques de l'industrie papetière et de tissage pour réaliser des formes surfaciques : mats, tissus ou rubans, qui facilitent la manipulation et la mise en œuvre des renforts**.**

a) Les mats

Se sont des nappes de fils continus ou discontinus dispersés dans un plan et assemblés par un liant soluble ou non dans la résine, l'absence d'orientations préférentielles des fibres conduit à un comportement isotrope du mat dans son plan.

Les mats de fils coupés, plus déformables, permettent d'obtenir des formes embouties.

Les mats de fils continus sont utilisés pour réaliser des formes complexes par moulage.

b) Les tissus et rubans

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. L'ensemble est maintenu par l'entrecroisement des fils suivant deux directions.

- Une direction chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu.
- Une direction trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés, donc par la masse linéique du fils, et par le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et des fils de trame.

Les armures classiques utilisées sont : toile (ou taffetas), satin, sergé, armure haut module, armure unidirectionnelle. Ces deux dernières donnent les meilleures performances (l'absence d'entrecroisement supprime les effets d'ondulation et de cisaillement des fils).

Les mats et tissus sont caractérisés par leur masse surfacique en gramme/m2.

I.3.3.4 Structures tissées unidirectionnel

a) Tresses et préformes

Des tissus tabulaires (tresses ou préformes) peuvent être obtenus par tissage cylindrique ou conique : les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation de pas permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit couvrir. On peut ainsi réaliser une pièce de révolution ayant un diamètre variable le long de son arc, ce qui permet d'obtenir divers tissus en forme de « chaussettes » coniques, ogivales ou hémisphériques. Ces tissus sont utilisés dans les constructions aéronautiques (cône de rentrée, tuyères, etc.).

b) Tissus multidirectionnels

Des tissages volumiques sont également utilisés. Ils se caractérisent par le nombre de directions de tissage 3D et 4D. La structure la plus simple est celle du tissage 3D où les fils sont disposés suivant trois directions orthogonales.

I.4 Classification des matériaux composites

La distinction entre les différents types de composites peut se faire selon les critères suivants :

I.4.1 Classification selon la forme des constituants

a) Composites à fibres

La matière renforçante se présente sous forme de fibres longues, courtes ou coupées, dont l'arrangement et l'orientation déterminent les propriétés mécaniques du matériau permettant une conception adaptée à l'application (conception à la carte) en agissant sur :

• La nature des constituants.

• La proportion de chaque constituant.

• L'orientation des fibres.

b) Composites à particules

Dans ce cas le renfort se présente sous forme de particules, qui sont utilisées pour l'amélioration de certaines propriétés mécaniques et physiques de la matrice (rigidité, tenue à la température, résistance à l'abrasion...) ou simplement pour diminuer le coût de production du matériau sans altérer ses caractéristiques.

I.4.2 Classification selon la nature des constituants

Selon la nature de la matrice et du renfort on rencontre plusieurs combinaisons possibles :

a) Composites à matrice organique

- résines et charges associées à :

• Des fibres minérales : verre, carbone, etc.

• Des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc.

• Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

b) Composites à matrice métallique

Métaux légers et leurs alliages associés à :

• Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC).

• Des fibres métalliques : bore.

• Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de SiC.

c) Composites à matrice minérale

- céramiques associées à :

• Des fibres métalliques : bore ;

• Des particules métalliques : cermets ;

• Des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

I.4.3 Classification suivant performance et diffusion

a) Les composites grandes diffusions

De caractéristiques moyennes, ils sont orientés vers l'optimisation des couts. Ils représentent 95% des composites utilisés et ont un domaine d'application très large : capotage, conserveries, décoration, etc.

b) Les composites hautes performances

Ils sont orientés vers l'optimisation des caractéristiques mécaniques et thermiques tout en diminuant le poids au maximum. Leurs coûts sont très élevés, ils sont réservés aux applications de pointe tel que l'aéronautique et l'espace, l'armement, le sport de haut niveau, etc.

I.5 Les matériaux composites structuraux

I.5.1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

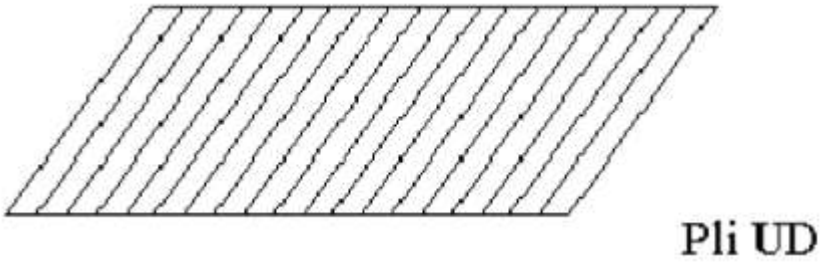


Figure I.7 *Un pli unidirectionnel*[3]

I.5.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

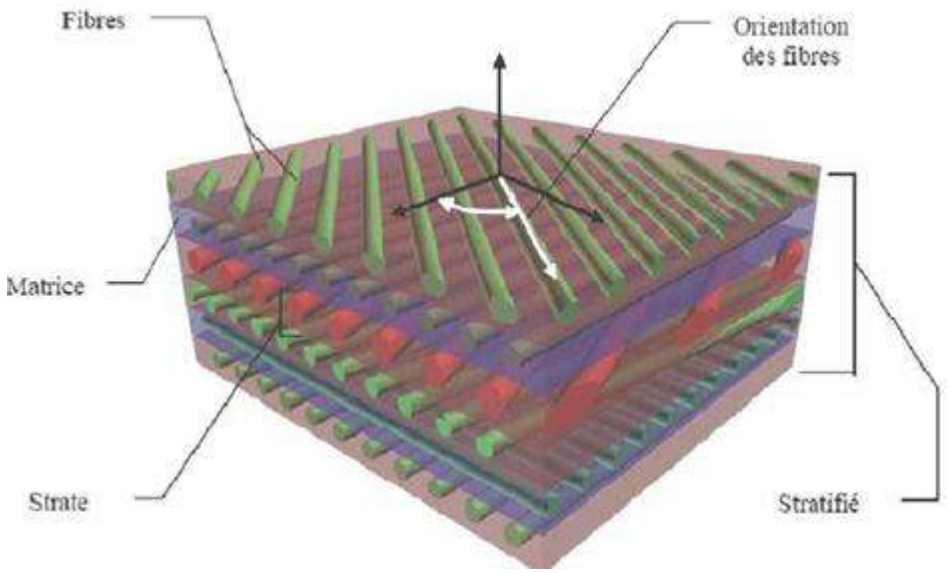


Figure I.8 *Nomenclature des stratifiés composites*

L'avantage que présentent les composites stratifies est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

I.5.3 Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité (Fortes caractéristiques mécaniques) et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance (Faibles caractéristiques mécaniques). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté.

Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et une excellente isolation thermique.

Propriétés :

- Une grande légèreté
- Excellentes rigidités tenue au feu mauvaise isolation acoustique
- Risque de flambement plus élevés
- N'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes.

Matériaux constitutifs

- Peaux : métal, stratifiés, contre-plaqués, thermoplastiques, amiante / ciment
- Ames : matériaux expansés, balsa, Nid d'abeilles aluminium ou carton imprégné, pontages, plaques nervurées en métal ou stratifié, etc.
- Assemblage des peaux avec l'âme : collage, soudure ou en cours de polymérisation pour les sandwiches en composites dans un moule.

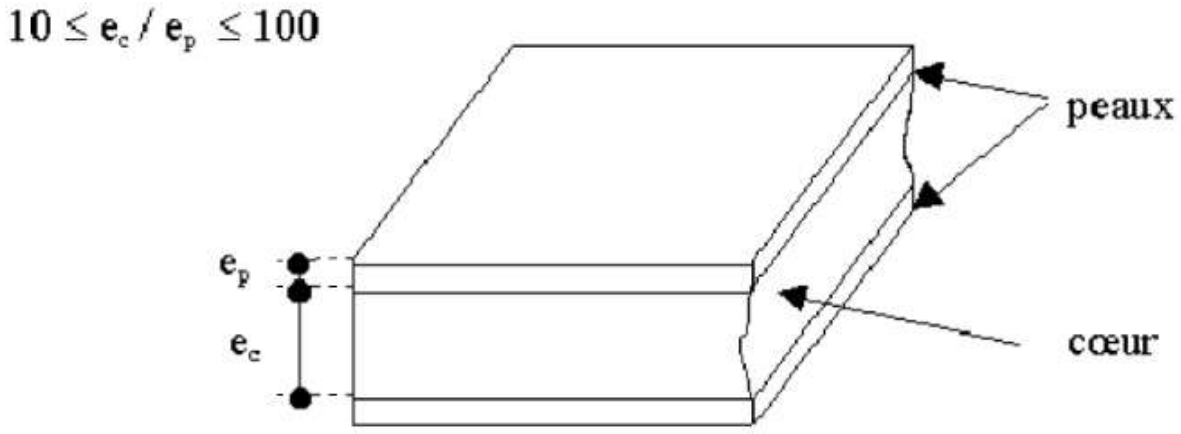


Figure I.9 *Les constituants des sandwichs*[3].

I.6 But d'utilisation des matériaux composite

Le développement des matériaux composites est lié à leurs caractéristiques : qui peut présent:

I.6.1 Des avantages

•**Facilité de mise en forme :** le matériau durcit et prend un aspect de surface définitif alors qu'il est positionne sur le moule.

Il est ainsi possible de réaliser en une seule opération des formes qui auraient nécessite plusieurs étapes en utilisant d'autres matériaux (exemple : découpe, formage, soudure, polissage pour des tôles métalliques). La réalisation de pièces par moulage au contact nécessite un matériel d'application peu onéreux.

La réalisation des moules pour ce procédé est également simple et permet donc une grande liberté dans la création des formes qui est notamment mise en œuvre dans les applications liées a la carrosserie (voitures, camions, bateaux, ferroviaire, …).

•**Légèreté :** pour des propriétés mécaniques équivalentes, l'utilisation de matériau composite à la place de métaux permet un gain de poids de près de 50 %. Cette propriété est notamment mise à profit dans le secteur automobile.

•**Adaptabilité :** les caractéristiques mécaniques du composite peuvent être ajustées enjouant globalement sur le taux de fibres mais aussi localement en adaptant la quantité et le positionnement des fibres dans des zones soumises à de plus fortes contraintes mécaniques.

•**Résistance à la corrosion ou à l'oxydation :** à cause de leur composition chimique à base de résine organique, les composites sont peu sensibles à la corrosion et sont très résistants aux attaques chimiques. Cette caractéristique leur donne un avantage important par rapport aux métaux pour la réalisation de réservoirs et d'équipements destinés à un usage extérieur ou en zone humide.

•**Isolation électrique et thermique :** le bon niveau d'isolation que procurent les matériaux composites pourrait conduire à une utilisation plus importante dans le bâtiment.

Toutefois, leur emploi massif est freiné à cause de coûts élevés par rapport aux matériaux de construction traditionnels.

Les composites présentent également quelques inconvénients qui limitent leurs applications:

• la tenue en température et au feu est limitée,

• les résines dégagent des vapeurs de solvant notamment en phase de fabrication,

• la fin de vie de matériaux composés d'un mélange quasi indissociable de résine organique et de fibres de verre pose des problèmes de recyclage. Il faut noter par ailleurs que les résines courantes sont fabriquées à partir de dérivés du pétrole et consomment donc une matière non renouvelable,

• les caractéristiques mécaniques dépendent du positionnement des fibres et ne sont donc pas homogènes dans toutes les directions,

• les composites sont difficilement usinables avec précision.

I.6.2. Les inconvénients

Bien que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

• **Coût**

Les matériaux composites hauts performances ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale où le coût élevé peut être toléré en échange de matériaux plus performants. Par conséquent, le transfert de la technologie des composites aux produits de grande consommation est lent, à quelques exceptions comme les équipements de sports où la performance prime également sur le coût.

• **Conception et analyse**

Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux conventionnels.

Elles nécessitent de nouvelles approches, généralement plus compliquées, pour la conception et l'analyse des structures.

L'hétérogénéité impose l'analyse selon au moins deux points de vue. La micromécanique examine l'interaction des constituants à l'échelle microscopique. La macro-mécanique suppose que le composite est homogène et s'intéresse aux propriétés apparentes du matériau.

Les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation (les lois de comportement). Ces propriétés sont déterminées selon les directions principales du pli élémentaire (directions parallèle et perpendiculaire à l'orientation des fibres).

Pour les stratifies composites, les rigidités sont déterminées a l'aide de la théorie classique des stratifiés. La rupture des stratifiés composites se produit de plusieurs façons très complexes. Il est donc difficile d'établir une théorie de résistance qui tienne compte de tous les modes de rupture et de leurs interactions. Par conséquent, la détermination des résistances est plus compliquée et nécessite des vérifications expérimentales. De plus, la résistance d'un stratifie peut être influencée par les contraintes interlaminaires au voisinage des bords libres. La séquence d'empilement du stratifie doit être soigneusement déterminée afin de minimiser ces contraintes.

• **Assemblage**

Les matériaux composites sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, la redistribution des contraintes autour des sites de concentration tel que le trou est moins efficace. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne peuvent pas toujours être entièrement transférés par un joint. Le trou est donc souvent renforce par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié dans la partie trouée. De tels renforcements entraînent du poids supplémentaire pour la structure. Le problème d'assemblage est donc critique pour le succès de l'emploi des matériaux composites

• **Tolérance aux dommages**

Un des points faibles les plus importants des matériaux composites est la tolérance aux dommages. Des dommages de diverses natures peuvent se produire dans la vie d'une structure, par exemple l'impact, soit en service ou pendant la maintenance, est inévitable.

En règle générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer l'impact car la fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont

tendance de se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement.

Les dommages sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages diminue considérablement la résistance en compression de la pièce endommagée. Les dommages des fibres diminuent la résistance en compression ainsi qu'en traction. Les outils pour évaluer la tolérance aux dommages des structures sont le programme d'inspection, l'analyse de la résistance résiduelle, et l'analyse de la propagation des dommages.

I.6.3 Applications des matériaux composites

Les composites à fibres présentent des caractéristiques particulièrement intéressantes pour l'industrie. Ils à conservent d'excellentes propriétés mécaniques à haute température, c'est pourquoi on les utilise notamment dans des aubes de compresseur pour étages chauds de réacteurs. À l'avenir, ce type de composite pourrait remplacer le titane dans le fuselage et les ailes des avions supersoniques. À très haute température, on préfère les composites à matrice et à fibres de carbone, en particulier dans les nez de fusées intercontinentales. Mais les composites à fibres les plus employés restent les composites à matrice organique, qui possèdent une souplesse d'élaboration et de réparation, ainsi qu'une excellente isolation thermique. Ils sont utilisés à température ambiante en aéronautique, en médecine comme prothèses, ou dans la fabrication d'articles de sport (raquettes de tennis, skis). Les propriétés des composites à fibres sont remarquables, mais souvent anisotropes.

Autrement dit, le matériau ne présente pas les mêmes propriétés selon les directions de l'espace. En outre, tous les matériaux composites sont délicats a mettre en œuvre, et donc coûteux. L'avenir de ces matériaux dépendra donc du développement de leurs techniques de fabrication.

- **Industrie aérospatiale**

Au début des années 1960, une évaluation de l'impact de la fibre de bore et ses matériaux composites a été effectuée par l'armée de l'air des Etats-Unis. Un stratifié unidirectionnel de fibres de bore a été estime avoir une rigidité supérieure a celle de l'acier pour seulement un quart de la masse. Cela a provoqué une fameuse prévision que les immeubles construits avec un tel matériau pourraient être cinq fois plus hauts et la travée des ponts cinq fois plus Longues. Bien que cette prévision a lancé les matériaux composites dans des applications aéronautiques sérieuses. Une nouvelle classe de composites appelée les composites hautes

performances (advanced composites), basée sur les fibres de bore et subséquemment les fibres de carbone, a été en développement intensif depuis.

Les composites à « haute performance » sont les composites à fibres très résistantes et très rigides comme le bore et le carbone. Les composites carbone/époxy ont connu une grande réputation dans cette classe. Tandis que les fibres de verre sont également très résistantes, leur rigidité n'est pas suffisamment élevée pour l'usage des structures primaires d'avions.

La première utilisation majeure du composite bore/époxy fut l'empennage horizontal du Grumman [6]. Des lors, l'usage des éléments structuraux en composites a continué à augmenter autant en aviation militaire que civile.

- **Industrie des articles de sport et de loisir**

De par leur légèreté, leur bonne tenue à la fatigue statique' et dynamique et leur stabilité dimensionnelle, les composites sont des matériaux idéaux pour la fabrication et la conception de très nombreux d'articles de sport et de loisirs tels que les skis et les bâtons, les raquettes de tennis, les cannes à pêche et de hockey, les planches à voiles et leurs mâts, les voiliers de plaisance, les aies, les cadres de vélos, des instruments de musique, ... au lieu du bois qui ne pouvait plus taire face à la demande créée par la civilisation des loisirs, ou l'aluminium qui ne correspondait plus aux critères modernes de performance et d'endurance.

De nombreux résultats d'études confirment les hauts degrés d'amortissement des vibrations des skis sur neige qui confère au skieur le confort tout en conservant au produit ses caractéristiques essentielles. De plus, les matériaux composites permettent de concevoir des jaquettes légères, très rigides et excellentes eu langue dynamique qui confèrent au joueur une moindre sollicitation des muscles du bras et donc de moindre fatigue et plus de confort [7].

- **Industrie des transports terrestres et maritimes**

L'intégration des matériaux composites dans l'industrie de l'automobile et des transports terrestres a pu réduire substantiellement la consommation de carburant au moyen de l'économie du poids obtenu. Les applications sont très nombreuses dans le domaine des transports, même ferroviaires, avec la fabrication de nombreux éléments de carrosserie et des boucliers amortisseurs de choc placés à l'avant des motrices des T.G.V. et qui présentent des performances supérieures en matière d'absorption d'énergie.

La société LOHEAC de transports routiers a pu réduire substantiellement sa consommation de carburant grâce à l'économie du poids obtenue en remplaçant les cabines conventionnelles de ses tracteurs par de nouveaux cléments moulés en une seule pièce. Cette innovation a permis de réduire le poids de la cabine de 875 Kg. équipée en acier, a 455 Kg seulement et de présenter une plus grande solidité et une meilleure résistance aux dégâts [8].

Le saut technologique, réalisé grâce à l'introduction des matériaux composites dans la construction navale, a consacré une évolution fondamentale par rapport aux techniques de construction traditionnelle en bois. L'adoption de tels matériaux dans la construction des coques des bateaux a permis de procurer à la structure une haute résistance à l'usure et aux chocs répétés dans les vagues et aux collisions encaissées avec les corps flottants.

L'introduction des matériaux composites, tels que ceux renforcés par la fibre aramide kevlar49 associée à la fibre de verre-E conduisant à des. Propriétés mécaniques supérieures, a permis de diminuer le poids des structures de bateaux rapides (patrouilleurs, bateaux d'intervention ou de service) tout en ayant une résistance suffisante afin d'avoir pour résultat soit une augmentation de la vitesse pour une puissance donnée, soit une meilleure rentabilité pour la même vitesse ou soit l'utilisation d'une motorisation moins puissante.

I.7 Conclusion

Ce chapitre, a fait une présentation des notions liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et ses caractéristiques mécaniques.

CHAPITRE II

COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX COMPOSITES

II.1 Comportement Macroscopique des monocouches

II.1.1 Introduction

Une monocouche est une couche mince d'un matériau composite dont l'épaisseur est généralement de l'ordre de 0.125mm. Un stratifie est constitue par l'empilement d'un nombre de couches superposées suivant la direction de l'épaisseur. Les structures mécaniques en stratifiés sont généralement exposées à une variété de charges extérieures telle que la flexion, la torsion….La conception et l'analyse d'une telle structure nécessite la connaissance des contraintes et des déformations [9].

II.1.2 Quelques définitions de base

- ***Contraintes***

Une contrainte est une force par unité de surface. Soit un corps solide en équilibre sous l'effet d'un chargement extérieur quelconque. Si l'on découpe le corps suivant sa section transversale, des forces internes apparaissent. Ces forces assurent la liaison entre les molécules du corps solide [10]. (figure II.1)

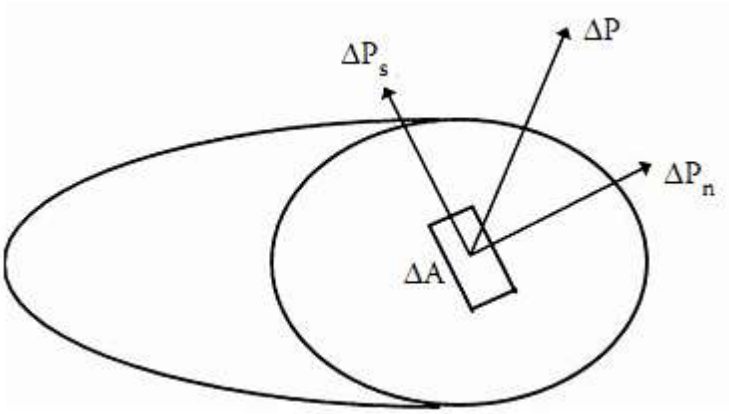


Figure II.1 *Effort sur une section infinitésimale sur le repère arbitraire*[3].

Soit ΔP une force élémentaire agissant sur une surface élémentaire ΔA.

ΔP peut être décomposée en deux composantes, l'une Δ normale au plan de la section, la deuxième ΔP_s tangente.

Les contraintes associées à ces vecteurs forces sont les suivantes :

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta A}$$

(II.1)

$$\tau_s = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_s}{\Delta A}$$

Où σ_n est appelée contrainte normale et τ_s contrainte tangentielle.

