RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour Obtenir le Diplôme de Master en Mathématique

SPÉCIALITÉ : **ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATION**

Intitulé :

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS ALGEBRIQUES DES OPÉRATEURS DE TOEPLITZ TRONQUÉS

Par : **CHAOUCHI Houria**

Évalué devant le commuté composé de :

YAGOUBE Ameur	M.C.A	Université de Laghouat	Encadreur
TOUMACHE Kamel	M.A.A	Université de Médéa	Co-Encadreur
TABLENNHAS Kamel	M.A.A	Université de Médéa	Examinateur
AYADI Hocin	M.C.B	Université de Médéa	Examinateur

Année Universitaire : 2020-2021

Dédicace

. Je dédie ce travail :

A ma chère mére RAbIA.Y et mon chèr père Achour pour leur amour inestimable, leur tendresse, leurs sacrifices, leur confiance, leur soutien et toutes les valeur qu'ils ont su m'inculquer.

A mes chères soeurs et mes chèrs frères pour leurs mots d'encouragement, et leur présence.

A mon mari BOUALEM F, pour sa getillesse, et pour ses mots d'encouragement.

A tout ceux qui m'aiment (mes nièces, mes neveux, mes amies, mes camarades ...).

- CHAOUCHI Houria

Remerciements.

Tout d'abord je tien à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour d'entamer et de terminer ce mémoire.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr TOUMACH Kamel , et Mr YAGOUB Ameur , on le remarcie pour la qualité de leur encaderement exceptionnel , pour leur patience leur rigueur et leur dîsponibilité durant me préparation de ce mémoire.

Me remerciement s'adresse également à tous les enseignants de la faculté des sciences université de Médéa en générale (Mr BENAICHOUCHE N, Mr ALLECH B, ...) pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury, Mr AYADI H et Mr TABLENNHAS K, qui me font le grand honneur d'évatuer ce travail, pour leur lecture attentive de ce mémoire .

De peur d'en avoir oublier, je souhaite remercier tous ceux qui contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

CHAOUCHI Houria.

ملخّص.

لتكن K_u, H^2 ، $(K_u \subset H^2)$ ، فضاء هاردي للّدوال التحليلية على $\mathbb{D}$ حيث مربع معاملات متّتالية تايلور قابلة للّتكامل و فضاء النموذج، مع u دالة داخلية غير ثابتة. يعطى موءثر توبليتز المبتور للّدليل $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ بـ

$$A^u_\varphi(f) = P_u(\varphi f),$$

حيث P_u هو الاسقاط المتعامد ل $L^2(\mathbb{T})$ على K^2_u.
الغرض من هذا العمل هو اجراء دراسة عن الخصائص الجبرية لموءثرات توبليتز المبتورة.

مفاتيح هذه المذكرة.

فضاءات هاردي، فضاءات نموذجي، موءثرات توبليتز، موءثرات توبليتز المبتورة.

Résumé.

Soient H^2, K_u, ($K_u \subset H^2$), l'espace de Hardy des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles la suite de coefficients de Taylor est carré-sommable et l'espace modèle, avec u est une fonction intérieure non constante. L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ par :

$$A^u_\varphi(f) = P_u(\varphi f),$$

tel que P_u est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K^2_u.
Le but de ce travail est de faire une étude sur les propriétés algébriques d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Mots clés :

Espaces de Hardy, espace modèle, opérateurs de Toeplitz, opérateurs de Toeplitz tronqués.

Abstract.

Let H^2, K_u, $(K_u \subset H^2)$, the Hardy space be holomorphic functions on $\mathbb{D}$ for which the sequence of Taylor coefficients is square-summable and model space, with u is a non-constant inner function. The truncated Toeplitz operator with symbol $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ by :

$$A^u_\varphi(f) = P_u(\varphi f)$$

such that P_u is the orthogonal projection of $L^2(\mathbb{T})$ on K^2_u.
In this work, we shall study the algebraic properties of truncated Toeplitz operators.

Key words :

Hardy spaces, models spaces, Toeplitz operators, truncated Toeplitz operators .

Table des matières

Résumé. **4**

Notations **7**

Introduction **8**

1 Espaces de Hardy. **9**

1.1 Définitions des espaces de Hardy et quelques propriétés. 9

1.2 Limite radiale des fonctions de H^p , $0 < P \leq \infty$ 12

1.3 Identification entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ 13

1.4 Projection orthogonale et noyau reproduisant 16

1.5 Factorisation des fonction de H^p, $0 < p \leq \infty$ 19

2 Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy. **23**

2.1 Opérateurs bornés. 23

2.2 Les opérateurs shift. 24

2.3 Opérateurs de Toeplitz. 25

2.4 Matrices de Toeplitz. 27

3 Espaces modèles correspondant à une fonction intérieure. **30**

3.1 Définitions et propriétés. 30

3.2 Noyau reproduisant de K^2_u. 33

3.3 Opérateurs complexes symétriques. 33

3.4 Produit tensoriel. 34

4 Opérateurs de Toeplitz tronqués. **36**

4.1 Définitions et quelques propriétés. 36

4.2 Opérateur de Toeplitz tronqués de rang fini. 38

4.3 Opérateus de Toeplitz tronqués de type α. 39
4.4 Matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué. 40
4.4.1 Exemple de matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué 41

Bibliographie. **43**

Notations

$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{T}$	le cercle unité.
$\mathbb{D}$	le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\overline{\mathbb{D}}$	le disque unité fermé du plan complexe $\mathbb{C}$.
$L^2(\mathbb{T})$	l'espace de Lebesgue usuel.
$\widehat{\mathbb{C}}$	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
$< . >$	produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$.
$\mathcal{H}ol(\mathbb{D}$	espace des fonctions holomorphe sur $\mathbb{D}$.
$d\mu$	la mesure de lebesgue normalisée sur le cercle unité.
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	l'ensemble des opérateurs linéaires borné sur l'espace $\mathcal{H}$.
$\widehat{f}(n)$	n-ème coefficient de Fourier de f.
f^*	la limite radiale de f sur $\mathbb{T}$.
P	projection orthogonale de L^2 sur H^2 . ll
k_λ	noyau reproduisant de H^2.
u	fonction intérieure.
S	opérateur de shift sur H^2.
T_φ	opérateur de Toeplitz sur H^2 de symbole φ.
K_u^2	l'espace modèle.
P_u	projection ortogonale de L^2 sur K_u^2.
k_λ^u	noyau reproduisant de K_u^2.
C	opérateur de conjugaison sur un espace de Hilbert.
$\widetilde{f}$	$= Cf$.
S_u	opérateur de shift sur K_u^2.
S_u^α	opérateur de shift généralisé sur K_u^2, pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.
A_φ^u	opérateur de Toeplitz tronqué sur K_u^2 de symbole φ.

Introduction

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs qui consiste à étudier les propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz tronqués sur les espaces modèles.
Soit $L^2(\mathbb{T})$ l'espace de Lebesgue de fonctions carrées intégrables sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et soient H^2, H^∞ les espaces de Hardy classiques sur le disque unité $\mathbb{D}$. Les espaces modèles sont les sous-espaces fermés invariants par l'adjoint du shift, $S^* : f \mapsto \frac{f-f(0)}{z}$ sur H^2. D'après le théorème de Beurling [1], ces espaces sont de la forme $K_u = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2$, où u est une fonction intérieure (pour plus de détails voir [19, 22, 11, 4]). Chaque espace modèle est équipé d'un opérateur de conjugaison C défini par $C[f](\xi) = u(\xi)\overline{\xi f(\xi)} := \widetilde{f}$, pour tout $f \in K_u$ et $\xi \in \mathbb{T}$ (voir [19, 21, 20]), et possède un noyau reproduisant $k_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1-\overline{\lambda}z)}, \lambda \in \overline{\mathbb{D}}, z \in \mathbb{T}$ (voir [22, 11]). Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle K_u. Soit P_u la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u. L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ, noté A_φ^u est défini sur le sous-espace dense $K_u \cap H^\infty$ de K_u par

$$A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f).$$

Une étude systématique des opérateurs Toeplitz tronqués avec des symboles dans $L^2(\mathbb{T})$ a été commencée récemment par Sarason ([4]). Cet article a jeté les bases de la théorie et inspiré une grande partie des travaux sur ces opérateurs.
Dans ce travail, nous allons rappeler les propriétés algébriques de l'espace de Hardy $H^p, 1 \leq p \leq \infty$, puis les propriétés des éléments de H^2 avec des résultats sur l'étude de quelques opérateurs de H^2, En suite, on donne les propriétés basiques des espaces modèles de H^2. Enfin, nous allons donner les propriétés algébriques d'opérateurs de Toeplitz tronqués sur les espaces modèles.

Chapitre 1

Espaces de Hardy.

