Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

Par

MOUSSOUNI Toufik **YAGOUB Abdelghani**

Thème

Etude des graphes sommet pancyclique

Composition du Jury:

M.	Dr.BOUCHOU Ahmed	M.C.B	U.Y.F.Médéa	Président
M.	SAHRAOUI Abdelkader	M.A.A	U.Y.F.Médéa	Encadreur
M.	ZEMIR Mohamed	M.A.A	U.Y.F.Médéa	Examinateur
M.	LEMDAMI Rachid	M.A.A	U.Y.F.Médéa	Examinateur

Date de soutenance: 8/07/2019

Table des matières

Résumé **5**

Abstract **6**

Remerciement **8**

Dedicace **9**

Introduction **12**

1 Généréralités sur la théorie des graphes **13**

1.1 Concepts fondamentaux 13

1.1.1 Graphes non orientés 13

1.1.2 Multigraphe 14

1.1.3 Graphe simple 14

1.1.4 Voisinages et degrés 15

1.1.5 Graphes particuliers 16

1.1.6 Invariants de graphes 22

1.1.7 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres 23

1.1.8 Quelques opérations sur les graphes 23

1.1.9 Ensemble dominant 24

1.1.10 Produit cartésien 24
1.1.11 Graphe grille 24
1.1.12 Graphe tore 25
1.1.13 Graphe cylindre 26

2 Résultats existants sur les graphes pancyclique et graphes sommet pancyclique 27

2.1 Graphe hamiltonien 27
2.2 Graphe sans étoile 28
2.3 Graphes pancyclique, graphes sommet pancyclique, graphes triangulairement, graphes à cycle plienement prolongeables 30
2.4 Résultats de la pancyclicité 31

3 Quelques résultats sur les graphes sommet pancyclique 33

3.1 Les graphes complets sont des graphes sommet pancyclique 33
3.2 les graphes roues sont des graphes sommet pancyclique 34
3.3 Les graphes totals des chaînes d'ordere n sont des graphes sommet pancyclique 36
3.4 Le graphe particulier icosaédrique est un graphe sommet pancyclique 37
3.5 Les graphes biparti ne sont pas sommet pancyclique 38
3.6 les graphes non connexe ne sont pas sommet pancyclique 38
3.7 Les graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde d'ordre $m \times n$ sont des graphes sommet pancyclique 39

Bibliographie 40

Liste des Figures

1.1.1 Un graphe simple 14
1.1.2 Un multigraphe. 14
1.1.3 Un graphe simple. 15
1.1.4 Un sous graphe 17
1.1.5 Un sous graphe 17
1.1.6 un cycle C4 et une chaîne P4. 18
1.1.7 graphe connexe 18
1.1.8 graphe non connexe 19
1.1.9 graphe complet 19
1.1.10 graphe biparti et graphe biparti-complet 20
1.1.11 un graphe sous complémentaire 21
1.1.12 Une étoile et un griffe 21
1.1.13 Arbre 22
1.1.14 K_6 et K_7 23
1.1.15 Graphe grille. 25
1.1.16 Un graphe grille 25
1.1.17 Un tore 26
1.1.18 Un cylindre 26

2.1.1 Un graphe hamiltonien 28

2.2.1 Un graphe milieu 30

3.1.1 Graphes complets. 34

3.2.1 les graphes roues W_4...W_7. 35

3.3.1 un graphe total d'une chaînes d'ordere n 36

3.4.1 Graphe icosaédrique. 37

3.5.1 H et G deux graphes biparti 38

3.7.1 Graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde. 39

Résumé

Notre objectif à travers ce mémoire est d'étudier les graphes sommet pancyclique, nous divisons nos étude par trois chapitres. Au premier chapitre nous représentons quelques définitions et notions de théories des graphes, ensuite dans le deuxième chapitre nous étudions quelques définitions, théorèmes et corolaires des graphes pancyclique et sommet pancyclique, un graphe G=(V, E) est dit sommet pancyclique si pour tout sommet $v \in V(G)$, et pour tout nombre entier k avec $3 \leq k \leq |V(G)|$, le graphe G contient $k - cycle$ qui contient v,et dans troisième chapitre nous étudions quelques résultats des graphes sommet pancyclique.

Abstract

Our goal in this thesis is to study the pancyclic vertex graphs. We've divided the study into three chapters. In the first chapter we montioned some definitions and symbols of the theories graphs. Then, in chapter 2, we studied some of the definitions and predictions of the graphs pancyclic and vertex pancyclic. We call the graph G (V, E) is a vertex pancyclical if for any vertex $v \in V(G)$, and for any integer number k with $3 \leq k \leq |V(G)|$, we say the graph G contains $k - cycle$ which contains v. In the third chapter we studied some of the pancyclic vertex graphs.

Remerciement

Louange á Allah,
le miséricordieux, sans Lui rien
de tout cela n'aurait pu être. Nous
remercions Allah qui nous a orienté
au chemin du savoir et les portes de la science.
Notre encadreur SAHRAOUI ABDELKADER pour son encouragement,
son aide et son suivi pour terminer ce travail.
Nous tenons á remercier également les membres de
jury pour avoir accepter de jurer ce mémoire.
Nos remerciements les plus sincéres sont
adressés á mes enseignants, qui ont
contribué durant nos études á
notre formation et tous les
enseignants de l'Université
DR.YAHIA FARES de Médéa
Enfin, merci á
nos familles, pour leurs
amours et leurs soutiens
constant..

Dedicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

A toute ma famille.

A *mes frères.*

A *mes amies.*

A mon chèr *binome* ***TOUFIK*** *et sa famille.*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

YAGOUB ABDELGHANI

Dedicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

A toute ma famille.