De la même manière, ces contraintes peuvent être définies dans les plans *xz* et *yz*. On obtient ainsi :

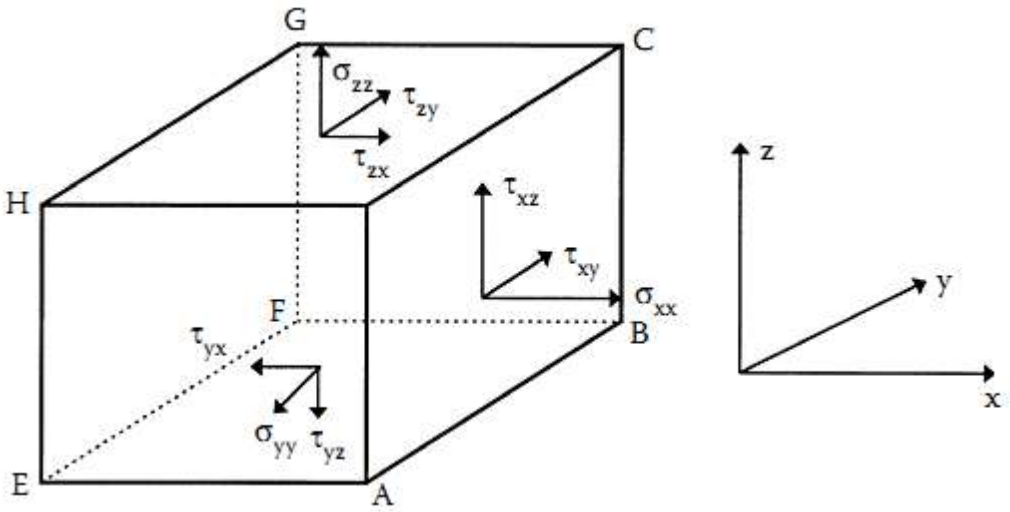


Figure II.2 *Effort sur un cuboïde infinitésimal*[3].

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \text{(II.2)}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

La contrainte d'extension est positive, la contrainte de compression est négative. Par contre, la contrainte de cisaillement est positive si sa direction et la direction de la contrainte normale sont positives ou négatives en même temps, elle est négative dans le cas contraire.

- ***Déformations***

Les déformations expriment le changement relatif des dimensions et de la forme des corps solides sous l'effet des forces externes.

Soit ABCD la facette d'un parallélépipède élémentaire du corps solide suivant le plan *x y*. Sous l'effet des forces externes, les dimensions de la facette se modifient et les côtés se distordent. Le changement des dimensions correspond aux contraintes normales, alors que la distorsion correspond aux contraintes de cisaillement.

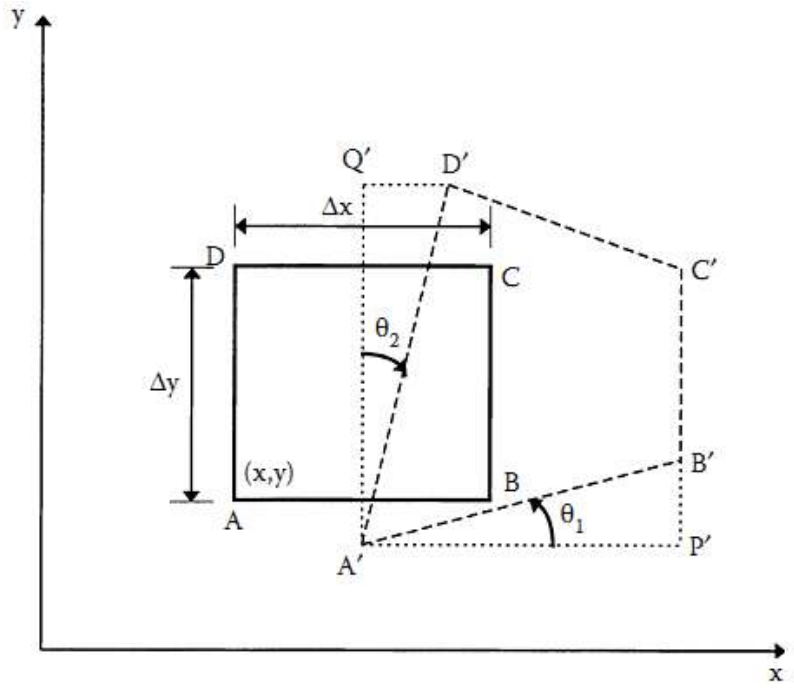


Figure II.3 *Contraintes normale de cisaillement sur une section infinitésimale dans le repère (x-y)*[3].

On définit le déplacement d'un point (*x*,*y*,*z*) par les paramètres suivants :

$u = u(x, y, z)$ Le déplacement suivant *x*

$v = v(x, y, z)$ Le déplacement suivant *y*

$w = w(x, y, z)$ Le déplacement suivant *z*

La déformation normale suivant la direction *x* est définie comme suit :

$$\varepsilon_x = \lim_{AB \to 0} \frac{A'B' - AB}{AB} \qquad \text{(II. 3)}$$

Où :

$$A'B' = \sqrt{(A'P')^2 + (P'B')^2} \qquad \text{(II. 4)}$$

$$A'B' = \sqrt{[\Delta x + u(x+\Delta x, y) - u(x,y)]^2 + [v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]^2} \qquad \text{(II. 5)}$$

$$AB = \Delta x \qquad \text{(II. 6)}$$

On remplace dans l'expression de ε_x. On obtient :

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \left[1 + \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} \right]^2 + \left[\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right]^2 \right\}^{1/2} - 1 \qquad \text{(II. 7)}$$

En utilisant les règles de différentiation, on obtient

$$\varepsilon_x = \left\{ \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right\}^{1/2} - 1 \qquad \text{(II. 8)}$$

Ou bien :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(II. 9)}$$

Pour la déformation suivant *y*,

$$\varepsilon_y = \lim_{AD \to 0} \frac{A'D' - AD}{AD} \qquad \text{(II. 10)}$$

$$A'D' = \sqrt{(A'Q')^2 + (Q'D')^2} \qquad \text{(II. 11)}$$

$$A'D' = \sqrt{[\Delta y + v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]^2 + [u(x, y+\Delta y) - u(x,y)]^2} \qquad \text{(II. 12)}$$

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \left[1 + \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} \right]^2 + \left[\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right]^2 \right\}^{1/2} - 1 \qquad \text{(II. 13)}$$

On obtient : $\varepsilon_y = \left[\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \qquad \text{(II. 14)}$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{(II. 15)}$$

La déformation due au cisaillement dans le plan *xy* est donnée par l'addition des deux angles θ_1 et θ_2.

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2 \qquad \text{(II. 16)}$$

Soit pour θ_1 :

$$\theta_1 = \lim_{AB \to 0} \frac{P'B'}{A'P'} \qquad \text{(II. 17)}$$

$$P'B' = v(x + \Delta x, y) - v(x, y) \qquad \text{(II. 18)}$$

$$A'P' = u(x + \Delta x, y) + \Delta x - u(x, y) \qquad \text{(II. 19)}$$

Pour θ_2 :

$$\theta_2 = \lim_{AD \to 0} \frac{Q'D'}{A'Q'} \qquad \text{(II. 20)}$$

$$Q'D' = u(x, y + \Delta y) - u(x, y) \qquad \text{(II. 21)}$$

$$A'Q' = v(x, y + \Delta y) + \Delta y - v(x, y) \text{(II. 22)}$$

On remplace dans l'expression de la déformation :

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}}{\frac{u(x+\Delta x,y)+\Delta x-u(x,y)}{\Delta x}} + \frac{\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}}{\frac{v(x,y+\Delta y)+\Delta y-v(x,y)}{\Delta y}}$$

$$= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Pour les autres composantes :

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

- ***Modules d'élasticité***

Pour un matériau isotrope, la relation contrainte – déformation (loi de Hooke) dans le repère (*x,y,z*) s'exprime par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.23)}$$

Où ν est le coefficient de poisson et G le module de cisaillement. G est lié à E par la relation :

$$\boldsymbol{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \qquad \text{(II. 24)}$$

La matrice dans l'équation précédente est appelée matrice de rigidité, son inverse est appelée matrice de flexibilité :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{(II.25)}$$

- ***Energie de déformation***

Dans un solide déformable, élastique, sous chargement, le travail effectué par les forces externes est emmagasine sous forme d'énergie de déformation.

L'énergie de déformation emmagasinée dans le corps par unité de volume est donnée par :

$$W = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) \quad \text{(II. 26)}$$

II.1.3 Loi de Hooke généralisée

Un matériau composite peut avoir un comportement linéaire élastique, mais il ne peut pas être toujours isotrope. Ainsi, son comportement est géré par la loi de Hooke dont le nombre de constantes de rigidité est très élevés et peut arriver à 21 constantes [10].

La forme générale de la loi de Hooke s'écrit donc comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{(II.27)}$$

Avec :

$$C_{ij} = C_{ji}$$

II.1.3.1 Matériaux anisotropes (tricliniques)

Lorsque le matériau est quelconque et ne présente pas de symétrie élastique, il est dit anisotrope. Un matériau anisotrope est caractérisé par 21 constantes élastiques indépendantes. C'est la relation de comportement décrite précédemment qui lie les contraintes aux déformations [10].

II.1.3.2 Matériaux monocliniques

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie matériel. Dans ce cas, la matrice de rigidité est définie par 13 constantes élastiques et prend la forme suivante [10] :

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{(II.28)}$$

II.1.3.3 Matériaux orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. La matrice de rigidité est définie par neuf constantes élastiques :

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{(II.29)}$$

II.1.3.4 Matériau unidirectionnel (isotrope transverse)

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad \text{(II.30)}$$

Cette matrice est définie par cinq constantes d'élasticité

II.1.3.5 Matériau isotrope

Un matériau isotrope est un matériau qui possède une infinité de plans de symétrie.

Le nombre des constantes élastiques dans la matrice de rigidité se réduit à 2.

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{(II.31)}$$

II.1.4 Loi de Hooke pour un composite unidirectionnel

Un composite unidirectionnel est constitué de fibres parallèles disposées dans une matrice. Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'ou l'importance de son étude.

La cellule élémentaire d'un tel matériau peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice a base circulaire, cette cellule possède un axe de révolution note généralement l'axe 1 (ou L). Cette direction parallèle aux fibres est appelée direction longitudinale, toute direction normale aux fibres est appelée direction transversale et le composite est considéré comme étant isotrope transverse, le plan transverse est repère par la direction 2 et 3 (note également T et T').

II.1.4.1 Hypothèse de contraintes planes

Un état est un état de contraintes planes en un point si et seulement si l'une des contraintes principales est nulle.

Un unidirectionnel peut être considéré comme étant une plaque mince, si cette plaque n'est pas chargée hors son plan (tangentiellement et normalement), alors nous allons affaire à un état de contraintes planes. Dans ce cas, les contraintes σ_1, τ_{13} et τ_{23} sont nulles et le problème devient bidimensionnel [10].

II.1.4.2 Forme bidimensionnelle de la loi de Hooke

Un unidirectionnel est un matériau qui présente un comportement orthotrope de révolution (isotrope transverse). Dans le cas général, le nombre de constantes élastiques est cinq, ce nombre se réduit à quatre lorsque les hypothèses de contraintes planes sont utilisées. Dans ce cas la relation déformations-contraintes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \tag{II.32}$$

Les S_{ij} sont les coefficients de souplesse.

La relation contraintes-déformations s'obtient par inversion de la relation précédente, soit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{II.33}$$

Les Q_{ij} sont les coefficients de rigidité réduite, relies aux coefficients de souplesse S_{ij} par les expressions suivantes :

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \;;\; Q_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \;;\; Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \;;\; Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

II.1.4.3 Expressions de [Q] et [S] en fonction des modules de l'ingénieur

Dans un composite unidirectionnel, les modules de l'ingénieur sont définies comme suit :

- E_1 : module de Young dans la direction longitudinale (Direction 1).

- E_2 : module de Young dans la direction transversale (Direction 2).

- ν_{12} : coefficient de poisson, rapport entre la déformation dans la direction 2 et la déformation dans la direction 1.

- G_{12} : module de cisaillement dans le plan 1-2.

Considérons la relation déformations-contraintes en fonction des constantes S_{ij}.

Appliquons une traction pure suivant la direction 1 sur l'élément de référence représente par la figure a [11]. Dans ce cas : $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0 \; et \; \tau_{12} = 0$

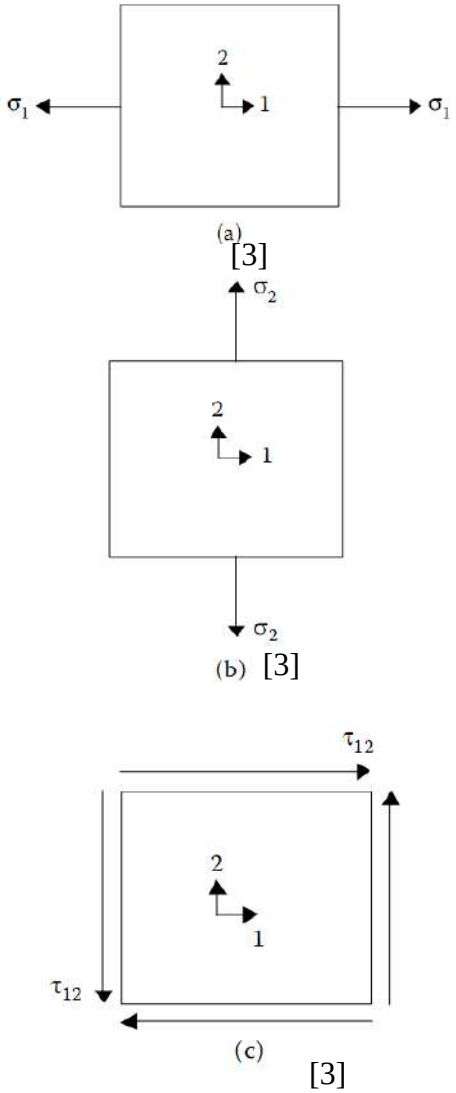


Figure II.4 *Application de l'effort pour trouver la constante de technologie d'une couche continu.*

On peut donc écrire :

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1,$$
$$\varepsilon_2 = S_{12}\sigma_1,$$
$$\gamma_{12} = 0$$

Par définition, la contrainte de tension dans la direction 1 d'après la loi de Hooke est :

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{S_{11}}$$

Le coefficient de poisson est :

$$v_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}$$

D'ou :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} S_{12} = -\frac{v_{12}}{E_1}$$

De même, si on applique une tension pure dans la direction 2, on aura : $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0 \; et \; \tau_{12} = 0$Dans ce cas, on peut écrire :

$$\varepsilon_1 = S_{12}\sigma_2,$$
$$\varepsilon_2 = S_{22}\sigma_2,$$
$$\gamma_{12} = 0$$

Et :

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{S_{22}}, \quad v_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}$$

On obtient :

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}, \qquad \frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2}$$

Appliquons maintenant un cisaillement pur dans le plan 1-2, dans ce cas : $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0 \; et \; \tau_{12} \neq 0$les déformations correspondantes sont donc :

$$\varepsilon_1 = 0$$
$$\varepsilon_2 = 0$$
$$\gamma_{12} = S_{66}\tau_{12}$$

Par définition :

$$G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{1}{S_{66}}$$

On obtient finalement :

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Les coefficients de la matrice de rigidité réduite Q_{ij} sont exprimés comme suit :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{21}v_{12}} \;;\; Q_{12} = \frac{v_{12}E_1}{1 - v_{21}v_{12}} \;;\; Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{21}v_{12}} \;;\; Q_{66} = G_{12}$$

II.1.5 Loi de Hooke pour un composite unidirectionnel en d'hors de ses axes principaux

Les stratifiés sont élaborés par couches successives dont la direction des fibres est décalée d'une couche a l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifies, il est nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble de stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

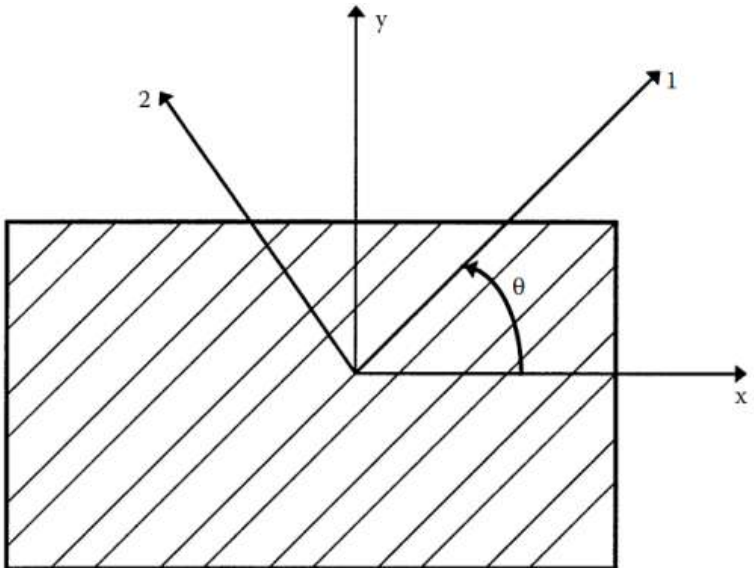


Figure II.5 *Les axes globales et locale d'un angle de stratifie*[3].

Dans un pli unidirectionnel, les systèmes de référence utilisés sont notés (1,2,3) pour le système local et (*x*,*y*,*z*) pour le système global. Dans le système local, l'axe 1 coïncide avec la direction longitudinale des fibres, l'axe *x* du système global est décalé d'un angle θ de l'axe 1.

Les contraintes dans le système global sont reliées aux celles exprimées dans le système local par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \tag{II.34}$$

Où [T] est appelée matrice de changement de base, exprimée comme suit :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{II.35}$$

Et :

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{II.36}$$

Avec :

$$c = Cos(\theta), \qquad s = Sin(\theta).$$

Tenons comptes de la relation contraintes-déformations dans le repère local, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1}[Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{II.37}$$

De même, les déformations dans le repère local en fonction de celles exprimées dans le repère global s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \tag{II.38}$$

Ou bien :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{II.39}$$

Avec :

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{II.40}$$

On remplace, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{II.41}$$

Finalement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{II.42}$$

Les $\bar{Q}_{ij}$ sont les coefficients de la matrice de rigidité réduite exprimées dans le repère global :

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(c^4 + s^4)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

En inversant la relation contraintes déformations, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{II.43}$$

Où les coefficients $\bar{S}_{ij}$ de la matrice de souplesse sont exprimés comme suit :

$$\bar{S}_{11} = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$$

$$\bar{S}_{12} = S_{12}(c^4 + s^4) + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11}s^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}c^4$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - s_{66})s^3c$$

$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})s^3c - (2S_{22} - 2S_{12} - s_{66})sc^3$$

$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2s_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4)$$

II.2 Comportement Microscopique des monocouches

II.2.1 Introduction

Les modules de l'ingénieur d'un unidirectionnel peuvent être déterminés expérimentalement a l'aide des essais mécaniques tels les essais de traction, de flexion, de cisaillement… Cependant, contrairement aux matériaux métalliques, la détermination expérimentale de ces modules pour un composite est très couteuse, car elle dépend de plusieurs paramètres ; fractions volumiques des éléments constituants, l'architecture du composite, la méthode de son élaboration... . Le recours aux méthodes numériques est donc une nécessite qui s'impose comme l'outil préféré pour la détermination de ces modules [11].

II.2.2 Fractions volumiques et massiques, masse volumiques

a. Fractions volumiques

On considère la notation suivante :

$v_{c,f,m}$: Volume, respectivement du composite, des fibres et de la matrice.

$\rho_{c,f,m}$: Masse volumique, respectivement du composite, des fibres et de la matrice.

La fraction volumique des fibres exprime le rapport entre le volume des fibres dans le composite et le volume du composite, elle est définie comme suit:

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \qquad \text{(II. 43. a)}$$

La fraction volumique de la matrice est définie par le rapport entre le volume de la matrice dans le composite et le volume du composite :

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} \qquad \text{(II. 43. b)}$$

Il faut noter que la somme des fractions volumiques est égale à 1 :

$$V_f + V_m = 1$$

Et :

$$v_f + v_m = v_c$$

b. Fractions massiques

On désigne par$M_{c,f,m}$, la masse, respectivement du composite, des fibres et de la matrice. Les fractions massiques des fibres W_f et de la matrice W_m sont respectivement définies comme suit :

$$W_f = \frac{M_f}{M_c} \quad \text{et} \quad W_m = \frac{M_m}{M_c} \qquad \text{(II.44)}$$

Avec :

$$W_f + W_m = 1$$

Ou en fonction des fractions volumiques, nous avons :

$$M_f + M_m = M_c$$

Et :

$$M_c = v_c.\rho_c \ ; \quad M_f = v_f.\rho_f \ ; \ M_m = v_m.\rho_m \qquad \text{(II.45)}$$

Si on remplace (II.45) dans (II.44), nous obtiendrons :

$$W_f = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f \qquad \text{et} \qquad W_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m \qquad \text{(II.46)}$$

c. Masses Volumiques

Nous savons que :

$$M_c = M_f + M_m$$

Tenons compte des relations (II.44), on peut écrire :

$$v_c.\rho_c = v_f.\rho_f + v_m.\rho_m$$

On obtient :

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \qquad \text{(II.47)}$$

La masse volumique du composite peut aussi être exprimée en fonction des fractions massiques comme suit :

Comme $v_c = v_f + v_m$ et

$$\frac{M_c}{\rho_c} = \frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m}$$

Alors :

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{W_f}{\rho_f} + \frac{W_m}{\rho_m} \qquad \text{(II.48)}$$

II.2.3 Modules d'élasticité

Dans un composite unidirectionnel, et lorsque les hypothèses de contraintes planes, le nombre de constantes élastiques se réduit à quatre :

- E_1 : Module d'Young longitudinal
- E_2 : Module d'Young transversal
- G_{12} : Module de cisaillement longitudinal
- v_{12} : Coefficient de Poisson longitudinal

a. Modèle géométrique

On considère un volume élémentaire en forme de bloc rectangulaire composé d'une seule fibre entourée d'une matrice, les dimensions du bloc sont $L_c \times t_c \times h$.

