Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr.Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention
du
Diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

Par

BOUSSILA Cherifa & DOUICK Nadjet

Thème

La domination romaine double dans les graphes

Composition du Jury:

Mr. N. IKHLEF ESCHOUF	M.C.A	U.Y.F Médéa	Président
Mr. L. OULDRABAH	M.C.B	U.Y.F Médéa	Encadreur
Mr. M. BENATALLAH	M.C.B	U. de Djelfa	Examinateur

Le 05/10/2020

Liste des Figures

Figure 1.1. Une arête $e = uv$, une boucle et deux arêtes multiples. 11

Figure 1.2. Un graphe simple G d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 9$. 12

Figure 1.3. $d_G(x) = |N(x)| = 8$. 12

Figure 1.4. La chaîne P_4 et le cycle C_4. 13

Figure 1.5. Un graphe 3-régulier d'ordre 6. 13

Figure 1.6. Le graphe vide d'ordre 4 et le graphe complet K_4 (ou 3-régulier d'ordre 4). 14

Figure 1.7. Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G. 14

Figure 1.8. Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 15

Figure 1.9. Un graphe biparti $K_{2,4}$. 16

Figure 1.10. Le sommet blanc est un sommet d'articulation (cut vertex). 16

Figure 1.11. G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexes. 17

Figure 1.12. Un arbre T d'ordre 10. 18

Figure 1.13. Une étoile $K_{1,3}$ et une double étoile $S_{3,4}$. 18

Figure 2.1. Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$, $\alpha(G) = 4$. 22

Figure 2.2. $\gamma_R(G) = 4$. 24

Figure 2.3. Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G) = 6$. 26

Figure 3.1. Le graphe H_i. 36

Figure 3.2. Instance $I = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)$. 37

Table des Matières

Liste des Figures **2**

Résumé **5**

Abstract **6**

Remercements **7**

Dédicace **8**

Introduction **9**

CHAPITRE 1. Définitions de base et Notations **11**

1.1. Définitions et notations utilisées dans les graphes 11

1.1.1. Graphe, sommet, arête, boucle 11

1.1.2. Voisinage 11

1.1.3. Degré, degré maximum, degré minimum 12

1.1.4. Chaîne, cycle 13

1.1.5. Graphe d-régulier Graphe vide, graphe complet 13

1.1.6. Graphe vide, graphe complet 14

1.1.7. Sous-graphe, graphe partiel 14

1.1.8. Stable, clique 15

1.1.9. Complément d'un graphe 15

1.1.10. Graphe biparti, Graphe biparti complet 15

1.1.11. Sommet d'articulation (Cut vertex) 15

1.1.12. Isomorphisme 16

1.1.13. Connexité 16

1.1.14. Arbre, forêt 17

1.1.15. Étoile, double étoile 17

CHAPITRE 2. État de l'art **19**
2.1. Introduction 19
2.1.1. Ensemble dominant 19
2.1.2. Quelques résultats existants sur la domination dans les graphes . . 20
2.1.3. Ensemble indépendant (ou stable) 21
2.1.4. Couplage 22
2.2. Les fonctions de domination romaines 23
2.2.1. Fonction de domination romaine 24
2.2.2. Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les graphes 25
2.3. Les fonctions de domination romaines doubles 26
2.3.1. Fonction de domination romaine double 26
2.3.2. Quelques résultats existants sur la domination romaine double dans les graphes 27

CHAPITRE 3. La domination Romaine double dans les graphes **30**
3.1. Introduction 30
3.2. Chaînes et cycles tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ 31
3.3. Graphes réguliers tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ 32
3.4. Graphes de blocs tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ 32
3.5. $\mathcal{NP}$-Complétude avec $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ 35