A *mes frères.*

A *mes amies.*

A mon chèr *binome* ***ABDELGHANI*** *et sa famille.*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

MOUSSOUNI TOUFIK

Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au $XVIII$ e siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (voir page de couverture, les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

Historiquement, La théorie des graphes a trop développée la notion de graphes hamiltoniens, (hamilton[2],[3]), qui a commencer les travaux sur les chaînes et cycle hamiltoniens en résolvant le problème des ponts et des iles de koningberg. par suite, d'autres chercheurs ont développée et élaborés les notion pancyclicité (J.A. Bondy[4]) et sommets pancyclicité (R. Haggkvist, R.J. Faudree[10]). Un graphe G est dite pancyclique si pour tout entier k avec $3 \leq k \leq |V(G)|$ le graphe G est contient k-cycle. Un graphe sommet pancyclique si le graphe $G(V, E)$ si pour tout entier k avec $3 \leq k \leq |V(G)|$ et $x \in V$, G est contient k-cycle qui contient x.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XX e siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments: réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,. . .

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

Chapitre 1

Généréralités sur la théorie des graphes

Ce chapitre est consacré aux généralités. Nous y faisons un bref passage sur les notions usuelles de la théorie des graphes. Nous introduisons ensuite quelques concepts généraux quelques graphes pancyclique et graphes sommet pancyclique .

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Graphes non orientés

Un graphe $G = (V,E)$ est défini par deux ensembles finis V et E dits ensembles des sommet et d'arêtes respectivement. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G; noté par $n(G)$, et le cardinal de E est appelé la taille de G; noté par $m(G)$. Une arête e $\in E$ est un couple de sommets (u,v), elle est notée par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Une arête $e = uv$ est une boucle si les extrémités u et v sont confondues.

Un graphe est dit simple s'il est sans boucles est sans arêtes multiples. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis.

Par exemple, la figure 1.1.1 un graphe simple $G = (V,E)$ avec $V\ (G) = \{a,b,c,d,e,f\}$ et $E(G) = \{ab,bc,cd,de,ea,bd,af\}$.

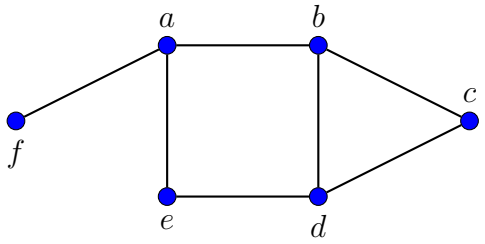


Figure 1.1.1 : Un graphe simple

1.1.2 Multigraphe

Définition 1.1.1 *Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets.*

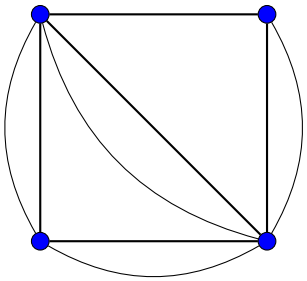


Figure 1.1.2 : Un multigraphe.

1.1.3 Graphe simple

Définition 1.1.2 *Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (deux arêtes distinctes joignantes la même paire de sommets). La figure* 1.2.3 *illustre un graphe simple $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{ab, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$.*

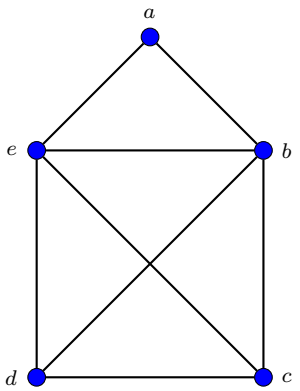


Figure 1.1.3 : Un graphe simple.

1.1.4 Voisinages et degrés

- Deux sommets u et v sont *adjacents* si l'arête $uv \in E$. Les sommets u et v sont alors dits *voisins*.
- Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.
- Une arête est *incidente* à un sommet v, si v est l'une de ses extrémités.
- Le *voisinage ouvert* d'un sommet v de G, noté par $N_G(v)$, est défini par

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$$

et le *voisinage fermé* de v, noté par $N_G[v]$, est défini par

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$. Parfois pour alléger les notations et s'il n'y a aucune confusion sur le graphe G, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement. De

même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

- Le *degré* d'un sommet v de G , noté par $d(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à u. Dans un graphe simple, $d(v) = |N_G(v)|$. Un sommet de degré nul est dit sommet *isolé* et un sommet de degré un est dit sommet *pendant*, et un sommet qui est adjacent à un sommet pendant est dit *support*. On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum de G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $d(v)$, Δ, et δ pour désigner $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement.

Définition 1.1.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V ensembles des sommets et E ensembles des arêtes. $\sigma_2(G) = min\{d_G(u) + d_G(v)|u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$*

1.1.5 Graphes particuliers

graphe partiel et Sous-graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V ensembles des sommets et E ensembles des arêtes. Le sous-graphe de G engendré par $A \subseteq V$ est le graphe dont les sommets sont ceux de A et dont les arêtes sont celles de G ayant leurs deux extrémités dans A. le sous graphe induit par A est le graphe $G[A] = (A, \{xy : xy \in E \text{ et } \{x, y\} \subset A\})$. Voir la figure 1.2.4 qui illustre un sous graphe du graphe, la figure 1.2.5 engendrer par $A = \{a, b, c, d, e\}$.