Afin de simplifier les calculs, la géométrie de la fibre et de la matrice est réduit en forme de bloc rectangulaire, où $L_c \times t_f \times h$ sont les dimensions de la fibre et $L_c \times t_m \times h$ sont les dimensions de la matrice[10][11].

Dans ce cas, la surface de la fibre est :

$$A_f = t_f h$$

Celle de la matrice est :

$$A_m = t_m h$$

Les fractions volumiques, respectivement des fibres et de la matrice exprimées en terme de surface s'écrivent donc :

$$V_f = \frac{A_f}{A_c} = \frac{t_f}{t_c} \quad ; \quad V_m = \frac{A_m}{A_c} = \frac{t_m}{t_c} \text{(II. 49)}$$

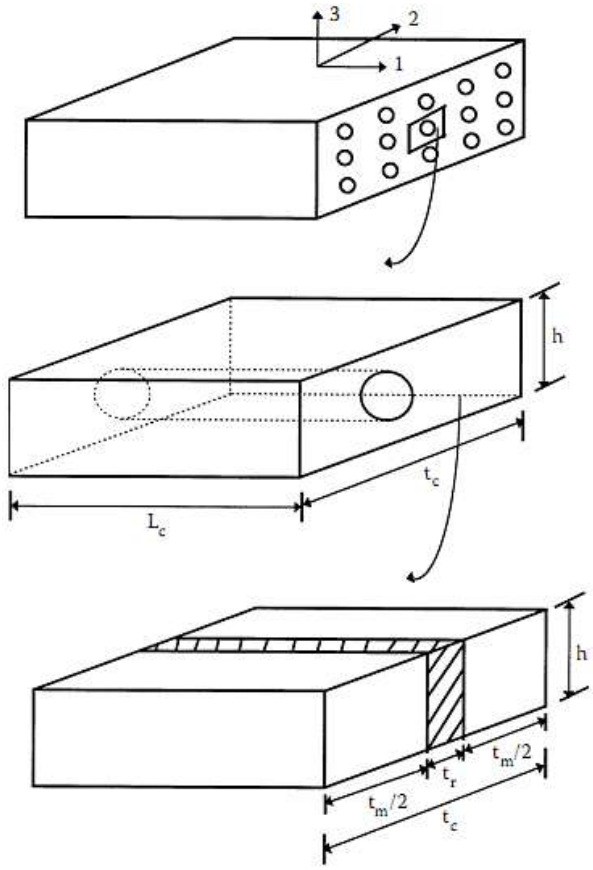


Figure II.6 *Élément représentatif de volume d'une couche continue*[3].

a. ***Module d'Young longitudinal E1***

On soumettre le bloc élémentaire a une force d'extension F_c appliquée suivant la direction longitudinale 1.

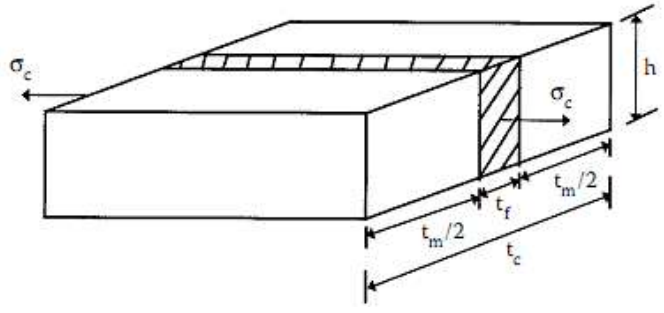


Figure II.7 *La contrainte longitudinale appliquée a l'élément de volume représentatif pour calculer le module de Young longitudinal*[3].

L'effet de la force F_c est reparti sur la fibre et la matrice comme suit :

$$F_c = F_f + F_m \qquad \text{(II.50)}$$

Où F_f et F_m sont les forces reparties respectivement dans la fibre et la matrice.

Ces forces sont exprimées en fonctions des contraintes normales comme suit :

$$F_c = A_c\sigma_c \quad ; \quad F_f = A_f\sigma_f \quad ; \quad F_m = A_m\sigma_m \qquad \text{(II.51)}$$

Où $\sigma_{c,f,m}$ sont respectivement, les contraintes normales dans le composite, la fibre et la matrice.

Par hypothèse que le composite, la fibre et la matrice obéissent à la loi de Hooke, on peut écrire :

$$\sigma_c = E_1\varepsilon_c \quad ; \quad \sigma_f = E_f\varepsilon_f \quad ; \quad \sigma_m = E_m\varepsilon_m \qquad \text{(II.52)}$$

On combinant les équations (II.50), (II.51) et (II.52), on peut écrire :

$$A_cE_1\varepsilon_c = A_fE_f\varepsilon_f + A_mE_m\varepsilon_m \qquad \text{(II.53)}$$

Les déplacements dans la fibre et la matrice sont supposés uniformes et identiques, ce qui conduit à écrire :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m \qquad \text{(II.54)}$$

On remplace (II.54) dans (II.53), et tenons compte de (II.49), on obtient :

$$E_1 = V_fE_f + V_mE_m \qquad \text{(II.55)}$$

L'équation (II.55) est appelée loi des mélanges pour le module d'Young dans la direction des fibres.

b. Module d'Young transversal *E2*

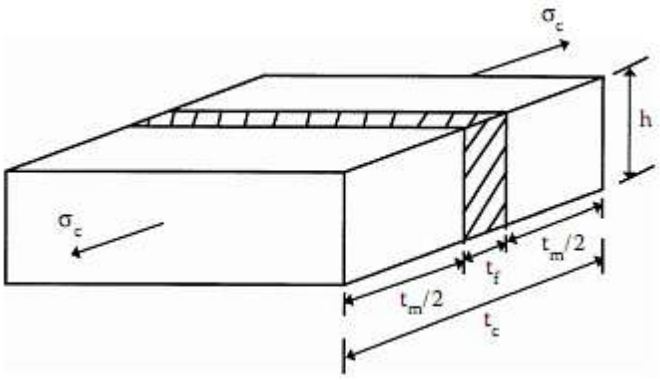


Figure II.8 *La contrainte transversale appliquée a l'élément de volume représentatif utilisé pour calculer le module de Young transversal*[3].

On soumit le bloc élémentaire à une charge transversale, le matériau est supposé continu, dans ce cas :

$$\sigma_c = \sigma_f = \sigma_m$$

Le déplacement transversal du composite Δ_c, est égal au déplacement effectué par la fibre Δ_f, ajouté au déplacement de la matrice Δ_m :

$$\Delta_c = \Delta_f + \Delta_m \qquad (II.56)$$

En termes de déformations transversales, nous pouvons écrire :

$$\Delta_c = t_c \varepsilon_c \quad , \quad \Delta_f = t_f \varepsilon_f \quad , \quad \Delta_m = t_m \varepsilon_m \qquad (II.57)$$

Appliquons la loi de Hooke sur le composite, la fibre et la matrice, les déformations transversales s'écrivent :

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_2} \quad , \quad \varepsilon_f = \frac{\sigma_c}{E_f} \quad , \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m} \qquad (II.58)$$

On remplace (II.57) et (II.58) dans (II.56), on obtient :

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_f}\frac{t_f}{t_c} + \frac{1}{E_m}\frac{t_m}{t_c} \qquad (II.59)$$

En fonction des fractions volumiques, l'équation (II.59) devient :

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \qquad \text{(II. 60)}$$

c. Coefficient de Poisson Majeur v_{12}

C'est le rapport entre les déformations transversales et les déformations longitudinales, dans le cas où le chargement est appliqué suivant la direction longitudinale.

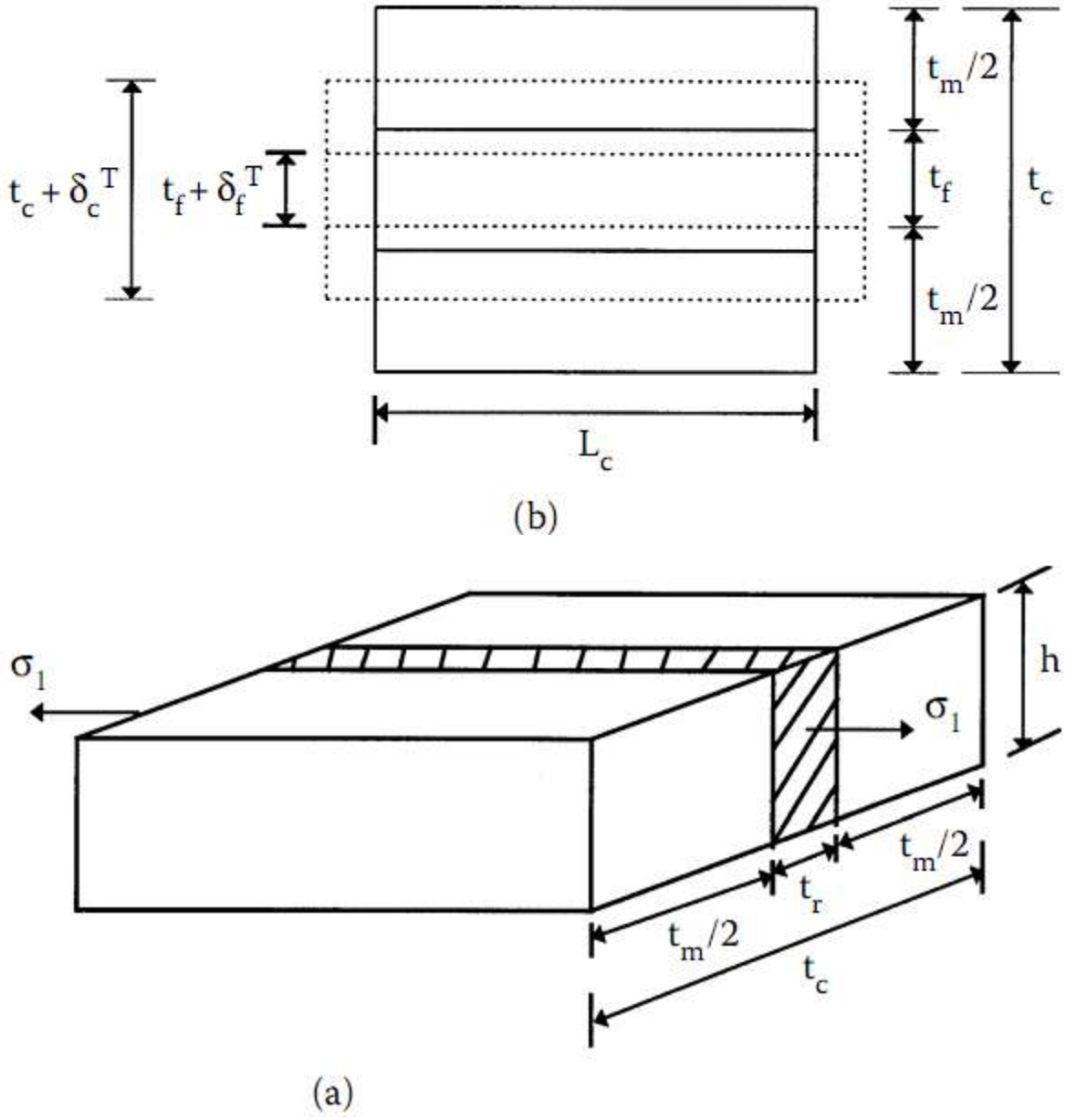


Figure II.9 *La contrainte longitudinale appliquée à un élément de volume représentatif pour calculer le coefficient de Poison*[3].

Si le bloc élémentaire est chargé suivant la direction longitudinale des fibres, le déplacement transversale du compositeδ_C^T, est la somme des déplacements de la fibre δ_f^T et de la matriceδ_m^T.

$$\delta_c^T = \delta_f^T + \delta_m^T \qquad \text{(II. 61)}$$

Ou, les déformations dans le composite, la fibre est la matrice sont définies par les expressions suivantes :

$$\varepsilon_f^T = \frac{\delta_f^T}{t_f} \quad , \quad \varepsilon_m^T = \frac{\delta_m^T}{t_m} \quad , \quad \varepsilon_c^T = \frac{\delta_c^T}{t_c} \qquad \text{(II. 62)}$$

Remplaçons l'équation (II.62) dans (II.61), nous obtenons :

$$t_c \varepsilon_c^T = t_f \varepsilon_f^T + t_m \varepsilon_m^T \qquad \text{(II. 63)}$$

D'autre part, les coefficients de Poisson, du composite, de la fibre et de la matrice peuvent être exprimés en fonctions des déformations longitudinales et transversales comme suit :

$$v_{12} = -\frac{\varepsilon_c^T}{\varepsilon_c^L} \quad , \quad v_f = -\frac{\varepsilon_f^T}{\varepsilon_f^L} \quad , \quad v_m = -\frac{\varepsilon_m^T}{\varepsilon_m^L} \qquad \text{(II. 64)}$$

On remplace (II.64) dans (II.63), on obtient :

$$-t_c v_{12} \varepsilon_c^L = -t_f v_f \varepsilon_f^L - t_m v_m \varepsilon_m^L \qquad \text{(II. 65)}$$

Or, les déformations dans la direction longitudinales sont égales :

$$\varepsilon_c^L = \varepsilon_f^L + \varepsilon_m^L \qquad \text{(II. 66)}$$

L'équation (II.65) devient donc :

$$t_c v_{12} = t_f v_f + t_m v_m \qquad \text{(II. 67)}$$

Ou sous une forme :

$$v_{12} = v_f \frac{t_f}{t_c} + v_m \frac{t_m}{t_c} \qquad \text{(II. 68)}$$

d. Module de cisaillement G_{12}

On applique une contrainte de cisaillement suivant le plan 1-2 du bloc élémentaire. Le déplacement transversal du composite δ_c dû au cisaillement est la somme des déplacements effectués par la fibre δ_f et la matrice δm.

$$\delta_c = \delta_f + \delta_m \qquad \text{(II. 69)}$$

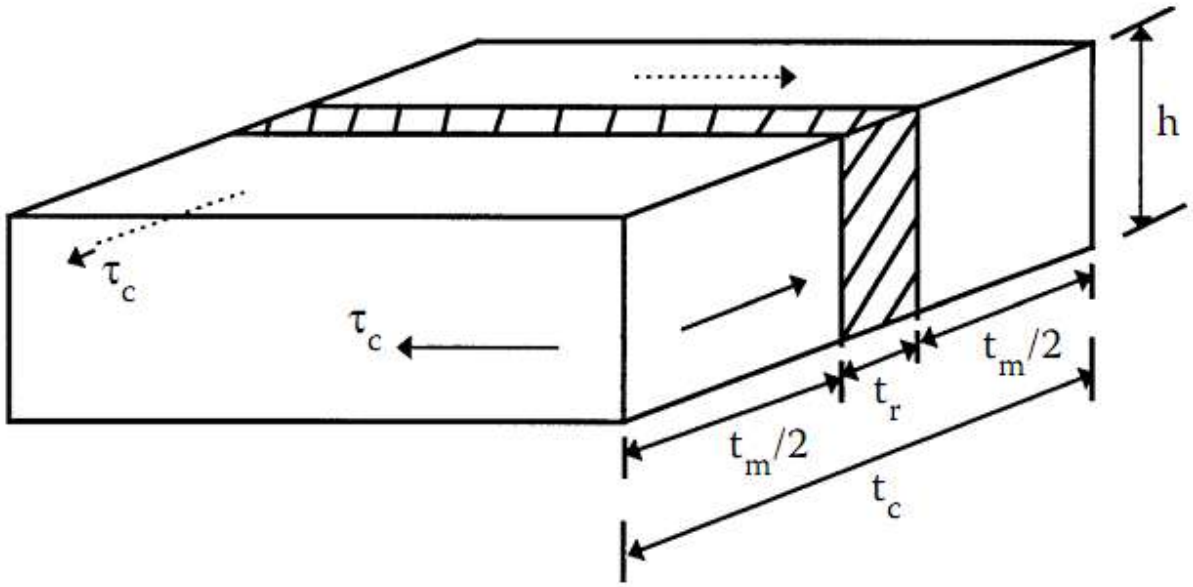


Figure II.10 *La contrainte dans le plan de cisaillement appliquée à un élément de volume représentatif pour trouver le module de cisaillement plane*[3].

Les déplacements transversaux sont définis comme suit :

$$\delta_c = \gamma_c t_c \quad , \quad \delta_f = \gamma_f t_f \quad , \quad \delta_m = \gamma_m t_m \qquad \text{(II. 70)}$$

Avec les déformations angulaires, respectivement du composite, de la fibre et de la matrice ou sous une autre forme.

$$\gamma_c = \frac{\tau_c}{G_{12}} \quad , \quad \gamma_c = \frac{\tau_f}{G_f} \quad , \quad \gamma_c = \frac{\tau_m}{G_m} \qquad \text{(II. 71)}$$

Avec les modules de cisaillement, respectivement du composite, de la fibre et de la matrice.

Tenons compte des expressions (II.69), (II.70) et (II.71), nous pouvons écrire :

$$\frac{\tau_c}{G_{12}} t_c = \frac{\tau_f}{G_f} t_f + \frac{\tau_m}{G_m} t_m \qquad (\text{II.}72)$$

Par hypothèses, Les contraintes de cisaillement étant les mêmes dans la fibre, la matrice et le composite, c-à-d :

$$\tau_c = \tau_f = \tau_m \qquad (\text{II.}73)$$

L'équation (II.72) devient :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_f}\frac{t_f}{t_c} + \frac{1}{G_m}\frac{t_m}{t_c} \qquad (\text{II.}74)$$

Ou en termes de fractions volumiques :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \qquad (\text{II.}75)$$

II.3 Comportement Mécanique des stratifiés

II.3.1 Introduction

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement les orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

II.3.2 Désignation d'un stratifie

La désignation d'un stratifie se fait depuis le pli extrême de cote z<0 jusqu'au pli extrême de côte z>0. Elle est généralement effectuée selon le code suivant :

- Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe *x* de référence.

- Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents.

- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique indiquant le nombre de couches dans cette direction.

- Si deux couches successives ont des orientations de même valeurs et de sens opposés, elles peuvent être désignées par le signe ±.

- La désignation se fait couche par couche en allant d'une face à l'autre, des crochets ou parenthèses indiquent le début et la fin du code [12].

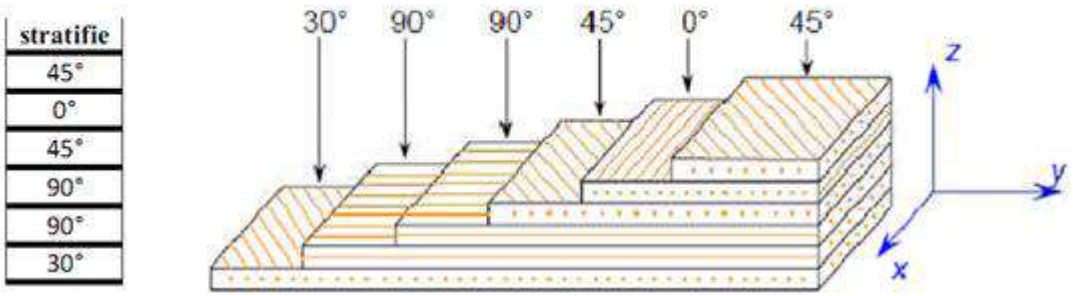


Figure II.11 *Exemple de désignation d'un stratifie*[1]

Exemples de designation

0°
30°
-30°
-45°
45°

$[\pm 45/ \mp 30/ 0]$

30°
-60°
-60°
0°
45°

$[45/ 0/-60_2/ 30]$

0°
-45°
-45°
45°
45°

$[45_2/ -45_2/ 0]$

0°
-45°
45°
45°
-45°
-45°
45°

$[\pm\mp\pm 45/ 0]$ ou $[45/ -45_2/ 45_2/ -45/ 0]$

Modes de stratification particuliers

Selon la séquence d'empilement, on rencontre des stratifiés :

- Equilibrés : le stratifié comporte autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
- Symétriques : le plan moyen du stratifié est plan de symétrie. La désignation ne nécessite que la moitié des couches successives. Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique. Si le nombre total des couches est impair la couche centrale (plan de symétrie) est surlignée.

90°
45°
45°
0°
0°
45°
45°
90°

$[90/ 45_2/ 0]_S$

90°
45°
45°
0°
45°
45°
90°

$[90/ 45_2/ \bar{0}]_S$

- Croisés : un stratifié croisé est constitué exclusivement de la séquence [0/90°] qui se répète n fois.
- Orthogonaux : ils comportent autant de couches à 0° que de couches à 90°.
- Hybrides : se sont des stratifiés composés de couches renforcées par des fibres de natures différentes.

0°	V	
45°	C	
-45°	C	
90°	C	$[0_V/ \pm 45_C/ 90_C]_S$
90°	C	
-45°	C	
45°	C	
0°	V	

0°	K	
0°	K	
45°	V	
90°	V	$[0_{2C}/(45/ \overline{90})_{SV}/0_{2K}]_S$
45°	V	
0°	C	
0°	C	

Avec : V : Verre, C : Carbone, K : Kevlar

II.3.3 Relation contraintes – déformations d'un stratifie

II.3.3.1 Hypothèses de base

La théorie classique des stratifiés est utilisée pour développer les lois du comportement des stratifiés. Cette théorie utilise un schéma du premier degré (schéma de Kirchhoff), dont les hypothèses de base sont les suivantes :

- Chaque couche est orthotrope.
- Chaque couche est homogène.
- La normale à la surface moyenne avant déformations reste droite est normale à la surface moyenne après déformations $(\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0)$.
- Le stratifié est mince et est chargé uniquement suivant son plan (contraintes planes) $(\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0)$.
- Les déplacements sont faibles par rapport aux dimensions de stratifié.
- Chaque couche est élastique.
- Pas de glissement entre les couches de stratifié.

II.3.3.2 Champ des déplacements

Le champ des déplacements d'un point quelconque $M(x,y,z)$ du stratifié est approché par un polynôme linéaire en z à coefficients en (x,y) de la forme :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \qquad \text{(II.76)}$$

Où :

u,v,w sont respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z.

u_0,v_0,w_0 sont respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z. d'un point situé sur la surface moyenne de la plaque.