Conclusion et Perspectives **40**

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble $M \subseteq E$ est un couplage si deux arêtes de M n'ont pas un sommet commun. Un couplage de cardinalité maximum est appelé couplage maximum et le nombre d'arêtes dans un couplage maximum de G est noté par $\beta(G)$. Une fonction de domination romaine double (FDRD) sur G est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ tel que chaque sommet u avec $f(u) = 0$ est adjacent à au moins un sommet v avec $f(v) = 3$. Le poids de f est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum de f est appelé le *nombre de domination romaine double* de G, noté $\gamma_{dR}(G)$. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de la domination romaine double dans les graphes, tout d'abord, nous notons que $\gamma_{dR}(G) \leq 3\beta(G)$, où G est un graphe sans sommets isolés. Puis, nous caractérisons quelques classes spéciales de graphes, à savoir les chaînes, les cycles, les graphes réguliers et les blocs graphes G satisfaisant $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$. Enfin, nous montrons que le problème de décision associé à $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ est $CO - NP$-complet pour les graphes bipartis.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. A set $M \subseteq E$ is a matching if no two edges in M have a common vertex. The matching number, denoted $\beta(G)$ (or β), is the maximum size of a matching in G. A double Roman dominating function (DRDF) on a graph G is a function $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ such that every vertex u for which $f(u) = 0$ has a neighbor v for which $f(v) = 3$ or at least two neighbors assigned 2 under f, while if $f(u) = 1$, then the vertex u must have at least one neighbor assigned 2 or 3. The weight of a double Roman dominating function is the value $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. The minimum weight of a double Roman dominating function on a graph G is called the *double Roman domination number* of G, denoted by $\gamma_{dR}(G)$. In this thesis, first, we note that $\gamma_{dR}(G) \leq 3\beta(G)$, where G is a graph without isolated vertices. Moreover, we give a descriptive characterization of block graphs G satisfying $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$. Finally, we show that the decision problem associated with $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ is $CO - \mathcal{NP}$-complete for bipartite graphs.

Remercements

Tout d'abord, nos premiers mots de remerciements vont à notre encadreur **Dr. OULDRABAH Lyes** pour ses orientations et directives, ainsi que pour sa disponibilité, sa patience et ses encouragements. Nous tenons aussi à remercier sincèrement **Dr. IKHLEF ESCHOUF Noureddine,** maître de conférences à l'université de Médéa, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider le jury de de ce mémoire. Egalement, nous remercions **Dr. BENATALLAH Mohamed**, Maître de conférences à l'université de Djelfa, pour avoir accpté d'être un membre de ce jury. Nos vifs remerciements vont également à tous les membre de la famille universitaire au niveau de notre faculté des sciences. Aussi, nous remercions tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

A tous, merci.

Dédicace

Nous dédions ce travail :

A nos parents en témoignage de leurs sacrifices et leurs encouragements.

A nos sœurs et frères pour leurs soutiens.

A nos professeurs et nos collègues en souvenirs des bons moments passés ensemble.

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes, en forte croissance grâce à son rôle essentiel dans les sciences appliquées, incluant l'ingénierie et en particulier l'informatique, mais aussi la biologie, la génétique ou encore les sciences sociales. Généralement, les problèmes pratiques modélisables par les graphes sont de nature combinatoire où il est souvent question de recherche de structures optimales particulières, telles que clique maximum, stable maximum, coloration minimum ou dominant minimum. Ce dernier problème dont l'origine remonte au 16^{eme} siecle en Inde dans le jeu d'échec [27]. L'idée de la domination dans les graphes a été posé par Jaenisch [27] en 1862. Le principe est de couvrir l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu d'échec et donc le problème est de trouver le nombre minimum des reines qui peuvent être placées sur un échiquier de sorte que chaque carré de l'échiquier est attaqué ou "dominé" par au moins l'une des reines. D'autres applications de la domination dans la théorie des graphes sont utilisées dans le domaine de la communication et la théorie des réseaux ainsi que le théorie du codage. De ce fait, l'étude de la domination dans les graphes a reçu beaucoup d'attention ces dernières années. La théorie de la domination dans les graphes a été formellement introduite par Berge [7] en 1958.

En 1962, Ore [29] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connu sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [15]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [20, 21] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années.