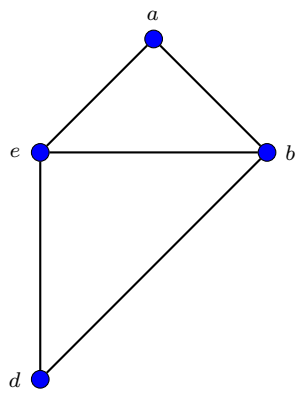


Figure 1.1.4 : Un sous graphe

Définition 1.1.4 *Le graphe partiel de G défini par $W \subseteq E$ est le graphe dont les sommets sont ceux de G et dont les arêtes sont celles de W. Voir la figure 1.1.10 qui illustre un graphe partiel du graphe 1.1.5 .*

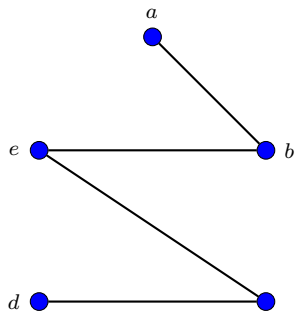


Figure 1.1.5 : Un sous graphe

Chaîne

Une Chaîne P d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie $[v_1, v_2....., v_k]$ de sommets telle que pour chaque $1 \leq i \leq k-1$,v_i v_{i+1} est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne P. La longueur d'une chaîne est le nombre de ses arêtes ($k-1$ pour la chaîne prècédant). Une Chaîne est dite élémentaire (respectivement, simple) si tout ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Une corde est une arête

reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée P_n, est une chaîne élémentaire sans cordes.

Cycle

Un cycle est une chaîne dont ses deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire notée C_n est un cycle de n sommets distincts. la figure 1.1.6 contient un cycle C_4 et une chaîne P_4.



Figure 1.1.6 : un cycle C4 et une chaîne P4.

Graphe connexe

Définition 1.1.5 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets $u, v \in V$. Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe maximal connexe.*

Un arête e est appelée un isthme si le graphe $G - e$ possède plus des composantes connexes que G i.e. si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe. Voir les figures 1.1.7 et 1.1.8.

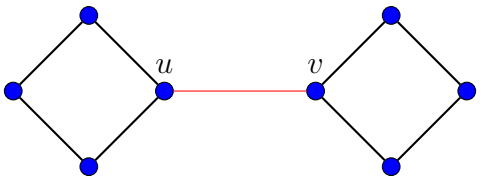


Figure 1.1.7 : graphe connexe

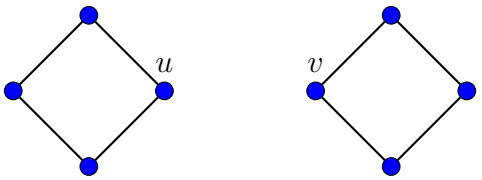


Figure 1.1.8 : graphe non connexe

Graphe $h-$connexe

Définition 1.1.6 *Pour un graphe connexe G, la connectivité $k(G)$ est le nombre minimum de sommets de G dont la suppression déconnecte le graphe G. G est dit $h-$connexe si sa connectivité $k(G)$ est supérieure ou égale à h.*

Graphe complet

Le graphe complet d'ordre n, noté par K_n est le graphe dans lequel tous ses sommets sont de degré $n-1$. Voir la figure 1.1.9 .

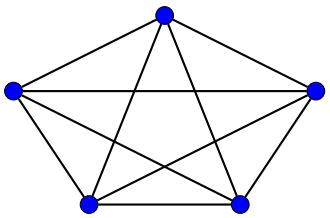


Figure 1.1.9 : graphe complet

Graphe biparti et graphe biparti-complet

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** si V peut être partitionner en deux stables V_1et V_2 . Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti et chaque sommet de V_1 est relié à tout les sommets de V_2, si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$, plus généralement, un graphe $G = (V, E)$ est dit k-parti ($k \geq 2$), si V peut être partitionné en k stables V_1 ,V_2 ,...,V_k, il est dit multiparti-complet si, pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j . Voir la figure 1.1.10 .

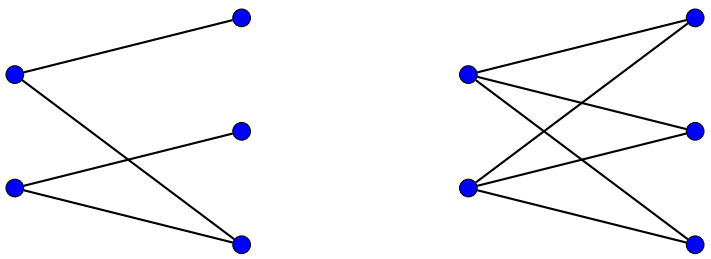


Figure 1.1.10 : graphe biparti et graphe biparti-complet

Graphe complémentaire

Le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, noté $\bar{G} = (S, \bar{E})$, est un graphe vérifiant $\mid V \mid = \mid S \mid$ et deux sommets sont adjacents dans $\bar{G}$ si seulement s'ils ne le sont pas dans G. Voir la figure 1.1.11 .

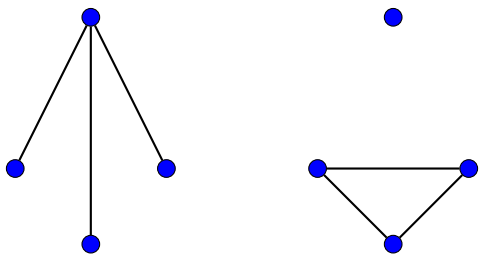


Figure 1.1.11 : un graphe sous complémentaire

Graphe régulier

Un graphe G est k-régulier si tous ses sommets sont de même degré k.

Étoile

Une étoile est le graphe biparti complet $K_{1,S}$. le sommet de degré S est appelé centre de l'étoile. Cas particulier si $S = 3$, $K_{1,3}$ est appelé griffe. Voir la figure 1.1.12 .

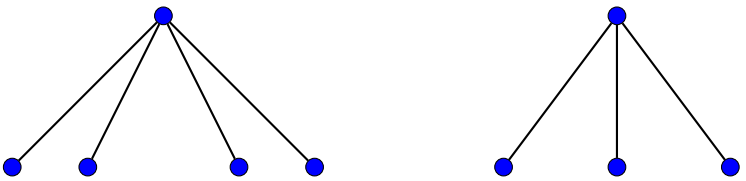


Figure 1.1.12 : Une étoile et un griffe

Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycles il contient exactement $(n-1)$ arête. Voir la figure 1.1.13 .

