REPUBLIQUE ALGERIENNE ĐEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE ĐE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET ĐE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



MÉMOIRE

UNIVERSITÉ DR.YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Présentée Pour L'obtention Du Diplôme De :
MASTER EN MATH2MATIQUES

Option

Analyse mathématique et application

Thème

Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes

Par :
DOUIFI Ayoub

ĐEVANT LE JURY

Président du jury:	N.BENAICHOUCHE	MAA	U.Y.F.M
Examinateur:	K.MAALOUM	MAA	U.Y.F.M
Examinateur:	M.N.BOUTEBBA	MAA	U.Y.F.M
Encadreur	S.RAFA	MAA	U.Y.F.M

Soutenue le 18/06 /2018

Table des matières

Introduction **9**

1 Quelques rappels **10**
1.1 Rappel des espaces fonctionnels 10
1.1.1 Espace de Hilbert 10
1.1.2 Espaces $L^P(\Omega), 1 \leq p < \infty$ 11
1.1.3 Fonctions Bockner intégrables 12
1.1.4 Espace de classe C^k 12
1.1.5 Espaces $D(\Omega)$, $D'(\Omega)$ 13
1.1.6 Espace de sobolev 13
1.1.7 injection de sobolev : 15
1.2 Quelque théorémes principaux 16
1.2.1 Théoréme de lax-Milgram 16
1.2.2 Théoréme de représentation de Riesz 16
1.2.3 Formule de Green 16
1.3 Quelques inégalités : 17
1.3.1 Inégalité de young : 17
1.3.2 Inégalité de poincaré : 17
1.3.3 Inégalité de Hölder : 17
1.3.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz : 17
1.4 opérateurs bornés et non bornés dans un espace de Hilbert : 17
1.4.1 Norme d'un opérateur linéare borné : 18
1.4.2 Opérateurs fermés 18
1.4.3 opérateur a domaine dense : 18
1.4.4 Opérateurs adjoints : 19
1.4.5 opérateurs auto-adjoint et anti-adjoints 19
1.4.6 Opérateurs symétriques 19
1.4.7 Opérateurs compacts 19
1.4.8 Opérateurs dissipatifs 20
1.4.9 Opérateurs maximaux 20
1.4.10 Opérateurs monotones 20
1.4.11 Opérateurs m-dissipatifs 20
1.4.12 Spectre d'un opérateur compact 21
1.4.13 Spectre d'un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte 21
1.5 C^0-semi-groupes sur un espace de Hilbert 22
1.5.1 Semi-groupes continus 22
1.5.2 Semi-groupes de contraction 22

1.5.3 Générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe 23
1.6 Problèmes dèvolution non homogènes : 23
1.6.1 Théoréme de Hille-Yosida : 24

2 Contrôlabilité exacte des l'equations des ondes **25**
2.1 Introduction. 25
2.2 Quelques rappels : 26
2.2.1 définitions et caractérisation : 26
2.2.2 Equation des ondes : 27
2.2.3 Régularité de la solution de l'équation des ondes : 28
2.3 **Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes** 29
2.3.1 Contrôlabilité Exacte de l'équation des ondes 32

Conclusion **42**

Bibliographie **43**

Résumé

Le premier chapitre de ce mémoire a été consacré pour quelque définition et rappels et théorèmes sur l'analyse fonctionnelle et espace de Sobolev, ainsi que le théorème de Hille-yosida et un peu sur la théorir spectrale.

Le deuxieme chapitre de ce mémoire à été basé sur l'étude de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec contrôle interne. Et le but de cette étude est de cherche un contôle $u \in L^2(Q_T)$ tel que la solution de notre prolème (P_w) vérifie :

$y(T) = y'(T) = 0$ dans Ω.

Mots clés : équation des ondes, équation hyperbolique, contrôlabité, contrôlabité exacte, énergie, dissipativité, problème d'évolution

ملخص :

- في الفصل الأول لهذه المذكرة مسخر لبعض التذكيرات والتعاريف والنظريات في التحليل التابعي وفضاءات صوبولاف(Soblev) وكذلك النظريات حول نصف الزمر ونظرية هيل-يوشيدا والنظريات الطيفية.
- في الفصل الثاني كان مركزا حول دراسة التحكم (المراقبة) الدقيق لمعادلة الأمواج مرفقة بمراقبة داخلية. والهدف من هذه الدراسة هوا لبحث عن مراقبة

$u_2 \in L^2(Q_T)$ حيث يكون Y حل المسالة (P_W) محققا للمعادلة $0 =$

$Y'(T) = Y(T)$ في Ω

الكلمات المفتاحية :معادلة الأمواج ، الزائدية ، المراقبة ،المراقب الدقيق الطاقة،تبددي،مشكل التطور

Remerciements

Louange a Allah le Seigneur des mondes.

- je remercie **ALLAH** le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.
- Je tiens à remercier chaleureusement mon promoteur Monsieur **RAFA** , Maître de conférences a l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour avoir accepté d'encadrer mon mémoire. Ainsi de m'avoir orienté, aidé et conseillé.
- Mes remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à ce travaille.
- mes gratitudes à tous les membres de jury qui me font l'honneur de juger mon travail.
- A tous les enseignants du département de génie électrique et informatique sans exception pour leurs efforts fournis durant ces cinq années.
- A l'ensemble des étudiants de ma promotion 2018/2019.

Dédicace

je dédié ce modeste travaille a mes parents.
A tous mes frères et toute la famille,
A mes professeurs sans exception,
A tous ceux qui me connaissent de près ou de loin.

Table des matières

Notations et symboles

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

- $\mathbb{N}$: Ensemble des entier naturels.
- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.
- Ω : Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
- $\partial\Omega = \Gamma$: La frontière de Ω.
- $\overline{\Omega}$: La fermeture de Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.
- $\langle . \, , . \rangle$: Produit scalaire.
- $\|.\|$: La norme.
- H : Espace de Hilbert.
- $\pounds\,(H)$: L'ensemble des opérateures linéaire continus de H dans H.
- A : Opérateur.
- $D\,(A)$: Domaine de A.
- $R\,(A)$: L'image de A.
- $N\,(A)$: Le noyau de A.
- $D^a = \partial^a = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a1} \partial x_2^{a2} ... \partial x_n^{an}} = \frac{\partial^{a1} \partial^{a2} ... \partial^{an}}{\partial x_1^{a1} \partial x_2^{a2} ... \partial x_n^{an}}$
- $n : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$: La normale extérieure à $\partial\Omega$.
- $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$: La dérivée normale extérieur à $\partial\Omega$.
- $p.p$:Presque partout .
- i.e :signifie.
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^t$
- $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, Δ : Opérateur de Laplace.
- $Q = \Omega \times [0, +\infty[$.
- $\sum = \partial\Omega \times [0, +\infty[$.
- $\sigma\,(A)$:Le spèctre de A.
- $R\,(.; A)$: La résolvante de A.
- $\hookrightarrow$: l'injection compacte.
- $\overset{continue}{\hookrightarrow}$: l'injection continue.
- $x_n \longrightarrow x$: x_n converge fortement vers x .
- $x_n \rightharpoonup x$: x_n converge faiblement vers x .
- $\blacksquare$: La fin démonstration.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité des equations des ondes.

La notion de la contrôlabilité est d'une grande importance dans la théorie du contrôle ; c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. De nombreux problèmes fondamentaux de la théorie du contrôle (stabilité et stabilisation, contrôle optimal) ne peuvent être résolus que sous l'hypothèse que le système soit contrôlable. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité par exemple dans notre cas amener un système d'un certain état initial à une sortie désirée en respectant éventuellement certains critères.

Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, le rôle de l'automaticien est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. Ainsi les domaines d'application sont

multiples : aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, génie des procédés, etc.

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'un contrôle ou d'une commande.

Un modèle simple englobant une large classe des systèmes de contrôle des equations des ondes est donné par :

soit Ω est un ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}^n\,(n \geq 1)$ de frontiére réguliére $\Gamma = \partial\Omega$, ω un ouvert tel que $\omega \subset \Omega$.

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + 1_\omega u & , \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega = Q_T \\ y = 0 & , \ (0,T) \times \Gamma = \sum_T \\ y\,(0) = y_0 & , \ x \in \Omega \\ y_t\,(0) = y_1 & , \ x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

Où :

y est l'état, u est le contrôle, y_0 et y_1 sont les données initiales.

Le problème étudié est le suivant :

Soit $T > 0$ donné. Peut-on , pour tout couple (y_0, y_1) donné dans un espace convenable, trouver un contrôle u tel que, si $y\,(x,t)$ est la solution de systéme (1), on ait :

$y\,(x,T) = y_t\,(x,T) = 0 \quad$ dans Ω.

Si cela est possible , on dit alors que le système est exactement contrôlable à l'instant T.

Chapitre 1

Quelques rappels

1.1 Rappel des espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 ***(produit scalaire réel) :*** *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. on appelle produit scalaire sur H, une application de $H \times H \to \mathbb{R}$ notée par $\langle .,. \rangle$ telle que :*

1-$\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire.
2-$\langle .,. \rangle$ est symétrique c'est-à-dire :pour tout $x, y \in H, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
3-$\langle .,. \rangle$ est définie positive c'est-à-dire :$\forall\ x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Exemple 1.1.1 $\mathbb{R}$ *muni de l'application définie par :*$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*tel que :*$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

On a : $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire .

Remarque 1.1.1

1-Le produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchuy-Shwarz : $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.
2-Le produit scalaire est une application continue de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$.
norme associée à un produit scalaire :
H espace vectoriel sur ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\langle .,. \rangle$ produit scalaire sur H alors l'application :

$$\begin{aligned} H &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\to \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

est une norme sur H que l'on note par$\|\|$ $\Big($c'est -à-dire , $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur $H\Big)$.

Définition 1.1.2 ***(produit scalaire complexe) :*** *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. on appelle produit scalaire sur H, une application de $H \times H \to \mathbb{R}$ notée par $\langle .,. \rangle$ telle que :*

1-$\langle .,. \rangle$ est linéaire à la $1^{\overset{ere}{=}}$ variable (c'est-à-dire $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$) et antilinéare à la $2^{\overset{eme}{=}}$ variable (c'est-à-dire $\langle x, ay \rangle = \overline{a} \langle x, y \rangle$).
2-$\langle .,. \rangle$ est antisymétrique c'est-à-dire :pour tout $x, y \in H, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3-$\langle .,. \rangle$ est définie positive c'est-à-dire :$\forall\ x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Définition 1.1.3 *Un $\mathbb{R}-$espace vectoriel(resp $\mathbb{C}-$ espace vectoriel) muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ s'appelle un espace préhilbertien réel(resp complexe), si l'espace est de dimension finie il s'appelle un espace Ecludién.*

Définition 1.1.4 *Soit H un espace préhilbertien (réel ou complexe). On dit que H un espace de Hilbert si il est un espace complet pour la norme induite.*

Définition 1.1.5 (***famille orthonormale***) *Soit H espace préhilbertien, une famille $(v_i)_{i\in I}$ des vecteurs est dite orthonormale si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de plus tous ces vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire :*

$$\forall i,j \in I \qquad i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0 \;\; et \; \forall i \in I \quad \|v_i\| = 1.$$

Remarque 1.1.2 *Toute famille orthonormale formé de vecteur non nuls est libre.*

Définition 1.1.6 (***base orthonormale***) *H espace préhilberetien, une famile $(v_i)_{i\in I}$ de vecteur est appelée base orthonormale de H si elle est famille orthonormale de plus génératrice de H, autrement dit si c'est une base de H.*

Remarque 1.1.3 *Si l'espace préhildertien H est euclidien ou hermitien, une famille orthonormale est une base si et seulment si elle contient n vecteurs,où n est la dimension de H.*

1.1.2 Espaces $L^P(\Omega), 1 \leq p < \infty$

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.1.7 *L'espace $L^p(\Omega)$ est défini par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to R, f \text{ mesurable tel que : } \int_\Omega |f(x)|^p \leq \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Définition 1.1.8 *Soit $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est défini par :*
$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to R \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$,
muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C, \;\; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Définition 1.1.9 *Soit $1 \leq p < \infty$.*
$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \; f \in L^P(K) \text{ pour chaque } k \in \Omega \text{ compact} \right\}$.

1.1.3 Fonctions Bockner intégrables

Espace $L^p(0,T,X)$

X désigne un espace de banach et $T>0$.
* pour $1 \leq p < \infty$ on définit :

$$L^p(0,T,X) = \left\{ f : [0,T] \to X,\ f \text{ est mesurable et } \int_0^T \|f(t)\|_X^P \ \mathrm{dt} \leq \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f(t)\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \ \mathrm{dt} \right)^{1/p}.$$

*pour $p = +\infty$ on a :
$L^\infty(0,T,X) = \{f : [0,T] \to X,\ f \text{ est mesurable et } \exists\ M>0,\ \|f(t)\|_X \leq M \text{ p.p.t}\}$,
muni de la norme

$$\begin{aligned}\|f(t)\|_{L^\infty(0,T,X)} &= \inf\{M>0, \|f(t)\|_X \leq M\}. \\ &= \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X .\end{aligned}$$

1.1.4 Espace de classe C^k

Définition 1.1.10 *On désigne par $C(\Omega)$ l'espace de fonction continues sur Ω par :*
$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$.
muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| .$$

Définition 1.1.11 *On désigne par $C^k(\Omega)$ l'espace de fonction k fois continument différentiables sur Ω, c'est-a-dire :*
$C^k(\Omega) = \left\{ f \in C^{k-1}(\Omega), D^\alpha f \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = k \right\}$.

Définition 1.1.12 *On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω a support compact, c'est-a-dire :*

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega),\ f(x) = 0\ \forall x \in \Omega \backslash k \text{ ou } k \subset \Omega \text{ est un compact}\}.$$

Remarque 1.1.4 *On a :*

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega). \\ C_c^k(\Omega) &= C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega). \\ C_c^\infty(\Omega) &= C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega). \end{aligned}$$

Définition 1.1.13 *Soit X un espace de Banach et $T>0$:*

$$C^0([0,T],\ X) = C([0,T],\ X) = \{f : [0,T] \to X,\ f \ \text{ continue}\}.$$

1.1.5 Espaces $D(\Omega)$, $D'(\Omega)$

Définition 1.1.14 *(**l'espace** $D(\Omega)$) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace des foncions tests $D(\Omega)$ c'est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ (continûment dérivable) à support compact inclus dans Ω. c.à.d :*

$D(\Omega) = \{\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ $|\Phi \in C^\infty$ *supp* Φ *compact*$\}$.

et on écrit :$D(\Omega) = C_c^\infty$.

Définition 1.1.15 *(**l'espace** $D'(\Omega)$) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.Une distribution est une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$. Donc l'espace de distribution $D'(\Omega)$ est le dual topologique de $D(\Omega)$.*

Définition 1.1.16 *(**Dérivation des distributions**) Soit $T \in D'(\Omega)$.*

On définit la derivée de T au sens de $D'(\Omega)$ par :
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$
Généralement, on a :$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$
$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$

1.1.6 Espace de sobolev

Définition 1.1.17 *Nous appelons multi-indice tout $a \in \mathbb{N}^N$, $a = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$. On définit :*

$$|a| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \qquad et \qquad D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .....\partial x_N^{\alpha_N}} \ .$$

Définition 1.1.18 *Pour tout entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^P(\Omega) \text{ tel que, } \forall\, |a| \leq m,\ D^a u \in L^P(\Omega) \right\},$$

Où la dérivée partielle $D^a u$ est à prendre au sens faible.
Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|a| \leq m} \|D^a u\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.1.5 *Pour $m = 0$ on a :*

$$W^{0.p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Remarque 1.1.6 *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est :*

– un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
–un espace réflexif pour $1 < p < \infty$.
–un espace Séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.1.19 *Pour tout entiér $m \geq 1$, l'espace de sobolev $H^m(\Omega)$ d'order m est définie par :*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \text{ tel que } \forall |a| \leq m,\ D^a u \in L^2(\Omega)\}.$$

Où les dérivées partielles $D^a u$ sont prises au sens de distribution.

L'espace de sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni de produit scalaire :

$$\begin{aligned}(u,v)_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|a|\leq m} \left(D^a u(x), D^a v(x)\right)_{L^2} \\ &= \sum_{|a|\leq m} \int_\Omega D^a u D^a v dx.\end{aligned}$$

.

Et de la norme induite

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|a|\leq m} \|D^a u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{|a|\leq m} \int_\Omega |D^a u|^2 dx.\end{aligned}$$

Pour $a = 0$: $D^a u = u$

Pour $p = 2$: $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$

Pour $m = 0$: $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Définition 1.1.20 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in 1,...,n,\ \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Où la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est prise au sens des distributions.

*L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit Scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \left(u(x)\, v(x) + \nabla u(x)\, \nabla v(x)\right) dx,$$

et de norme induite

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

*L'espace $H^2(\Omega)$ défini par :

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Où :

$$\Delta u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

.

Définition 1.1.21 *L'espace de sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ $\left(i.e\ H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}\right)$ tel que :*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ et } u/\Gamma = 0\}.$$

Γ désigne la frontiére de Ω

Définition 1.1.22 *Le dual de l'espace de sobolev* $H_0^1(\Omega)$ *est noté par* $H^{-1}(\Omega)$.

On note $\langle L, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} = L(\varphi)$ le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual pour toute forme linéare continue $L \in H^{-1}(\Omega)$ et toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 1.1.7 *les inclusions suivantes sont strictes*

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ et } (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega).$$

1.1.7 injection de sobolev :

Ω ouvert borné et $k \in N^*$ et $p \in [1, +\infty]$
1-Si $\frac{1}{p} > \frac{k}{N}$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec : $q = \frac{pN}{N-kp}$.
2-Si $\frac{1}{p} = \frac{k}{N}$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec : $q \in [p, +\infty]$.
3-Si $\frac{1}{p} < \frac{k}{N}$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ mais dans le cas ou' $k - \frac{N}{p}$ n'apartinne pas à N alors :

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\Omega), \text{ où } l = [k - \tfrac{N}{p}] \text{ et } \beta = k - \tfrac{N}{p} - l.$$

toutes ces Injections sont continues
1. cas : $k = 1$ et $p \in [1, +\infty]$.
i) Si $p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec :$q = \frac{pN}{N-p}$.
ii) Si $p = N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec : $q \in [p, +\infty[$.
iii) si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ avec :$\beta = k - \frac{N}{p}$ car :$1 - \frac{N}{p}$ n'appartient pas à N.
toutes ces injection sont continues.
2.cas $p = 2$ et $k \in N^*$.
i) Si $\frac{1}{2} > \frac{k}{N}$, $H^K(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec :$q = \frac{2N}{N-2k}$.
ii) Si $\frac{1}{2} = \frac{k}{N}$, $H^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec : $q \in [p, +\infty]$.
iii) Si $\frac{1}{2} < \frac{k}{N}$, $H^k(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$, où $\beta = 1 - \frac{N}{2}$.
Toutes ces Injections sont continues.
soit : $k = 1$, Ω borné de classe C^1 :
i) Si $p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec :$q \in [1, p^*[$ et $p^* = \frac{pN}{N-p}$.
ii) Si $p = N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec : $q \in [1, +\infty[$.
iii) Si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.
Toutes ces Injections sont compactes

Régularité H^2 pour le Laplacien :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et de classe C^2 et u solution faible de systéme :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace.