Nous exposons dans ce chapitre les différentes propriétés des espaces de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$, en particulier pour $p = 1, 2$ et ∞, utilisées dans les études des opérateurs de Toeplitz. Notre présentation est essentiellement inspirée des références [5, 6, 16, 13, 17, 7, 24, 15].

1.1 Définitions des espaces de Hardy et quelques propriétés.

Soient $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$ et $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$ et $d\mu$ la mesure de lebesgue normalisée sur le cercle $\mathbb{T}$ tel que : $d\mu(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ de sorte que $\mu(\mathbb{T}) = 1$.
On note par $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions analytiques et $L^2(\mathbb{T})$ est l'espace de lebesgue usuel sur $\mathbb{T}$ muni de produit scalaire définie par :

$$< f, g >= \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}d\mu.$$

On définie pour chaque fonction f sur $\mathbb{D}$ les coefficients $\widehat{f}$ par : $\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(e^{-in\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$
$\widehat{f}(n)$ s'appelle le n-ème coefficient de fourrier de f. La série de Fourier de f est la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f(n)}e^{int}$.
$l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert défini par : $l^2(\mathbb{N} = \{(a_n)_{n\geq 0} : a_n \in \mathbb{C}\ ,\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$, est muni de la norme $\|.\|_2$ telle que $\|(a_n)_{n\geq 0}\|_2 = (\sum_{n\geq 0} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, et $l^2(\mathbb{Z})$ défini par : $\{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : a_n \in \mathbb{C}\ ,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty\}$.

Proposition. 1.1. *On peut identifier $L^2(\mathbb{T})$ à $l^2(\mathbb{Z})$. La correspondance est donnée par*

$$f \longleftrightarrow \left\{\widehat{f(n)} : n \in \mathbb{Z}\right\}, f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Proposition. 1.2. *Soit $n \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction*

$$\begin{aligned} e_n : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \xi &\longrightarrow e_n(\xi) = \xi^n. \end{aligned}$$

$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

On définit les espaces de Hardy comme suite .

Définition 1.3. *on définit deux types d'espace de Hardy , le premiér est $H^p(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ vérifiant :*

$$\sup_{1\leq r<0} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty,$$

et le seconde $H^p(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que les coefficients d'ordre négative sont nuls. i.e :

$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{T}) &= \left\{f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0 \,\forall n < 0\right\}, 1 \leq p \leq \infty, \\ H^p(\mathbb{D}) &= \left\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|_p^p = \sup_{1\leq r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty\right\}, 1 \leq p < \infty, \\ H^\infty(\mathbb{D}) &= \left\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \sup_{\xi\in\mathbb{D}} |f(\xi)| < \infty\right\}, pour\ p = \infty \end{aligned}$$

notation 1. *pour $0 < p < \infty$. si $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, on note par $\|f\|_p$ la limite $\lim_{r\longrightarrow 1^-} M_p(f,r)$.tel que :*

$$\begin{aligned} M_p(f,r) &= \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}, si\ 0 < p < \infty,\ et \\ M_\infty(f,r) &= \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|. \end{aligned}$$

Proposition. 1.4. *pour $0 \leq p < \infty$ soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. les fonctions $r \longmapsto M_p(f,r)$ sont des fonctions croissantes sur $[0,1[$.*

Le théorème suivant précise le lien entre les espaces de Hardy selon l'indice p

Théorème 1.1. *pour $1 < s < p < \infty$, on a les inclusions suivantes*

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D}).$$

Démonstration. si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, pour tout $p \in]0,\infty[$ on a $|f(re^{i\theta})|^p \leq \|f\|_p^\infty$ pour $r \in [0,1[$ et $\theta \in [0,2\pi[$. on en déduit alors $M_p(f,r) \leq \|f\|_\infty$ pour $r \in [0,1[$, ce qui implique $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ et donc $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ pour tout $p > 1$,
pour p>s>1 d'après l'inégalité de Holder , pour f mesurable sur le cercle centré en 0 et de rayon $r \in]0,1[$, *ona* :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^s d\theta \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{s}{p}} (2\pi)^{\frac{1-s}{p}},$$

et donc $M_s(f,r) \leq M_p(f,r)$. ce qui prouve que $H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$ pour $p > s > 1$. □

Définition 1.5. *soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f un fonction $f : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$. on dit que f est holomorphe sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω , où Δf est le laplacien de f défini par :*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Proposition. 1.6. *toute fonction holomorphe sur un ouvert Ω est harmonique sur Ω.*

Définition 1.7. *pour $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

pour r fixé . $0 \leq r < 1$, P_r est appelé un noyau de poisson et $(p_r)_{0\leq r\leq 1}$ est applée la famille des noyaux de poisson .

Proposition. 1.8. *pour $z = rz^{i\theta}$, avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) \\ &= Re(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}) \\ &= \frac{1 + r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}. \end{aligned}$$

Remarque 1. *1)- pour r fixé . $0 \leq r < 1$ la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$ converge normalement , donc uniformément , la fonction P_r est continue sur $[0,2\pi]$.*
2)- pour r fixé . $0 < r < 1$ on a : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 1$.

pour voir ceci , on peut inverser l'intégrale et la série qui définit $P_r(t)$ ou encore remarque que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = \widehat{f_r}(0)$ le 0-ème coefficient de fourrier de la fonction continue P_r .

dans la proposition suivant , nous montre comment construire des fonctions harmoniques dans $\mathbb{D}$ á partir de mesures sur $\mathbb{T}$.

Proposition. 1.9. *soit μ une mesure complexe sur $[-\pi, \pi]$ (finie) pour $z = re^{i\theta}$ avec . $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on pose :*

$$P(\mu)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t).$$

alors P_μ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.

Théorème 1.2. *soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Alors il existe une unique fonction g continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. harmonique dans $\mathbb{D}$ et vérifiant $g_{\setminus\mathbb{T}} = f$. de plus pour $z = e^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^\pi P_r(\theta - t)f(e^{it})dt$ .on notera $P(f)$ la fonction définie par*

$$re^{i\theta} \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_\pi^\pi P_r(\theta - t)f(e^{it})dt.$$

Remarque 2. *si f est une fonction harmonique rélle sur $\mathbb{D}$.avec $r \geq 1$ on a : $f(z) = Re(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(e^{it})dt)$ pour $|z| \leq 1$, et la fonction $z \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(e^{it})dt$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$.*

1.2 Limite radiale des fonctions de H^p , $0 < P \leq \infty$

Théorème 1.3. *pour $p \in]0, \infty]$ et supposons que la fonction f non identiquement nulle appartienne à $H^p(\mathbb{D})$ .Alors $f^*(e^{i\theta}) \neq 0$, μ-presque partout .*

Par conséquent , si $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ sont telles que $f^*(e^{i\theta}) = g^*(e^{i\theta})$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive , nécessairement $f = g$.

Proposition. 1.10. *pour $p \in]0, \infty]$. supposons que la fonction f non identiquement nulle appartienne à $H^p(\mathbb{D})$. Alors la limite radiale $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ et telle que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.*

D'après les travaux de Fatou et de Riesz [15, 25, 23] , on peut donne le lemme suivant qu'il est définit bien la limite radiale.

Lemme 1.11. *soit $f \in H^p(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$ muni de la norme du essentielle $\|.\|_\infty$. Alors, $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \longmapsto 1^-} f(re^{i\theta})$ existe μ presque partout et appartient à $L^\infty(\mathbb{T})$.*

Corollaire 1.12. *si $f \in H^1(\mathbb{D})$ alors $\lim_{r \longmapsto 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| d\theta = 0$.*

Théorème 1.4. *pour $p \in]0, \infty]$, et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors $\|f^*\|_p = \|f\|_p$.*

1.3 Identification entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$

Théorème 1.5. *pour $1 \leq p \leq \infty$. L'application $\Phi : H^p(\mathbb{D}) \longmapsto H^p(\mathbb{T})$, tel que $\Phi(f) = f^*$ et ou $H^p(\mathbb{T}) := \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, < 0\}$ est un isomorphisme isométrique*