θ_x, θ_y sont respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes x et y. avec :

$$\theta_x(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x}\,\theta_y(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y}$$

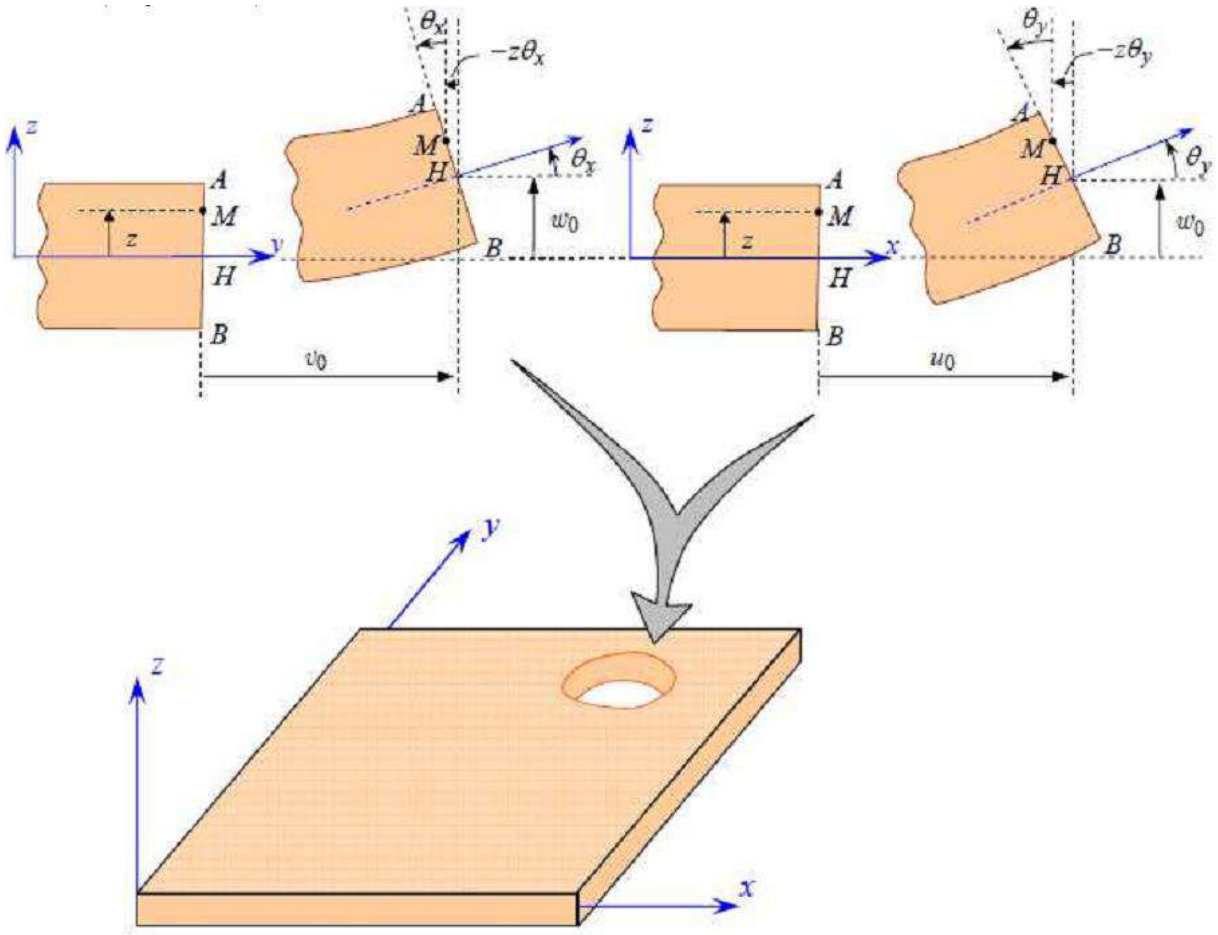


Figure II.12 *Schématisation des déformations dans le cas de la théorie Classique stratifiées*[1].

II.3.3.3 Champ des déformations

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements (II.62) et s'écrit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + zK_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + zK_y \qquad \text{(II. 77)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{xy0} + zK_{xy}$$

Avec :

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$ Les déformations en membrane

$$K_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \qquad K_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, K_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$ Les déformations en courbure

Les déformations peuvent être regroupées dans l'expression vectorielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

II.3.4 Résultantes et moments

La discontinuité des contraintes a travers l'épaisseur du stratifie conduit a exprimer la relation contrainte -déformation en termes des résultantes et moments :

Les résultantes en membrane dans la couche *k*, notées *N(x,y)*, sont définies par [10]:

$$N(x,y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz$$

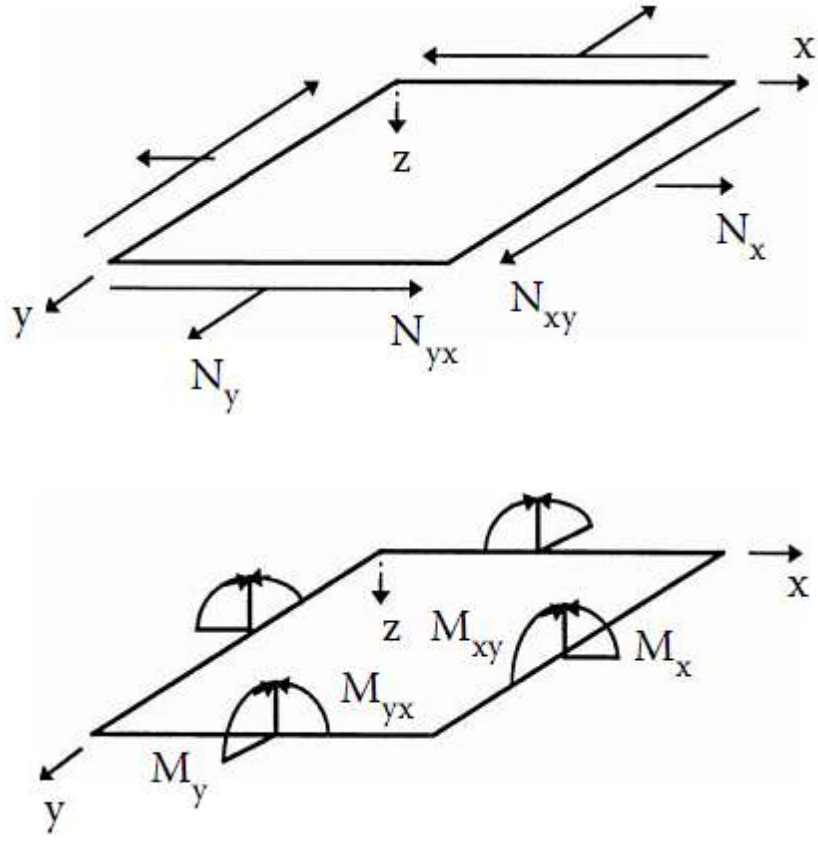


Figure II.13 *Forces et moments résultants sur un stratifié*[3].

Pour l'ensemble du stratifie, ces résultantes s'expriment comme suit :

$$N(x,y)=\begin{Bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\tau_{xy}\end{Bmatrix}_k dz \qquad \text{(II.78)}$$

N_x, N_y, N_{xy} sont les résultantes par unité de longueur, respectivement des contraintes normales et des contraintes de cisaillement dans le plan (x,y), h_k et h_{k-1}sont les cordonnées de la couche k suivant l'axe z et n le nombre de couches total.

Les moments de flexion et de torsion sont définis de la même manière par :

$$M(x,y)=\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\tau_{xy}\end{Bmatrix}_k dz \qquad \text{(II.79)}$$

II.3.5 Equation constitutive

Tenons compte de la relation contraintes-déformations pour une couche k dans le repère du stratifié (x,y,z), les résultantes en membrane et en moment peuvent s'écrire comme suit [13]:

$$\begin{bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11}&\overline{Q}_{12}&\overline{Q}_{16}\\\overline{Q}_{12}&\overline{Q}_{22}&\overline{Q}_{26}\\\overline{Q}_{16}&\overline{Q}_{26}&\overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x^0\\\varepsilon_y^0\\\gamma_{xy}^0\end{bmatrix}dz+\sum_{k=1}^{n}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11}&\overline{Q}_{12}&\overline{Q}_{16}\\\overline{Q}_{12}&\overline{Q}_{22}&\overline{Q}_{26}\\\overline{Q}_{16}&\overline{Q}_{26}&\overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_x\\k_y\\k_{xy}\end{bmatrix}zdz$$

$$\begin{bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11}&\overline{Q}_{12}&\overline{Q}_{16}\\\overline{Q}_{12}&\overline{Q}_{22}&\overline{Q}_{26}\\\overline{Q}_{16}&\overline{Q}_{26}&\overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x^0\\\varepsilon_y^0\\\gamma_{xy}^0\end{bmatrix}zdz+\sum_{k=1}^{n}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11}&\overline{Q}_{12}&\overline{Q}_{16}\\\overline{Q}_{12}&\overline{Q}_{22}&\overline{Q}_{26}\\\overline{Q}_{16}&\overline{Q}_{26}&\overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_x\\k_y\\k_{xy}\end{bmatrix}z^2dz \qquad \text{(II.80)}$$

Les coefficients $\bar{Q}_{ij}$ ainsi que les déformations ne sont pas fonction de z, ceci permet de limiter le calcul aux intégrales suivantes :

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} dz=(h_k-h_{k-1}),\qquad \int_{h_{k-1}}^{h_k} zdz=\frac{1}{2}(h_k^2-h_{k-1}^2),\qquad \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2dz=\frac{1}{3}(h_k^3-h_{k-1}^3)$$

Après réarrangements, les équations (II.79) peuvent être regroupées dans le système matriciel suivant :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{xy0} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \text{(II.81)}$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\bar{Q}_{ij} \right) \right]_k (h_k - h_{k-1}), \quad i = 1,2,6; \quad j = 1,2,6$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\bar{Q}_{ij} \right) \right]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad i = 1,2,6; \quad j = 1,2,6$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\bar{Q}_{ij} \right) \right]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad i = 1,2,6; \quad j = 1,2,6$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(C'_{ij} \right) \right]_k (h_k - h_{k-1}), \quad i = 1,2,6; \quad j = 1,2,6$$

A_{ij}: est la matrice de rigidité en membrane.

B_{ij}: est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

D_{ij}: est la matrice de rigidité en flexion-torsion.

F_{ij}: est la matrice de rigidité en cisaillement transverse.

II.4 Théorie des plaques Sandwiches

II.4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'établir les équations relatives au comportement mécanique des plaques sandwiches. Un matériau est constitué d'un matériau de faible masse volumique (l'âme) sur lequel sont collés des feuilles ou plaques (les peux). La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre, par cisaillement, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Dans le cas général, les peaux sont des stratifiés d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure) (figure II.14). L'épaisseur de l'âme sera notée h. le système de coordonnées est choisi de manière que le plan (x, y) soit le plan moyen[1].

II.4.2 Champs des déformations et des contraintes

II.4.2.1 Hypothèses de la théorie des sandwiches

La théorie des plaques sandwiches repos sur les hypothèses fondamentales suivantes :

L'épaisseur de l'âme est bien plus élevée que celle des peux : $h >> h_1, h_2$.

Les déplacements de l'âme u_a et v_a suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnés z.

Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.

Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z : la déformation ε_{zz} est négligée.

L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz}, σ_{yz} : les contraintes σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.

Les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} et σ_{yz} sont négligées dans les peaux.

Enfin, la théorie traite les problèmes d'élasticité de faibles déformations.

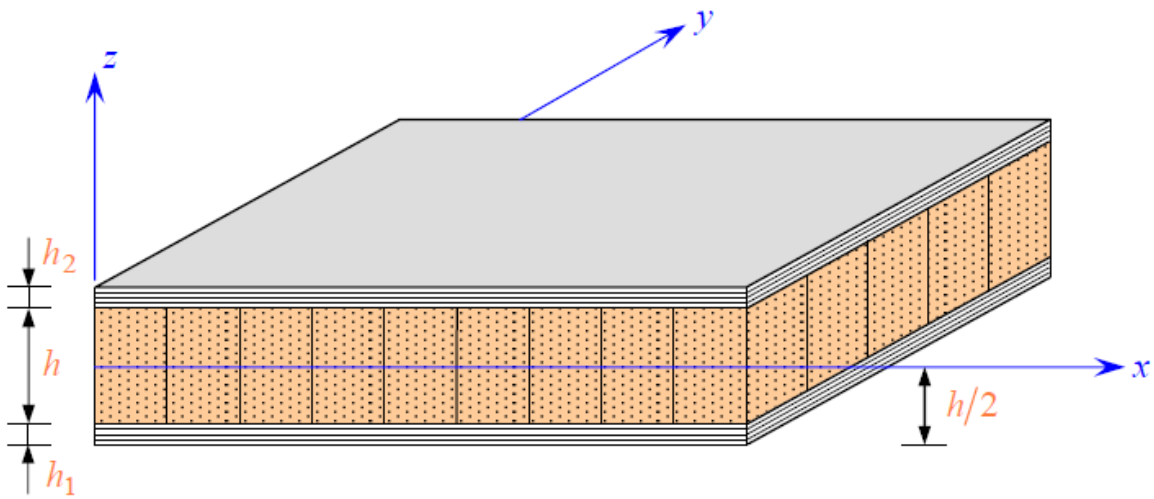


Figure II.14 *Notations d'une plaque sandwich*[1].

II.4.2.2 Champ des Déplacements

L'hypothèse 2 implique un schéma du premier ordre pour les déplacements de l'âme :

$$u_a(x,y,z) = u_0(x,y) + z\varphi_x(x,y)$$

(II.81)

$$v_a(x,y,z) = v_0(x,y) + z\varphi_y(x,y)$$

Avec :

$$u_0(x,y) = u_a(x,y,0)$$
$$v_0(x,y) = v_a(x,y,0)$$

La continuité des déplacements aux interfaces âme-peaux, associée à l'hypothèse 3, conduit aux expressions suivantes des déplacements dans les peaux :

- Peau inférieure :

$$u_1(x,y,z) = u_0(x,y) - \frac{h}{2}\varphi_x(x,y)$$

(II.82)

$$v_1(x,y,z) = v_0(x,y) - \frac{h}{2}\varphi_y(x,y)$$

- Peau supérieure :

$$u_2(x,y,z) = u_0(x,y) + \frac{h}{2}\varphi_x(x,y)$$

$$v_2(x,y,z) = v_0(x,y) + \frac{h}{2}\varphi_y(x,y) \quad \text{(II.83)}$$

L'hypothèse 4 s'écrit :

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \quad \text{(II.84)}$$

La théorie des plaques sandwiches est donc basée sur la détermination de cinq fonctions de déplacement et de rotation : u_0, v_0, w_0, φ_x et φ_y, analogues à celles introduites dans la théorie des stratifiés tenant compte du cisaillement transverse

II.4.2.3 Champ des déformations

Le champ des déformations dans la peau inférieure est déduit du champ (II.82) des déplacements. Il s'écrit :

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}^1 = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2}\frac{\partial \varphi_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}^1 = 0$$

$$\gamma_{yz}^1 = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}\right) \quad \text{(II.85)}$$

Les déformations en cisaillement transverse γ_{yz}^{1} et γ_{xz}^{1} dans la peau sont négligées et le champ des déformations se réduit au champ des déformations en membrane qui s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{1} \\ \varepsilon_{yy}^{1} \\ \gamma_{xy}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{0} \\ \varepsilon_{yy}^{0} \\ \gamma_{xy}^{0} \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.86)}$$

Avec des notations déjà introduites :

$$\varepsilon_{xx}^{0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{yy}^{0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy}^{0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

(II.87)

$$k_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \qquad k_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

De même, le champ des déformations dans la peau supérieure s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{2} \\ \varepsilon_{yy}^{2} \\ \gamma_{xy}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{0} \\ \varepsilon_{yy}^{0} \\ \gamma_{xy}^{0} \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.88)}$$

Champs des déformations et des contraintes :

Le champ des déformations dans l'âme se déduit du champ (II.81) des déplacements. Soit :

$$\varepsilon_{xx}^{a} = \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}^{a} = \frac{\partial u_a}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}^{a} = \frac{\partial \omega_o}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{yz}^{a} = \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y$$

$$\gamma_{xz}^{a} = \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x$$

$$\gamma_{xy}^{a} = \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}\right) \text{(II. 89)}$$

Le champ des déformations a la même écriture que le champ des déformations de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Il est la superposition de deux champs de déformations :

- Le champ des déformations en membrane-flexion

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{a} \\ \varepsilon_{yy}^{a} \\ \gamma_{xy}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{0} \\ \varepsilon_{yy}^{0} \\ \gamma_{xy}^{0} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.90)}$$

- Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{a} \\ \gamma_{xz}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix} \qquad \text{(II.91)}$$

II.4.2.4 Champ des contraintes

Le champ des contraintes dans l'âme est déduit de l'hypothèse 5 :

$$\sigma_{xx}^{a} = \sigma_{yy}^{a} = \sigma_{xy}^{a} = \sigma_{zz}^{a} = 0 \qquad \text{(II. 92)}$$

L'âme ne transmet que les contraintes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^{a} \\ \sigma_{xz}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^{'a} & C_{45}^{'a} \\ C_{45}^{'a} & C_{55}^{'4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{a} \\ \gamma_{xz}^{a} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.93)}$$

Où les coefficients $\bar{C}_{ij}^{a}$ s'expriment en fonction des coefficients C_{ij}^{a} rapportés aux axes principaux de l'âme suivant :

$$C'^{a}_{44} = C^{a}_{44}cos^{2}\theta + C^{a}_{55}sin^{2}\theta$$

$$C'^{a}_{45} = (C^{a}_{55} - C^{a}_{44})sin\theta cos\theta \qquad \text{(II.94)}$$

$$C'^{a}_{55} = C^{a}_{44}sin^{2}\theta + C^{a}_{55}cos^{2}\theta$$

Où θ est l'angle que font les axes principaux de l'âme avec les axes de référence de la plaque sandwich. Les coefficients C^{a}_{ij} dans les axes principaux s'expriment eux-mêmes en fonction des coefficients de cisaillement de l'âme, mesurés dans les axes principaux, selon :

$$C^{a}_{44} = G^{a}_{23}\ , \qquad C^{a}_{55} = G^{a}_{13} \qquad \text{(II.95)}$$

L'hypothèse 6 implique que les contraintes en cisaillement transverse sont nulles dans toutes les couches *k* de la peau inférieure ou supérieure :

$$\sigma^{k}_{xz} = \sigma^{k}_{yz} = 0 \qquad \text{(II.96)}$$

Les autres contraintes sont déduites des déformations dans les peaux par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma^{k}_{xx} \\ \sigma^{k}_{yy} \\ \sigma^{k}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{i}_{xx} \\ \varepsilon^{i}_{yy} \\ \varepsilon^{i}_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.97)}$$

Pour la couche *k* de la peau inférieure $(i = 1)$ ou de la peau supérieure$(i = 2)$.

II.4.3 Relations fondamentales des plaques sandwiches

II.4.3.1 Equation constitutive

L'équation constitutive des plaques sandwiches fait intervenir les résultantes et moments déjà introduits dans la théorie des stratifiés :

- Les résultantes en membrane

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \qquad \text{(II.98)}$$

- Les moments en flexion-torsion :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz, \tag{II.99}$$

- Les résultantes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} dz. \tag{II.100}$$

En substituant les expressions des contraintes (II.93) à (II.97) dans les expression précédentes des résultantes et moments, nous obtenons l'équation constitutive :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \tag{II.101}$$

Avec :

$$A_{ij} = A_{ij}^1 + A_{ij}^2$$

$$B_{ij} = \frac{h}{2}(A_{ij}^2 + A_{ij}^1) \tag{II.102}$$

$$C_{ij} = C_{ij}^1 + C_{ij}^2$$

$$D_{ij} = \frac{h}{2}(C_{ij}^2 + C_{ij}^1)$$

Et

$$A_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \left(Q_{ij}^{'}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(Q_{ij}^{'}\right)_k dz \qquad \text{(II. 103)}$$

$$C_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} z\left(Q_{ij}^{'}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\left(Q_{ij}^{'}\right)_k dz \qquad \text{(II. 104)}$$

$$A_{ij}^{2} = \int_{h/2}^{-h/2+h_2} \left(Q_{ij}^{'}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(Q_{ij}^{'}\right)_k dz \qquad (II.105)$$

$$C_{ij}^{2} = \int_{h/2}^{h/2+h_2} z\left(Q_{ij}^{'}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\left(Q_{ij}^{'}\right)_k dz \qquad (II.106)$$

$$F_{ij} = hC_{ij}^{'a} \qquad (II.107)$$

II.4.4 Sandwiches à peaux épaisses

La théorie des plaques sandwiches implique que l'épaisseur des peaux soit bien plus faible que l'épaisseur de l'âme (hypothèse1). Dans le cas de peaux épaisses, il est possible de conduire l'analyse des plaques sandwiches à l'aide de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Nous développons cette analyse dans le cas d'un matériau sandwich symétrique (figure II.81), et dans le cas où les axes principaux de l'âme et des peaux coïncident avec les axes de référence de la plaque. Les comportements des matériaux sont caractérisés :

- Pour la peau par :
  * les coefficients Q_{ij}^{p} de rigidité réduite,
- Pour l'âme par :
  * les coefficients Q_{ij}^{a} de rigidité réduite,
  * les modules G_{ij}^{a} de cisaillement transverse.