Théorème 1.1.1 *Si* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $u \in H^2(\Omega)$ *alors il existe une constante* $C > 0$ *ne dépendant que*

de Ω telle que :$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

1.2 Quelque théorémes principaux

1.2.1 Théoréme de lax-Milgram

On considére dans la suite H un espace de Hilbert.

Définition 1.2.1 *Soit*

$$a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \to a(u,v)$$

une forme bilinéaire.
i) $a(.,.)$ *est continu, c'est-à-dire qu'il existe* $C > 0$ *telle que :*

$$|a(u,v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \qquad \forall u, v \in H.$$

ıı) $a(.,.)$ *est dite coercive(ou* H*- elliptique), s'il existe* $\alpha > 0$ *tell que :*

$$a(u,v) \geq \alpha \|u\|^2 \qquad \forall u \in H.$$

Théorème 1.2.1 (***Lax-Milgram***)*Soit* $a(.,.)$ *une forme bilinéaire continue et coercive. Alors :*
$\forall f \in H'$,$\exists! u \in H$, *tel que :*

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

Si de plus a *est symétrique, alors* u *est caractérisée par :*
$u \in H$,*et* $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v \rangle \right\}$.

1.2.2 Théoréme de représentation de Riesz

Théorème 1.2.2 *Soit* H *un espace de Hilbert réel et soit* H' *son dual. pour toute forme linéaire continue* $L \in H'$ *il existe un unique* $f \in H$ *tel que :*

$$L(v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

de plus on a :

$$\|L\|_{H'} = \|f\|_H .$$

1.2.3 Formule de Green

Définition 1.2.2 (***Normale***)*On appelle normale au domaine* Ω *un champ de vecteurs* $n(x)$ *défini sur le bord* $\Gamma = \partial\Omega$ *de* Ω *et tel qu'en tout point* $x \in \Gamma$ *où le bord est régulier,* $n(x)$ *sont orthogonal au bord et de norme* 1.

Définition 1.2.3 *(* ***dérivée normale***)*on appelle dérivée normale d'une fonction régulière* u *sur* $\partial\Omega$, *la fonction définie sur les points régulièrs de* $\partial\Omega$ *par :*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u.n(x).$$

Théorème 1.2.3 (***formule de Green***) [5]*Soit* Ω *un ouveret bornée réguliére de classe* C^2 *si* $\forall u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v(x)\, ds.$$

où ds *est la mesure sur le bord* $\partial\Omega$, $n(x)$ *est la normale extérieure en tout point* $x \in \partial\Omega$.

1.3 Quelques inégalités :

1.3.1 Inégalité de young :

Théorème 1.3.1 *Soient a et b deux réels positifs et p ,q des réels strictement positifs vérifiant :* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

alors on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ .$$

1.3.2 Inégalité de poincaré :

Théorème 1.3.2 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante* $C=C(p,\Omega)>0$ *telle que* $1\leq p\leq\infty$ *et pour toute fonction* $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ *on a :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier,$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *est une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *équivalente à* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

1.3.3 Inégalité de Hölder :

soient $p\in[1,+\infty]$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire :$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Théorème 1.3.3 *[5]Soient* $f\in L^p$, *et* $g\in L^{p'}$ *avec* $p\in[1,+\infty[$ *alors :*$fg\in L^1$*et*
$\|fg\|_{L1}\leq\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$.

1.3.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Théorème 1.3.4 *Si* $f\in L^2(\Omega), g\in L^2(\Omega)$ *alors on a :*

$$\int_\Omega |f||g|\,dx \leq \left(\int_\Omega |f|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |g|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

1.4 opérateurs bornés et non bornés dans un espace de Hilbert :

Définition 1.4.1 (***Opérateur***) *Soient E,F deux espace normés, une application linéaire* $A:E\to F$ *est appellée un opérateur.*

Définition 1.4.2 *Soient E,F deux espace de Hilbert.On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire* $A:D(A)\subset E\to F$ *définie sur un sous-espace vectoriel* $D(A)\subset E$, *à valeurs dans F.* $D(A)$ *est le domaine de A.*

On dit que A est borné s'il existe une constante $C\geq 0$ telle que

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \qquad \forall x\in D(A).$$

Remarque 1.4.1 **l'ensemble des opérateurs linéaires continues de* H_1 *dans* H_2 *est noté par :*$\pounds(H_1,H_2)$.

*$\pounds(H)$ l'ensemble des opérateurs linéares continues de H dans luis même.

1.4.1 Norme d'un opérateur linéare borné :

Définition 1.4.3 *H_1et H_2 deux espace vectoriels normés et T un opérateur linéare continue de H_1 dans H_2 (i.e $T \in \pounds(H_1, H_2)$).*

On définit la norme de T :

$$\begin{aligned}\|T\|_{\pounds(H_1,H_2)} &= \inf\{C > 0, \forall x \in H_1 : \|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1\} \\ &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}} \\ &= \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\|_{H_2}.\end{aligned}$$

1.4.2 Opérateurs fermés

Soit H un espace de Hilbert réel de norme $\|.\|$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On considére $(A, D(A))$ un opérateur linéare (non borné)

$$A : D(A) \subset H \to H$$

On définit son image par

$$R(A) = \{y \in H, \exists x \in D(A), y = A(x)\}.$$

et son graphe par

$$G(A) = \{(x, A(x)), x \in D(A)\}$$

Définition 1.4.4 *On dit que $(A, D(A))$ est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé*

dans $H \times H$.

C'est-à-dire : $(A, D(A))$ est fermé si et seulement si pour tout suit $(x_n) \subset D(A)$ tel que :

$$\begin{cases} x_n \to x \\ et \\ A(x_n) \to y \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} x_n \to y \\ et \\ A(x) = y \end{cases}$$

Lorsque $(A, D(A))$ est fermé, $D(A)$ muni de la norme du graphe $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$ est un espace de Banach et $A : \left(D(A), \|\|_{D(A)}\right) \to (H, \|\|)$ est un opérateur borné.

1.4.3 opérateur a domaine dense :

Définition 1.4.5 *Soit (A,D(A)) un opérateur linéaire non borné sur H. Lorsque $D(A)$ dense dans H (c'est-à-dire :$\overline{D(A)} = H$), on dit que(A,D(A)) est de domaine dense.*

1.4.4 Opérateurs adjoints :

Définition 1.4.6 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Hilbert H à domaine dense. L'opérateur A^* adjoint de A est définie par :*

$$D(A^*) = \{y \in H,\ \exists c > 0 : |\langle y, A(x)\rangle| \leq c\|x\|_H \quad \forall x \in D(A)\}.$$

Et

$$\langle y, A(x)\rangle = \langle A^*(y),\ x\rangle \qquad \forall x \in D(A),\ \forall y \in D(A^*).$$

Remarque 1.4.2 *$D(A^*)$ représente l'ensemble des éléments $y \in H$, tel que*

l'application $:x \to \langle y,\ A(x)\rangle$ est continue sur $D(A)$ pour la norme de H.

1.4.5 opérateurs auto-adjoint et anti-adjoints

Définition 1.4.7 *Soit$(A,\ D(A))$ un opérateur linéaire non borné sur H à domaine dense. On dit que $(A,\ D(A))$ est auto-adjoint si on a :*

$$\begin{cases} D(A) = D(A^*) \\ \text{et} \\ Ax = A^*x,\ \forall x \in D(A). \end{cases}$$

et on écrit :

$$A{=}A^*.$$

Définition 1.4.8 *Soit$(\ A,\ D(A))$ un opérateur linéaire non borné, de domaine dense dans H. On dit que A est anti-adjoint si $A^* = -A$ et $D(A) = D(A^*)$.*

Exemple 1.4.1 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et l'opérateur $(-\Delta)$ défini sur $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est auto-adjoint.*

1.4.6 Opérateurs symétriques

Définition 1.4.9 *Soit $(A,\ D(A))$ un opérateur sur H. On dit que $(A,\ D(A))$ est symétrique, si on a :*

$$\langle y,\ Ax\rangle = \langle Ay,\ x\rangle \quad \forall x,y \in D(A).$$

1.4.7 Opérateurs compacts

Définition 1.4.10 *Un opérateur $A \in \pounds(H)$ est dit compact si la fermeture de l'image de la boule unité de H est compacte dans H .On note $\kappa(H)$ l'espace vectoriel des opérateurs compacts sur H.*

Il est fermé dans $\pounds(H)$.
Si $A \in \kappa(H)$, alors $A^* \in \kappa(H)$.

Opérateurs maximaux dissipatifs

1.4.8 Opérateurs dissipatifs

Soit $(A,\ D(A))$, un opérateur linéaire non borné dans un espace de Hilbert réel H.