Le coté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination. En effet, beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. L'idée générale de la domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble S de V (appelé dominant) tel que tout sommet extérieur au sous ensembles S a au moins un voisin dans S. La notion de domination a gagné une grande

popularité entre les chercheurs. Des résultats plus récents peuvent être trouvés dans [11, 20, 21].

En 2004, Cokayne , Dreyer, S.M Hedetniemi, et S.T Hedetniemi ont introduit une nouvelle variante de la domination dans les graphes non orientés, appelée fonction de domination Romaine. En 2016, Beeler et al., ont introduit aussi une autre nouvelle variante, c'est la fonction dominante romaine double.

Le présent document est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Définitions de base et Notations

Dans ce chapitre, on rappelle toutes les définitions de base sur les graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même.

Chapitre 2 : Etat de l'art

Dans ce chapitre, on aborde le thème de domination dans les graphes, la domination romaine et la domination romaine double. On donne ainsi un recueil des principaux résultats existants.

Chapitre 3 : La domination Romaine double dans les graphes

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la domination romaine double dans les graphes, tout d'abord, nous notons que $\gamma_{dR}(G) \leq 3\beta(G)$, où G est un graphe sans sommets isolés. Puis, nous caractérisons quelques classes spéciales de graphes, à savoir les chaînes, les cycles, les graphes réguliers et les blocs graphes G satisfaisant $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$. Enfin, nous montrons que le problème de décision associé à $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ est $CO - NP$-complet pour les graphes bipartis.

Enfin on termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives pour les travaux futurs dans cet axe de recherche.

CHAPITRE 1

Définitions de base et Notations

1.1 Définitions et notations utilisées dans les graphes

1.1.1 Graphe, sommet, arête, boucle

Un *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble de *sommets* V (Vertices en anglais) et un ensemble d'*arêtes* E (Edges en anglais). Le cardinal de V est appelé l'*ordre* de G, noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la *taille* de G, noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est un couple non ordoné de deux sommets. L'arête $e = \{u, v\}$ est souvent notée $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues.

Exemple 1.1. *Une arête $e = uv$, une boucle et deux arêtes multiples. Voir la Figure* 1.1



FIGURE 1.1. Une arête $e = uv$, une boucle et deux arêtes multiples.

Lorsque plusieurs arêtes relient deux sommets, on les appelle des arêtes multiples et le graphe G est appelé graphe multiple. *Un graphe est dit* simple *s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis.*

Exemple 1.2. *Un graphe simple G d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 9$. Voir la Figure* 1.2.

1.1.2 Voisinage

On appelle *voisinage* ouvert d'un sommet u, l'ensemble $N(u) = \{v \in V : uv \in E\}$, c'est l'ensemble de sommets adjacent à u dans G. Le voisinage fermé d'un sommet u désigne

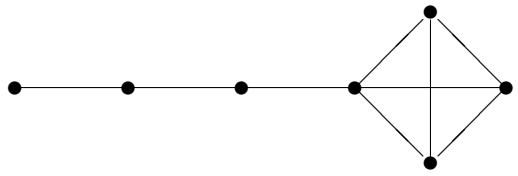


FIGURE 1.2. Un graphe simple G d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 9$.

l'ensemble $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Ainsi le voisinage ouvert d'un sous-ensemble $S \subseteq V$, est l'ensemble $N(S) = \bigcup_{u \in S} N(u)$, c'est l'union des voisinages ouverts des sommets de S. De même, le voisinage fermé $N[S]$ de S est l'union des voisinages fermés des sommets de S, autrement dit $N[S] = N(S) \cup S$.