L'application de la théorie sandwich conduit aux expressions suivantes des coefficients de l'équation constitutive :

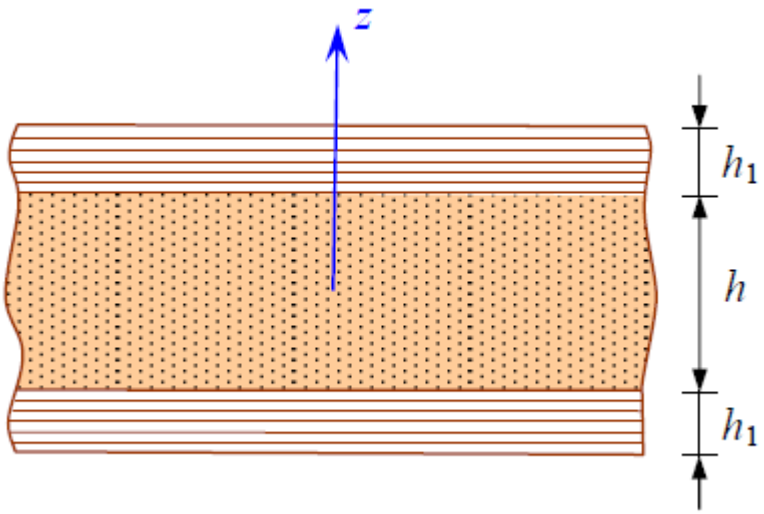


Figure II.15 *Sandwich symétrique à peaux épaisses*[1].

$$A_{ij}^s = 2h_1 Q_{ij}^p$$
$$B_{ij}^s = 0$$
$$D_{ij}^s = \frac{1}{2} Q_{ij}^p (h_1 + h_1) h h_1 \qquad \text{(II.108)}$$
$$F_{ij}^s = h G_{kl}^a F_{44}^s = h G_{23}, F_{55}^s = h G_{13}^a$$

L'application de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse conduit à :

$$A_{ij} = 2h_1 Q_{ij}^p + h Q_{ij}^a \qquad \text{(II.109)}$$
$$B_{ij} = 0 \qquad \text{(II.110)}$$
$$D_{ij} = \frac{1}{2} Q_{ij}^p h_1 \left[(h + h_1)^2 + \frac{h_1^2}{3} \right] + Q_{ij}^a \frac{h^3}{12} \qquad \text{(II.111)}$$
$$F_{ij} = 2h_1 G_{ij}^p + h G_{ij}^a \qquad \text{(II.112)}$$

Soit:

$$A_{ij} = A_{ij}^S \left(1 + \frac{h}{2h_1} \frac{Q_{ij}^a}{G_{ij}^P} \right) \qquad \text{(II.113)}$$
$$D_{ij} = D_{ij}^S \left[1 + \frac{h_1}{h} \frac{h + \frac{4}{3} h_1}{h + h_1} + \frac{Q_{ij}^a}{Q_{ij}^p} \frac{h^2}{6h_1 (h + h_1)} \right] \qquad \text{(II.114)}$$

$$F_{ij} = F_{ij}^{S}\left(1 + 2\frac{h_1}{h}\frac{G_{ij}^{P}}{G_{ij}^{a}}\right) \qquad \text{(II. 115)}$$

Les expressions (II.113), (II.114) et(II.115) établissent les relations entre les coefficients de rigidité de la théorie stratifiée avec cisaillement transverse et ceux de la théorie sandwich. L'âme étant moins rigide que les peaux, nous avons :

$$Q_{ij}^{a} \ll Q_{ij}^{p} \text{(II. 116)}$$

Et les relations peuvent être simplifiées suivant :

$$A_{ij} \approx A_{ij}^{s} \qquad \text{(II. 117)}$$

$$D_{ij} \approx D_{ij}^{S}\left(1 + \frac{h_1}{h}\frac{h + \frac{4}{3}h_1}{h + h_1}\right) \qquad \text{(II. 118)}$$

$$F_{ij} = F_{ij}^{S}\left(1 + 2\frac{h_1}{h}\frac{G_{ij}^{P}}{G_{ij}^{a}}\right) \qquad \text{(II. 119)}$$

Nous retrouvons le comportement du matériau sandwich : le comportement en membrane-flexion est déterminé par les peaux et le comportement en cisaillement transverse est imposé essentiellement par l'âme. Les coefficients de flexion D_{ij} sont toutefois modifiés par rapport à la théorie des sandwiches. L'expression (II.118) permet ainsi d'évaluer l'influence de l'épaisseur des peaux.

II.5 Conclusion

Ce chapitre fait une brève présentation des diverses théorie des plaques composites stratifiés et matériaux sandwich et leurs comportement mécaniques; et leurs relation fondamental.

CHAPITRE III

FORMULATION ÉLÉMENT FINIS

III.1 Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) permet de ramener un problème de milieu continu d'un nombre infini de paramètres à un problème discret de nombre finis de paramètres. Dans l'analyse des plaques stratifiées, la méthode consiste à développer les équations du mouvement à partir des formulations énergétiques et de déterminer par la suite les contraintes et les déformations, cette analyse nécessite l'utilisation des éléments bidimensionnels pour la discrétisation. Avant d'entreprendre, il est intéressant d'effectuer une comparaison entre ces éléments afin de choisir l'élément de référence. Plusieurs tests ont été effectués sur des éléments types concernant la convergence des solutions, les remarques suivantes ont été tirées :

Les éléments quadrilatères donnent de meilleurs résultats que les éléments triangulaires.

Pour un même nombre de degrés de liberté, les éléments à champ quadratique ont une précision meilleure que les éléments à champ linéaire.

Les éléments basés sur la théorie de MINDLIN avec prise en compte du cisaillement transverse sont les mieux adaptés dans le cas des plaques épaisses.

Les éléments quadratiques de la famille de SERENDIP présentent un comportement de verrouillage quelque soit l'ordre d'intégration utilisé ; un comportement sans verrouillage permet d'utiliser l'élément à la fois pour les plaques épaisses et pour les plaques minces.

Les éléments avec intégration réduite de la famille de LAGRANGE comportent convenablement dans les situations des plaques minces.

D'après les remarques citées précédemment, un élément de la famille de LAGRANGE à champ quadratique peut répondre aux exigences imposées par le présent travail.

III.2 Discrétisation

Considérons la plaque de la figure (III.1), la surface moyenne de cette plaque est discrétisée en un nombre fini d'éléments quadrilatères iso paramétriques à 9 nœuds, chaque nœud possède 5 degrés de liberté indépendants (trois déplacements et deux rotations).

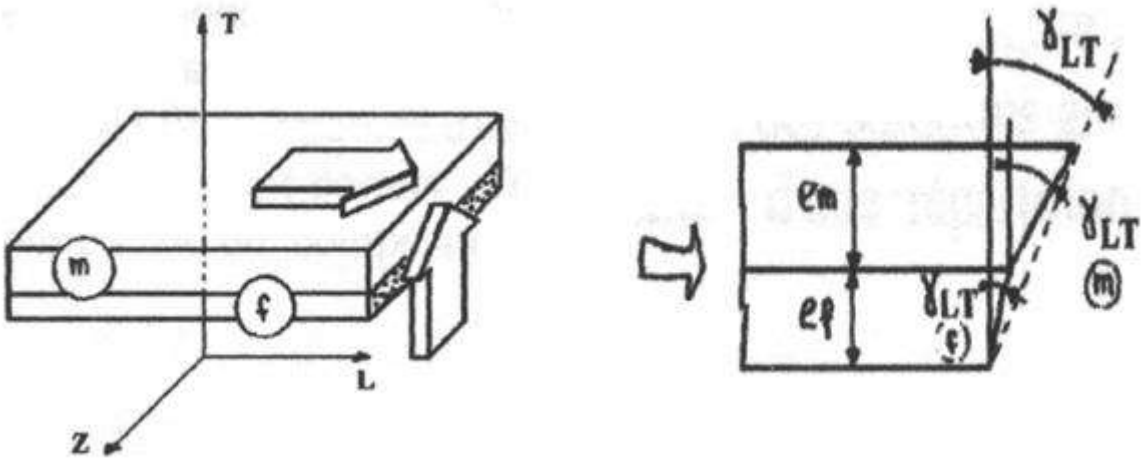


Figure III.1 *Changement donnant le cisaillement*[3]

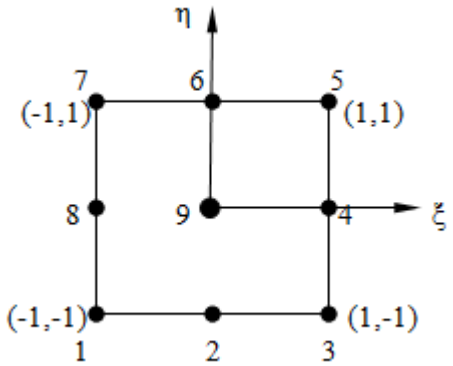


Figure III.2 *Elément de référence*[3]

Les déplacements élémentaires peuvent être définis par l'approximation suivante :

$$\{\delta\} = \sum_{i=1}^{nn} [N_i(\xi,\eta)]\{d_i\} \qquad \text{(III. 1)}$$

Avec :

$$\{\delta\} = \{u_0 v_0 w_0 \theta_0 \theta_0\}$$

$\{d_i\}$: le vecteur des déplacements nodaux.

$$\{d_i\}^T = \{u_{0i} v_{0i} w_{0i} \theta_{xi} \theta_{yi}\}$$

nn : le nombre de nœuds par élément.

$[N_i]$: Les fonctions d'interpolations des déplacements exprimées en termes de coordonnées naturelles.

Les fonctions d'interpolations N_i doivent être choisies de manière qu'elles vérifient la complétude et la continuité inter élément. Pour un élément à 9 nœuds, ces fonctions sont définies comme suit :

Pour les nœuds de sommets : $\xi_i = \pm 1 \;\; ; \;\; \eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)\xi\eta$$

Pour les nœuds d'interfaces :

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i \text{à} \xi_i = 0 \;\; ; \;\; \eta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)\xi\xi_i \text{à} \xi_i = \pm 1 \;\; ; \;\; \eta_i = 0$$

Pour le nœud du centre :

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 + \eta^2) \text{à} \xi_i = 0 \;\; ; \;\; \eta_i = 0$$

La relation déformations–déplacements élémentaires est obtenue de (III.1) comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^{nn} [B_i] . \{\delta\}^e \qquad \text{(III. 2)}$$

Où $[B_i]$ est la matrice d'interpolation des déformations, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y & 0 & 0 & 0 \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial y \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial x & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial y & 0 & N_i \end{bmatrix} \qquad \text{(III.3)}$$

Les éléments de la matrice $[B_i]$ sont définis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III. 4)}$$

$[J]$ est la matrice Jacobienne, elle permet le passage du système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées naturelles.

La matrice Jacobienne est définie comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x \partial y}{\partial \xi \partial \xi} \\ \frac{\partial x \partial y}{\partial \eta \partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \text{(III. 5)}$$

Dans laquelle :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} x_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} y_i \qquad \text{(III.6)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} x_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} y_i$$

Les relations (III.1) et (III.2) peuvent êtres écrits sous les formes matricielles contractées suivantes :

$$\{\delta\} = [N]\{\delta\}^e \qquad \text{(III.7)}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e$$

Avec :

$$[N] = [N_1 N_2 \dots N_{nn}]$$

$$[B] = [B_1 B_2 \dots B_{nn}]$$

$$\{\delta\}^e = \{\{d_1\}\{d_2\} \dots \{d_{nn}\}\}^T$$

Les contraintes sont liées aux déformations par la matrice d'élasticité C.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \qquad \text{(III. 8)}$$

III.3 Equations de l'énergie potentielle

L'analyse statique d'une telle structure revient à résoudre les équations qui régissent l'équilibre qui peuvent être obtenues en minimisant l'énergie potentielle totale du système. L'énergie potentielle totale de la structure sera la somme des énergies potentielles élémentaires :

$$\pi^e = U^e - W^e \qquad \text{(III. 9)}$$

Où *U* et *W* sont respectivement l'énergie de déformation et le travail des forces nodales équivalentes, elles sont données comme suit :

$$U^e = \frac{1}{2}\int_V [\sigma]^T(\varepsilon)dV \qquad \text{(III. 10)}$$

$$W^e = \{\delta\}^T\{F\} \qquad \text{(III. 11)}$$

L'expression de l'énergie potentielle totale π devient :

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V [\sigma]^T\{\varepsilon\}dV - \int_V [\delta]^T\{p\}dV - \int_S [\delta]^T\{q\}dS \qquad \text{(III. 12)}$$

Dans le cas d'une plaque discrète, l'énergie potentielle totale π_e est la somme de toutes les énergies potentielles élémentaires :

$$\pi = \sum_{e=1}^{NE} \pi_e \qquad \text{(III. 13)}$$

NE est le nombre des éléments.

L'équation (III.12), peut être réécrite sous la forme :

$$\pi_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} [\delta^e]^T [B]^T DB\delta^e dV - \int_{V_e} [\delta^e]^T [N]^T pdV - \int_{S_e} [\delta^e]^T [N]^T qdS \qquad \text{(III. 14)}$$

Où V_e est le volume de l'élément et S_e la surface chargée de l'élément

En minimisant l'énergie élémentaire par rapport aux déplacements nodaux δ^e, on obtient :

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial \delta^e} = \int_{V_e} ([B]^T DB)\, \delta^e dV - \int_{V_e} [N]^T pdV - \int_{S_e} [N]^T qdS \qquad \text{(III. 15)}$$

On peut réduire la relation (III.15) à la forme :

$$[K^e]\{\delta^e\} = \{F^e\} \qquad \text{(III. 16)}$$

Où $[K_e]$ est la matrice de rigidité élémentaire, elle est donnée par la relation suivante :

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T [D][B]dV \qquad \text{(III. 17)}$$

De même, $\{F^e\}$ est le vecteur élémentaire des forces nodales équivalentes, il est donné par :

$$\{F^e\} = \int_{V_e} [N]^T PdV + \int_{S_e} [N]^T qdS \qquad \text{(III. 18)}$$

III.3.1 Matrice de rigidité

Les matrices de rigidité élémentaires sont définies par la relation (III.16). Elles sont symétriques d'ordre 45×45, leur forme est donnée comme suit :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & 0 & [K^{14}] & [K^{15}] \\ [K^{12}] & [K^{22}] & 0 & [K^{24}] & [K^{25}] \\ 0 & 0 & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ [K^{41}] & [K^{42}] & [K^{43}] & [K^{44}] & [K^{45}] \\ [K^{51}] & [K^{52}] & [K^{53}] & [K^{54}] & [K^{55}] \end{bmatrix}$$

(III.19)

Les éléments des matrices $[K^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta = 1,2, \ldots 5$) sont donnés par les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= A_{11}S_{ij}^{\xi} + A_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{12} &= A_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + A_{16}S_{ij}^{\xi} + A_{26}S_{ij}^{\eta} + A_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{14} &= B_{11}S_{ij}^{\xi} + B_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{15} &= B_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{26}S_{ji}^{\eta} + B_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{22} &= A_{22}S_{ij}^{\eta} + A_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{24} &= B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{12}S_{ji}^{\xi\eta} + B_{26}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{25} &= B_{66}S_{ij}^{\xi} + B_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{22}S_{ij}^{\eta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{ij}^{33} &= F_{44}S_{ij}^{\xi} + F_{45}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + F_{55}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{34} &= F_{44}S_{ij}^{\xi 0} + F_{45}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi 0} + F_{55}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi 0} + F_{55}S_{ij}^{\eta 0} \qquad \text{(III.20)} \\
K_{ij}^{44} &= D_{11}S_{ij}^{\xi} + D_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{66}S_{ij}^{\eta} + F_{44}S_{ij}^{0} \\
K_{ij}^{45} &= D_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + D_{16}S_{ij}^{\xi} + D_{26}S_{ji}^{\eta} + D_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + F_{45}S_{ij}^{0} \\
K_{ij}^{55} &= D_{66}S_{ij}^{\xi} + D_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{22}S_{ij}^{\eta} + F_{55}S_{ij}^{0}
\end{aligned}
$$

Où :

$$
S_{ij}^{\xi\eta} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial N_j}{\partial \eta}|J|d\xi d\eta
$$

$$
S_{ij}^{00} = S_{ij}^{0}(i,j = 1,9) \qquad \text{(III. 21)}
$$

$$
S_{ij}^{\xi\xi} = S_{ij}^{\xi}
$$

$|J|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne.

III.3.2 Intégration de Gauss

Les quantités S_{ij} peuvent être évaluées en utilisant l'intégration numérique dans le domaine (ξ ,η). La technique de l'intégration sélective avec 3×3 points de Gauss pour les termes de membrane, flexion et 2×2 points de Gauss pour les termes de cisaillement, donne avec un temps de calcule réduit, de meilleurs résultats [14].

L'intégrale (III.21) peut s'écrire :

$$S_{ij} = \sum_{a=1}^{g} \sum_{b=1}^{g} W_a W_b \, |J| \qquad \text{(III. 22)}$$

Où :

W_a, W_b sont les coefficients de pondération aux points d'intégration ξ_a ,η_b

g est le nombre de points d'intégration.

III.4 Matrice de rigidité globale – vecteur force global

La matrice de rigidité globale [*K*] est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires, l'assemblage s'effectue en additionnant terme à terme les éléments des matrices élémentaires communs en nœud et en degré de liberté. La même technique s'applique sur le vecteur force global.

III.5 Résolution

Une fois la matrice de rigidité globale et le vecteur charge globale sont établis, on peut former l'équation de l'équilibre statique de la plaque. Un système de (Nnoeuds x Nddl) équations est obtenu et qui permet, après prise en compte des conditions aux limites, de calculer les déplacements nodaux. Dans la littérature, on trouve beaucoup de méthodes qui permettent la résolution numérique de l'équation de l'équilibre. Les contraintes et les déformations dans chaque élément peuvent être par la suite calculées à partir des déplacements obtenus précédemment.

On peut résumer les étapes de base pour calculer les solutions d'un problème d'équilibre statique par éléments finis comme suit :

- Sous-division de la plaque en éléments finis.
- Evaluation des matrices de rigidité et les charges élémentaires.
- Construction de la matrice de rigidité globale et le vecteur charge globale.
- Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
- Evaluation des contraintes et des déformations de la plaque.

CHAPITRE I V

PRÉSENTATION DU

PROGRAMME INFORMATIQUE

IV.1 Introduction

L'analyse des structures par éléments finis nécessite l'exécution de plusieurs opérations de calcul avant d'arriver aux résultats requis. Pour un problème de grande taille, le temps de calcul nécessaire pour effectuer ces opérations devient très important, il est donc indispensable de développer un programme au moyen d'un ordinateur qui permet de faciliter la tâche.

Un programme d'éléments finis est constitué généralement de quatre blocs principaux :

1. Introduction des données.
2. Construction des matrices de rigidité et de masse globales ainsi que le vecteur global des sollicitations.
3. Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
4. Impression des résultats.

Le présent chapitre à pour but de présenter les différentes démarches suivies au cours de l'élaboration d'un programme de calcul des solutions propres (fréquences propres et déformées modales) des plaques stratifiées. Il est écrit en langage Fortran sous forme modulaire. Les relations programmées ont été développées aux chapitres 1 et 2, l'obtention des solutions propres est réalisée par le sous programme SUBSPACE développé par K.-J. Bathe. L'enchaînement des opérations de calcul est illustré sur la figure 3.1, chaque étape sera décrite en détaille avec des exemples d'illustration.

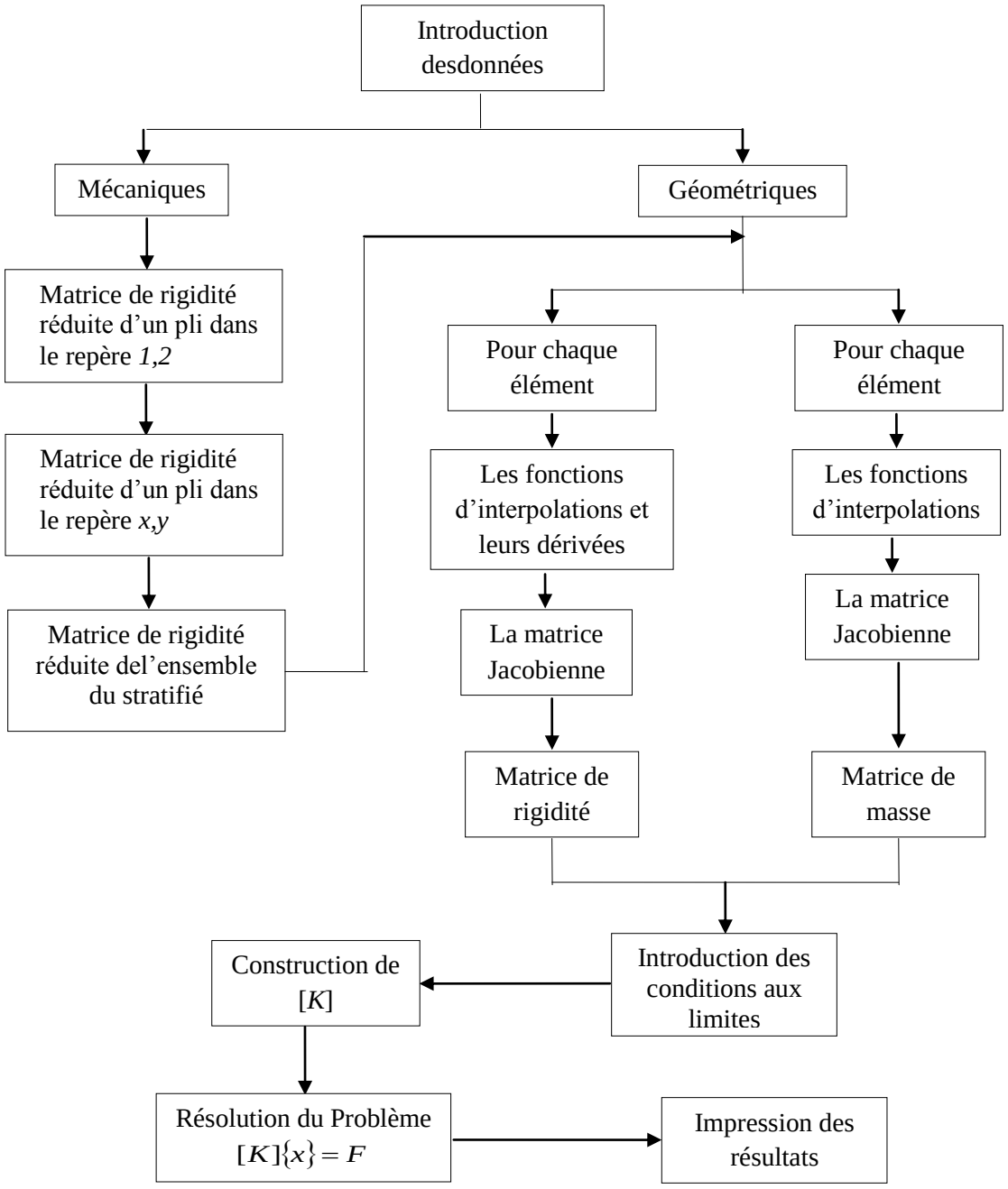


Figure IV.1 *Enchaînement des opérations de calcul des solutions propres*[15].