Démonstration. La linéarité de Φ évidente. Vérifions tout d'abord que si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p \leq \infty$. Alors $\Phi(f) = f^* \in H^p(\mathbb{T})$. Comme d'aprés le théorème (1.4), $\|f\|_p = \|f^*\|_p$, il est clair que $\Phi(f) \in L^p(\mathbb{T})$. Il nous reste à vérifier que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Comme d'après le théorème (1.1) nous avons $H^p(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$. il suffit de vérifier que si $f \in H^1(\mathbb{D})$. Alors $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. si $f \in H^1(\mathbb{D})$. en particutier , $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. D'après le théoreme de couchy , pour $0 < r < 1$. On a

$$\int_{\mathbb{T}_r} f(\xi)\xi^n d\xi = 0, \ pour \ n \geq 0.$$

où $\mathbb{T}_r$ désigne le cercle centré en 0 et de rayon r . Posons $\xi = re^{it}$. On obtient alors

$$\int_0^{2\pi} r^{n+1} f(re^{it}) e^{i(n+1)t} dt = 0, \ pour \ n \geq 0.$$

Le corollaire (1.12) nous permet de dire que :

$$\lim_{r \longmapsto 1^-} \int_0^{2\pi} r^{n+1} f(re^{it}) e^{i(n+1)t} dt = \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{i(n+1)t} dt.$$

car

$$\left| \int_0^{2\pi} r^{n+1} f(re^{it}) e^{i(n+1)t} dt - \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{i(n+1)t} dt \right| \leq 2\pi \|f_r - f^*\|_1,$$

où $f_r(e^{it}) := f(re^{it})$. On a donc $\int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{i(n+1)t} dt = 0$, ce qui prouve que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Une autre façon de vérifier ceci est d'utiliser le fait que $f \in H^1(\mathbb{D})$ et le produit de

deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ dont les limites radiales sont dans$H^2(\mathbb{T})$ .Ainsi $\Phi(H^p(\mathbb{D})) \subset H^p(\mathbb{T})$ et Φ et une isométrie. De ce fait Φ est automatiquement injective. Vérifions la surjectivité de Φ pour conclure. Soit $p \in [1, \infty]$ et $g \in H^p(\mathbb{T})$. Comme en particulier $g \in L^1(\mathbb{T})$. On peut considérer la fonction harmonique f sur $\mathbb{D}$ définie par

$$f(z) = P(g)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt \ si \ z = re^{i\theta}.$$

On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} g(e^{it}) dt.$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{\in(\theta - t)}$ étant normalment convergente pour $r < 1$, donc uniformément convergente , on en déduit :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} g(e^{it}) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} \widehat{g}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) z^n.$$

Comme $\widehat{g}(n) = 0$ si $n < 0$, on a donc $f(z) = \sum_{n \geq 0} \widehat{g}(n) z^n$. La fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{D}$. Comme f est l'intégrale de poisson de $g \in L(\mathbb{T})$, $f^* = g$ μ-presque partout . Par conséquent $\|f^*\|_p = \|g\|_p < \infty$, ce qui implique $f \in H^p(\mathbb{D})$ d'après le théorème(1.4).L'application Φ est donc surjective. c'est donc un isomorphisme isométrique. □

Remarque 3. *pour $p \in [1, \infty]$, compte tenu de l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p('\mathbb{T})$, dans la plupart des mémoires on trouvera la notation H^p , laquelle désignera indifférement $H^p(\mathbb{D})$ ou $H^p(\mathbb{T})$ suivant le contexte.*

Théorème 1.6. *pour $1 \leq p \leq \infty$,l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ muni de la norme $\|.\|_p$ est un espace de banach.*

Démonstration. La seule chose délicate à vérifier pour faire de $\|.\|_p$ une norme est de vérifier que l'inégalité triangutaire est satisfaite. D'aprés l'inégalité de Minkawski (si $1 \leq p < \infty$) ou d'aprés l'inégalité triangulaire que vérifie le module sur $\mathbb{C}$ (si $p = \infty$), pour toutes les fonction f et g mesurables sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0, 1[$, on a :

$$M_p(f + g, r) \leq M_p(f, r) + M_p(g, r), \ pour \ tout \ r \in [0, 1[.$$

Pour toutes les fonction $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ ($avec 1 \leq p \leq \infty$), on a donc $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Ainsi $\|.\|_p$ est bien une norme sur $H^p(\mathbb{D})$. pour $p < 1$, $H^p(\mathbb{D})$ est encore un espace vectoriel

mais le problme est que $\|.\|_p$ ne vérifie pas l'inégalité triangutaire.
Fixons à présent $p \in [1, \infty]$ et montrons que les espaces vectoriels normés $H^p(\mathbb{D})$ sont complets.Soit $(f_n)_{n\geq 1}$.une suite de couchy dans $H^p(\mathbb{D})$. Soient r,R tels que $r < R < 1$ et supposons que $|z| \leq r$. On applique la formule de couchy à $f_n - f_m$ sur le cercle $\mathbb{T}_R$ centré en 0 et de rayon R.On obtient alors :

$$|f_n(z) - f_m(z)| = |\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}_\mathbb{R}} \frac{f_n(\xi) - f_m(\xi)}{\xi - z} d\xi|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R-r}\int_{-\pi}^{\pi} R|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|d\theta.$$

Ainsi, pour $|z| \leq r$ *ona* :
$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{R-r} M_1(f_n - f_m, R)$
Comme l'applicatin $\phi : x \longmapsto x^p$ est convexe pour $p \geq 1$, d'après l'inégalité de gensen appliquée à la mesure μ définie par $d\mu(t)$ sur $[-\pi, \pi]$. On obtient :

$$(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|(f_n - f_m)(Re^{it})|}{2\pi} dt)^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(f_n - f_m)(Re^{it})|^p dt,$$

et donc

$$M_1(f_n - f_m, R) \leq M_p(f_n - f_m, R).$$

D'après la proposition (1.2), $M_p(f_n - f_m, R) \leq \lim_{R\longmapsto 1^-} M_p(f_n - f_m, R) = \|f_n - f_m\|_p$ et donc pour $|z| \leq r$ on a :

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{R-r}\|f_n - f_m\|_p.$$

La suite $(f_n)_n$ converge donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction f holomorphe sur $\mathbb{D}$ Comme on a supposé que $(f_n)_n$ était de Cauchy dans $H^p(\mathbb{D})$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $m = m(\varepsilon) \geq 1$ tel que pour tout $n > m$ on ait $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Pour $r < 1$ on obtient :

$$M_p(f - f_m, r) = \lim_{n\longmapsto\infty} M_p(f_n - f_m, r) \leq \lim_{n\longmapsto\infty} \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon,$$

ce qui implique $\lim_{m\longmapsto\infty} \|f - f_m\|_p = 0$. D'autre part, sachant que $\|f\|_p \leq \|f - f_m\|_p + \|f_m\|_p$, il est claire que $\|f\|_p < \infty$. La suite $(f_n)_n$converge donc dans $H^p(\mathbb{D})$ qui est donc un espace de banach. □

Ces résultas Nous permettent d'affirmer que dans le cas $p = 2$, $H^2(\mathbb{D})$ et un espace de hilbert muni de produit scalaire usuel

$$\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f, g\rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta = \sum_{n\geq 0} a_n\overline{b_n}.$$

où $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $g = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, Conclusion cette section avec le corollaire suivnant

Corollaire 1.13. *pour $p \in [1, \infty]$, H^p et un sous espace vectoriele fermé de $L^p(T)$.*

1.4 Projection orthogonale et noyau reproduisant

Proposition. 1.14. *Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. L'application*

$$\Phi_\lambda : f \longmapsto f(\lambda),$$

est une forme linéaire bornée sur H^2.

Démonstration. La linéarité est claire . Soit $f \in H^2$, $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On a

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||\lambda|^n \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (cauchy - Schwarz) \\ &= \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}. \end{aligned}$$

□

La proposition suivant précise le lien entre l'espace $L^p(\mathbb{T})$ et l'espace H^2.

Proposition. 1.15. *Pour $z \in \mathbb{T}$, on a :*

$$L^2(\mathbb{T}) \;=\; H^2 \oplus \overline{zH^2}.$$

D'apès le théorème de représentation de Riesz [10] , on a le théorème suivant.

Théorème 1.7. *Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, il existe une fonction unique $K_\lambda \in H^2$ telle que*

$$\Phi_\lambda(f) =< f, K_\lambda > .$$

Nous allons donner la formule explicite de K_λ.

Proposition. 1.16. *Soit* $\lambda \in \mathbb{D}$.

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \; z \in \mathbb{D}$$

et

$$\|K_\lambda\| = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}$$

.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{D}$, la fonction $z \longmapsto (1-\overline{\lambda}z)^{-1}$ est dans H^2 puisque

$$\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} = \sum_{n\geq 0} (\overline{\lambda})^n z^n,$$

et

$$\begin{aligned} \| \sum_{n\geq 0} (\lambda)^n z^n \|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\lambda}|^{2n} \\ &= \frac{1}{1-|\lambda|^2} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

Soit $f \in H^2$ telle que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, on a

$$\begin{aligned} < f, \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} > &= \sum_{n\geq 0} a_n \overline{(\overline{\lambda})^n} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n \lambda^n \\ &= f(\lambda), \end{aligned}$$

D'après le théorème (1.7) K_λ est unique ;donc $K_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, De plus,

$$\begin{aligned} \|K_\lambda\|^2 &= < K_\lambda, K_\lambda > \\ &= \sum_{n\geq 0} (\overline{\lambda})^n \overline{(\overline{\lambda})^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \\ &= \frac{1}{1-|\lambda|^2}. \end{aligned}$$

On dit que K_λ est le noyau de cauchy-Szego ou on l'appelle souvent le noyau reproduisant pour H^2. □

On peut encore retrouver K_λ à partir de n'importe quelle base hilbertienne

$$K_\lambda(z) = \sum_{n\geq 0} e_n(z)\overline{e_n(\lambda)}.$$

Proposition. 1.17. *(Formule de l'intégrale de cauchy) Soit $\lambda \in \mathbb{D}$, pour $f \in H^2$*

$$f(\lambda) = \int_T \frac{f(\xi)}{1-\lambda\overline{\xi}} d\mu(\xi),$$

et pour $n \geq 0$

$$\frac{d^n f}{dz^n}(\lambda) =< f, \frac{d^n K_\lambda}{dz^n} >,$$

où $\frac{d^n K_\lambda}{dz^n}(z) = \frac{n!\overline{\lambda}^n}{(1-\overline{\lambda}z)^{n+1}}$ la dérivée n-ième de K_λ.