1.1.3 Degré, *degré maximum, degré minimum*

Le *degré* d'un sommet $v \in V$ est $d_G(v) = |N(u)|$ c'est le cardinal de son voisinage ouvert. On note par $N_S(x) = N(x) \cap S$ et $d_S(x) = |N_S(x)|$. On notera par $\Delta(G) = \max\{d(x),\ x \in V\}$ et $\delta(G) = \min\{d(x), x \in V\}$, respectivement, le *degré maximum* et le *degré minimum* dans G. Un sommet de degré 0 sera dit un sommet *isolé*, un sommet de degré égal à 1 sera dit sommet *pendant*. Un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit sommet *support* et une arête adjacente à un sommet pendant est appelée *arête pendante*. Le *voisinage privé* de x par rapport à S noté par $opn[x, S]$ est l'ensemble, $opn[x, S] = N[x] - N[S - \{x\}]$. Comme chaque arête a exactement deux sommets on a $\sum_{x \in V} d(x) = 2m$.

Exemple 1.3. *La Figure* 1.3 *représente un sommet x avec ses voisins $N(x)$.*

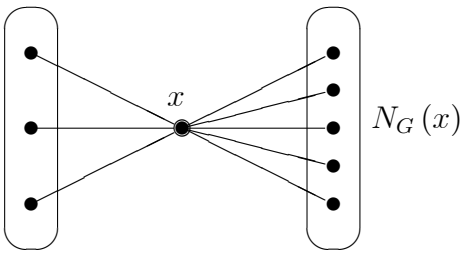


FIGURE 1.3. $d_G(x) = |N(x)| = 8$.

1.1.4 Chaîne, cycle

Une *chaîne* d'ordre n notée par $P_n = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ de V telle que $v_i v_{i+1} \in E$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Les deux sommets v_1 et v_n sont appelés respectivement *extrémité initiale* et *extrémité finale* de la chaîne P_n. Une chaîne est dite élémentaire (respectivement, simple) si tous ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Un cycle d'ordre n noté par C_n dans un graphe $G = (V, E)$ est une chaîne férmée (les deux extrémités sont confondues). Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

Exemple 1.4. *Dans la Figure* 1.4 *on a la chaîne* P_4 *d'ordre* 4 *et le cycle* C_4 *d'ordre* 4.

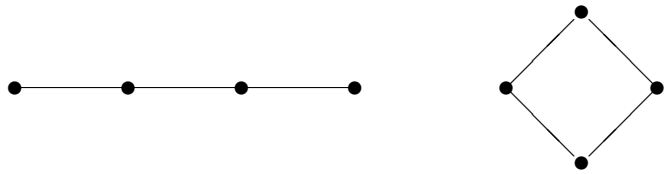


FIGURE 1.4. La chaîne P_4 et le cycle C_4.

1.1.5 Graphe d-régulier Graphe vide, graphe complet

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $G = (V, E)$. Si $\delta(G) = \Delta(G) = d \geq 1$, alors G est appelé graphe *d-régulier* et *semi-régulier* si $\Delta(G) - \delta(G) = 1$.

Exemple 1.5. *Un graphe* 3*-régulier d'ordre* 6 *est représenté dans la Figure* 1.5.

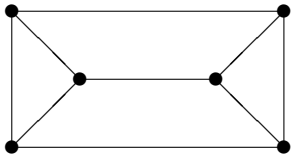


FIGURE 1.5. Un graphe 3-régulier d'ordre 6.

1.1.6 Graphe vide, graphe complet

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Si $\Delta(G) = 0$ alors G est dit *graphe vide*. Un graphe $(n-1)$-régulier est appelé *graphe complet* d'ordre n noté par K_n.

Exemple 1.6. *Pour $k = 3$, nous voyons dans la Figure* 1.6 *le graphe* 3*-régulier (ou graphe complet K_4) d'ordre $n = 4$.*



FIGURE 1.6. Le graphe vide d'ordre 4 et le graphe complet K_4 (ou 3-régulier d'ordre 4).

1.1.7 Sous-graphe, graphe partiel

Soient $G = (V, E)$ un graphe simple et X, Y deux parties disjointes non vides de V. 0n note par $[X, Y] = \{xy \in E : x \in X, \text{ et y} \in Y\}$. A chaque partie non vide $X \subseteq V$ est associé le *sous-graphe induit* par X, noté par $D[X] = (X, B)$ est un graphe où $B = \{uv \in E : u, v \in X\}$. Si $X = V$ et $B \subseteq A$, alors le graphe $H = (V, B)$ est appelé *graphe partiel* du graphe G.