IV.2 Introduction des données

Les données peuvent être classées en deux catégories principales : (*i*) les données nécessaires pour le calcul de la matrice de rigidité réduite du stratifié et (*ii*) les données décrivant la géométrie de la plaque et la façon dont elle est fixée dans l'espace.

IV.2.1 Données mécaniques

Le calcul de la matrice de rigidité du stratifié réduite nécessite l'introduction des données suivantes :

- Module d'élasticité (Young) longitudinal E_1.
- Module d'élasticité (Young) transversal E_2.
- Module de cisaillement longitudinal G_{12}.
- Coefficient de Poisson ν_{12}.
- Masse volumique du pli.
- Epaisseur du pli.
- Nombre de plis.
- Direction de chaque pli.

La détermination des coefficients de cette matrice s'effectue en trois étapes :

1. Calcul des coefficients de rigidité d'un pli dans ses axes propres 1,2.
2. Calcul des coefficients de rigidité d'un pli dans les axes du stratifie *x*,*y*.
3. Calcul des coefficients de rigidité de l'ensemble du stratifié.

IV.2.2 Données géométriques

La géométrie de la plaque peut être complètement définie en précisant les données suivantes :

- *Nombre d'éléments et de nœuds* ainsi que *le nombre de degrés de liberté bloqués*
- *Connections des nœuds* : La géométrie de chaque élément doit être spécifiée en donnant une liste systématique des points nodaux qui le définissent. L'ordre de numérotation des nœuds influe directement sur la structure de la matrice de rigidité globale et par conséquent sur le temps du calcul requis pour la résolution. Généralement, la matrice de rigidité est une matrice symétrique bandée, la largeur de cette bande L est donnée par la relation suivante :

$$L = 2[mn + (n-1)] + 1$$

Où :

n est le nombre de degrés de liberté par nœud.

m est la différence maximale entre les numéros de deux nœuds adjacents.

Donc, pour une matrice de rigidité peu dispersée, il est nécessaire de minimiser la largeur de la bande au maximum possible tout en jouant sur l'ordre de numérotation. La figure 3.2 montre, pour un même nombre d'élément, deux types de numérotation :

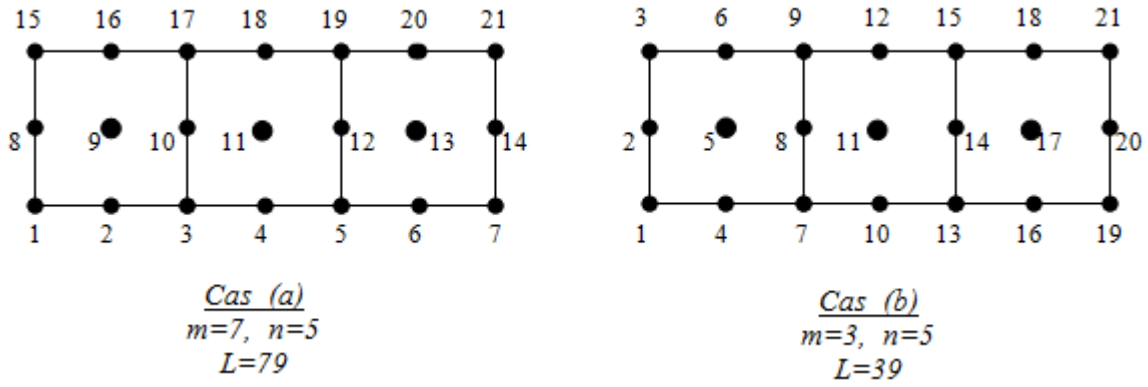


Figure IV.2 *Système de numérotation pour un même nombre d'éléments*[15].

Il est claire que la matrice de rigidité dans le cas (*a*) est plus dispersée que le cas (*b*) est utilisera donc plus de places dans la mémoire et aussi davantage de calcul. De ce fait, on remarque la grande importance de la numérotation des nœuds composant la structure, pour assurer une bonne gestion de la mémoire et de coût de calculs.

- *Coordonnées des nœuds* : Chaque nœud est défini par ses coordonnées par rapport au système d'axes (*x*,*y*). Ces coordonnées sont stockées dans une matrice d'une taille de *NPOIN* x *2* où *NPOIN* représente le nombre total de nœuds constituant la plaque.
- *Conditions aux limites* : Chaque nœud possède 5 degrés de liberté ; trois déplacements et deux rotations. Un degré de liberté est identifié par une valeur égale à zéro (**0**) lorsqu'il est actif (libre), et d'une valeur égale à un (**1**) lorsqu'il est non actif (bloqué), ces valeurs sont stockées dans une matrice d'identification *ID* de dimension *NDLL* x *NPOIN* où *NDDL* représente le nombre de degrés de liberté par nœud. Cette matrice sera modifiée par la suite afin de déduire le nombre total des équations à résoudre.

Pour illustrer la procédure d'introduction des conditions aux limites, on considère un exemple d'une plaque encastrée sur ses deux côtés. Pour facilité la compréhension, la plaque est discrétisée en six éléments, chaque élément possède 4 nœuds dont le nombre de degrés de liberté par nœud est égal à trois ; un déplacement w et deux rotations θ_x et θ_y, (les déplacements u et v sont considérés nuls) (*Figure IV.3*).

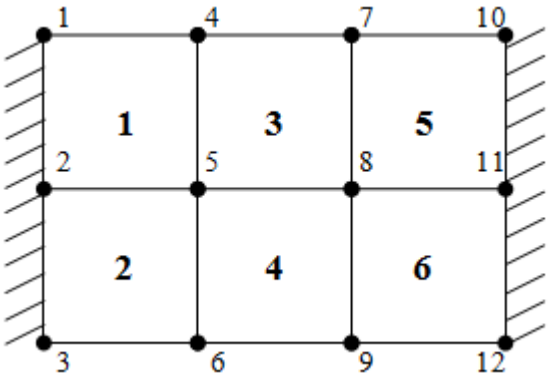


Figure IV.3 *Exemple d'une plaque discrétisée en quatre éléments et encastrée sur ses deux côtés*[15]

Les nœuds 1,2,3,13,10,11 et 12 sont bloqués dans toutes les directions, tandis que le reste des nœuds est libre. La matrice d'identification s'écrit dans ce cas :

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le nombre total des zéros dans *ID* représente le nombre total des équations à résoudre. La matrice d'identification modifiée s'obtient en remplaçant chaque zéro dans (3.1) par le numéro de l'équation qui lui correspond, les valeurs (**1**) prennent la valeur (**0**), cette opération est effectuée colonne par colonne. La matrice d'identification modifiée s'écrit donc :

$$ID = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

D'où on tire le nombre total des équations qui est égal à 18.

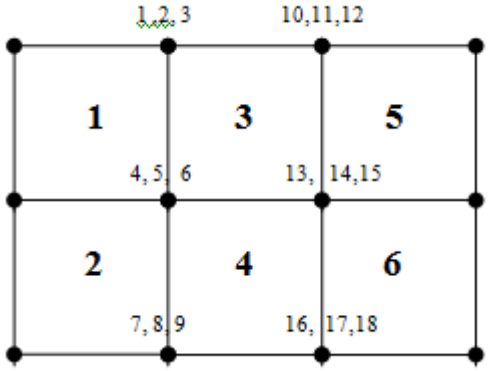


Figure IV.4 *répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque*[15]

IV.3 Construction de la matrice de rigidité

Les matrices de rigidité élémentaires [K_e] peuvent être calculées à partir des relations (2.16) développées dans le Chapitre 2. Pour chaque élément nous avons besoin a effectuer les opérations suivantes :

1. Initialiser [K_e] à zéro.
2. Pour chaque point d'intégration (ξ_i, η_i)
   - Calculer les fonctions d'interpolations ainsi que leurs dérivées.
   - Calculer la matrice Jacobienne, son inverse et son déterminant.
   - Calculer les éléments k_{ij} de la matrice de rigidité élémentaire.

A cause de la symétrie des matrices de rigidité élémentaires, on ne mémorise que les éléments de la triangulaire supérieure, ces éléments sont stockés dans un vecteur de dimension *NEVAB* x *NEVAB*/2 où *NEVAB* représente le nombre de variables par élément.

D'autre part, on définit un vecteur de connectivité des éléments *LM* qui permet de mémoriser les degrés de liberté élémentaires.

Pour l'exemple illustré sur la figure 3.3, le vecteur *LM* de chaque élément est définit comme suit :

$$LM_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$LM_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$LM_3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 15 & 10 & 11 & 12 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$LM_4 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 16 & 17 & 18 & 13 & 14 & 15 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T$$

$$LM_5 = \begin{bmatrix} 13 & 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}^T$$

$$LM_6 = \begin{bmatrix} 16 & 17 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}^T$$

La matrice de rigidité globale [*K*] s'obtient par assemblage des matrices de rigidité élémentaires, elle est symétrique et bandée, la méthode de stockage la plus efficace pour [*K*] est celle de la ligne de ciel (sky line), elle consiste à mémoriser les termes de la matrice par des colonnes à hauteurs variables, ces hauteurs sont déterminées à partir des vecteurs de connectivité des éléments *LM* , elles sont données par la formule suivante :

$$H_i = i - L_i$$

Où L_i représente le premier élément non nul de la colonne i et H_i représente la hauteur de la même colonne.

Les adresses des termes situés sur la diagonal de [*K*] doivent être aussi mémorisées dans un vecteur afin de déterminer le début des colonnes.

Considérons le cas de la plaque en figure 3.3, on veut déterminer la hauteur de la colonne 12, ce numéro représente aussi le numéro de degré de liberté actif dans [*K*], il est commun entre les éléments 3 et 5. Ainsi, la plus petite valeur dans les vecteurs *LM* de ces éléments est égale à 1, cette valeur correspond à la ligne de premier élément non nul dans la colonne 12, c'est à dire $L_{12}=1$, d'où, on tire la hauteur de cette colonne qui est égale à 11.

La figure 3.5 montre la structure de la matrice de rigidité globale de la plaque, l'assemblage est limité aux degrés de liberté actifs.

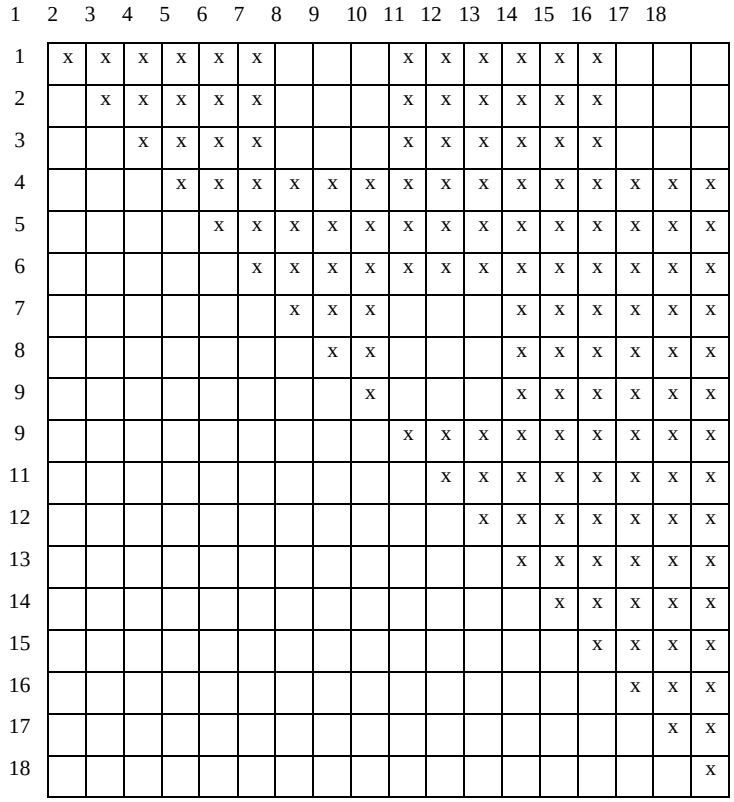


Figure IV.5 *Structure de la matrice de rigidité globale après élimination des degrés de liberté bloqués*[15]

Finalement, il ne reste que le stockage des éléments de la matrice de rigidité dans une matrice unicolonne (vecteur). On rappelle que le stockage ne contient que les termes au-dessous de la ligne de ciel.

IV.4 Construction de la matrice de masse

La construction de la matrice de masse est tout à fait identique à celle de la matrice de rigidité. Les matrices de masse élémentaires peuvent être calculées à partir des relations (2.19) développées dans le Chapitre 2, la méthode de Lobatto [17] est utilisée pour intégrer les termes de ces matrices, ceci permet d'obtenir une matrice masse consistante diagonale.

IV.5 Résolution

La recherche des solutions propres constitue la phase de calcul la plus difficile et nécessite plus de temps de calcul. Dans la pratique, il existe plusieurs méthodes conçues pour la résolution de ce genre de problème. La méthode d'itération sur sous-espace est largement

utilisée pour calculer les plus petites solutions propres d'un système de grande dimension, elle consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de Ritz en améliorant les vecteurs de Ritz par itération inverse.

IV.6 Impression des résultats

L'exécution du programme permet d'obtenir les solutions propres de vibration d'une plaque stratifiée. Ces résultats doivent être organisés de manière que le lecteur puisse les interpréter. Pour cette raison un sous programme supplémentaire est développé pour effectuer cette tâche. Les résultats ainsi que les données du problème sont groupés dans un seul fichier.

Ci-dessous on trouve la forme d'un fichier type dont lequel on a étudié le cas d'une plaque carrée simplement appuyée. Cette plaque a été discrétisée en 9 éléments. Toutes les données du problème ainsi que les résultats peuvent être lus à partir de ce fichier.

```
================================================================

      ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PLAQUES COMPOSITES

                    PROGRAMME EXECUTE LE :
                          09/06/2016
                              A
                         03:41:12:69 AM

================================================================

      A N A L Y S E   P A R   E L E M E N T S   F I N I S

                    ========================


NOMBRE DES ELEMENTS SUIVANT X ..............=    2
NOMBRE DES ELEMENTS SUIVANT Y ..............=    2
LONGUEUR SUIVANT X .........................=    1.0000
LONGUEUR SUIVANT Y .........................=    1.0000

NOMBRE TOTAL DES ELEMENTS ...................=    4
NOMBRE TOTAL DES NOEUDS .....................=   25
NOMBRE DE NOEUDS RESTRAINTS .................=   16



CONNECTIVITE DES NOEUDS :

ELEM.            NUMEROTATION

    1         1    2    3    8   13   12   11    6    7
    2         3    4    5   10   15   14   13    8    9
    3        11   12   13   18   23   22   21   16   17
    4        13   14   15   20   25   24   23   18   19


COORDONNEES DES NOEUDS :

NOEUD        X            Y



COORDONNEES DES NOEUDS :

NOEUD        X            Y

   1        0.0000      0.0000
   2        0.2500      0.0000
   3        0.5000      0.0000
   4        0.7500      0.0000
   5        1.0000      0.0000
   6        0.0000      0.2500
   7        0.2500      0.2500
   8        0.5000      0.2500
   9        0.7500      0.2500
  10        1.0000      0.2500
  11        0.0000      0.5000
  12        0.2500      0.5000
```

```
  13        0.5000      0.5000
  14        0.7500      0.5000
  15        1.0000      0.5000
  16        0.0000      0.7500
  17        0.2500      0.7500
  18        0.5000      0.7500
  19        0.7500      0.7500
  20        1.0000      0.7500
  21        0.0000      1.0000
  22        0.2500      1.0000
  23        0.5000      1.0000
  24        0.7500      1.0000
  25        1.0000      1.0000


CONDITIONS AUX LIMITES :

 NOEUD          CODE

   1        1  1  1  1  1
   2        1  0  1  1  0
   3        1  0  1  1  0
   4        1  0  1  1  0
   5        1  1  1  1  1
   6        0  1  1  0  1
  10        0  1  1  0  1
  11        0  1  1  0  1
  15        0  1  1  0  1
  16        0  1  1  0  1
  20        0  1  1  0  1
  21        1  1  1  1  1
  22        1  0  1  1  0
  23        1  0  1  1  0
  24        1  0  1  1  0
  25        1  1  1  1  1

================================================================

               PROPRIETES MECANIQUES DU MATERIAU
                    ========================

MODULE DE YOUNG LONGITUDINAL         E1  (N/m2)......=.40000E+02
MODULE DE YOUNG TRANSVERSAL          E2  (N/m2)......=.10000E+01
MODULE DE CISAILLEMENT LONGITUDINAL  G12 (N/m2)......=.60000E+00
MODULE DE CISAILLEMENT TRANSVERSAL   G23 (N/m2)......=.50000E+00
COEFFICIENT DE POISSON LONGITUDINAL  nu12 ...........=     0.250
COEFFICIENT DE POISSON TRANSVERSAL   nu21 ...........=     0.006
MASSE VOLUMIQUE                      RO  (Kg/m3).....=     1.000

NOMBRE DE COUCHES ..................................=         4
EPAISSEUR DE COUCHES ...............................= .2500E+00
EPAISSEUR DU STRATIFIE .............................= .1000E+01

DIRECTION DE LA COUCHE N°:  01.....................=        -5.
        39.4782      0.5381     -3.3273      0.0000      0.0000
         0.5381      1.0106     -0.0641      0.0000      0.0000
        -3.3273     -0.0641      0.8877      0.0000      0.0000
         0.0000      0.0000      0.0000      0.5008     -0.0087
         0.0000      0.0000      0.0000     -0.0087      0.5992
DIRECTION DE LA COUCHE N°:  02.....................=         5.
        39.4782      0.5381      3.3273      0.0000      0.0000
         0.5381      1.0106      0.0641      0.0000      0.0000
```

```
          3.3273      0.0641      0.8877      0.0000      0.0000
          0.0000      0.0000      0.0000      0.5008      0.0087
          0.0000      0.0000      0.0000      0.0087      0.5992
 DIRECTION DE LA COUCHE N°:  03.....................=        -5.
         39.4782      0.5381     -3.3273      0.0000      0.0000
          0.5381      1.0106     -0.0641      0.0000      0.0000
         -3.3273     -0.0641      0.8877      0.0000      0.0000
          0.0000      0.0000      0.0000      0.5008     -0.0087
          0.0000      0.0000      0.0000     -0.0087      0.5992
 DIRECTION DE LA COUCHE N°:  04.....................=         5.
         39.4782      0.5381      3.3273      0.0000      0.0000
          0.5381      1.0106      0.0641      0.0000      0.0000
          3.3273      0.0641      0.8877      0.0000      0.0000
          0.0000      0.0000      0.0000      0.5008      0.0087
          0.0000      0.0000      0.0000      0.0087      0.5992


 MATRICE DE RIGIDITE EN MEMBRANE A (Pa.m):

           0.3948E+02       0.5381E+00       0.0000E+00
           0.5381E+00       0.1011E+01       0.0000E+00
           0.0000E+00       0.0000E+00       0.8877E+00


 MATRICE DE COUPLAGE MEMBRANE-FLEXION B (Pa.m2):

           0.0000E+00       0.0000E+00       0.4159E+00
           0.0000E+00       0.0000E+00       0.8017E-02
           0.4159E+00       0.8017E-02       0.0000E+00


 MATRICE DE RIGIDITE EN FLEXION D (Pa.m3):

           0.3290E+01       0.4484E-01       0.0000E+00
           0.4484E-01       0.8422E-01       0.0000E+00
           0.0000E+00       0.0000E+00       0.7397E-01


 MATRICE DE RIGIDITE EN CISAILLEMENT F (Pa.m):

           0.4173E+00       0.0000E+00
           0.0000E+00       0.4994E+00


 MATRICE DE RIGIDITE FLEXIONNELLE E :

           0.3948E+02       0.5381E+00       0.0000E+00       0.0000E+00
0.0000E+00       0.4159E+00       0.0000E+00       0.0000E+00
           0.5381E+00       0.1011E+01       0.0000E+00       0.0000E+00
0.0000E+00       0.8017E-02       0.0000E+00       0.0000E+00
           0.0000E+00       0.0000E+00       0.8877E+00       0.4159E+00
0.8017E-02       0.0000E+00       0.0000E+00       0.0000E+00
           0.0000E+00       0.0000E+00       0.4159E+00       0.3290E+01
0.4484E-01       0.0000E+00       0.0000E+00       0.0000E+00
           0.0000E+00       0.0000E+00       0.8017E-02       0.4484E-01
0.8422E-01       0.0000E+00       0.0000E+00       0.0000E+00
           0.4159E+00       0.8017E-02       0.0000E+00       0.0000E+00
0.0000E+00       0.7397E-01       0.0000E+00       0.0000E+00
           0.0000E+00       0.0000E+00       0.0000E+00       0.0000E+00
0.0000E+00       0.0000E+00       0.4173E+00       0.0000E+00
           0.0000E+00       0.0000E+00       0.0000E+00       0.0000E+00
0.0000E+00       0.0000E+00       0.0000E+00       0.4994E+00
```

```
  ================================================================

                R E P O N S E S    S T A T I Q U E S
                     ========================


                     ========================
                           DEPLACEMENTS
                     ========================


DEFLEXION MAXIMALE :

NOEUD              DEPLACEMENT  W

   13                0.1199E+00


CONTRAINTES MAXIMALES DANS LES PLIS (REPERE LOCAL) :

PLI      SIGMA_1      SIGMA_2    SIGMA_12    SIGMA_13    SIGMA_23

  1     0.1955E+00  0.6544E-01  0.5813E-01  0.2390E+00  0.1641E+00
  2     0.1003E+00  0.1411E-02  0.9613E-02  0.2390E+00  0.1641E+00
  3     0.2652E+00  0.6588E-01  0.6345E-01  0.2390E+00  0.1641E+00
  4     0.4242E+00  0.1311E+00  0.1182E+00  0.2390E+00  0.1641E+00


CONTRAINTES MAXIMALES DANS LA PLAQUE :

    SIGMA_X     SIGMA_Y    SIGMA_XY    SIGMA_XZ    SIGMA_YZ

  0.4242E+00  0.1311E+00  0.1182E+00  0.2390E+00  0.1641E+00
```

CHAPITRE V

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

V.1 Introduction

Dans le cas de l'étude de comportement statique des plaques stratifiées, l'analyse la plus complexe est celle des stratifiés constitués d'un empilement quelconque présentant des couplages membrane-flexion, membrane-torsion et flexion-torsion. Dans le but d'effectuer une étude qui tiens en compte les différentes configurations de couplages, nous avons établi un programme informatique permettant, par la méthode des éléments finis, de calculer les solutions statiques de ces plaques (flèche, déformations, contraintes). Le programme développé peut être utilisé pour l'analyse des plaques minces ou épaisses constituées d'un matériau isotrope ou composite anisotrope (à base de fibres unidirectionnelles de différentes orientations et diverses séquences d'empilement). Afin de vérifier le degré d'exactitude des résultats obtenus par le présent programme, une étude comparative sera faite tout d'abord, des études paramétriques seront par la suite effectuées.