Démonstration. D'aprés la proposition (1.12) ,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \Phi_\lambda(f) \\ &=< f, K_\lambda > \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\overline{K_\lambda(\xi)} d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1-\lambda\overline{\xi}} d\mu(\xi), \end{aligned}$$

CommeK_λ est analytique sur $\mathbb{D}$, elle est développable en série entière sur $\mathbb{D}$ avec

$$\begin{aligned} K_\lambda(z) &= \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \ (z \in \mathbb{D}) \\ &= \sum_{n\geq 0} (\overline{\lambda}z)^n \ (z \in \mathbb{D}), \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\frac{d^n K_\lambda}{dz^n}(z) = \frac{n!\overline{\lambda}^n}{(1-\overline{\lambda}z)^{n+1}}$. Donc

$$< f, \frac{d^n K_\lambda}{dz^n} >= n! \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{(1-\lambda\overline{\xi})^{n+1}} d\mu(\xi),$$

qui n'est autre que la formule de cauchy pour la dérivée n-iéme de f . □

Rappelons que pour chaque fonction f dans H^2 , la limite radiale f^* de f existe presque partout et est un élément de L^2 (section 2) , donc la projection P de L^2 sur H^2 peut être exprimée en terme de noyau de Cauchy , autrement dit, on a :

$$p[f](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1 - z\overline{\xi}} du(\xi).$$

Proposition. 1.18. *La famille* $\{K_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}\}$ *est linéairement indépendant .*

Démonstration. Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{D}$, deux à deux distincts et on suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_{\lambda_i} = 0 \text{ , } ou\text{`} \ (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{C}$$

Soit $f \in H^2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i f(\lambda_i) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1 - \lambda_i \overline{\xi}} d\mu(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\alpha}_i}{1 - \lambda_i \overline{\xi}} du(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i K_{\lambda_i}(\xi) d\mu(\xi) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

D'après le théorème d'interpolation de lagrange , il existe un polynome P tel que $P(\lambda_i) = \alpha_i$ pour tout i, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i P(\lambda_i) &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$. □

1.5 Factorisation des fonction de H^p, $0 < p \leq \infty$

Définition 1.19. *Une fonction u analytique sur* $\mathbb{D}$ *, bornée est dite fonction intérieure si* $|u(\xi)| = 1$ *, μ-presque partout pour tout* $\xi \in \mathbb{T}$.

Proposition. 1.20. *Soit f une fonction intérieure. on a :*

$$|f(z)| \leq 1,$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Définition 1.21. *Une suite $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ satisfait la condition de Blaschke si*

$$\sum_{n\geq 1}(1 - |a_n|) < \infty.$$

Tout suite satisfait la condition de Blaschke est dite suite de Blaschke .

Théorème 1.8. *(Blaschke) Soit $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ une suite de Blaschke telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit infini*

$$B(z) := \prod_{n\geq 1} \frac{\overline{a_n}}{|a_n|} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \ , \ (z \in \mathbb{D}).$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. De plus B est une fonction intérieure .

Les produits de blaschke forment une classe de fonctions intérieures , Nous allons voir une autre construction .

Théorème 1.9. *Pour une mesure positive , fini v sur $\mathbb{T}$ avec $v \perp \mu$. La fonction définie par :*

$$S_v(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} dv(\xi)\right) \quad , (z \in \mathbb{D})$$

est une fonction intérieure.

Définition 1.22. *La fonction S_v qui est définie ou théorème (1.9) est appelèe fonction intérieure singulière.*

Exemple 1.1. *Si $v = \delta_1$ est la mesure de Dirac en $\xi = 1$, la fonction intérieure correspondant est*

$$S_{\delta_1}(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Cette fonction intérieure est appelée fonction intérieure singulière atomique .

Théorème 1.10. *Toute fonction intérieure u peut se factoriser comme*

$$u(z) = z^k B(z) S_v(z), \quad (z \in \mathbb{D})$$

où $K \geq 0$, B est un produit de Blaschke et S_v est une fonction intérieure singulière .Cette factorisation est unique à une constante près de module 1.

Avant le fait de démonstration de ce théorème , on a la définition suivant.

Définition 1.23. *Soient u_1, u_2 des fonctins intérieures et $f \in H^2$.*
1) On dit que u_1 divise u_2 , on écrit u_1/u_2 si $u_2/u_1 \in H^2$.
2) On dit que u_1 divise f , on écrit u_1/f si $f/u_1 \in H^2$.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de u dans $\mathbb{D}$, répétés selon leurs multiplicités . On suppose que $u(0) \neq 0$, sinon on remplace u par u/z^k. Soit

$$B_N(z) = \prod_{1\leq n\leq N} \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}\frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}$$

le N-ième produit partiel de Blaschke. puisque u/B_N est une fonction intérieure, d'après la proposition (1.17) on a

$$|\frac{u}{B_N}(z)| \leq 1$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'où $|u| \leq |B_N|$ sur $\mathbb{D}$, en particulier

$$0 < u(0) \leq B_N(0) = \prod_{1\leq n\leq N} |a_n|.$$

Donc le produit $\prod_{n\geq 1} |a_n|$ converge car $|a_n| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.Ainsi $\sum_{n\geq 1}(1-|a_n|) < \infty$. D'où on peut définir le produit de Blaschke correspondant aux zéros de u. Comme B_N converge uniformiment sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers le produit de Blaschke B admettant comme zéros la suite $(a_n)_{n\geq 1}$, alors u/B_N converge uniformiment sur tout compacte de $\mathbb{D}$ vers u/B ; d'où $u/B \in H^\infty(\mathbb{D})$ .Comme u et B sont de modules 1 μ-presque partout sur $\mathbb{T}$, alors u/B est une fonction intérieure que l'on note par S .
On remarque que S n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$, d'aprè un résultat de l'analyse complex , $log|S|$ est une fonction analytique sur $\mathbb{D}$. Ainsi $-log|S|$ est une fonction harmonique positve sur $\mathbb{D}$. D'après le théorème Herglotz [18] il existe une mesure positive finie v sur $\mathbb{T}$ telle que

$$-log|S(z)| = \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu(\xi), \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Comme $\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} = Re\left(\frac{\xi+z}{\xi-1}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$S(z) = exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + 1}{\xi - z} dv(\xi) + i\gamma\right), \quad (z \in \mathbb{D})$$

où $\gamma \in [0, 2\pi[$. □

Définition 1.24. *Une fonction extérieure est une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ de la forme*

$$F(z) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z}\varphi(\xi)d\mu(\xi)\right),$$

où $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ à valeure réelles.

Théorème 1.11. *Tout fonction $f \in H^2$ non identiquement nulle se factorise uniquement comme*

$$f = BSF$$

où B est on produit de Blaschke , S est une fonction intérieure singulière , et Fest une fonction extérieure dans H^2. Inversement , tout produit de la forme $(f = BSF)$ est dans H^2.

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy.

Les opérateurs de Toeplitz sont les plus étudiés et les mieux connus dans la théorie des opérateurs sur l'espace de Hardy H^2. Les opérateurs shift et backward shift en sont des exemples simples. Généralement, les opérateurs de Toeplitz sont ceux dont les coefficients de la matrice relativement à la base standard de H^2 sont constants le long de chaque diagonale. Voir entre autre [12, 3, 9, 14, 2] pour les détails sur le sujet.

2.1 Opérateurs bornés.

Définition 2.1. *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Toute application linéaire $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ s'appelle un opérateur. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ des applications linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ est l'espace des opérateurs de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$.*

L'image d'un vecteur $x \in \mathcal{H}$ par l'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ sera généralement notée T_x.