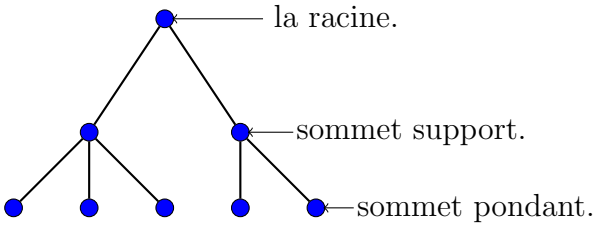


Figure 1.1.13 : Arbre

Forêt

Définition 1.1.7 *Une forêt est un ensemble d'arbres.*

Un graphe discret (nul)

Définition 1.1.8 *Un graphe discret est un graphe sans arêtes c'est-à-dire un graphe* $(0)-$ *régulier.*

1.1.6 Invariants de graphes

Stable

Définition 1.1.9 *Etant donné un graphe simple* G*, on appelle stable de* G *un ensemble de sommets de* G *deux a deux non adjacents.*
Un stable maximum de G *est un stable de cardinalité maximale cette est appelée nombre de stabilité, noté* $\alpha(G)$*.*

Clique

Définition 1.1.10 *Une clique d'ordre* n*, notée* K_n*, est un sous-graphe dans lequel tous ses sommets sont deux á deux adjacents entre eux donc tout ses sommets sons de degré* $n-1$*. Les graphes de la figure 1.1.13 sont* K_6 *et* K_7*.*

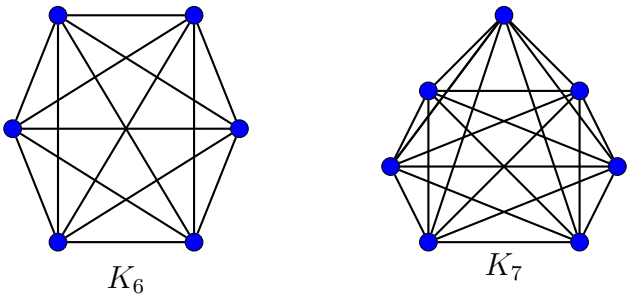


Figure 1.1.14 : K_6 et K_7

1.1.7 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres

Soit $G = (V, E)$ un graphe et u, v deux sommets de V.

- La *distance* entre u et v, notée $d(u, v)$, est la longueur de plus courte chaîne enter u et v.
- *L'excentricité* de v , noté $exc(v)$, est définie par $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$.
- Le *diamètre* de G est $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$.
- Le *rayon* de G est $r(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$.
- Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

1.1.8 Quelques opérations sur les graphes

- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Et soient v un sommet de G, et e une arête de G. On note $G - v$ le sous-graphe engendré par l'ensemble $V\backslash\{v\}$, c'est-à-dire: $G - v$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. On note $G - e$ le graphe $G' = (V, E\backslash\{e\})$, c'est -à-dire $G - e$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e . Pour

un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on note $G - S$ le sous-graphe engendré par $V \diagdown S$.

1.1.9 Ensemble dominant

Un sous−ensemble de sommets D de V est dit ensemble dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins un voisin dans D. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant minimal de G, appelé nombre de domination inferieure, est noté $\gamma(G)$. Et tout ensemble dominant de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$−ensemble. Un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$−ensembles.
Autres définitions de domination:
• Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si pour tout sommet $v \in V$, $|N(v) \cap D| \geq 1$.
• Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si $N[D] = V$.

1.1.10 Produit cartésien

Définition 1.1.11 *Soit $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ deux graphes. Le produit cartésien ou la somme cartésienne de G et H, notée par $G\square H$, est le graphe défini par :*

- $V(G\square H) = \{(u, v) : u \in V(G)\ et\ v \in V(H)\}$.
- $E(G\square H) = (u_1; v_1)(u_2; v_2) : (u_1 = u_2\ et\ v_1v_2 \in E(H))ou\ (v_1 = v_2\ et\ u_1u_2 \in E(G)\}$.

1.1.11 Graphe grille

Un graphe grille est le produit cartésien $P_m \square P_n$

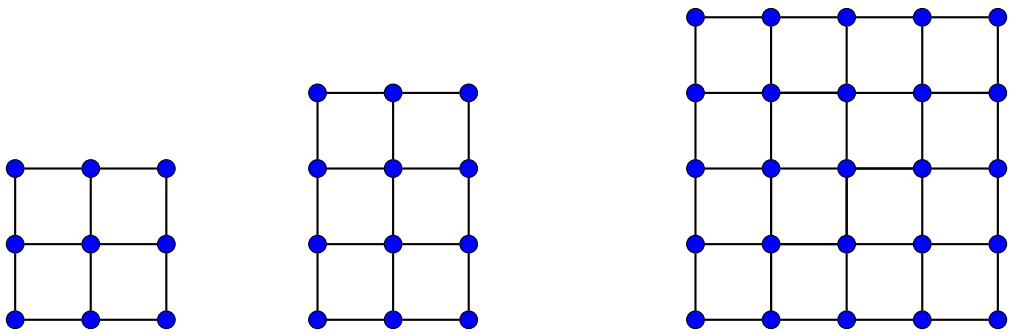


Figure 1.1.15 : Graphe grille.

Exemple 1.1.1 *La grille $P_3 \square P_4$.*

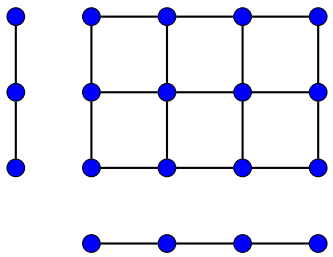


Figure 1.1.16 : Un graphe grille

1.1.12 Graphe tore

Un tore $T_{m \times n}$ est le produit cartésien de deux cycles C_m et C_n.