V.2 Applications

Nous considérons dans toutes les applications qui viennent, le cas d'une plaque rectangulaire de dimensions $a \times b \times h$, cette plaque est discrétisée en 15×15 éléments, soit au total 4805 degrés de liberté. Les résultats sont présentés en termes adimensionnels dans le but de faciliter l'étude comparative

Les conditions aux limites suivantes sont utilisées,

Pour une plaque en appuis simples sur les quatre cotés,

x=0, x=a $\quad v_0 = w_0 = \theta_y = 0$

y=0, y=b $\quad u_0 = w_0 = \theta_x = 0$

Pour une plaque encastrée sur les quatre cotés

$u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0$.

La plaque est soumise à une charge repartie sinusoïdale q de la forme :

$$q(x, y) = q_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} \tag{V.1}$$

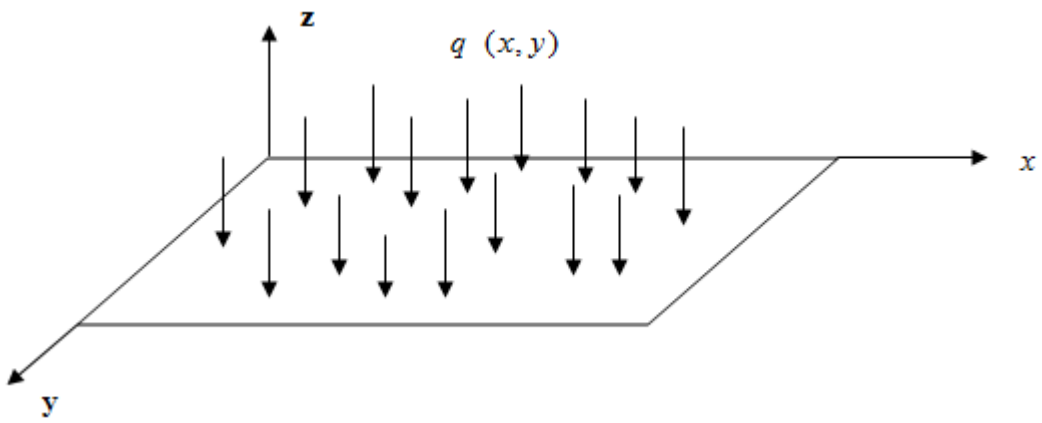


Figure V.1 *Représentation d'une plaque soumise à une charge sinusoïdale*[16]

Le matériau utilisé est un composite de caractéristiques mécaniques :

$$E_1 = 40E_2, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

V.2.1 Validation

a. Calcul de la flèche

Dans cette application, l'effet de nombre de couches (*n*), de l'orientation de fibres (θ) et du rapport épaisseur/longueur (*a/h*) sur la déflexion au centre de la plaque (maximale) est examiné. La plaque est supposée carrée sur appuis simples. Le stratifié considéré est constitué de *n* couches équilibrés orientées suivant l'empilement (θ/-θ/θ/-θ…). Les valeurs de θ utilisées sont (θ=5° ,30° ,45°)

Les résultats obtenus pour la flèche maximale sont calculés pour des différents rapports (*a/h*) et sont dressés sur le tableau 5.1. Sur le même tableau sont aussi reportés les résultats analytiques obtenus par Reddy [17] (Closed Form Solution CFS). Pour comparaison, les résultats sont présentés sous forme adimensionnelle, l'expression adimensionnelle suivante est utilisée :

$$w^* = w_0\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) * \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} \qquad \text{(V.2)}$$

Les valeurs obtenues par le présent travail (PT) et ceux de Reddy [17] ont une bonne exactitude selon les résultats présentés dans le tableau 5.1. Ceci est valable pour tous les rapports (*a/h*).

On remarque aussi que le programme répond bien dans la situation des plaques minces (*a/h*>10), ce qui justifié notre choix de départ (théorie, éléments de référence, facteur de correction..). A noter que l'intégration réduite à été utilisée dans le calcul de la matrice de rigidité.

Pour plus clarification, d'après la courbe de la variation de la flèche en fonction du rapport *a/h* dans le cas de θ=5°. On a une chute de la flèche adimensionnelle en fonction du rapport *a/h*, de plus de 80 % de sa valeur lorsqu'on passe de la situation des plaques épaisses vers la situation des plaques minces. (Figure 5.2 et 5.3)

Tableau V.1 *Flèches maximale adimensionnelle, ($w^* \times 10^2$), en fonction du nombre de couches, l'orientation des fibres, et le rapport a/h. Plaque carrée simplement appuyée, empilement (-θ/θ/-θ/...), Charge transversale sinusoïdale réparti (n =2 à 10, n= nombre de couches).*

a/h	Source	$\theta = 5°$		$\theta = 30°$		$\theta = 45°$	
		n=2	*n=10*	*n=2*	*n=10*	*n=2*	*n=10*
2	PT	3.7690	3.6890	3.2080	2.9910	3.0920	2.9150
	CFS	3.7849	3.6899	3.3330	2.9934	3.2300	2.9175
4	PT	1.3060	1.2610	1.0820	0.8888	1.0190	0.8434
	CFS	1.3165	1.2611	1.2155	0.8904	1.1576	0.8450
10	PT	0.4805	0.4461	0.4707	0.2885	0.4337	0.2632
	CFS	0.4883	0.4463	0.6099	0.2901	0.5773	0.2647
20	PT	0.3516	0.3179	0.3819	0.2017	0.3478	0.1803
	CFS	0.3586	0.3181	0.5224	0.2033	0.4944	0.1818
50	PT	0.3148	0.2813	0.3568	0.1774	0.3231	0.1571
	CFS	0.3216	0.2815	0.4979	0.1789	0.4712	0.1586
100	PT	0.3095	0.2760	0.3532	0.1739	0.3195	0.1538
	CFS	0.3162	0.2763	0.4944	0.1755	0.4678	0.1553

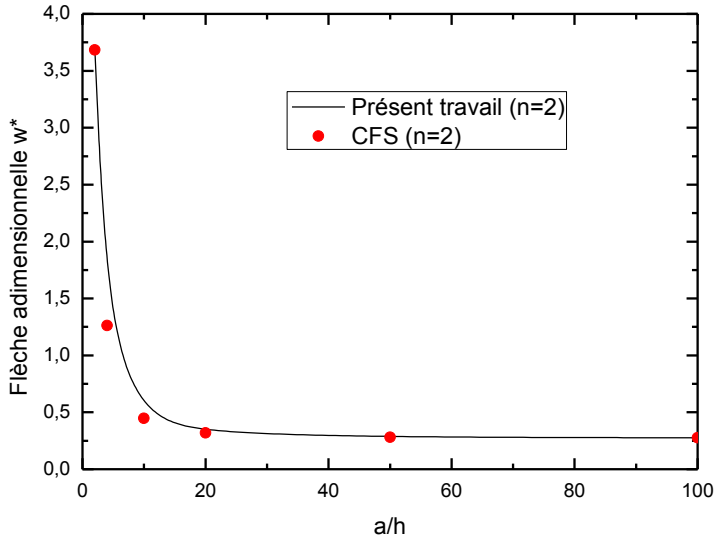


Figure V.2 *Flèche maximale adimensionnelle* (w^*) *en fonction du rapport (a/h) n=2, empilement (θ/- θ) avec θ=5°, charge sinusoïdale*

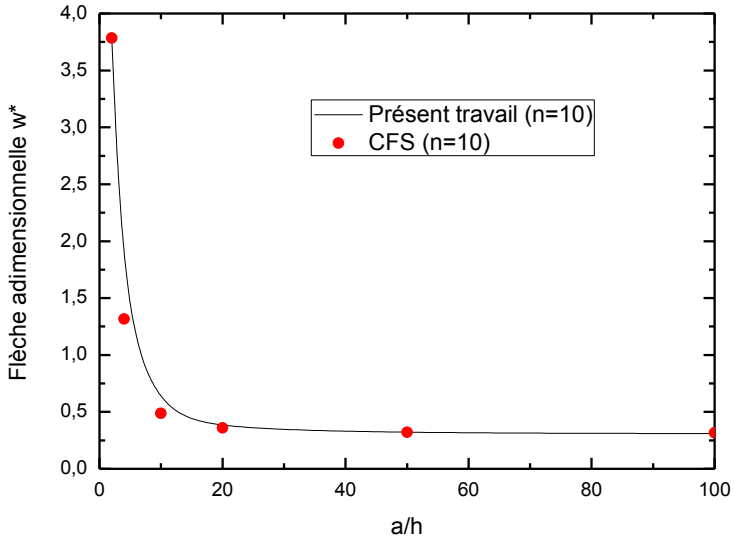


Figure V.3 *Flèche maximale adimensionnelle* (w^*) *en fonction du rapport (a/h) n=10, empilement (θ/- θ) avec θ=5°, charge sinusoïdale*

b. Calcul des contraintes

Afin de montrer l'efficacité du présent programme dans le calcul des contraintes, nous utilisons les mêmes données de l'application précédente pour calculer les contraintes normales et tangentielles maximales produites dans la plaque**.**

Pour raisons de comparaison, nous exprimons les contraintes sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\sigma_{xx}^{*} = \sigma_{xx}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2})\frac{h^2}{b^2 q_0} \quad ,\sigma_{yy}^{*} = \sigma_{yy}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2})\frac{h^2}{b^2 q_0} \quad , \sigma_{xy}^{*} = \sigma_{xy}(0,0,\frac{h}{4})\frac{h}{bq_0},$$

$$\sigma_{yz}^{*} = \sigma_{yz}(\frac{a}{2},0,0)\frac{h}{bq_0} \quad ,\sigma_{xz}^{*} = \sigma_{xz}(0,\frac{b}{2},0)\frac{h}{bq_0} \tag{5.3}$$

Les résultats numériques obtenus par le présent travail sont comparés à ceux obtenus analytiquement par Reddy [17] (CFS) et sont présentés sur le tableau 5.2. Les résultats concernent les contraintes normales σ_{xx}, σ_{yy} et la contrainte tangentielle σ_{xy} Une bonne exactitude est obtenue sur les valeurs calculées.

Tableau V.2 *Contraintes adimensionnelles en fonction de nombre du couches, l'orientation des fibres, et le rapport a/h, pour une plaque carrée simplement appuyée, empilement (-θ/θ/-θ/...), Charge transversale sinusoïdale réparti (n=10, n= nombre de couches).*

a/h	source	$\theta = 5°$			$\theta = 30°$			$\theta = 45°$		
		σ^*_{xx}	σ^*_{yy}	σ^*_{xy}	σ^*_{xx}	σ^*_{yy}	σ^*_{xy}	σ^*_{xx}	σ^*_{yy}	σ^*_{xy}
2	PT	0.3361	0.0966	0.0869	0.2966	0.1016	0.1835	0.1486	0.1486	0.1512
	CFS	0.3324	0.0964	0.0846	0.1530	0.0786	0.1688	0.1430	0.1421	0.1392
4	PT	0.4459	0.0554	0.0535	0.2470	0.0862	0.1528	0.1487	0.1487	0.1510
	CFS	0.4423	0.0551	0.0511	0.2011	0.0890	0.1425	0.1430	0.1421	0.1392
10	PT	0.5197	0.0280	0.0425	0.2410	0.0893	0.1332	0.1489	0.1489	0.1504
	CFS	0.5146	0.0279	0.0290	0.2298	0.0865	0.1252	0.1430	0.1421	0.1392
20	PT	0.5315	0.0228	0.0435	0.2470	0.0899	0.1361	0.1489	0.1489	0.1499
	CFS	0.5286	0.0227	0.0246	0.2389	0.0871	0.1218	0.1430	0.1421	0.1392
50	PT	0.5354	0.0212	0.0534	0.2490	0.0901	0.1371	0.1489	0.1489	0.1494
	CFS	0.5327	0.0212	0.0233	0.2407	0.0873	0.1208	0.1430	0.1421	0.1392
100	PT	0.5358	0.0210	0.0437	0.2492	0.0901	0.1371	0.1489	0.1489	0.1493
	CFS	0.5333	0.0209	0.0231	0.2410	0.0873	0.1207	0.1430	0.1421	0.1392

La figure 5.4 montre la variation des contraintes normales σ_{xx} , σ_{yy} en fonction du rapport *a/h*. Une variation importante de ces contraintes est observée dans l'intervalle des plaques épaisses (*a/h*<10), par contre l'effet de l'épaisseur devient négligeable en passant à la zone des plaques minces.

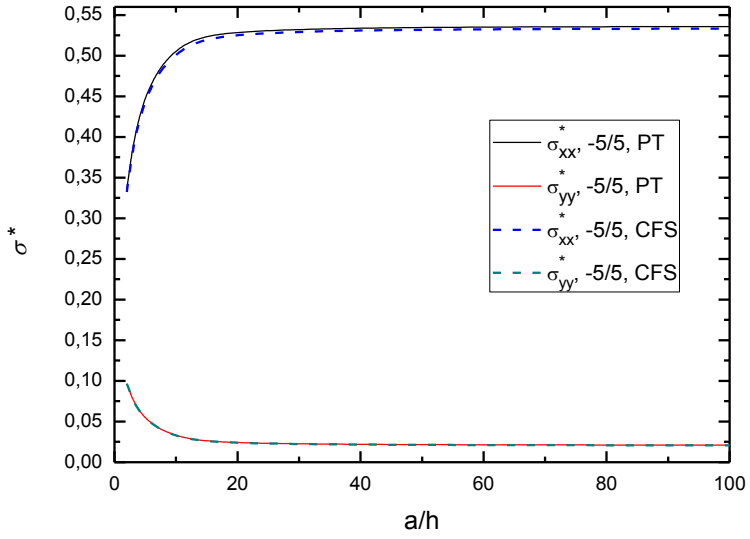


Figure V.4 *Variation des contraintes maximales en fonction du rapport (a/h) pour une plaque carrée sur appuis simples composée de deux couches (θ/- θ) avec θ=5*

V.2.2 Influence du nombre des couches

On considère une plaque carrée simplement appuyée, elle est constituée de *n* couches équilibrées orientées suivant l'empilement (θ/-θ/θ/-θ…), Avec un rapport *a/h* est pris égal à 2.

La figure 5.5 présente les résultats obtenus par la flèche maximale. Ces résultats sont calculés pour des valeurs de n entre 2 et 20 couches et sont adimensionnalisés par l'expression 5.2.

On remarque que la flèche décroit avec l'augmentation de nombre de couches avec une chute plus de 20% dans le passage de 2 à 6 couches, puis une stabilité autour d'une seule valeur après le dépassage de 14 couches.

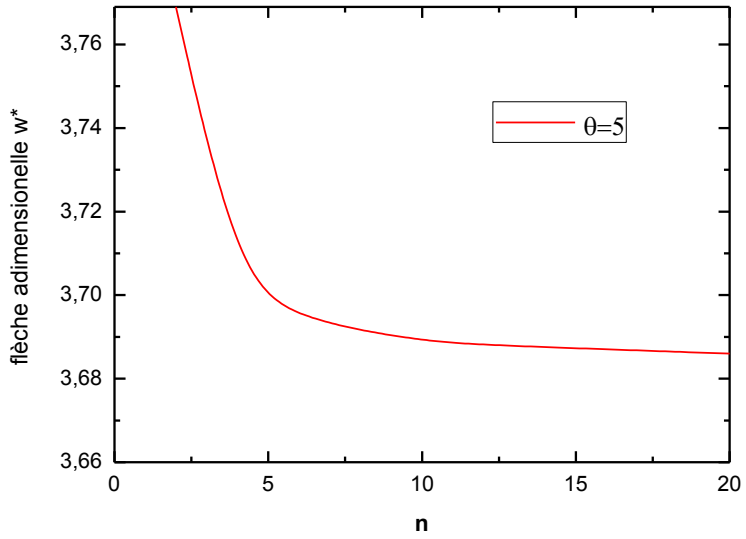


Figure V.5 *Influence du nombre de couches "n" sur la flèche maximale adimensionnelle (w^*) Plaque carrée sur appuis simples, charge sinusoïdale, empilement (θ/-θ/θ/-θ…).*

Sur la figure 5.6 on montre l'effet du nombre de couches "*n*" sur les contraintes maximales $\sigma_{xx}^*, \sigma_{yy}^*, \sigma_{xy}^*$. Les courbes obtenues indiquent que les contraintes maximales se décroissent avec l'augmentation du nombres de couches jusqu'à *n*=6, elles tendent par la suite vers une valeur constante pour *n*>13. On remarque aussi que les courbes des contraintes σ_{xx}^* et σ_{yy}^* sont confondues.

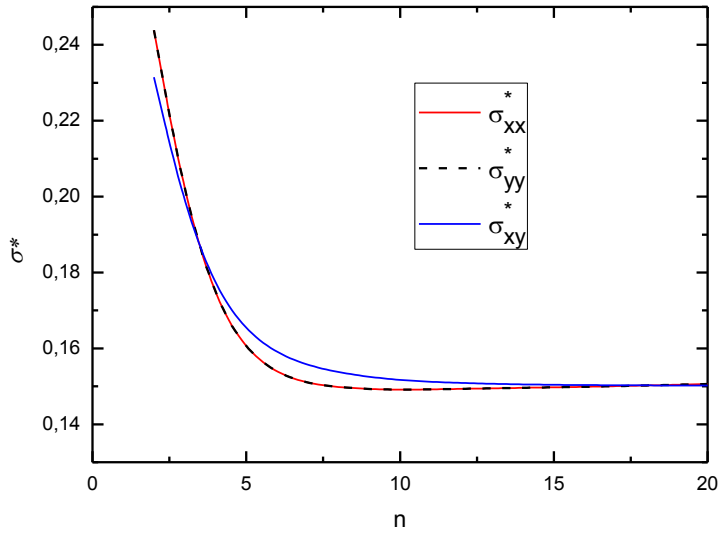


Figure V.6 *Influence du nombre de couches sur les contraintes maximales d'une plaque carrée simplement appuyée constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique (-45°/45°/-45°...)*

V.2.3 Influence de l'orientation des fibres

Dans cette application, nous examinons l'effet de l'orientation des fibres sur la déflexion maximale d'une plaque carrée sur appuis simples. Cette plaque est constituée d'une seule couche orientée suivant θ. l'angle d'orientation varié de 0° à 90°. Avec un rapport *a/h* est pris égal à 20.

La figure 5.7 présente La variation de la flèche adimensionnelle $w*$ en fonction de l'orientation des différentes des fibres. On remarque que la flèche $w*$ augmente en fonction de l'angle θ jusqu'à 45°. Les valeurs minimales sont obtenues lorsque la direction des fibres coïncide avec les directions *x* et *y* (0° et 90°).

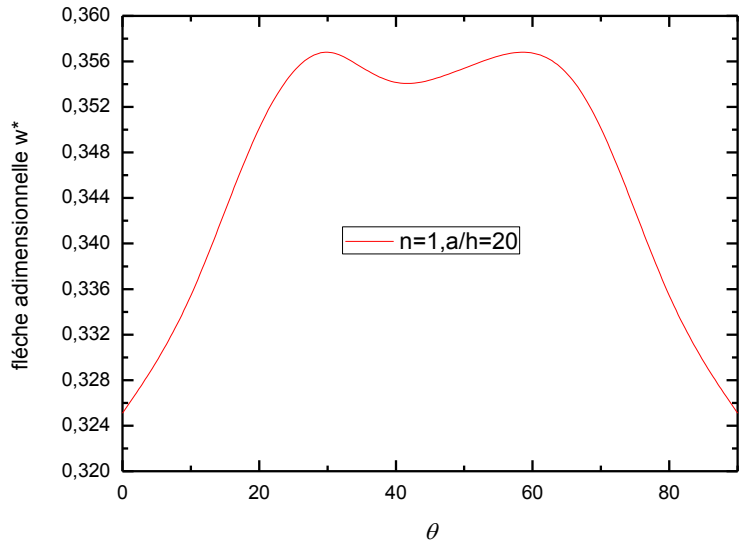


Figure V.7 *variation de la flèche maximale en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée simplement appuyée à une seule couche sous une charge sinusoïdale*

Dans cette section, nous examinons la variation des contraintes maximales adimensionnelles en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire de rapport *a/h=2*. Deux rapports *a/b* sont considérés à savoir ; 1 et 3. La plaque est constituée d'une seule couche orthotrope. Les conditions aux limites utilisées sont celles de l'appui simple.