Définition 1.4.11 *On dit que $(A,\ D(A))$ est dissipatif si et seulment si*

$$\langle A(x), x\rangle \leq 0 \qquad \forall x \in D(A).$$

dans le cas où H est un espace de Hilbert complexe. La condition précédente est remplacée par $\mathrm{Re}\langle A(x), x\rangle \leq 0\ \forall x \in D(A)$.

Où $\mathrm{Re}\langle A(x),\ x\rangle$ représente la partie réelle de $\langle A(x),\ x\rangle$.

1.4.9 Opérateurs maximaux

Définition 1.4.12 *On dit que $(A, D(A))$ est maximal si et seulment si*

$$R(I-A) = H.$$

c'est-à-dire l'application :

$$I - A : D(A) \to H$$

est surjective.

autrement dit :

$$\forall f \in H,\ \exists x \in D(A) : x - Ax = f.$$

Proposition 1.4.1 *Si A est maximal, dissipatif anti-symétrique,alors A est anti-adjoint.*

1.4.10 Opérateurs monotones

Définition 1.4.13 *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéare non borné.*

On dit que A est monotone (ou accrétif)si :

$$\langle A(x), x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in D(A).$$

1. Si l'opérateur $(-A)$ est dissipatif on dit que l'opérateur A est monotone.
2. A est maximal monotone $\Longleftrightarrow$ $(-A)$ maximal dissipatif.

c'est-à-dire : A est maximal monotone $\Longleftrightarrow \begin{cases} R(I+A) = H \\ \langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in D(A) \end{cases}$

1.4.11 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.4.14 *On dit que $(A,\ D(A))$ est m-dissipatif si $(A,\ D(A))$ est dissipatif*

et maximal.

Théorème 1.4.1 *Si A est un opérateur anti-adjoint dans H alors A et $-A$ sont*

m-dissipatifs.

Soit A un opérateur maximal monotone, symétrique alors A est auto-adjoint.

1.4.12 Spectre d'un opérateur compact

Définition 1.4.15 *Soit* $A : D(A) \subset H \to H$ *où* $\overline{D(A)} = H$, A *fermé. On définit le spectre de* A *Par :*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Où :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(\lambda I - A) \neq \{0\}\}.$$
$$\sigma_c(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \overline{R(\lambda I - A)} = H \text{ et } (\lambda I - A)^{-1} \text{ est nom borné}\right\}.$$
$$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A) \text{ est inversible et } \overline{R(\lambda I - A)} \neq H\right\}.$$

On définit alors l'ensemble résolvant de A :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A) \text{ bijectif de } D(A) \text{ dans } H\}.$$

On dit que le scalaire λ est une valeur propre si :

$$N(\lambda I - A) \neq 0.$$

$N(\lambda I - A)$ est le sous-espace propre associe à λ. L'ensemble des valeurs propres est notée par $VP(A)$.

- Si $\lambda \in \rho(A)$, alors $(\lambda I - A)^{-1} \in \pounds(H)$, danc $(\lambda I - A)^{-1}$ est borné.
- Il est clair que $VP(A) \subset \sigma(A)$. En générale l'inclusion est stricte : il peut exister des valeurs propre λ tel que :
$$N(\lambda I - A) = 0 \text{ et } R(\lambda I - A) \neq H.$$
(c'est-à-dire λ dans le spectre mais elle n'est pas une valeur propre).

Définition 1.4.16 *Soit* A *un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert* H.

Pour $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante de A

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

c'est un opérateur borné de H dans H.

Proposition 1.4.2 [5] *Le spectre* $\sigma(A)$ *est un ensemble compact .*

1.4.13 Spectre d'un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte

Théorème 1.4.2 *Soit* A *un opérateur à domaine dense dans* H. *S'il existe un nombre réel* $c \in \rho(A)$ *tel que* $R_A(c) = (cI - A)^{-1}$*soit un opérateur auto-adjoint compact, alors* A *est un opérateur auto-adjoint qui admet une suite de vecteurs propres qui forment une base orthonormée de* H. *De plus les valeurs propres de* A *forment une suite infinie* (λ_n) *telle que*

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ...$$
$$\lim_{n \to +\infty} |\lambda_n| = +\infty$$

Preuve. Nous renvoyons à([1] Théoréme 1.4.2) ■

Théorème 1.4.3 *Soit $(-A, D(A))$ un opérateur autoadjoint positif à domaine dense et à résolvante compacte Son spectre est réel, discret et dénombrable $\sigma(-A) = \{-\lambda_k \geq 0, k \in N^*\}$,*

$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = -\infty$, $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = -\infty$ et ses fonctions propres normalisées $(\varphi_k)_{k\in N}$ forment une base orthonormée de H. A s'écrit alors :

$Ax = \sum_{k\in N} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$.

Preuve. Nous renvoyons à ([1] Théoréme 1.8.23) ■

Corollaire 1.4.1 *Le spectre de $(-\Delta)$ est réel, formé de nombres positifs, discret et dénombrable.*

$\sigma(-\Delta) = \{\lambda_k, k > 0\}$, $\lambda_k > 0 \quad \forall k \in N$ et $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$.

1.5 C^0-semi-groupes sur un espace de Hilbert

1.5.1 Semi-groupes continus

Définition 1.5.1 *Soit H un espace de Hilbert, on dit que la famille $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires continus de H vers H est un semi-groupe continu sur H si elle vérifie les propriétes suivantes :*

1) $T(0) = I_H$. (I opérateur d'identité de H).
2) $T(t+s) = T(s).T(t)$, $\forall t,s \geq 0$.
3) $\lim_{t\overset{>}{\to}0} T(t)x = x$, $\forall x \in H$. $\left(\lim_{t\overset{>}{\to}0} \|T(t)x - x\|_H = 0\right)$.

Dans la suite, on dit que $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0 ou C^0-semi groupe sur H.

Dans le cas où $T(t)$ est défini pour $t,s \in \mathbb{R}$ et vérifie les propriétés pécédentes. On dit que $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe sur H.

Exemple 1.5.1 *Soit H espace de Hilbert, on défini l'application :*

$T : \mathbb{R}^+ \to L(H)$

$t \to T(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$

$\{T(t),\ t \geq 0\}$ est C^0-semi groupe continue sur H.

1.5.2 Semi-groupes de contraction

Définition 1.5.2 *On dit que le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est de contraction, si on a :*

$$\|T(t)\| \leq 1, \ \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.5.1 *[1] Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe dans H, alors l'opérateur adjoint $(T^*(t))_{t\geq 0}$ est aussi un C_0-semi-groupe sur H.*

1.5.3 Générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0-semi-groupe sur H.

Définition 1.5.3 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur non borné $(A, D(A))$ défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in H / \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{existe} \right\}$$
$$Ax = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \ \forall x \in D(A).$$

Remarque 1.5.1 *$D(A) \neq \varnothing$ car : $0 \in D(A)$.*

Remarque 1.5.2 *Le générateur infinitésimal de $(T^*(t))_{t\geq 0}$ est l'opérateur $(A^*, D(A^*))$.*

Corollaire 1.5.1 *[5] Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense.Si A et A^* sont dissipatifs, alors A est générateur infinitésimal d'un C^0-semi groupe de contraction sur un espace H de Hilbert.*

1.6 Problèmes dèvolution non homogènes :

Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t>0}$sur un espace de Hilbert H.On veut résoudre

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) + f(t) & , t \in (0,T) \\ y(0) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

où :

$f : [0,T] \to H$.

Définition 1.6.1 *Soit $f \in L^1(0,T,H)$ et $x \in H$. On appelle solution faible de (1.1) la fonction $y \in C([0,T];H)$ donnée par :*

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \tag{1.2}$$

Définition 1.6.2 *On appelle solution classique de (1.1) la fonction $y \in C([0,T];H) \cap C^1([0,T];H)$ tel que $y(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$ et vérifiant (1.1) dans $[0,T]$.*

Remarque 1.6.1 *Par définition, le problème (1.1) admet toujours une unique solution faible.*

Remarque 1.6.2 *La différence entre ces deux notions de solution est que la première ne vérifie pas (forcément) l'équation (1.1) ponctuellement alors que la régularité en temps imposée à la solution classique est précisément celle qu'il faut pour pouvoir écrire l'équation (1.1) au sens classique. On peut cependant dire que toute solution classique (s'il en existe) est une solution faible et qu'il ne peut pas exister plus d'une solution classique si x et f sont donnés respectivement dans H et $L^1(0,T,H)$*

Théorème 1.6.1 *[1] Soit $f \in L^1(0,T,H)$ et $x \in H$. Le problème* (1.1) *admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule* (1.2)

Preuve. Nous renvoyons ([1] théorème 3.3.4 page 34) ■

1.6.1 Théoréme de Hille-Yosida :

Considérons l'équation d'évolution suivant :

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) \\ y(0) = y \end{cases} \tag{1.3}$$

Théorème 1.6.2 *(Hille-Yosida) On suppose que l'opérateur A est m-dissipatif dans l'espace de Banach E, de domaine dense.*

Alors il existe un unique semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$ tel que :

1.Pour tout $y_0 \in D(A)$: $y(t) = T(t)y_0$ est l'unique solution forte du problème de Cauchy (1.3).

De plus $y \in C([0,+\infty], D(A)) \cap C([0,+\infty], E)$

2.Pour tout $y_0 \in E$: $y(t) = T(t)y_0$ est l'unique solution faible du problème de Cauchy (1.3) .