Exemple 1.1.2 *La tore $C_m \square C_n$.*

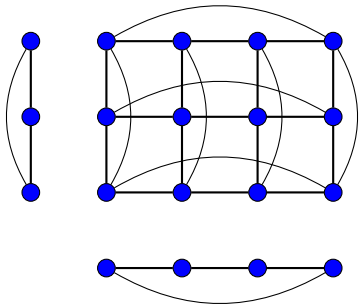


Figure 1.1.17 : Un tore

1.1.13 Graphe cylindre

Un cylindre $C_{y_{n\times m}}$ est le produit cartésien d'une chaine P_m et un cycle C_n.

Exemple 1.1.3 *La cylindre* $P_m \square C_n$.

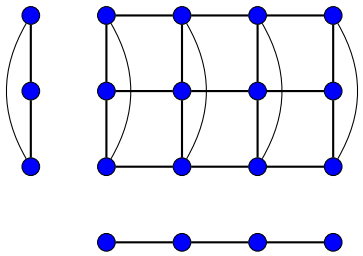


Figure 1.1.18 : Un cylindre

Chapitre 2

Résultats existants sur les graphes pancyclique et graphes sommet pancyclique

Le présent chapitre est consacré à la présentation des résultats antérieurs obtenus dans le domaine des graphes pancyclique et graphes sommet pancyclique .

2.1 Graphe hamiltonien

Définition 2.1.1 *Une chaîne hamiltonienne est une* ***chaîne*** *qui passe une fois et une seule fois par chaque sommet du graphe .*

Définition 2.1.2 *Un graphe qui contient un cycle hamiltonien est appelé graphe hamiltonien. Le graphe de figure 2.1.1 contient un graphe hamiltonien.*

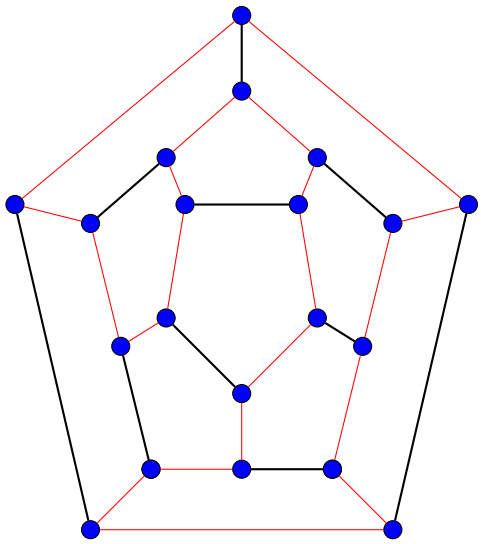


Figure 2.1.1 : Un graphe hamiltonien

Définition 2.1.3 *Un graphe est dit hamiltonien-connexe lorsque pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne hamiltonienne entre ces sommets.*

Théorème 2.1.1 *([12] **Ore**) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.*

Théorème 2.1.2 *[1] Tout graphe 2-connexe, k-regulier d'ordre $n \leq 3k$ est un hamiltonien.*

2.2 Graphe sans étoile

Il y a plusieurs familles célèbres et importantes de graphe sans étoile, donc nous en rappelons maintenant quelques-uns.

1. **Graphe adjoint d'un graphe**

   Soit $G = (X, E)$ un graphe. le graphe adjoint $L(G)$ de G est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommet par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacents.

2. **Complément de graphe sans triangle**

   C'est facile de voir G est un complément d'un graphe sans triangule si et seulement si son nombre de l'indépendance satisfait $\alpha(G) < 2$ et que chaque tel graphe est sans étoile.

3. **Graphe inflation**

   Par l'inflation de graphe H nous signifions un graphe qui est obtenu en remplacer chaque sommet x par un graphe complet $K_{d(x)}$ et en reliant chaque arête à un sommet différent de $K_{d(x)}$ clairement l'inflation de chaque graphe H est un graphe sans étoile.

4. **Graphe de comparabilité**

   Un graphe simple $G = (X, E)$ est appelé graphe comparable si c'est possible de diriger ses arêtes afin que le résultant graphique 1-Graphe (X, E) satisfaite:

   $(x, y) \in U, (y, z) \in U \quad \Rightarrow (x, z) \in U \quad$ (transitivité)

   $(x, y) \in U \qquad\qquad\qquad \Rightarrow (y, x) \notin U \quad$ (anti-symétrique)

   Clairement un graphe du bibartie est un graphe comparable autrement chaque sous-graphe d'un graphe comparable est un graphe comparable.

5. **Graphe milieu**

   Le graphe milieu de H est obtenu en insérer un sommet x dans le milieu de chaque arête e_i, $1 \leq i \leq |E(H)|$ et ajoutant l'arête $x_i x_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq |E(H)|$ si et seulement si e_i et e_j ont un sommet commun, le graphe milieu de

chaque graphe est un graphe sans étoile, c'est facile de voir que tout graphe inflation et tout graphe du milieu sont des graphes adjoints.

La figure 2.2.1 sont exemple d'graphe milieu

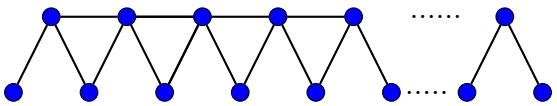


Figure 2.2.1 : Un graphe milieu

2.3 Graphes pancyclique, graphes sommet pancyclique, graphes triangulairement, graphes à cycle plienement prolongeables

Définition 2.3.1 *Un graphe $G=(V,E)$ est pancyclique si pour tout entier k avec $3 \leq k \leq |V(G)|$,le graphe G contient un $k-$cycle.*

Définition 2.3.2 *Un graphe $G=(V,E)$ est dit sommet pancyclique si pour tout sommet $v \in V(G)$,et pour tout entier k avec $3 \leq k \leq |V(G)|$,le graphe G contient $k-$cycle qui contient v.*