Définition 2.2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $\langle . \rangle$.Soit*

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$$
$$x \longrightarrow T(x)$$

Un opérateur linéaire borné (continu) c'est-à-dire , il existe $C > 0$ tel que :

$$\|T(x)\|_{\mathcal{H}} \leq C \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace Hilbert et $B_{\mathcal{H}}$ sa boule unité , alors $B_{\mathcal{H}}$est compacte si et seulement si $\mathcal{H}$ est de dimension finie.*

Définition 2.3. *Un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est compact quand l'image par T de la boule unité de $\mathcal{H}$ est compact au sens de la topologie de la norme .*

2.2 Les opérateurs shift.

Les opérateurs shift tiennent une place importante dans le monde des opérateurs sur la théorie des fonctions.

Définition 2.4. *L'opérateur shift est une application $S : H^2 \longmapsto H^2$ défini par*

$$[Sf](z) = zf(z)$$

ou en terme de coefficients de Taylor de $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in H^2$, par

$$S(a_0, a_1, ...) = (0, a_0, a_1, ...).$$

Proposition. 2.5. *l'opérateure shift , est une isométrie.*

Démonstration. Soit $f \in H^2$, on a

$$\begin{aligned} \|Sf\|^2 &= \int_{\mathbb{T}} |\xi f(\xi)|^2 d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 d\mu(\xi) \\ &= \|f\|^2. \end{aligned}$$

□

Définition 2.6. *L'opérateur sdjoint S^*du shift S , qui est par définition satifait*

$$\langle Sf, g\rangle = \langle f, S^*g\rangle, \quad f, g \in H^2,$$

est appelé barckward shift.

Proposition. 2.7. *L'opérateur S^* $H^2 \longmapsto H^2$ est donné par*

$$[S^*f] = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

ou en terme de coefficients de Taylor de $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in H^2$, par

$$S^*(a_0, a_1, a_2, ...) = (a_1, a_2, ...).$$

Démonstration. On remarque que si $f \in H^2, Sf = zf$ est orthogonal á toute fonction constante . Soit $g \in H^2$

$$\begin{aligned}\langle f, S^*g\rangle &= \langle Sf, g\rangle \\ &= \langle zf, g\rangle \\ &= \langle zf, g - g(0)\rangle \\ &= \langle f, \overline{z}(g - g(0))\rangle \\ &= \langle f, \frac{g - g(0)}{z}\rangle.\end{aligned}$$

□

2.3 Opérateurs de Toeplitz.

Les opérateurs de Toeplitz sont les compressions des opérateurs de multiplication au l'espace de Hardy H^2. Dans cette section nous étudions les propriétés de base de l'opérateur de Toeplitz.

Définition 2.8. *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz de sembole φ est l'opérateur $T_\varphi : H^2 \longmapsto H^2$ défini par*

$$T_\varphi f = P(\varphi f)$$

où $P : L^2(\mathbb{T}) \longmapsto H^2$. la projection de riesz .

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de Ttoeplitz à l'aide de l'opérateur shift.

Théorème 2.2. *Soit T un opérateur borné sur H^2 , alors T est un opérateur de Toeplitz si est seulement si $S^*TS = T$.*

On donne quelque propriétés générales des opérateurs de Toeplitz

Proposition. 2.9. *Soient φ et ψ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$.Alors*
1)- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :$T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.
2)- $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi = T_{\varphi\psi}$.
3)- $T_\varphi = T_\psi$ si et seulement si $\varphi = \psi$.
4)- L'opérateur identité I de H^2 est l'opérateur de toeplitz de symbole $\varphi = 1$ où 1 est la fonction constante qui vaut 1 pour tout $z \in \mathbb{T}$, et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi = 0$.

Proposition. 2.10. *Pour* $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$

Démonstration. Soient $f, g \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned}\langle T_\varphi f, g\rangle &= \langle P(\varphi f), g\rangle \\ &= \langle \varphi f, Pg\rangle \\ &= \langle \varphi f, g\rangle \\ &= \langle f, \overline{\varphi} g\rangle \\ &= \langle f, P(\overline{\varphi} g)\rangle \\ &= \langle f, T_{\overline{\varphi}}^* g\rangle.\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.11. $S = T_z$ *et* $S^* = T_{\overline{z}}$.

Démonstration. Soit $f \in H^2$

$$\begin{aligned}Sf &= zf \\ &= P(zf) \\ &= T_z f.\end{aligned}$$

D'après la proposition précédents $S^* = T_{\overline{z}}$. □

Proposition. 2.12. *L'application qui à toute fonction bornée* φ *associe l'opérateur de Toeplitz* T_φ *est injective . Autrement dit ,si* $T_\varphi = 0, \varphi = 0$.

Démonstration. Si $T_\varphi = 0, T_\varphi(e^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où e^n désigne le n-ème élèment de la base orthonormée de H^2 . Soit maintenant $\varphi \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e^j$ le développement en série de Fourier de φ où $a_j = \langle \varphi, e^j\rangle$. Alors le développement en série de Fourier de φe^n est $\varphi e^n \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{k+n}$ pour tout entier positif n avec $k = j - n$. Ainsi , $T_\varphi(e^n) = P(\varphi e^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ veut dire $a_k = 0$ pour $k + n \geq 0$, c'est-à-dire encore $a_k = 0$ pour tous les $k \geq -n$ donc $a_k = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$ donc $\varphi = 0$. □

Proposition. 2.13. T_φ *est hermitien si et seulement si* φ *est réel.*

Démonstration. T_φ hermitien veut dire :

$$T_\varphi^* = T_\varphi$$

C'est -à-dire $T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi$. Donc T_φ est hermitien si et seulement si

$$\varphi = \overline{\varphi}$$

C'est-à-dire φ est réelle. □

Proposition. 2.14. *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, on a $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, c'est-à-dire,*

$$\sup\left\{\|T_\varphi f\|_2 : f \in H^2, \|f\|_2 = 1\right\} = \|\varphi\|_\infty.$$

Corollaire 2.15. *L'opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ est compacte si est seulement si son symbole est nul*

Démonstration. Soit T_φ un opérateur de Toeplitz compact. pour tout entier $K \in \mathbb{Z}$ et tout entier $n \geq 0$ tels que $n + K \geq 0$ on a :

$$\langle T_\varphi e_n, e_{n+k}\rangle = \langle \varphi e_n, e_{n+k}\rangle = \langle \varphi, e_k\rangle.$$

D'autre part , puisque la suite de fonctions $(e_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers 0 et comme par hypothèse T_φ est un opérateure compact, alors $(T_\varphi e_n)_{n\geq 0}$ converge en norme $\|.\|_2$ vers 0 . D'où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a :

$$\|T_\varphi e_n\|_2 < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. pour tout entier $K \in \mathbb{Z}$, si on prend $n \geq \sup\{N_\varepsilon, -K\}$, on voit que

$$|\widehat{\varphi}(k)| = |\langle \varphi, e_k\rangle| = |\langle T_\varphi e_n, e_{n+k}\rangle| \leq \|T\varphi e_n\|_2 < \varepsilon,$$

D'où $\widehat{\varphi}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et donc φ est l'application identiquement nulle. Réciproquement . si le symbole est nul alors l'opérateur de Toeplitz est nul sur $H^2(\mathbb{T})$ et donc compact. □

2.4 Matrices de Toeplitz.

Une matrice de Toeplitz est une matrice dont les composantes des diagonales sont constantes .

Définition 2.16. *La matrice de l'opérateur de Toeplitz T_φ définit dans la base orthonormée $\{1, z, z^2, z^3...\}$ de H^2 par une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:*

$$a_{ij} = \langle T_\varphi z^j, z^i\rangle = \langle P(\varphi z^j), z^i\rangle = \langle \varphi z^j, Pz^i\rangle = \langle \varphi, z^{i-j}\rangle = \widehat{\varphi}(j-i)$$

C'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.3. *Une matrice de Toeplitz $A = (\widehat{\varphi})_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un opérateur borné si et seulement s'il existe une fonction bornée φ sur $\mathbb{T}$ telle que les nombres $\widehat{\varphi}_n (n \in \mathbb{Z})$ sont ses coefficients de Fourier i.e :*

$$\widehat{\varphi}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 4. *La matrice de toeplitz d'un opérateur de Toeplitz analytique (resp. anti-analytique) dans la base orthonormée $\{1, z, z^2, z^3, ...\}$ de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).*

Donc on a les deux définitions suivants.

Définition 2.17. *(Matric triangulaire inferieure)Une matrice de Toeplitz est dite triangulaire inferieur si : $\widehat{\varphi}(i-j) = 0$ pour $i < j$, c'est-à-dire une matrice de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & 0 & 0 & \dots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & 0 & \dots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Définition 2.18. *(Matrice triangulaire superieure) Une matrice de Toeplitz est dite triangulaire superieure si $\varphi(i-j) = 0$ pour $i > j$. C'est-à-dire une matrice de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ 0 & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ 0 & 0 & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.4. [2] *Tout opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$. dont la matrice dans la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz , est un opérateur de toeplitz .*

Ce théorème montre que si la matrice d'un opérateur borné sur H^2 est une matrice de Toeplitz alors necessairement cet opérateur est un opérateur de Toeplitz.