De plus $y \in C([0,+\infty], E)$

Preuve. voir [4] ■

Chapitre 2

Contrôlabilité exacte des l'equations des ondes

2.1 Introduction.

A travers ce chapitre, Ω est un ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}^n\,(n \geq 1)$ de frontiére réguliére $\Gamma = \partial\Omega$, ω un ouvert tel que $\omega \subset \Omega$.

On considère le système des ondes :

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + 1_\omega u & , \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega = Q_T \\ y = 0 & , \ (0,T) \times \Gamma = \sum_T \\ y\,(0) = y_0 & , x \in \Omega \\ y_t\,(0) = y_1 & , \ x \in \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Ici y est l'état, u est le contrôle, y_0 et y_1 sont les données initiales.

Dans ce chapitre, on s'intérèsse au problème de la contrôlabilité exacte du système(2.1), qui consiste à analyser si on peut amener la solution $y = y\,(x,t)$ du système (2.1) d'un état initial y_0 donné dans l'espace V à un état final fixé à l'avance y_T au temps $t = T$ (en partiqulier à $y_T = 0$) en agissant sur le système (2.1) par l'intermédiaire des fonctions de contrôle interne u.

Si cela est possible, on dit que le système d'évolution (2.1) est exactement contrôlable à partir de y_0 au temps $T > 0$ et au moyen des fonctions de contrôle u .

2.2 Quelques rappels :

2.2.1 définitions et caractérisation :

Soit H un espace de Hilbert et $T > 0$ considérons un systéme différentiel linéaire défini sur $[0, T]$

$$\sum (A, B, -) = \begin{cases} y' = Ay + Bu \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Où l'état $y(t)$ et la condition initiale y_0 sont dans H, $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ dans H. et $B \in \pounds(U, H)$ avec U un espace de Hilbert, la fonction $u \in L^2(0, T; U)$ est appelée contrôle, stratégie ou entrée du systéme $\sum (A, B, -)$. La solution du systéme différentiel d´epend de la donnée initiale et du second membre et peut s'exprimer par la formule :

$$y(t, y_0, u) = s(t)y_0 + \int_0^t s(t-s)Bu(s)ds.$$

Où S est la matrice résolvante du systéme

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) = AS(t) \\ S(0) = I = \text{ matrice unité} \end{cases}$$

Définition 2.2.1 *On dira que le contrôle u transfére un état a à un état b au temps $T > 0$ si :*

$$y(T, a, u) = b$$

On dit aussi que l'état b est atteignable à partir de a au temps T.

Définition 2.2.2 (*contrôlabilité exacte*) :*Le systéme $\sum (A, B, -)$ est dit exactement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si :*

$\forall\ a, b \in H \quad \exists u \in L^2(0, T, U)$ telle que : $y(T, a, u) = b$.

c'est à dire : si tout état finale $b \in H$ peut être atteint au temps $T > 0$ à partir de tout état initial a.

Définition 2.2.3 (*contrôlabilité exactement nul*) :*Le triplet (A,B,C) est dit exactement nul contrôlable sur l'intervale $[0, T]$ si et seulement si : $\forall\ a \in H \quad \exists u \in L^2(0, T, U)$ telle que : $y(T, a, u) = 0$.*

Théorème 2.2.1 *Si l'opérateur A du système (2.2) engendre un groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ alors le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement s'il est exactement nul contrôlable sur l'intervalle [0,T].*

Preuve. Nous renvoyons à ([2] Théoréme 1.2.6). ■

Définition 2.2.4 *On définit l'opérateur de contrôlabilité L_T par :*

$$L_T x = \int_0^T S(r) BB^* S^*(r)\, dr \quad , \qquad x \in E \quad , \ T > 0$$

L_T un opérateur borné, donc il existe $c > 0$ tel que :

$$|L_T x| < c\,|x| \qquad \forall \ x \in H.$$

L_T est aussi auto-adjoint et positif.

Théorème 2.2.2 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.Le systéme (2.2) est exactement contrôlable au temps $T > 0$.
2.Il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in H$ on a :

$$\int_0^t |B^* S^*(t)\, x|^2\, dt > c\,|x|^2$$

3.$R\left(\sqrt{L_T} x\right) = H$.
4.$x \to \left|\sqrt{L_T} x\right|$ définit sur H une norme équivalente à la norme de H.

Preuve. :
Nous renvoyons a' ([1] Théoréme 5.1.2). ■

2.2.2 Equation des ondes :

soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de frontière Γ. on note par :

$$Q = \Omega \times]0, \infty]$$

et

$$\sum = \Gamma \times]0, \infty[$$

$\sum$ est la forntiére de Q
On considére le problème suivant . Trouver une fonction
$y(x,t) : \overline{\Omega} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$,telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = f & \text{sur } Q \quad I_1 \\ y = 0 & \text{sur } \sum \quad I_2 \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{sur } \Omega \quad I_3 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x) & \text{sur } \Omega \quad I_4 \end{cases} \tag{2.3}$$

Où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace, t est la variable de temps et y_0, y_1 sont des fonctions données.

L'équation (I_1) est appelée équation des ondes. L'équation des ondes est un exemple modéle d'équation hyperbolique.

L'équation (I_2) est la condition aux limites de Dirichlet . La condition $y = 0$ sur $\sum$ exprime que la corde (resp.la membrane , etc.) est fixée au bord.

Les équation (I_3) et (I_4) traduisent l'état initial du système :ce sont les données de cauchy.

Remarque 2.2.1 *En générale l'équation* (I_1) *modélise des phynomènes de propagation des ondes ou de vibration . par exemple,l'orsque* $n = 1$*,l'equation* (I_1) *modélise les petites vibration d'une corde qui n'est soumise à aucune force extérieure. lorsque* $n = 2$*,l'equation* (I_1) *modélise les petites vibrations d'une membrane élastique comme la peau d'un tambour.*

Comme conséquence des propriétés de la solution faible d'un problème non homogène (voir Définition 1.1.6), on a :

Théorème 2.2.3 *Soit* $T > 0$*. pour tout* $f \in (L^1(0.T); L^2(\Omega))$*, et tout* $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *il exixte une unique solution faible* $(y, y_t) \in C([0.T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ *de* (2.3)*. De plus, cette solution dépend continuement des données initiales et du second membre. plus précisément*

$$\max_{t\in[0,T]} |y_t(t)| + \max_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq |y(t)| + \|y_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1((0,T),L^2(\Omega))}.$$

Proposition 2.2.1 *(Régularisation des solutions de l'équation des ondes) Soit* $T > 0$*. pour tout* $f \in (L^1(0.T); H_0^1(\Omega))$*,et tout* $(y_0, y_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ *il exixte une unique* $(y, y_t) \in C([0.T]; (H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega))$ *de* (2.3)*. De plus, cette solution dépend continuement des données initiales et du second membre. plus précisément :*

$$\max_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \max_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_{H^2\cap H_0^1(\Omega)} \leq \|y_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_0\|_{H^2\cap H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)}.$$

Preuve. Nous renvoyons ([1] proposition 3.4.14 page 39). ■

2.2.3 Régularité de la solution de l'équation des ondes :

Le problème (2.3) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} z' = Az + F \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Où $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$

l'espace $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ et $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$.

Théorème 2.2.4 *Soit* $T > 0$

1.Si $f \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$ et $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ alors (2.3) possède une solution (faible) unique $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \in C([0, T], H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ et il existe $C_T > 0$ telle que :

$\|y\|_{L^\infty\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right)} + \|y'\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_T \left[\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T,L^2(\Omega))}\right]$

$\forall (y_0, y_1, f) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T, L^2(\Omega))$

2.Si $f \in L^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ et $(y_0, y_1) \in ((H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega))$ alors (2.3) possède une solution forte $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \in C([0, T], (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega))$ et il existe $C_T > 0$ telle que :

$\|y\|_{L^\infty\left(0,T,H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)} + \|y'\|_{L^\infty\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right)} \leq C_T \left[\|y_0\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} + \|y_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right)}\right]$

$\forall (y_0, y_1, f) \in ((H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times L^1(0, T, H_0^1(\Omega)).$

Remarque 2.2.2

$\|y\|_{L^\infty\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right)} + \|y'\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_T \left[\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T,L^2(\Omega))}\right]$
implique que :
$\|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_T \left[\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T,L^2(\Omega))}\right]$

2.3 Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes

On étudie la contrôlabilit exacte du systéme :

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + 1_\omega u & , \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega = Q_T \\ y = 0 & , \ (0,T) \times \Gamma = \sum_T \\ y(0) = y_0 & , x \in \Omega \\ y_t(0) = y_1 & , \ x \in \Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

Soit $T > 0$ On cherche $u \in L^2(Q_T)$ tel que pour toute donnée initiale $(y_0,y_1) \in H = H_0^1 \times L^2(\Omega)$ il existe une unique solution y de (2.4) vérifiant $y(T) = y_t(T) = 0$ dans Ω .
Dans toute cette section on fait l'identification $H' = H$.
*H est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle (y,z),(f,g) \rangle_H = \int_\Omega \nabla y \nabla f dx + \int_\Omega zg dx.$$

Remarque 2.3.1 *Le systeme est équivalent au problème suivant :*

$$\sum(A,B,-) : \begin{cases} z' = Az + Bu \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

où $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$.
En effet :
On pose :

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad z(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ \Delta y + 1_\omega u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1_\omega u \end{pmatrix}$$

donc :

$$z' = A \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + Bu \quad \text{telle que :}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

où : $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$
et $Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_\omega u \end{pmatrix}$
Où : $0 \in H_0^1(\Omega)$ et $1_\omega(u) \in L^2(\Omega)$.