Définition 2.3.3 *Un cycle C dans un graphe $G(V,E)$ est prolongeable dans G si il existe un cycle C' dans G tel que $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)|+1$, Si il existe un cycle C' nous dirons que C peut être étendu à C' ou C' est une extension de C.*

Définition 2.3.4 *Un graphe G est dit graphe à cycle prolongeable si G contient au moins un cycle et pour chaque cycle non hamiltonien dans G est prolongeable.*

Définition 2.3.5 *Un graphe G est dit graphe à cycle pleinement prolongeable si G est un graphe à cycle prolongeable et chaque sommet de G appartient à un triangle de G.*

Définition 2.3.6 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit triangulairement connexe si pour chaque deux arêtes e_1,$e_2 \in E(G)$ il existe une chaine de $3-$cycles C_1, $C_2, ..., C_k$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$.*

Théorème 2.3.1 *[5] Chaque graphe triangulairement connexe sans étoile avec $|E(G)| \geq 3$ est sommet pancyclique.*

Théorème 2.3.2 *(Hendy) [11] si G un graphe d'ordre $n \geq 3$ et $\delta(G) \geq \dfrac{n+1}{2}$ alors G et sommet pancyclique.*

Théorème 2.3.3 *[4] [6] Soit $G(V, E)$ un graphe d'ordre $p \geq 3$ tel que $\sigma(G) \geq p$. alors*

1. G est hamiltonien
2. Si C est un cycle non hamiltonien dans G alors il existe un cycle C' dans G tel que $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$ ou $|V(C)| + 2$.

Corollaire 2.3.1 *[7] Si G est un graphe d'ordre n satisfait $\delta(G) \geq (n+1)/2$, alors G est un graphe à cycle plienement prolongeable.*

Corollaire 2.3.2 *[4] Soit Gun graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\sigma(G) \geq n$, alors G est pancyclique et $G = K_{n/2,n/2}$ où $K_{n/2} \times K_2$.*

Corollaire 2.3.3 *[4]Soit Ggraphe d'ordre $n \geq 3$ qui satisfait $\sigma(G) \geq n$ et C un cycle dans G de langueure k, avec $3 \leq k \leq n-2$. Alors il existe un cycle $C^{''}$ dans G tel que $V(C) \subseteq V(C^{''})$ et $\left|V(C^{''})\right| = |V(C) + 2|$.*

2.4 Résultats de la pancyclicité

• Conditions de la somme des degrés

Dans cette section , nous citons quelques théorèmes donnant des conditions suffisantes qui sont basées sur certains théorèmes relatifs à la pancyclicité.

Théorème 2.4.1 *(Bondy, 1971) [4] Si pour toutes les paires non adjacentes x, y, $d(x) + d(y) \geq n$,c'est-à-dire que si $\sigma_2(G) \geq n$, alors G est pancyclique, sauf si n est pair et $G \cong K_{n/2,n/2}$.*

Théorème 2.4.2 *(Schmeichel et Hakimi, 1988) [9] S'il existe des sommets consécutive sur un cycle hamiltonien ayant une somme de degrés d'au moins $n+1$, alors G est pancyclique*

Théorème 2.4.3 *(She-Min Zhang, 1988) [3] S'il existe des sommets x_1, x_2 sur un cycle Hamiltonien C tel que $d(x_1, x_2) = 2$, tel que $d(x_1) + d(x_2) \geq n+1$, alors G est pancyclique .*

Corollaire 2.4.1 *(Harris, 2009) [8] Si G est hamiltonien avec plus de $n/3$ sommets de degré suéprieure au egal $(n+1)/2$, alors G est pancyclique.*

Théorème 2.4.4 *(Haggkvist et al., 1981) [10] Si G est un graphe d'ordre $n \geq 4$ et G admet un cycle de longueur $(n-1)$ et un sommet x sur le cycle C avec $d(x) \geq n/2$, alors G est pancyclique.*

Théorème 2.4.5 *(Faudree et al., 1996) [2] S'il existe deux sommets x, y que sont les extrémités d'une chaîne hamiltoniene vérifiants $d(x) + d(y) \geq n+1$, alors G est pancyclique.*

Théorème 2.4.6 *(Harris, 2009) [8] Si G est hamiltonien díordre $n \geq 5$ avec un sommet de degré $n-2$, alors G est pancyclique.*

Chapitre 3

Quelques résultats sur les graphes sommet pancyclique

Nous avons présenté dans le deuxième chapitre des résultats sur les graphes pancyclique et graphes sommet pancyclique.

3.1 Les graphes complets sont des graphes sommet pancyclique

Définition 3.1.1 *Le graphe complet d'ordre n, noté par K_n est le graphe dans lequel tous ses sommets sont de degré $n-1$. Ainsi, deux á deux adjacents . La figure 3.1.1 contient des graphes completes.*

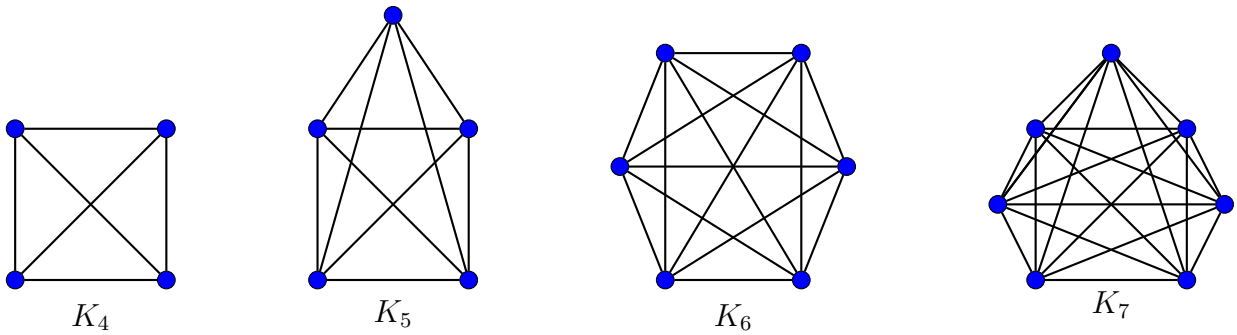


Figure 3.1.1 : Graphes complets.