Chapitre 3

Espaces modèles correspondant à une fonction intérieure.

Le but premier de cet chapitr est de rappeler la définition et les propriétés de l'espace modèle (voir par exemple [11, 22]). On utilise le théorème de Beurling (en 1948 dans [1]) pour décrire les sous-espaces invariants par le shift S, et l'adjoint de shift S^*.

3.1 Définitions et propriétés.

Théorème 3.1 (Beurling [1]). *1. Un sous-espace fermé M de H^2 tels que $M \subsetneq H^2$ est invariant par le shift S si et seulement si M est de la forme :*

$$M := uH^2 = \{uf, f \in H^2\}.$$

où u est une fonction intérieure.

2. Les sous-espaces fermés Y de H^2 tels que $Y \subsetneq H2$ invariants par S^* sont de la forme

$$Y = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug\rangle, \forall g \in H^2\} \tag{3.1.1}$$

où u est une fonction intérieure. Réciproquement tous les espaces de la forme (3.1.1) sont S^*-invariants.

Définition 3.1. *Soit u une fonction intérieure. On appelle espace modèle correspondant à u le sous-espace de H^2 défini par :*

$$\begin{aligned} K_u^2 &= (uH^2)^\perp \\ &= H^2 \ominus uH^2. \end{aligned}$$

La proposition suivant donne plus d'information pour K_u^2.

Proposition. 3.2. *Pour une fonction intérieure u, l'espace modèle K_u^2 est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que :*

$$f = \overline{gz}u$$

μ-presque partout sur $\mathbb{T}$ pour une certaine fonction $g \in H^2$. En d'autre termes,

$$K_u^2 = H^2 \cap u\overline{zH^2},$$

où le seconde membre est considéré comme ensemble des fonctions sur $\mathbb{T}$.

Démonstration. Soit $f \in H^2$, on a

$$\begin{aligned}\langle f, uh\rangle = 0, \forall h \in H^2, &\Leftrightarrow \langle \overline{u}f, h\rangle = 0, \forall h \in H^2\\ &\Leftrightarrow \overline{u} \in (H^2)^\perp = \overline{zH^2},\\ &\Leftrightarrow \text{ il existe } g \in H^2 \text{ tells que } \overline{gz} = \overline{u}f.\end{aligned}$$

Comme $\overline{u}u = 1$ $\mu-$ presque partout sur $\mathbb{T}$, on a $u\overline{gz} = f$, on voir qu'une fonction $f \in H^2$ est dans $(uH^2)^\perp$ si et seulement si f est dans $(u\overline{zH^2})$.
Comme les sous-espaces uH^2 constituent les sous-espaces invariants non triviaux de l'opérateur shift unilatéral S sur H^2. Les sous-espaces modèles K_u^2 jouent les roles analogues pour les backward shift S^*.

□

Corollaire 3.3. *Pour toute fonction intérieure u , l'espace modèle K_u^2 corespondant est un sous-espace propre de H^2 qui est invariant par S^**

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace propre de H^2 S^*-invariant . Pour $f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{M}^\perp$

$$\begin{aligned}\langle f, Sg\rangle &= \langle S^*f, g\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $Sg \in \mathcal{M}^\perp$ pour toute $f \in \mathcal{M}$, d'où $\mathcal{M}^\perp$ est un sous-espace non trivial de H^2 , S-invariant. il existe u , une fonction intérieure telle que $\mathcal{M}^\perp = uH^2$.
D'où $\mathcal{M} = (uH^2)^\perp$. □

Corollaire 3.4. *Soient u_1 et u_2 des fonctions intérieures. les asserrtions suivantes sont equivalentes*
(1) $u_1|u_2$
(2) $K^2_{u_1} \subset K^2_{u_2}$.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Il existe donc une fonction intérieure u telle que $u_2 = u_1 u$, D'où

$$\begin{aligned} u_2 H^2 &= u_1 u H^2 \\ &\subset u_1 H^2. \end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Puisque $u_2 H^2 \subset u_1 H^2$, $u_2 \in u_1 H^2$. D'où il existe une fonction intérieure u telle que $u_2 = u_1 u$, c'est-à-dire $u_1|u_2$. □

Proposition. 3.5. *Une fonction $f \in H^2$ est non-syclique pour S^* si et seulement si il existe une fonction $g \in H^2$ et une fonction intérieure u telles que*

$$f = \overline{gz}u,$$

μ-presque partout sur $\mathbb{T}$. si u et le facteure intérieure de g sont premiers entre eux, on a : le sous-espace S^*-invariant engendré par f est K^2_u lui meme

$$span\{f, S^*f, S^{*2}, ...\} = K^2_u.$$

Proposition. 3.6. *Pour $f \in K^2_u$ et u est un fonction intérieure qui divise f , c'est-à-dire $f|u \in H^2$, on a $f|u \in K^2_u$. En particulier , les facteures exterieures de tout fonction dans K^2_u sont aussi dans K^2_u.*

Lemme 3.7. *[11] Soit u une fonction intérieure , alors dim $K^2_u < \infty$ si et seulement si u est un produit de Blaschke d'orde fini.*

Proposition. 3.8. *Si u et v sont des fonctions intérieures , on a :*

$$K^2_{uv} = K^2_u \oplus uK^2_v.$$

Proposition. 3.9. *Si $(u_j)_{1\leq j\leq n}$ est une suite finie de fonctions intérieures telle que $u = \prod_{j=1}^n u_j$ existe, on a*

$$K^2_u = K^2_{u_1} \oplus \bigoplus_{n\geq 2} (\prod_{j=1}^{n-1} u_j) K^2_{u_n}$$

3.2 Noyau reproduisant de K_u^2.

L'espace modèle K_u^2 correspondant à la fonction intérieure u est un sous-espace fermé de l'espace $L^2(\mathbb{T})$, possède un noyau reproduisant.

Soit u une fonction intérieure.

On note par P_u la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2. telle que :

$$P_u = P - uP\overline{u}$$

Avec P la projection orthogonale de L^2 sur H^p (voir chapitre 1).

Rappelons que le noyau reproduisant k_λ de l'espace Hardy est donné par : $k_\lambda = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}$(voir chapitre 1).

On peut définer le noyau reproduisant k_λ^u de K_u^2 a partir de k_λ , c'est-à-dire le noyau reproduisant de K_u^2 est la projection orthogonale de k_λ sur K_u^2 ,et on a le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Soit u une fonction intérieure , on va définir*

$$k_\lambda^u(\lambda) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \overline{\lambda}z} \ , \ (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}.$$

Alors ,

1)- $k_\lambda^u \in K_u^2 = (uH^2)^\perp$.

2)- $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u \rangle$ *,*$(f \in K_u^2, \lambda \in \mathbb{D})$.

Autrement dit k_λ^u *est un noyau reproduisant de l'espace modèle.*

3)- P_u *la projection orthogonale de* $L^2(\mathbb{T})$ *sur* K_u^2 *on a :*

$$P_u(g)(\lambda) = \langle g, k_\lambda^u \rangle \ pour \ tout \ \lambda \in \mathbb{D} \ et \ g \in L^2.$$

Exemple 3.1. *Si* $u(z) = z^n$, *alors :*

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{\lambda}^n z^n}{1 - \overline{\lambda}z} = 1 + \overline{\lambda}z + \overline{\lambda}^2 z^2 + ... + \overline{\lambda}^{n-1} z^{n-1}.$$

3.3 Opérateurs complexes symétriques.

D'abord Nous présentons les deux définitions suivante qui sont definié (rspc) l'opérateur de conjugaison et l'opérateur congugaison C-symétrique dans l'espace Hilbert.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert

Définition 3.10. *On dit qu'un opérateur C sur $\mathcal{H}$ est un opérateur de conjugaison s'il est verifié les conditions suivantes :*
1)- $C(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha} Cf + \overline{\beta} Cg \quad$ *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *et* $f, g \in \mathcal{H}$.
2)- $\langle Cf, Cg\rangle = \langle g, f\rangle$ *, pour tout* $f, g \in \mathcal{H}$.
3)- $C^2 = Id$.

Définition 3.11. *Soit C un opérateur de conjugaison sur $\mathcal{H}$.*
1)- On dit qu'un opérateur linéaire A sur $\mathcal{H}$ est C-symétrique (resp, C-antisymétrique) si

$$A = CA^*C \ (resp, \ -A = CA^*C).$$

2)- On dit qu'un opérateur linéaire A sur $\mathcal{H}$ est complexe-symétrique s'il existe une conjugaison C sur $\mathcal{H}$ telle que A est C-symétrique .