Proposition 2.3.1 *L'opérateur* $(A, D(A))$ *est fermé et à domaine dense et anti-adjoint.*

1.Montrons que $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ dense dans $H = H_0^1 \times L^2(\Omega)$.
On a $D(\Omega) \times D(\Omega) \subset D(A)$
et comme $\begin{cases} D(\Omega) \text{ danse dans } H_0^1(\Omega) \\ D(\Omega) \text{ danse dans } L^2(\Omega) \end{cases}$
alors $D(A)$ est dense dans $H = H_0^1 \times L^2(\Omega)$.
2.Montrons que $(A, D(A))$ est fermé.
Soit $\{(y_n, z_n)\} \subset D(A)$ telle que :

$$\begin{cases} (y_n, z_n) \to (y, z) \\ \text{et} \\ A(y_n, z_n) \to (v, w) \text{ dans } H = H_0^1 \times L^2(\Omega) \end{cases}$$

On montre que :

$$\begin{cases} (y, z) \in D(A) \\ \text{et} \\ A(y, z) = (v, w) \end{cases}$$

c'est-à-dire : $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $z \in H_0^1(\Omega)$ et $z = v$ et $\Delta y = w$.
On a :

$y_n \to y$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $z_n \to z$ dans $L^2(\Omega)$ et $z_n \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$
et $\Delta y_n \to w$ dans $L^2(\Omega)$.
d'où :

$$z = v \in H_0^1(\Omega) .$$

D'autre part on a :
$y_n \to y$ dans $H_0^1(\Omega)$ d'où $\Delta y_n \to \Delta y$ dans $D'(\Omega)$.
Comme $\Delta y_n \to w$ dans $D'(\Omega)$, alors $\Delta y = w \in L^2(\Omega)$ avec $y \in H_0^1(\Omega)$
donc $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
D'où :

$$(y, z) \in D(A) \text{ et } (Ay, z) = (v, w).$$

3.Montrons que A est anti-adjoint $(A, -A^*)$.
C'est-à-dire on montre que $A = A^*$ et $D(A) = D(A^*)$.
Déterminons l'opérateur A^* :
Soit $(y, z) \in H$.
On a $(y, z) \in D(A^*)$ si et seulement si l'application :

$$\begin{aligned} D(A) &\to \mathbb{C} \\ (u, v) &\to \langle A(u, v), (y, z) \rangle \end{aligned}$$

est continue sur $D(A)$ pour la topologie de H.
C'est-à-dire :
on montre qu'il existe $(\alpha, \beta) \in H$ tel que :

$$\langle A(u, v), (y, z) \rangle = \langle (u, v), (\alpha, \beta) \rangle \quad \forall (u, v) \in D(A).$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Omega (\nabla v . \nabla \overline{y} + \overline{z} \Delta u)\, dx = \int_\Omega \left(\nabla u \ \Delta \overline{\alpha} + v \overline{\beta} \right) dx \quad \forall (u, v) \in D(A) \tag{2.5}$$

En prenant $u = 0$, on obtient :

$$\int_\Omega \nabla v.\nabla \overline{y} dx = \int_\Omega v\overline{\beta} dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour $v \in D(A)$, on obtient $-\Delta y = \beta$ dans $D'(\Omega)$.

Et on a : $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Donc l'égalité(2.5) nous donne :

$$\int_\Omega \overline{z}\Delta u dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{\alpha} dx = -\int_\Omega \overline{\alpha}\Delta u dx \qquad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

Comme l'application $u \to \Delta u$ est surjective de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ alors $z = -\alpha \in H_0^1(\Omega)$.

D'où :

$$\begin{cases} D(A) = D(A^*) \\ et \\ A^*(y,z) = -A(y,z) \quad \forall (y,z) \in D(A^*) \end{cases}$$

c'est-à-dire A est anti-adjoint.

Proposition 2.3.2 *A et A^* engendrent chacun un semi-groupe de contraction.*

On applique le corollaire 1.5.1 page 23, c'est-à-dire :
on montrant que A et A^* sont dissipatif.
1.On vérifie que A et A^* sont dissipatifs.
Soit $(u,v) \in D(A)$.
On a :

$$\begin{aligned} \langle A(u,v),(u,v)\rangle &= \langle (v,\Delta u),(u,v)\rangle \\ &= \int_\Omega (\nabla v.\nabla \overline{u} + \overline{v}\Delta u) dx. \\ &= \int_\Omega (\nabla v.\nabla \overline{u} - \nabla u.\nabla \overline{v}) dx \\ &= 2\,\mathrm{Im} \int_\Omega \nabla v.\nabla \overline{u}\, dx \qquad \text{où } i^2 = -1 \end{aligned}$$

D'où : $\mathrm{Re}\langle A(u,v),(u,v)\rangle = 0$.
Ce qui prouve que A est dissipatif.
Comme A est anti-adjoint, alors A^* est aussi dissipatif.
Donc d'aprés le corolaire(1.5.1) on déduit que A et A^* engendrent chacun un semi-groupe contraction.

Proposition 2.3.3 *L'injection $(D(A) \hookrightarrow H)$ est compacte.*

Soit $(v_n)_n = (v_n^1, v_n^2)$ une suite bornée dans $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.
En particulier v_n^1 est borné dans $H^2(\Omega)$.
Comme l'injection $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ est compacte, on peut alors extraine une sous-suite $\left(v_{n_k}^1\right)_{k\in N}$ de (v_n^1) telle que $\left(v_{n_k}^1\right)_{k\in N}$ converge dans $H^1(\Omega)$.

Et comme l'injection $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{2-s}(\Omega)$ $\left(0 < s < \frac{1}{2}\right)$ est compacte, on peut extraire une suite $\left(v'_{n_k}\right)_{k\in N}$ de v_n^1 qui converge dans $H^{2-s}(\Omega)$ danc dans $H^1(\Omega)$.

D'où $\left\{v_{n_{k,\partial\Omega}}\right\}$ converge dans $H^{\frac{3}{2}-s}(\partial\Omega)$ donc dans $H^1(\partial\Omega)$ puisque $s < \frac{1}{2}$.

On termine en remarquent que l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.

2.3.1 Contrôlabilité Exacte de l'équation des ondes

Pour montrer la contrôlabilité exacte de systéme (2.1), on utiluse la théoréme suivant :

Théorème 2.3.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontiére $\sum_T = \partial\Omega$ lipshitzienne. pour tout $T > 0$ et pour tout donné initiale (y_0, y_1), le systéme (2.1) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si il existe $C_T > 0$ telle que :*

$$\int_0^t \left\|B^* S^*(t) z_0^2\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt > c \left\|z_0\right\|^2_H \tag{2.7}$$

Où $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Mais $w(t) = S^*(t) z_0$ est la solution du problème adjoint :

$$p_* : \begin{cases} w' = A^* w \\ w(0) = z_0 \end{cases}$$

avec

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.3.2 *On peut montrer que A anti-adjoint par la proposition suivant :*

Proposition 2.3.4 *[1] L'opérateur $(A, D(A))$ est maximal et anti-symétrique sur H.*

Preuve. :1.Montrons que $(A, D(A))$ est maximal, c'est-à-dire : on montre que

$\forall (f,g) \in H, \exists (y,z) \in D(A) \ : \ (y,z) - A(y,z) = (f,g)$.

soit $(f,g) \in H$.on cherche $(y,z) \in D(A)$ tel que

$$(y,z) - A(y,z) = (f,g)$$

on a :

$$(y,z) - A(y,z) = (y,z) - (z, \Delta y)$$

Donc :

$$(y,z) - (z,\Delta y) = (f,g) \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = f \\ z - \Delta y = g \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = y - f \\ y - \Delta y = f + g \end{cases}$$

comme $f + g \in L^2(\Omega)$ (car $f \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$) alors il existe un élément unique $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$y - \Delta y = f + g$$

par suite $z = y - f \in H_0^1(\Omega)$

En effet :

On pose $F = f + g$, on obtient

$$y - \Delta y = F \tag{2.8}$$

On cherche la formulation variationnelle de (2.8) .

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, $F \in L^2(\Omega)$, on multiplie (2.8) par v et on intégare sur Ω formellement, on obtient :

$$\int_\Omega yvdx - \int_\Omega \Delta yvdx = \int_\Omega Fvdx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.9}$$

En utilisant la formule de Green sur $\int_\Omega \Delta yvdx$, on obtient :

$$\int_\Omega \Delta yvdx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial y}{\partial n}ds - \int_\Omega \nabla v\nabla ydx.$$

On a :

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial y}{\partial n}ds = 0$$

car :

$$v \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{donc} \quad v/\partial\Omega = 0.$$

Alors :

$$\int_\Omega \Delta yvdx = -\int_\Omega \nabla v\nabla ydx \tag{2.10}$$

En vertu de (2.9) et (2.10) , on trouve :

$$\int_\Omega (yv + \nabla y\nabla v)\,dx = \int_\Omega Fvdx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

La formulation varionnel de (2.8) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{trouver} \quad y \in H_0^1(\Omega) \quad \text{tel que :} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega (yv + \nabla y\nabla v)\,dx = \int_\Omega Fvdx \end{cases} \tag{2.11}$$

On considère la forme bilinéaire symétrique

$$a(.,.) : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$$

$$(y,v) \quad \to \int_\Omega (yv + \nabla y\nabla v)\,dx$$

et la forme linéaire

$$L(.) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$v \quad \to L(v) = \int_\Omega Fvdx$$

* Montrons que $a(.,.)$ est continue sur $H_0^1 \times H_0^1$, c'est-à-dire :

$\exists c > 0 : \ |a(y,v)| \le c\,\|y\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall y, v \in H_0^1(\Omega)$.