Exemple 1.7. *Nous voyons dans la Figure* 1.7*, un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G.*

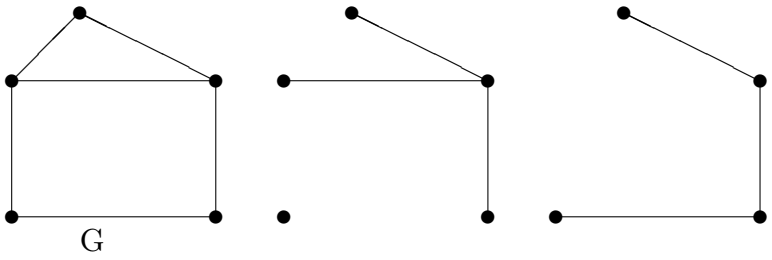


FIGURE 1.7. Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G.

1.1.8 Stable, clique

Soient $G = (V, E)$ un graphe simple et $S \subseteq V$. Si $\Delta(D[S]) = 0$ alors S est appelé ensemble stable ou *indépendant*, et si $D[S]$ est un graphe complet, alors S est appelé une *clique*. Si $D[S] = K_3$ alors S est appelé une clique de trois sommets ou juste un *triangle*.

1.1.9 Complément d'un graphe

Le graphe *complémentaire* d'un graphe simple $G = (V, E)$ est un graphe simple noté par $\overline{G} = (V, \overline{E})$ et tel que: $(u, v) \in \overline{E}$ si et seulement si $(u, v) \notin E$; $\forall\ u, v \in V$.

Exemple 1.8. *La Figure* 1.8 *représente un graphe* G *ainsi que son graphe complémentaire* $\overline{G}$.



FIGURE 1.8. Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

1.1.10 Graphe biparti, Graphe biparti complet

Soit $G = (V, E)$ un graphe et S un sous-ensemble de V. Un *graphe biparti* $G = (X, Y, E)$ est un graphe dont ses sommets peuvent être divisé en deux sous- ensembles disjoints et indépendants X, Y. Un *graphe biparti complet* est un graphe biparti (X, Y, E) tel que pour tout sommet $x \in X$ et pour tout sommet $y \in Y, xy \in E$. Un graphe biparti complet avec les partitions $|X| = p$ et $|Y| = q$, est noté par $K_{p,q}$.

Exemple 1.9. *Un exemple d'un graphe biparti d'ordr* 6 *est représenté dans la Figure* 1.9.

1.1.11 Sommet d'articulation (Cut vertex)

Un sommet v of G est appelé *sommet d'articulation* de G si $G - v$ a plus de composants de G.

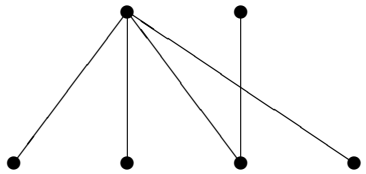


FIGURE 1.9. Un graphe biparti $K_{2,4}$.

un graphe connexe sans sommet d'articulation est appelé un *bloc*. un bloc d'un graph G est un sous graphe de G.

Exemple 1.10. *Dans la Figure* 1.10, *le sommet blanc est un sommet d'articulation (cut vertex).*

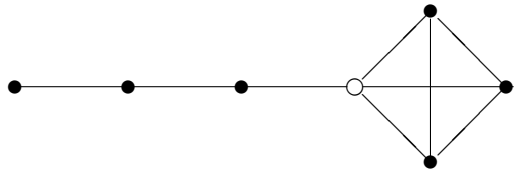


FIGURE 1.10. Le sommet blanc est un sommet d'articulation (cut vertex).