Définition 3.12. *Chaque espace modèle K_u^2 admet un opérateur de conjugaison C définie en terme de fonction au bord, c'est-à-dire $C : K_u^2 \longrightarrow K_u^2$ tel que :*

$$Cf = \overline{fz}u.$$

Avec $f \in K_u^2 \quad z \in \mathbb{T}$.

On notée Cf par $\widetilde{f}$ c'est-à-dire : $\widetilde{f} = C(f)$.

Proposition. 3.13. *Pour $\lambda \in \mathbb{T}$ et $z \in \mathbb{T}$ on a :*
1)- $\widetilde{k}_\lambda^u = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}$, *en particulier , si* $u(\lambda) = 0$, $\widetilde{k}_\lambda^u(z) = \frac{u(z)}{z-\lambda}$,
2)- $\widetilde{f} = \langle \widetilde{k}_\lambda^u, f\rangle, \ f \in K_u^2$.

3.4 Produit tensoriel.

Nous allons denner la définition et les propriétés élémentaires du produit tensoriel.

Définition 3.14. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert , $f, g \in \mathcal{H}/\{0\}$, $f \otimes g \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (l'ensmeble des opérateurs bornées) est définie par :*

$$\begin{aligned} f \otimes g : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ h &\longmapsto (f \otimes g)(h) = \langle h, g\rangle f, \ (h \in \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Proposition. 3.15. *Soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espace de Hilbert et supposons que $A_1 : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ et $A_2 : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ sont des opérateurs bornés . Alors il existe un unique opérateur borné $A_1 \otimes A_2 : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tel que :*

$$(A_1 \otimes A_2)(f \otimes g) = A_1(f) \otimes A_2(g)$$

Pour chaque $f \in \mathcal{H}_1$ et $g \in \mathcal{H}_2$. De plus , $\|A_1 \otimes A_2\| = \|A_1\|\|A_2\|$.

Proposition. 3.16. *On a les propriétés suivantes : pour tout $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{H}$ éventuellement non nuls, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,*
1)- $A(f \otimes g) = (Af \otimes g)$ et $(f \otimes g)A = (f \otimes A^*g)$.
2)- $(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1) = \langle f_1, g\rangle(f \otimes g_1)$.
3)- $(\alpha f + \beta f_1) \otimes g = \alpha(f \otimes g) + \beta(f_1 \otimes g)$ et $f \otimes (\alpha g + \beta g_1) = \overline{\alpha}(f \otimes g) + \overline{\beta}(f \otimes g_1)$.
4)- $Ker(f \otimes g) = (\mathbb{C}g)^{\perp}$ et $Im(f \otimes g) = \mathbb{C}f$.
5)- $(f \otimes g)^* = (g \otimes f)$.
6)- $(f \otimes g) = (f_1 \otimes g_1)$ avec f, f_1, g, g_1 tous non nuls, si et seulement si il existe $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \gamma f_1, g = \lambda g_1$ et $\overline{\lambda}\gamma = 1$.

Proposition. 3.17. *Soit E et F des bases orthonorméés de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ respectivement. Alors $\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.*

Chapitre 4

Opérateurs de Toeplitz tronqués.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler de nombreux résultats classiques sur les opérateurs de Toeplitz tronqués. Ils sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle K_u^2. Les opérateurs de Toeplitz tronqués ont été formellement introduits par Sarason dans [4]. Dans toute la suite, on fixe u comme étant une fonction intérieure. les compressions de S et S^* sur K_u^2 sont notées respectivement par S_u et S_u^* c'est-à-dire.

$$S_u = S|_{K_u^2}, \quad S_u^* = S^*|_{K_u^2}.$$

Ces deux opérateurs jouent des rôles cruciaux dans la théorie des opérateurs de Toeplitz tronqués. Comme chaque noyau reproduisant de K_u^2 est analytique borné et $span\{k_\lambda^u, \lambda \in \mathbb{D}\}$ (le sous-espace vectoriel fermé engendré par k_λ^u) est dense dans K_u^2, il s'ensuit que $K_u^2 \cap H^\infty := K_u^\infty$ est dense dans K_u^2.

4.1 Définitions et quelques propriétés.

Définition 4.1. *On définit l'opérateur de Toeplitz tronqué $A_u^\infty : K_u^\infty \longrightarrow K_u^\infty$ de symbole $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ par :*

$$A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f)$$

tel que P_u est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2.

On note par $\mathcal{T}_u$ l'ensemble de tous les opérateurs Toeplitez tronqués bornés sur K_u^2.

Proposition. 4.2. *Soient φ , $\psi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que A_φ^u , $A_\psi^u \in \mathcal{T}_u$. Alors*
1)- Pour tous nombres complexes a et b , $A_{a\varphi+b\psi}^u = aA_\varphi^u + bA_\psi^u$.
2)- $(A_\varphi^u)^* = A_{\overline{\varphi}}^u$.

Lemme 4.3. *[20]. Les opérateurs dans $\mathcal{T}_u$ sont C-symétriques.*

Les opérateurs S_u et S_u^* sont des opérateurs de toeplitz de symbole respectif z et $\overline{z}$. Autrement dit,

$$S_u = A_z^u \quad et \quad S_u^* = A_{\overline{z}}^u.$$

Le lemme suivant donne les résultats sur la commutativité avec les opérateurs de Toeplitz tronqués et les shifts sur K_u.

Lemme 4.4. *Si $\varphi \in K_u^2$, alors A_φ^u commute avec S_u et $A_{\overline{\varphi}}^u$ commute avec S_u^*.*

Proposition. 4.5. *Soient φ_1 et φ_2 dans K_u^2. Alors $A_{\varphi_2+\overline{\varphi_1}}^u = 0$ si et seulement si $\varphi_1 = ck_0^u$ et $\varphi_2 = -\overline{c}k_0^u$ avec $c \in \mathbb{C}$.*

Lemme 4.6. [4] *Soit u une fonction intérieure , et k_λ^u le noyau reproduisant de K_u^2 .*

1)- Si $\lambda \in \mathbb{D}$, alors

$$S_u^* k_\lambda^u = \overline{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u} \ , \ et$$

$$S_u \widetilde{k_\lambda^u} = \lambda \widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda) k_0^u.$$

2)- Si $\lambda \in \mathbb{D} - \{0\}$, alors

$$S_u k_\lambda^u = \frac{1}{\lambda}(k_\lambda^u - k_0^u) \ , \ et$$

$$S_u^* \widetilde{k_\lambda^u} = \frac{1}{\lambda}(\widetilde{k_\lambda^u} - \widetilde{k_0^u}).$$

Théorème 4.1. *[4]. Si $\varphi \in L^2$, alors*
$A_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$.

Théorème 4.2. *Un opérateur A borné sur K_u^2 appartient à $\mathcal{T}_u$ si et seulement si il existe φ_1 , $\varphi_2 \in K_u^2$ tels que :*

$$A - S_u A S_u^* = \varphi_1 \otimes K_0^u + K_0^u \otimes \varphi_2.$$

Danc ce cas, $A = A_{\varphi_1+\overline{\varphi}_2}$.

Lemme 4.7. *[4]*

$$I - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u,$$

et

$$I - S_u^* S_u = \widetilde{k_0^u} \otimes \widetilde{k_0^u}.$$

4.2 Opérateur de Toeplitz tronqués de rang fini.

Définition 4.8. *Soit u une fonction intérieur.*

1)- Une fonction f analytique sur $\mathbb{D}$ admet une limite non-tangentielle l au point $\omega \in \mathbb{T}$ si pour tout $\theta > 0$, $f(z) \to l$ quand $z \to \omega$ sur toute région non-tangentielle $\Gamma_\theta(\omega) = \{z \in \mathbb{D} : |z - \omega| < \theta(1 - |\theta|)\}$.

2)- Pour une fonction intérieure u et un point $\eta \in \mathbb{T}$, on dit que u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory (ADC) en η, si les limites non-tangentielles de u et u' existe en η, et $|u(\eta)| = 1$.

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations utiles de ADC.

Théorème 4.3. *[?] Pour une fonction intérieure $u = b_\Lambda S_\mu$, avec b_Λ est un produit de Blaschke avec des zéros $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, répété selon multiplicité, S_μ est une fonction intérieure singulière avec mesure singulière correspondante μ, et $\eta \in \mathbb{T}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1)- Tout $f \in K_u$ a une limite non-tangentielle en η.

2)- Pour tout $f \in K_u^2$, $f(\lambda)$ est borné en $\lambda \to \eta$ non-tangentielle.

3)- u a un ADC en η.

4)- La fonction

$$k_\eta^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\eta)}u(z)}{1 - \overline{\eta}z}, \tag{4.2.1}$$

dans H^2.

5)- L'assertion suivante est satisfaite

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1 - |\lambda_n|^2}{|\eta - \lambda_n|^2} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - \eta|^2} < \infty. \tag{4.2.2}$$

Le théorème suivant donne la caractérisation d'opérateurs de Toeplitz tronqué de rang 1.