Soit $(y,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$|a(y,v)| = \left| \int_\Omega (yv + \nabla y\nabla v)\,dx \right|$$

$$\leq \int_\Omega |y|\,|v| + |\nabla y|\,|\nabla v|\,d$$

$$\leq \int_\Omega (|y| + |\nabla y|)\,(|v| + |\nabla v|)\,dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega (|y| + |\nabla y|)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (|v| + |\nabla v|)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega \left(|y|^2 + |\nabla y|^2 + 2\,|y|\,|\nabla y|\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left(2\,|y|^2 + 2\,|\nabla y|^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left(2\,|v|^2 + 2\,|\nabla v|^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{2}\left[\left(\int_\Omega \left(|y|^2 + |\nabla y|^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left(|y|^2 + |\nabla y|^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \sqrt{2}\,\|y\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Alors : $\exists c = \sqrt{2}$ tel que :

$$|a(y,v)| \leq \sqrt{2}\,\|y\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall y, v \in H_0^1(\Omega)$$

*Montrons $a(.,.)$ est coércive, c'est-à-dire :

$\exists \alpha > 0 : a(y,y) \geq \alpha\,\|y\|^2_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall y \in H_0^1(\Omega)$

Soit $y \in H_0^1(\Omega)$.

On a :

$$a(y,y) = \int_\Omega \left(|y|^2\,|\nabla y|^2\right)d$$

$$= \|y\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla y\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \|y\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Alors : $\exists \alpha = 1$ tel que :

$$a(y,y) \geq \|y\|^2_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall y \in H_0^1(\Omega)$$

Et la coércive de $a(.,.)$ en découle.

* Montrons que $L(.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$:

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$|\,L(v)| = \left|\int_\Omega F v dx\right|$$

$$\leq \int_\Omega |F|\,|v|\,dx$$

On applique l'inégalité de cauchy-Shwarz :

On obtient :

$$|\,L(v)| \leq \left(\int_\Omega |F|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|F\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|F\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

On sait que $F = f + g \in L^2(\Omega)$ et grâce à l'injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

$(H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega))$, on a : $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$

D'où $L(.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$D'aprés le théoréme de Lax-Milgram, le problème variationnelle (2.9) admet une solution unique $y \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$a(y,v) = L(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Comme l'opérateur $I - \Delta$ est élliptique et $f + g \in L^2(\Omega)$, tel que :

$$\begin{aligned} y - \Delta y = f + g \in L^2(\Omega) \\ \Rightarrow y - \Delta y \in L^2(\Omega) \\ \Rightarrow y \in L^2(\Omega) \text{ et } \Delta y \in L^2(\Omega) \\ \Rightarrow \ y \in H^2(\Omega) \end{aligned}$$

de plus : $y \in H_0^1(\Omega)$, alors $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

On prend $z = y - f \in H_0^1(\Omega)$.

D'où $(A, D(A))$ est maximal.

2.montrons que $(A, D(A))$ est anti-symétrique, c'est-à-dire : on montre que :

$\langle A(y,z),(f,g)\rangle = -\langle (y,z), A(f,g)\rangle \qquad \forall (y,z),(f,g) \in D(A)$.

Soient $(y,z),(f,g) \in D(A)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle A(y,z),(f,g)\rangle &= (z,\Delta y),(f,g) \\ &= \int_\Omega \nabla z \nabla f + \int_\Omega g \Delta y \ dx. \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle A(y,z),(f,g)\rangle = \int_\Omega \nabla z \nabla f + \int_\Omega g \Delta y dx \tag{2.12}$$

On applique la formule de Green sur le deuxième terme de l'intégrale de (2.12), on obtien :

$$\langle A(y,z),(f,g)\rangle = \int_\Omega \nabla z \nabla f + \int_\Omega \nabla y \nabla g$$

Comme le produit scalaire est commutatif dans $\mathbb{R}$, alors on peut écrire

$\langle A(y,z),(f,g)\rangle = \langle A(f,g),(y,z)\rangle$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle A(y,z),(f,g)\rangle &= \langle A(f,g),(y,z)\rangle \\ &= \langle (g,\Delta f),(y,z)\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla y \nabla g + \int_\Omega z \Delta f dx. \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle A(y,z),(f,g)\rangle = \int_\Omega \nabla y \nabla g dx + \int_\Omega z \Delta f dx \ .$$

Donc :

$$\langle A(y,z),(f,g)\rangle = \int_\Omega \nabla y \nabla g dx + \int_\Omega z \Delta f dx \tag{2.13}$$

On a formellement

$$\int_{\Omega} z\Delta f dx = -\int_{\Omega} \nabla z \nabla f dx \tag{2.14}$$

En vertu de (2.13) et (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle (y,z), A(f,g)\rangle &= \int_{\Omega} \nabla y \nabla g dx - \int_{\Omega} \nabla z \nabla f dx \\ &= -\int_{\Omega} \nabla z \nabla f dx - \int_{\Omega} \nabla y \nabla g dx \\ &= -\langle A(y,z), (f,g)\rangle .\end{aligned}$$

par conséquent :

$$\langle A(y,z), (f,g)\rangle = -\langle (y,z), A(f,g)\rangle$$

D'où $(A, D(A))$ est anti-symétrique. ■

Remarque 2.3.3 *Comme A est maximal,dissipatif et antisymétrique alors A est anti-adjoint.*

Lemme 2.3.1 *L'inégalité (2.7) et équivalent à*

$$\int_0^T \int_{\omega} |v'(t,x)|^2 dxdt \geq C_T \left[\int_{\Omega} \left(|\nabla y_0|^2 + |y_1|^2 \right) dx \right] \quad \forall z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in H$$

Preuve. On a :

$$B^* : H \longrightarrow L^2(\Omega) = U$$

$$B^* \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (0 \qquad 1_{\omega}) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 1_{\omega} w_2$$

L'inégalité (2.7) s'écrit alors :

$$\int_0^T \|1_{\omega} w_2(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \geq C_T \|Z_0\|^2_H \qquad \forall z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in H$$

Donc :

$$\int_0^T \int_{\omega} |w_2(t,x)|^2 dxdt \geq C_T \left[\int_{\Omega} \left(|\nabla y_0|^2 + |y_1|^2 \right) dx \right] \quad \forall z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in H$$

On posant $v = w_1$, on obtient $w_2 = -v'$

car :

Si $v = w_1$ alors : $w' = A^* u \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} v' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_2 \\ -\Delta v \end{pmatrix}$$

Alors :

$v' = -w_2$

Donc :

$$(\ p_*) : \begin{cases} v'' = \Delta v & , \text{dans } (0,T)\times\Omega \\ v = 0 & , \text{ sur } (0,T)\times\Gamma \\ v(0) = y_0 & , \quad v'(0) = y_1 \end{cases}$$

Et (2.7) s'écrit :

$$\int_0^T \int_\omega |v'(t,x)|^2 \, dxdt \geq C_T \left[\int_\Omega \left(|\nabla y_0|^2 + |y_1|^2 \right) dx \right] \quad \forall z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in H \ \blacksquare$$

Remarque 2.3.4 *:cas où $\omega = \Omega$ le contrôle u agit sur l'ouvert Ω tout entiér, c'est un contrôle interne.*

ALors pour montré l'inégalité (2.7) il suffit montre le théoréme suivant :

Théorème 2.3.2 *:soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ réguliére (lipshitzienne) donc : $\forall T > 0$, $\exists C_T > 0$ tels que :*

$$\int_0^T \int_\omega |v'(t,x)|^2 \, dxdt \geq C_T \left[\int_\Omega \left(|\nabla y_0|^2 + |y_1|^2 \right) dx \right] \quad \forall z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in H$$

où v est la solution de (p_*).

Preuve.

$1 \overset{ére}{=}$ étape :**l'énergie**

On a l'énargie de la solution v de (p_*), avec $(y_0\ , y_1) \in H$ est donné par :

$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v(t)|^2 + |v'(t)|^2 \right) dx.$

On prent $(y_0, y_1) \in D(A)$, on a une solution fortes (v', v) qui vérifie d'aprés proposition (2.2.1)

$(v', v) \in C([0.T]; (H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega))$, donc l'intégrale sera un sens.

On multiplie la $1 \overset{ere}{=}$ équation de (p_*) par v', et on intégre sur Ω , on obtient :

$$\int_\Omega v'v''dx = \int_\Omega v' (\Delta v) \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |v'|^2 \, dx. \tag{2.15}$$

D'autre part, on a d'aprés la formule de green :

$$\int_\Omega v' (\Delta v) \, dx = -\int_\Omega (\nabla v') (\nabla v) \, dx + \int_{\partial\Omega} v' \tfrac{\partial v}{\partial n} ds$$

comme $v' \in H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$\int_\Omega v' (\Delta v) \, dx = -\int_\Omega (\nabla v') (\nabla v) \, dx$$

D'où :

$$-\int_\Omega (\nabla v') (\nabla v) \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \tag{2.16}$$

Alors d'après (2.15) et (2.16) on obtient :

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v'|^2\right) dx\right] = 0$

Et l'énergie est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v'|^2\right) dx$$

Pour les solution fortes, on a :

$$E'(t) = 0.$$

Donc l'énergie est constante c'est-à-dire :

$$E(t) = E(0).$$

D'où :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v'|^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla y_0|^2 + |y_1|^2\right) dx \quad \text{avec } (y_0, y_1) \in D(A)$$

Et on a par densité de $D(A)$ dans H, l'énergie est constante pour les solutions fortes.