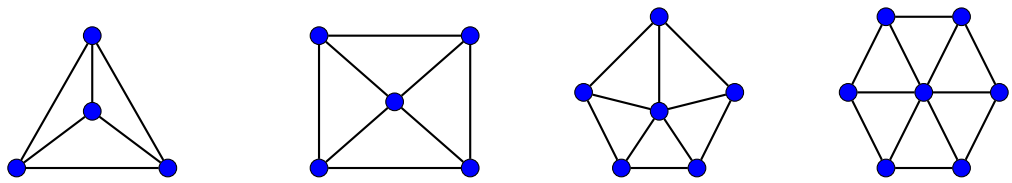
Proposition 3.1.1 *Les graphes complets sont des graphes sommet pancyclique.*

Preuve. Soit $G(V, E)$ un graphe complet. Pour chaque sommet x, $\mid N_G(x) \mid = n-1$ le sous-graphe $G - \{x\}$ est un graphe complet.
Pour tout $x \in V$ et pour deux sommets $y, z \in V - \{x\}$, on a $xy, xz, yz \in E(G)$ et le sous-graphe induit par $\{x, y, z\}$ est un C_3 qui contient x
De même pour tout k tel que $4 \leq k \leq \mid V - \{x\} \mid$ il existe un chaîne $y_1 y_2 ... y_{k-1}$. on a $xy_1, xy_{k-1} \in E(G)$ et $C_K = x, y_1, ..., y_{k-1}, x$ donc $x \in C_k$ pour tout k, $3 \leq k \leq \mid V \mid$ donc G est graphe sommet pancyclique. ■

3.2 les graphes roues sont des graphes sommet pancyclique

Définition 3.2.1 *Le graphe roue W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé en ajoutant un sommet centre adjacent à tous les sommets du cycle C_{n-1}.*

Soit la figure 3.2.1 , contient des graphes roues.



W_4 W_5 W_6 W_7

Figure 3.2.1 : les graphes roues $W_4 ... W_7$.

Proposition 3.2.1 *Les graphes roues sont des graphes sommet pancyclique.*

Preuve.

1- Soit $G = (V, E)$ un graphe roue d'ordre n, pour $n < 7$ le graphe G est triangulairment connexe sans étoile ,par Théorème 1.3.2 le graphe G est graphe sommet pancyclique . Pour $n \geq 7$

2- Soit x le sommet center de G, x est adjacent à tout les sommet de G. le graphe $\prec V - x \succ$ est cycle d'ordre $n-1$, donc il existe une chaine P de longueur t tel que $2 \leq t \leq n-1$.

le début et la fin de la chaîne P est adjacent à x, donc x appartient un cycle de longueur $t+1$ qui contint la chaîne P et le sommet x.

on pose:

$k = t + 1 \Longleftrightarrow t = k - 1$

on ajoute dans aux

$2 \leq t \leq n - 1$.

donc x appartient les cycles de longueur k avec $3 \leq k \leq n$. 3- si x dans frontière de roue, x est adjacent a la center v et deux sommets dans la frontière est y et z . v est adjacent a tout les sommets V/v, le graphe$\prec V/\{x, v\} \succ$ est chaine P de longueur n-2 de début est y et de fin z . soit t entier tq $1 \leq t \leq n-2$ avec t est la longueur de la chaîne P', tel que P' est sous-graphe de la chaîne

P. x appartient la cycle que contient la chaine P' et center v et sommet x de longueur $t+2$. on pose: $k = t-2 \Leftrightarrow 3 \leq k \leq n$. donc x est appartient les cycles de longueur k avec $3 \leq k \leq n$.

pour 1 et 2 et 3 les graphes roues sont graphe sommet pancyclique .

■

3.3 Les graphes totals des chaînes d'ordere n sont des graphes sommet pancyclique

Définition 3.3.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe total de G, noté $T(G)$, est défini comme suit. l'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x, y de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

1. *$x, y \in V(G)$ et x, y sont adjacents dans G.*
2. *$x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.*
3. *$x \in V(G), y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.*

dans la figure 3.3.1 un graphe total d'une chaînes d'ordere n .

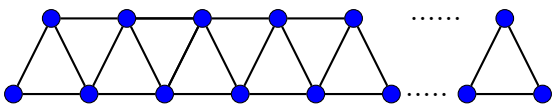


Figure 3.3.1 : un graphe total d'une chaînes d'ordere n .

Proposition 3.3.1 *Les graphes total des chaînes d'ordere n sont des graphes sommet pancyclique.*

Preuve. Le graphe G est triangulairment connexe sans étoile, par Théorème 1.3.2 le graphe G est graphe sommet pancyclique . ■

3.4 Le graphe particulier icosaédrique est un graphe sommet pancyclique

- Graphe icosaédrique:

Soit la figure 3.4.1 , contient un graphe icosaédrique:

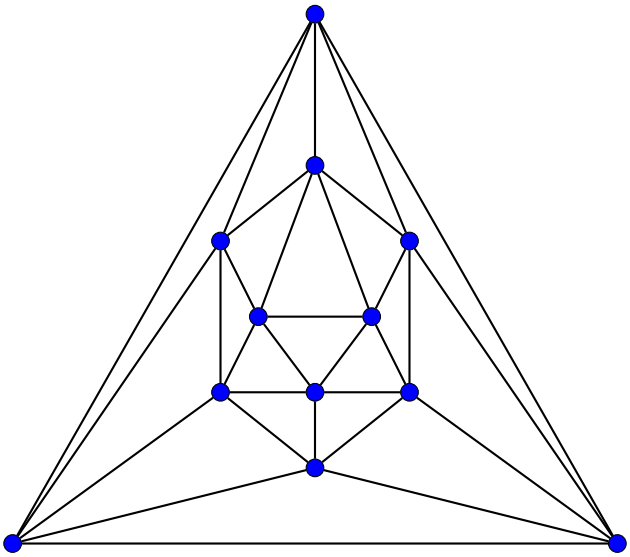


Figure 3.4.1 : Graphe icosaédrique.