Théorème 4.4. *(Sarason) [4]*

1)- Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, les opérateurs $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$ et $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif $\frac{\overline{u}}{z-\lambda}$, $\frac{u}{z-\lambda}$.

2)- Si $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en η, l'opérateur $K_\eta^u \otimes K_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $K_\eta^u + \overline{K_\eta^u} + 1$.

3)- Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués non nul de rang 1 sont des multiples des opérateurs dans (1) et (2).

Théorème 4.5. *[4]*

1)- Soient $\lambda \in \mathbb{D}$ et $n \in \mathbb{N}$, les opérateurs

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j \widetilde{K_\lambda^u}}{d\lambda^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} K_\lambda^u}{d\overline{\lambda}^{n-j-1}} \right) \tag{4.2.3}$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j K_\lambda^u}{d\overline{\lambda}^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} \widetilde{K_\lambda^u}}{d\lambda^{n-j-1}} \right) \tag{4.2.4}$$

sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang n avec symbole respectif $\frac{(n-1)!u}{(z-\lambda)^n}$, $\frac{(n-1)!\overline{u}}{\overline{z-\lambda}^n}$.

sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang n avec symbole respectif $\frac{(n-1)!u}{(z-\lambda)^n}$, $\frac{(n-1)!\overline{u}}{\overline{z-\lambda}^n}$.

2)- [4]. Si $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en η, l'opérateur

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j \widetilde{K_\eta^u}}{d\eta^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} K_\eta^u}{d\overline{\eta}^{n-j-1}} \right) \tag{4.2.5}$$

et son adjoint sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang n.

4.3 Opérateus de Toeplitz tronqués de type α.

Définition 4.9. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. On dit que un opérateur de Toeplitz A est de type α (ou de type sedlock) si et seulement s'il existe $\varphi \in K_u^2$ tells que*

$$A = A_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c} \ , \quad c \in \mathbb{C}.$$

On note par $\mathcal{B}_u^\alpha$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.

Proposition. 4.10. *Si A_φ est de type α, alors il existe $\varphi_0 \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ telle que*

$$\varphi_0(0) = 0 \quad et \quad A_\varphi = A_{\varphi_0 + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} + c}.$$

Lemme 4.11. *(Sedlock [8])*

1)- Si $\lambda \in \mathbb{D}$, l'opérateur $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type α, où $\alpha = u(\lambda)$, son symbole est la fonction $\phi = \widetilde{k_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{S_u k_\lambda^u}$

2)- Si $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en η, l'opérateur $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\eta)$ et son symbole est la fonction $\phi = k_\eta^u + u(\eta)\overline{S_u \widetilde{k_\eta^u}}$.

Proposition. 4.12. *Soit $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Alors*

$$A \in \mathcal{B}_u^\alpha \Leftrightarrow A^* \in \mathcal{B}_u^{1/\overline{\alpha}}.$$

Proposition. 4.13. *Soit $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. alors*

1)- Soient α_1 , $\alpha_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, alors $\mathcal{B}_u^{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_u^{\alpha_2} = \mathbb{C}I$.

2)- Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, et $A_n \in \mathcal{B}_u^\alpha$ tels que A_n converge vers A pour la topologie faible des opérateurs. Alors $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

3)- Soient α, $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ et $A_n \in \mathcal{B}_u^{\alpha_n}$ tels que A_n converge vers A pour la topologie faible des opérateurs. Alors $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

Définition 4.14. *Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. On définit l'opérateur shift généralisé (ou modifié) S_u^α par*

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u}.$$

Dans le chapitre 2 on a vue une caractérisation des opérateurs de Toeplitz à l'aide de l'opérateur shift $(S^*TS = T)$ sur l'espace de Hardy , sur l'espace modèle K_u^2. Sarason a caractérisé les opérateurs de Toeplitz tronqués par le shift généralité dans le théorème suivant.

Théorème 4.6. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Un opérateur borné A sur K_u^2 et un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'ils existe deux fonctions $\varphi, \psi \in K_u^2$ telles que :*

$$A - S_u^\alpha A (S_u^\alpha)^* = (\varphi \otimes k_0^u) + (k_0^u \otimes \psi).$$

Le corollaire suivant est un résultat du théorème précédent.

Corollaire 4.15. *Si un opérateur borné $A \in K_u^2$ commute avec S_u^α alors A est un opérateur de Toeplitz tronqué.*

Théorème 4.7. *Soit A Un opérateur borné sur K_u^2 et soit $\alpha \in \mathbb{D}$. Alors A est de type α si et seulement si*

$$AS_u^\alpha = S_u^\alpha A.$$

4.4 Matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué.

On s'intéresse aux matrices des opérateurs de Toeplitz tronqués dans le cas où la fonction intérieur est égale a z^n.

4.4.1 Exemple de matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué

Si $u(z) = z^n$ et $\varphi \in L^2$, et soit $\widehat{\varphi}(n)$ les coefficient de Fourier de la fonction φ. Alors M_A la représentation matricielle de l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ par rapport à la base orthonormée $S = \{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ de K_u^2 est :

$$M_A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}(-n+2) & \widehat{\varphi}(-n+1) \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \ddots & & \widehat{\varphi}(n-1) \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) \\ \widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) \end{pmatrix}$$

La matrice du shift généralisé S_u^α est de la forme :

$$M_A = M_{S_u^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de type Sedlock.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $\varphi \in K_{z^n}$. Alors $\varphi(z) = \sum_{k\geq 0}^{n-1} \widehat{\varphi}(k) z^k$ avec $\widehat{\varphi}(n)$ les coefficients de Fourier de la fonction φ,

M_A la représentation matricielle de $A_{\varphi+\alpha\overline{S_{z^n}\widetilde{\varphi}}}$ par rapport à la base $\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ est

$$M_A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \alpha\widehat{\varphi}(2) & \alpha\widehat{\varphi}(1) \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) & \ddots & & \alpha\widehat{\varphi}(2) \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) \\ \widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) \end{pmatrix}.$$

Et pour $\alpha = \infty$, nous avons

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) \\ 0 & 0) & \widehat{\varphi}(n-1) & \ddots & & \widehat{\varphi}(2) \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \widehat{\varphi}(n-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[1] A. Beurling : On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) :239-255, 1948.

[2] A. Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 213 :89-102, 1963/1964.

[3] C. Gu, Products of several Toeplitz operators. J. Funct. Anal., 171 :483 ?587, 2000.

[4] D. Sarason, Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Oper. Matrices 1(4), 491-526 (2007).

[5] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).

[6] J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[7] J. Ph. Labrousse, Quelque topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Dept. De Math. Univ. de Nice(1970).

[8] K. Guo, A problem on products of Toeplitz operators. Proc. Amer.Math. Soc., 124(3) :869 ?871, 1996.

[9] K. Guo, et D. Zheng, Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space. J. Math. Anal.Appl., 276 :213 ?230, 2002.

[10] L. Senge, (auth.), Real and Functional Analysis, Springer-Verlag New York,Graduate Texts in Mathematics 142, 1993.

[11] N. K. Nikol'skii : Treatise on the shift operator : spectral function theory. Grundlehren der mathematischenWissenschaften. Springer, Berlin, 1986, ISBN 9783540150213.

[12] S. Axler, S. Chang, et D. Sarason, Products of Toeplitz operators. Int. Equa.Op. Th., 1 :285 ?309, 1978.

[13] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert Space, Chelsea Publishing Company, Kew York,1957.

[14] P. Halmos, A Hilbert space problem book. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, second édition, 1982.

[15] P. Duren, : Theory of H^p-spaces. A series of Monographs and Textbooks.Academic press, London,1970.

[16] P. L. Duren, Theory of H^p spaces,Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.

[17] P. A. Fuhrmann, Linear systems and operators in Hilbert space, McGraw-Hill 1981.

[18] R. A. Martinez-Avendano and P.Rosenthal. An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space. Vol.237,Spinger, New York, 2007.

[19] S. Garcia, Conjugation, the backward shift and Toeplitz kernels. J. Op. Th., 54(2) :239 ?250, 2005.

[20] S. Garcia, et M. Putinar, Complex symmetric operators and applications. Trans. Amer. Math. Soc., 358(3) :1285 ?1315, 2005.

[21] S. Garcia, et M. Putinar, Complex symmetric operators and application II. Trans. Amer.Math. Soc., 359(8) :3913 ?3931, 2007.

[22] S. R. Garcia, J. E. Mashreghi, W. Ross, Introduction to Model Spaces and their Operators, Cambridge University Press, 2016.

[23] W.Ruden, : Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 3^e édition , 1987.

[24] Wa. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1980.

[25] Y. Katznelson, An Introduction.to Harmonic Analysis. Cambridge university Press, 3^e édition, 2004.