Les application :

$$(y_0, y_1) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v'|^2\right) dx$$

et

$$(y_0, y_1) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla y_0|^2 + |y_1|^2\right) dx$$

sont continue de H dans $\mathbb{R}_+$ et coïncident sur $D(A)$

Par densité de $D(A)$ dans H, elles coïncident partout sur H

La constance de l'énergie s'écrit :

$\frac{1}{2}\|(v, v')\|_H^2 = \frac{1}{2}\|(y_0, y_1)\|_H^2$

C'est à dire :

$$\|(v(t), v'(t))\|_H^2 = \|(y_0, y_1)\|_H^2 \qquad , \forall t \geq 0.$$

$2^{\acute{e}me}$ étape

On pose : $k(t) = t^2(T-t)^2 \qquad 0 \leq t \leq T$

On multiplie l'équation de (p_*) par $k(t)v$ puis on intégre sur Q_T on obtient :

$$\int_{Q_T} k(t) v_{tt}(x,t) v(x,t) dxdt = \int_{Q_T} k(t) v(x,t) \Delta v(x,t) dxdt$$

On intégre par parties sur $[0,T]$, on obtient :

$$\int_{Q_T} kv_{tt}vdxdt = \left[\int_{Q_T} kv_t vdx\right]_{t=0}^{t=T} - \int_{Q_T} (k'v + kv_t)\, v_t dxdt$$

$$= -\int_{Q_T} k'v_t vdxdt - \int_{Q_T} k\,|v_t|^2\, dxdt \tag{2.17}$$

d'autre parte :

$$\int_{Q_T} k(t)\, v(x,t)\, \Delta v(x,t)\, dxdt = \int_0^T \int_\Omega k(t)\, v(x,t)\, \Delta v(x,t)\, dxdt$$

$$= \int_0^T k(t) \int_\Omega v(x,t)\, \Delta v(x,t)\, dxdt$$

Utilisons la formule de Green on trouve (intégration par parties sur Ω) :

$$\int_\Omega v\Delta v dxdt = \int_\Gamma v\frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx$$

$$= -\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx$$

car $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ donc $v = 0$ sur Γ.
alors :

$$\int_{Q_T} k(t)\, v(x,t)\, \Delta v(x,t)\, dxdt = -\int_{Q_T} k(t)\, |\nabla v(x,t)|^2\, dxdt \tag{2.18}$$

donc d'aprés (2.17) et (2.18) on obtient :

$$\int_{Q_T} k_t v v_t dxdt + \int_{Q_T} k\,|v_t|^2\, dxdt = \int_{Q_T} k(t)\, |\nabla v(x,t)|^2\, dxdt \tag{2.19}$$

et on a :

$$2\,E(0) - \int_\Omega |v_t(t)|^2\, dx = 2\,E(t) - \int_\Omega |v_t(t)|^2\, dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla v(t,x)|^2 + |v_t(t)|^2\, dx - \int_\Omega |v_t(t)|^2\, dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla v(t,x)|^2\, dx$$

Donc :

$$\int_\Omega |\nabla v(t,x)|^2\, dx = 2E(0) - \int_\Omega |v_t(t)|^2\, dx \tag{2.20}$$

D'où on multiplie(2.20) par $k(t)$ et on intégre sur Q_T on obtient :

$$\int_{Q_T} k(t) |\nabla v(t,x)|^2 dx = 2E(0) \int_0^T k(t) dt - \int_{Q_T} k(t) |v_t(t)|^2 dxdt \tag{2.21}$$

Soit $\epsilon > 0$, on a :

$$\left| \int_{Q_T} k_t v v_t dxdt \right| = \left| \int_{Q_T} \left(k^{\frac{1}{2}} v \right) \left(\frac{K_t}{K^{\frac{1}{2}}} v_t \right) dxdt \right| \tag{2.22}$$

D'aprés l'inégalité de Young dans on obtient :

$$\left| \int_{Q_T} k_t v v_t dxdt \right| \leq \epsilon \int_{Q_T} k v^2 dxdt + \frac{1}{4\epsilon} \int_{Q_T} \frac{K_t^2}{k} v_t^2 dxdt \tag{2.23}$$

$3^{\acute{e}me}$étape

Soit $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ la suite des valeurs propres de $(-\Delta)$ sur $H_0^1(\Omega)$.

Comme l'opérateur $(-\Delta)$ et auto-adjoint positif à résolvante compacte (car $D(-\Delta) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est une injection compacte) alors on a :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_m < ...$$

Soit $\{\varphi_k\}$ la base orthonormale correspondante, alors on peut écrire v comme suite :

$v = \sum_{k\geq 1} \langle v, \varphi_k \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_k$ et $\int_\Omega |v|^2 dx = \sum_{k\geq 1} \left| \langle v, \varphi_k \rangle_{L^2(\Omega)} \right|^2$.

et on a :

$$\langle -\Delta v, v \rangle = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = \sum_{k\geq 1} \lambda_k |\langle v, \varphi_k \rangle|^2 \geq \lambda_1 \sum_{k\geq 1} |\langle v, \varphi_k \rangle|^2 = \lambda_1 \int_\Omega |v|^2 dx$$

D'où : $\int_\Omega |v|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$

En vertu de (2.20) et l'inégalité (2.23) on obtient, :

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |k_t v v_t dxdt| &\leq \frac{\epsilon_1}{\lambda_1} \int_{Q_T} k |\nabla v|^2 dxdt + c_\epsilon \int_{Q_T} v_t^2 dxdt \\ &\leq \frac{2\epsilon}{\lambda_1} E(0) \int_0^T k(t) dt - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_{Q_T} k v_t^2 dxdt + c_\epsilon \int_{Q_T} v_t^2 dxdt \end{aligned}$$

Où $c_\epsilon = \left\| \frac{k_t}{k} \right\|_{L^\infty(0,T)} (4\epsilon)^{-1}$ et $\int_0^T k(t) dt = \frac{T^5}{30}$

En utilisant (2.19) et (2.21) on obtient :

$$2E(0)\frac{T^5}{30} - \int\limits_{Q_T} kv_t^2 dxdt \leq \int\limits_{Q_T} kv_t^2 + 2\frac{2\epsilon}{\lambda_1}E(0)\frac{T^5}{30} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\int\limits_{Q_T} kv_t^2 + c_\epsilon \int\limits_{Q_T} v_t^2 dxdt$$

D'où :

$$2\frac{T^5}{30}\left(1-\frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)E(0) \leq \int\limits_{Q_T}\left[k\left(2-\frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)+c_\epsilon\right]v_t^2 dxdt$$

ϵ est quelconque, donc pour ϵ est assez petit on a :
$1-\frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$ et $2-\frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$, donc on peut majorer :
Et sachant que $0 \leq k(t) \leq \frac{T^4}{16}$,on obtient pour ϵ assez petit :

$$\left(1-\frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)E(0) \leq \left[\left(2-\frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\frac{T^4}{16}+c_\epsilon\right]\int\limits_{Q_T} v_t^2 dxdt.$$

D'où :

$$E(0) \leq \left[\left(2-\frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\frac{T^4}{16}+c_\epsilon\right]\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\epsilon}\right)\int\limits_{Q_T} v_t^2 dxdt.$$

On pose :

$$\frac{1}{c_T} = \left[\left(2-\frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\frac{T^4}{16}+c_\epsilon\right]\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\epsilon}\right).$$

Donc :

$$\int\limits_{Q_T} v_t^2 dxdt \geq C_T E(0).$$

Alors :

$$\int\limits_{Q_T} v_t^2 dxdt \geq C_T \left\|(y_0, y_1)\right\|_H^2$$

C'est-à-dire :

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (v_t)^2 dxdt \geq C_T \int\limits_\Omega \left(|\nabla y_0|^2 + |y_1|^2\right) dx.$$

Finalement le théorème (2.3.1) est démantré. Alors le problème (2.4) est exactement contrôlable. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on est intéressé à l'étude de contrôlabilité exacte du problème des ondes linéaire avec contrôle interne (dans l'étude de stabilité on l'apelle le « feedback » c'est lui qui stabilise le problème). On a utilisé l'inégalité d'observabilité de ce problème , c'est-à-dire il y'a une équivalence entre la contrôlabilité exacte de notre problème et l'inégalité d'observabilité.

Bibliographie

[1] A.BENABDALLAH, F.AMMAR KHODJA, " Une introduction à la théorie du contrôle" , 2005.

[2] **B.KELTOUM, "**contrôlabilité des système linéaire de dimension infinie

[3] **A.PAZY, "**Semigroups of lineare operators and application to partial differential equation",Springer-varlage. New
York,1983.

[4] **H.BREZIS,** "Analyse fonctionnelle : Théore et application ," Masson Paris New York Barcelon SaoPaulo, 1987.

[5] **G.ALLAIRE, "**analyse numérique et optimisation**", Les édition de l'école polytechnique, Paris, 2005.**