Proposition 3.4.1 *Le graphe icosaédrique est graphe sommet pancyclique.*

Preuve. Le graphe G est triangulairment connexe sans étoile, par Théorème 1.3.2 le graphe G est graphe sommet pancyclique . ■

3.5 Les graphes biparti ne sont pas sommet pancyclique

Les deux graphes G et H est le même graphe , et les deux sont graphe biparti.le graphe H ne contient pas cycle impaire.



G H

Figure 3.5.1 : H et G deux graphes biparti .

Proposition 3.5.1 *Le graphe biparti ne sont pas sommet pancyclique. .*

Preuve.

Soit $G = (V, E)$ un graphe bipart, G contient pas des cycles impar donc tout $x \in C_{k+1}$ avec $k \geq 1$ alors G n'est pas sommet pancyclique .

■

3.6 les graphes non connexe ne sont pas sommet pancyclique

Proposition 3.6.1 *les graphes non connexe ne sont pas sommet pancyclique*

Preuve.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non connexe , G admet au moins deux conposentes connexe ,soit $C_1C_2.....C_k$ les composentes connexe de G, et not $C' \backsimeq C_i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant k$, $|V(C')| = max|V(C_i)|$

soit $x \in V_{C'}$, le sommet x ne à partent pas aux cycles d'ordere m tel que $m > |V(C')|$ donc G n'est pas sommet pancyclique .

■

3.7 Les graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde d'ordre $m \times n$ sont des graphes sommet pancyclique

On considère que les graphes grille où chaque face intérieure contient une corde.

Soit la figure contient des graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde.

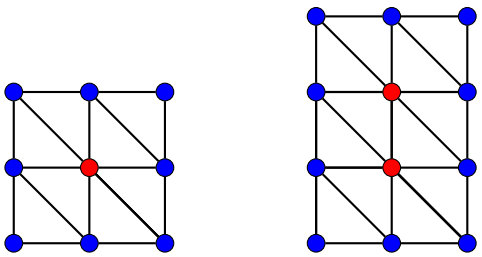


Figure 3.7.1 : Graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde.

Proposition 3.7.1 *Les graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde d'ordre $m \times n$ sont des graphes sommet pancyclique .*

conclusion

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéréssés principalement à l'étude des problémes de graphe pancyclique. Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques résultats existant sur les graphes panciyclique. Ensuite, on a déterminé la notion du sommet pancyclique. Qui a été introduite par Faudree [9], et nous avons exposé des différents résultats obtenus, concernant la détermination du sommet pancyclique de plusieurs types de graphes par les chercheurs dans ce sens, notamment dans [2,8,9,10,11]. Nous avons étudé la sommet pancyclique de quelques types de graphes. On conclut que la détermination de ce graphe en général n' est pas facile pour certains types de graphe.

Bibliographie

[1] Document produit par Sébastien Cabot dans le cadre du cours "Théorie des graphes" donné à l'Université de Montréal durant la session d'hiver 2008.

4(1986) 105-106.

[2] Faudree, R.J.; Gould, R.J.; Lindquester, T .E.: Hamiltonian properties and adjacency conditions in $K_{1,3}$-free graphs. Pro c. of the 6th Int. Conf. on Theory and Applications of Graphs, Kalamazoo, 1988; Graph Theory , Com bin. Appl. 1(1991) 467-479.

[3] Zhang, C.-Q.: Hamilton cycles in cla w-free graphs. J. Graph Theory 12(1988) 209-216.

(1960) 55.

[4] J.A. Bondy, Pancyclic graphs I, J. Combin. Theory 11 (1971) 80-84.

[5] G.A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Sot. 2 (1952) 69-81.

[6] J.A. Bondy and V. Chvatal, A method in graph theory, Discrete Math. 15 (1976) 111-135.

[7] L. Clark, Hamiltonian properties of connected locally connected graphs, Congr. Numer. 32 (1981) 199-204.

[8] A. Harris. Cycle Structures in Graphs. PhD thesis, University of Colorado Denver, 2009.

[9] E. Schmeichel and S. Hakimi. A cycle structure theorem for Hamiltonian graphs. J. Combin. Theory, 45(Ser B)(1988) 99-107.

[10] R. Haggkvist, R.J. Faudree, and R.H. Schelp. Pancyclic graphs. Ars Combinatoria, 11(1981) 37-49.

Math., 79(1-3)(1997) 201-211.

[11] Hendry, G., Extending cycles in graphs. Discrete Math. 83(1990), 59-72.

[12] O. Ore, Note on hamilton circuits, Amer. Math. Monthly 67 (1960) 55.

ملخص

هدفنا في هذه المذكرة هو دراسة المخططات sommet pancyclique ، وقسمنا دراستنا الى ثلاث فصول، في الفصل الأول ذكرنا بعض التعاريف و الرموز الخاصة بنضريات المخططات، ثم في الفصل الثاني تطرقنا الى بعض التعاريف و المبرهنات و المسلمات الخاصة بالمخططات pancyclique و sommet pancyclique ، ونسمي المخطط G(V,E) ب sommet pancyclique من أجل كل رأس $v \in V(G)$ ومن أجل كل عدد صحيح K حيث $3 \leq K \leq |V(G)|$ ، المخطط G يحتوي على K-cycle التي تحتوي على الرأسv، وفي الفصل الأخير درسنا المخططات المتعلقة بsommet pancycliqe.