La figure 5.8 représente la variation des contraintes adimensionnelles en fonction de l'angle d'orientation des fibres. Les résultats obtenus pour les contraintes montrent que ces dernières varient symétriquement autour de θ=45°, ceci s'applique sur les deux types de plaques considérées. On remarque aussi que les contraintes de la plaque carrée sont supérieures à ceux de la plaque rectangulaire. Les résultats obtenus pour la contrainte σ_{xx}^{*}, sont symétrique à ceux de la contraintes σ_{yy}^{*}.

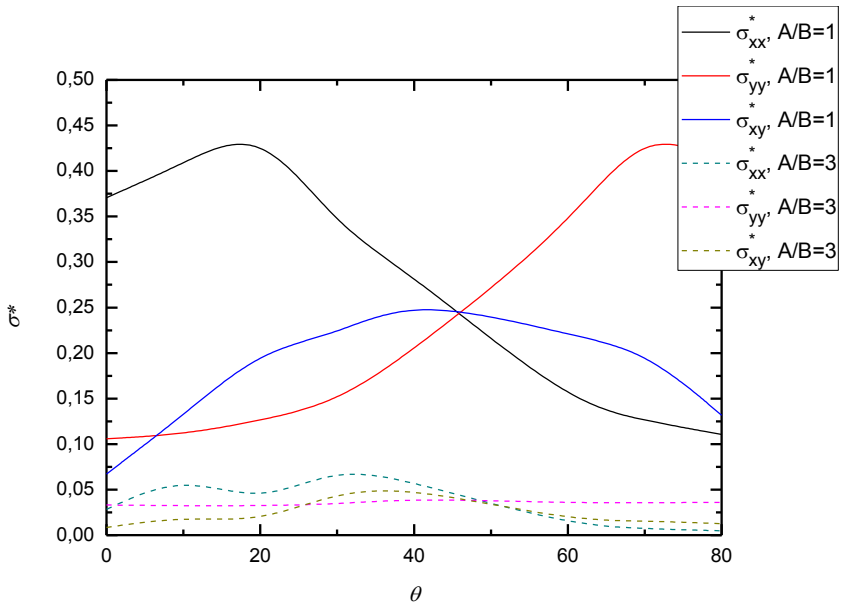


Figure V.8 *Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée simplement appuyée à une seule couche sous une charge sinusoïdale*

V.2.4 Influence de la séquence d'empilement

Nous considérons d'une plaque carrée simplement appuyée et nous choisissons quatre types de stratifications (0° /90° /90°/0°), (0° /90° /0°/90°), (45° /-45° /-45°/45°) et (0°/30° /45°/90°). Les trois premiers stratifiés assurent certain découplage entre les déformations en membrane, en flexion et en torsion. C'est pour cela ils sont largement utilisés dans la pratique, Le dernier stratifie est quelconque. Le rapport *a/h* varié de 2 à 100.

La figure 5.9 présente les résultats qui sont exprimés en terme adimensionnel. On observe que la déflexion maximale adimensionnelle décroit en fonction du rapport a/h pour les quatre cas étudiés. Aussi, on remarque que les deux courbes confondus du stratifiés (0° /90° /90°/0°), (0° /90° /0°/90°), sont limités par la courbe du stratifiés quelconques (0° /30° /45°/90°) au dessus et la courbe du stratifié équilibré (45° /-45° /-45°/45°) au dessous. Si on compare les flèches en tenant comptes leurs valeurs exactes, il faut inverser ces constatations à cause la dimensionnalité des résultats.

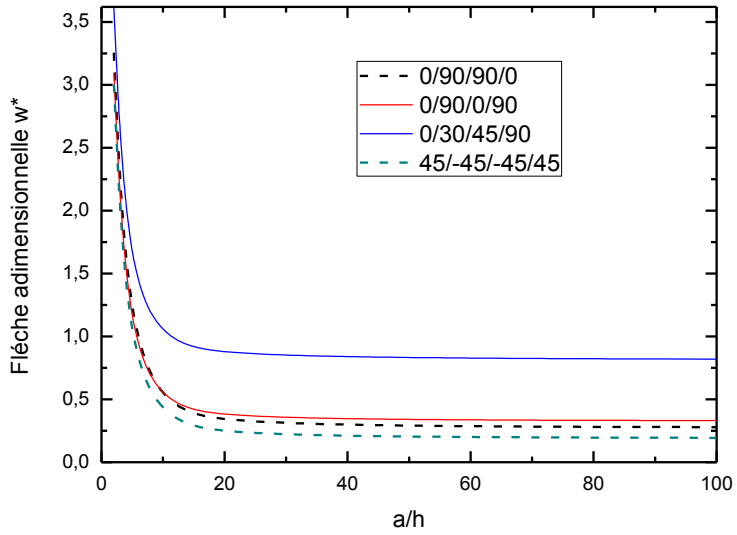


Figure V.9 *Influence de la séquence d'empilement sur la flèche maximale (w^*) pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale*

Pour le calcul des contraintes, on se limite aux cas des stratifications suivantes : (0° /90° /0° /90°), (45° /-45° /-45° /45°) et (0° /30° /45° /90°). Les résultats obtenus pour la contrainte normale σ_{xx}^{*} en fonction du rapport *a/h* sont présentés sur la figure 5.10. On constate à partir de cette figure que l'épaisseur n'a aucun effet sur cette contrainte, sauf pour le cas de stratifié quelconque, où on observe une légère variation de la contrainte dans la zone des plaques épaisses.

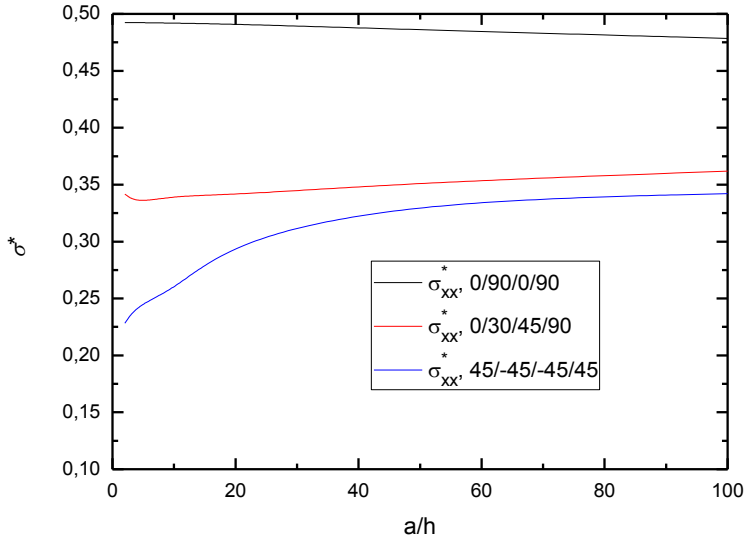


Figure V.10 *Influence de la séquence d'empilement sur la contrainte maximale* σ_{xx}^{*} *pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale*

V.2.5 plaques isotropes carrées simplement appuyées sous chargement uniforme

Une plaque carrée simplement appuyée soumise à un chargement uniforme a été considérée. Les propriétés mécaniques du matériau sont :

$$E = 10.92, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 4.2, \nu_{12} = 0.3$$

Le tableau 3.2 réuni les résultats du déplacement transversal adimensionnelle (w*), pour différents maillages et différents rapports d'épaisseurs (*a/h* = 2, 3, 4, 5 et 10).

$$w^{*} = (100Dw / a^{4}q_{0}) \qquad \text{Avec} \quad D = Eh^{3} / 12(1-\nu^{2}) \qquad \text{(V.3)}$$

Les résultats obtenus par l'élément développé (RSFT52) sont en bon accord avec la solution analytique de Kant [19] et ceux trouvés par des modèles d'éléments finis, basés sur des théories du premier ordre [263, 264] et des théories d'ordre supérieur [18].

Tableau V.3 *Flèches maximale adimensionnelle, ($w^* \times 10^2$), en fonction du rapport a/h. D'une plaque carrée simplement appuyée. Charge transversale uniforme. Pour (n=1, n=nombre de couche)*

Référence	modèles	Rapport d'épaisseur a/h				
		2	3	4	5	10
Présent élément (8×8)		0.9325	0.6402	0.5378	0.4904	0.4269
Kant et al. [18]		0.8530	0.6120	0.5222	0.4800	0.4230
Kant [19]		-	-	-	0.4800	0.4240

V.2.6 Plaque carrée à trois couches (0/90/0) sous chargement sinusoïdal :

La plaque est constituée de trois couches identiques (0 / 90 / 0) dont les caractéristiques mécaniques sont présentées dans le tableau 3.4. On choisit un seul maillage (8×8) ainsi que différents rapports d'épaisseurs (h/a = 0.25, 0.1 et 0.05)

Les propriétés mécaniques du matériau sont :

$$E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

Les résultats du déplacement transversal sont normalisés par la formule suivante:

$$w^* = \frac{w100E_2h^3}{a^4q_0}$$

Tableau V.4 *Déplacement transversal adimensionnelle, ($w^* \times 10^2$) d'une plaque stratifiée carrée à trois couches (0 / 90 / 0) simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal. En fonction du rapport d'épaisseur h/a.*

référence	Modèles EF	Rapport d'épaisseur h/a		
		0.25	0.1	0.05
Présent élément (8×8)		1.7760	0.6692	0.4918
Reddy [20]		1.9220	0.7130	0.5041
Pagano [21]		2.0059	0.7405	0.5164

V.2.7 Plaque carrée à sept couches (0/90/0/90/0/90/0) et cinq couches (0/90/0/90/0) sous chargement sinusoïdal et uniforme :

Une plaque carrée simplement appuyée soumise à un chargement sinusoïdale - uniforme a été considérée. Les propriétés mécaniques du matériau sont :

$$E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

Le tableau 3.2 réuni les résultats du cisaillement transversal adimensionnelle, pour différents maillages et différents rapports d'épaisseurs (*a/h* = 10, 20 et 100).

$$\sigma^*_{xx} = \sigma_{xx}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})\frac{h^2}{b^2 q_0} \quad , \sigma^*_{yy} = \sigma_{yy}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})\frac{h^2}{b^2 q_0} \quad , \sigma^*_{xy} = \sigma_{xy}(0,0,\frac{h}{4})\frac{h}{bq_0},$$

$$\sigma^*_{yz} = \sigma_{yz}(\frac{a}{2},0,0)\frac{h}{bq_0} \qquad , \sigma^*_{xz} = \sigma_{xz}(0,\frac{b}{2},0)\frac{h}{bq_0} \tag{5.3}$$

Les résultats obtenus par l'élément développé (RSFT52) sont en bon accord avec la solution analytique de Reddy [17], Les valeurs obtenues par le présent travail (PT) et ceux de Reddy [17] ont une bonne exactitude selon les résultats présentés dans le tableau 5.1. Ceci est valable pour tous les rapports (*a/h*).

Tableau V.5 *cisaillement transversal adimensionnelle, et déflexion maximal d'une plaque carrée simplement appuyée sous chargement sinusoïdal - uniforme. En fonction du rapport a/h.*

a/h	Charge	$\bar{\omega}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
Stratifié symétrique (0/90/0/90/0/90/0)							
10	SSL PT	0.6162	0.5053	0.4282	0.0218	0.3440	0.2242
	SSL[17]	0.6213	0.5021	0.4107	0.0221	0.3459	0.1998
	UDL PT	0.9571	0.7662	0.6332	0.0410	0.6823	0.4762
	UDL[17]	0.9643	0.7605	0.6016	0.0422	0.6927	0.4630
20	SSL PT	0.4778	0.5294	0.3986	0.0215	0.3760	0.2275
	SSL[17]	0.4796	0.5276	0.3748	0.0215	0.3617	0.1840
	UDL PT	0.7557	0.8061	0.5908	0.0388	0.7392	0.4906
	UDL[17]	0.7575	0.8059	0.5475	0.0396	0.7212	0.4438
100	SSL PT	0.4283	0.5281	0.3765	0.0213	0.6566	0.4323
	SSL[17]	0.4332	0.5276	0.3598	0.0213	0.3683	0.1774
	UDL PT	0.6839	0.8135	0.5662	0.0354	1.2330	0.8592
	UDL[17]	0.6896	0.8260	0.5241	0.0381	0.7322	0.4365
Stratifié symétrique (0/90/0/90/0)							
10	SSL PT	0.6277	0.5068	0.3868	0.0227	0.3613	0.1853
	SSL[17]	0.6277	0.5044	0.3852	0.0226	0.3535	0.1770
	UDL PT	0.9728	0.7681	0.5538	0.0431	0.6856	0.3455
	UDL[17]	0.9727	0.7649	0.5525	0.0403	0.6901	0.4410
20	SSL PT	0.4811	0.5303	0.3422	0.0218	0.3926	0.1826
	SSL[17]	0.4814	0.5285	0.3416	0.0217	0.3685	0.1591
	UDL PT	0.7578	0.8106	0.4852	0.0399	0.7424	0.4450
	UDL[17]	0.7581	0.8080	0.4844	0.0403	0.7166	0.4188
100	SSL PT	0.4286	0.5284	0.3160	0.0213	0.6931	0.3400
	SSL[17]	0.4333	0.5383	0.3240	0.0213	0.3746	0.1519
	UDL PT	0.6815	0.8168	0.4561	0.0381	1.2830	0.7506
	UDL[17]	0.6874	0.8264	0.4559	0.0386	0.7267	0.4108

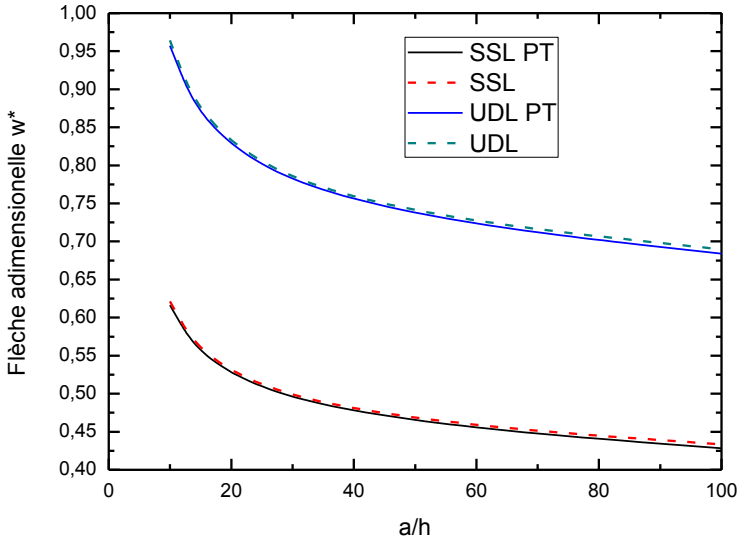


Figure V.11 *Influence de la séquence d'empilement sur la flèche maximale (w^*) pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale – uniforme (n=7 empilement (0/90/0/90/0/90/0))*

V.2.7 Plaque carrée à sept couches (0/90/0/90/0/90/0) et cinq couches (0/90/0/90/0) sous chargement sinusoïdal et uniforme :

Une plaque carrée simplement appuyée soumise à un chargement sinusoïdale - uniforme a été considérée. Les propriétés mécaniques du matériau sont :

$$E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

Le tableau 3.2 réuni les résultats du cisaillement transversal adimensionnelle, pour différents maillages et différents rapports d'épaisseurs (*a/h* = 10, 20 et 100).

Les résultats obtenus par l'élément développé (RSFT52) sont en bon accord avec la solution analytique de Reddy [17], Les valeurs obtenues par le présent travail (PT) et ceux de Reddy [17] ont une bonne exactitude selon les résultats présentés dans le tableau 5.1. Ceci est valable pour tous les rapports (*a/h*).

Tableau V.6 *cisaillement transversal adimensionnelle, et déflexion maximal d'une plaque carrée simplement appuyée sous chargement sinusoïdal - uniforme. En fonction du rapport a/h.*

a/h	Charge	$\bar{\omega}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
Stratifié antisymétrique (0/90)					
10	SSL PT	1.2370	0.7184	0.0528	0.2889
	SSL[17]	1.2373	0.7157	0.0525	0.2728
	UDL PT	1.9460	0.0107	0.0955	0.5865
	UDL[17]	1.9468	1.0715	0.0960	0.5772
20	SSL PT	1.1050	0.7155	0.0527	0.3329
	SSL[17]	1.1070	0.7157	0.0525	0.2728
	UDL PT	1.7550	0.0107	0.0938	0.6578
	UDL[17]	1.7582	1.0747	0.0943	0.5802
100	SSL PT	1.0500	0.7157	0.0524	0.6331
	SSL[17]	1.0653	0.3598	0.0525	0.3322
	UDL PT	1.6770	1.0761	0.0922	1.1820
	UDL[17]	1.6980	0.5241	0.0933	0.7297
Stratifié antisymétrique $(0/90)_4$					
10	SSL PT	0.6215	0.4972	0.0222	0.2806
	SSL[17]	0.6216	0.4950	0.0221	0.2728
	UDL PT	0.9661	0.7441	0.0416	0.5729
	UDL[17]	0.9660	0.7415	0.0402	0.5787
20	SSL PT	0.4909	0.4963	0.0222	0.2974
	SSL[17]	0.4913	0.4950	0.0221	0.2828
	UDL PT	0.7772	0.7485	0.0399	0.6100
	UDL[17]	0.7776	0.7415	0.0402	0.5839
100	SSL PT	0.4444	0.4843	0.0221	0.5482
	SSL[17]	0.4496	0.4950	0.0221	0.2728
	UDL PT	0.7102	0.7401	0.0387	1.0540
	UDL[17]	0.7175	0.7494	0.0391	0.5857

Conclusion générale

Dans ce mémoire, une étude du comportement statique des plaques composites stratifiées à base de fibres unidirectionnelles à été faite. L'étude a été effectuée par la méthode des éléments finis, où un champ de déplacement basé sur la théorie de REISSNER - MINDLIN a été utilisé. Cette théorie permet, en tenant compte de certaines conditions, de traiter à la fois les plaques minces et les plaques épaisses. L'élément de référence utilisé est un quadrilatère à 9 nœuds. Sur la base de la formulation développée, un programme informatique en Fortran a été établi par la suite dans le but de rechercher les solutions statiques des plaques stratifiées (déplacements, contraintes)

Le travail a été présenté en cinq chapitres, le premier chapitre est une généralité sur les matériaux composites, leurs caractéristiques et leurs domaines d'applications. Le deuxième chapitre a été consacré à l'analyse du comportement mécanique des matériaux composite (monocouche, matériaux isotrope, orthotrope…..) et des plaques stratifiées, ce chapitre ce divise en 4 partie qui explique les équations de comportement macroscopique et microscopique de la monocouche et les équations de stratifié et de sandwich. Dans le troisième chapitre, la formulation par élément finis du comportement statique à été traitée. Ainsi au chapitre quatre Une présentation du programme informatique développé a été faite. Le cinquième chapitre que fait le calcule des réponses statiques (flèches et contraintes) et appliquer pour multi application

D'après les résultats obtenus, dans le cinquième chapitre, on peut dire que l'emploi du programme développé constitue une approche appropriée pour la recherche des solutions statiques des plaques composites stratifiées à base de fibres unidirectionnelles.

Références

[1] J. Berthelot, “Mécanique des Matériaux et Structures Composites.”

[2] S. W.Tsai, “Introduction to composite materials.pdf.” Tecnomic Publishing company book includees index, n° 80-51965 Lancaster,Pennsylvania .USA, p. 453, 1980.

[3] B. Mourad, “Analyse statique des plaques composites hybrides renforcées avec un ou des plis en nanotubes de carbones mono-feuillets.,” pp. 2014–2015, 2015.

[4] centre d’animation régional en materiau Actives-CARMA-, “Glossaire des matériaux composites.”

[5] O. J. et D. C. Pastor J, “Homogénéisation périodique et composite à fibres actives.,” Université de Savoie .France 2002.

[6] N. Bourgeois, “Caractérisation et modélisation micromécanique du comportement et de l ’ endommagement d’un composite à matrice métallique,” Ecole Centrale de Paris 18 Janvier 1993.

[7] B. P, *Fabrication de profilés en composite par pultrusion.*, 1995th ed. .

[8] B. J. M. et Cherstensen, “Matériaux composites.,” *Press. l’école Natl. des Ponts Chaussées Paris*, pp. 87–128, 1992.

[9] C. H. N. and Y. S. P.C.Yang, *Elastic wave propagation in heterogeneous plates.* int.J.Solids Struct, 1966.

[10] Y. Stavsky, “On the theory of symmetrically heterogeneous plates having the same thikness variation of the elastic modulition.” American Elsevier, New York, p. 105, 1965.

[11] AUTARK.KAW, *Mecanics of composite materials.*, 2006th ed. Taylor and francais groupe .LLC.

[12] M. Whitney, *Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads.* J. Appl. Mech., 1984.

[13] J. N. R. and T. Kuppusamy, “Natural vibrations of laminated anisotropic plates.” J. Appl. Mech., pp. 31–38, 1951.

[14] S. A. T. and W. T. V. W. H. Press, B. P. Flannery, “Numerical recipes the art of scientific computing.” Cambridge University Press, 1986.

[15] B. Mourad, “Présentation du programme informatique,” université de Médea, 2011.

[16] B. Mourad, “Resultats et discussions,” université de Médea, 2011.

[17] J.N.REDDY, *Mechnics of laminated composite plates and shells theory and analysis.*, Second edi. USA: library of congress cataloging -in-publication data, 2004.

[18] and O. Z. Kant, T., D. Owen, “A refined higher-order C plate bending element.” Computers & structures, pp. 177–183, 1982.

[19] T. Kant, “Numerical analysis of thick plates.” Computer methods in applied mechanics and engineering, pp. 1 –18, 1982.

[20] J. . Reddy, “A simple higher-order theory for laminated composite plates.” Journal of applied mechanics, pp. 745–752, 1984.

[21] N. Pagano, “Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates.pdf.” Journal of composite materials, pp. 20–34, 1970.