1.1.12 Isomorphisme

Un *isomorphisme* f entre deux graphes $G_1 = (V_1, E)$ et $G_2 = (V_2, E)$ est une bijection f:$V_1 \to V_2$ telle que $|V_1| = |V_2|$ et pour tout paire de sommets u, v de V_1, (u, v) est un arête de G_1 si et seulement si $(f(u), f(v))$ est un arête de G_2. Deux graphes G_1 et G_2 sont dits *isomorphes* et on écrit $G_1 \cong G_2$ s'il existe un *isomorphisme* f entre eux.

1.1.13 Connexité

Un graphe G est dit *connexe* si pour tout pair de sommets, x et y de G, il existe une chaîne reliant x à y et on note cette relation de connexité par $\sim$, et on a donc $x \sim y$ si et seulement s'il existe dans G une chaîne reliant x à y. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Les

sous-graphes induits par les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelés *composantes connexes* de G. Le graphe G est dit connexe s'il possède une seule composante connexe.

Exemple 1.11. *Dans la Figure* 1.11*, le graphe G est connexe puisque il contient une seule composante connexe, tandis que H est non connexe car il contient deux composantes connexes C_3 et P_2.*



FIGURE 1.11. G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexes.

1.1.14 Arbre, forêt

Un $T = (V, E)$ est un graphe connexe et sans cycle. Le sommet v adjacent à une feuille u est appelé un sommet support, on dit que v est un sommet support fort s'il est adjacent à au moins deux feuilles. L'ensemble de sommets pendants (feuilles) noté par $\Omega(T)$ et l'ensemble de sommets supports d'un arbre noté $N(\Omega(T))$. Un graphe sans cycles mais non-connexe est appelé forêt.

Exemple 1.12. *Un arbre T d'ordre* 10 *avec $|\Omega(T)| = 7$ et $|N(\Omega(T))| = 3$ est représenté dans la Figure* 1.12*.*

1.1.15 Étoile, double étoile

Une *étoile* d'ordre n est un graphe bipartie complet $K_{1,n}$, (On peut considérer une étoile comme étant un arbre T d'ordre $n \geq 2$ qui possède $n-1$ feuilles). Une *double étoile*, notée $S_{p,q}$, est un arbre d'ordre $n = p + q + 2$, possédant exactement deux sommets supports, l'un est adjacent à p feuilles et l'autre à q feuilles.

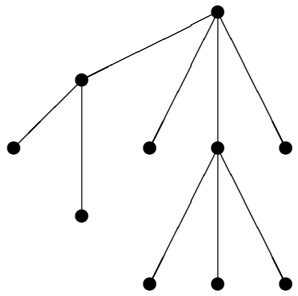


FIGURE 1.12. Un arbre T d'ordre 10.

Exemple 1.13. *Une étoile $K_{1,3}$ d'ordre4 et une double étoile $S_{3,5}$ d'ordre 9 sont représentés dans la Figure* 1.13.

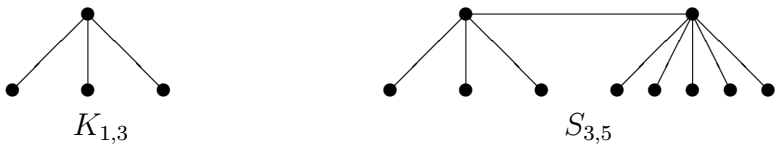


FIGURE 1.13. Une étoile $K_{1,3}$ et une double étoile $S_{3,4}$.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART

2.1 Introduction

Dominer des sommets d'un graphe c'est choisir un sous-ensemble de sommets tel que tout sommet qui se trouve à l'extérieure du graphe a au moins un voisin dans cet ensemble. Cet ensemble est appelé ensemble dominant. Cette notion de domination dans les graphes a été introduite par Berge (1958) [7] et puis par Ore (1962) [29]. Nous commençons cette section par donner la définition de la domination dans les graphes.

2.1.1 Ensemble dominant

Définition 2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ de G est dit ensemble* dominant *si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G, noté $\gamma(G)$, est appelé nombre de domination. Un $\gamma(G)$-ensemble est un ensemble dominant de G de cardinalité $\gamma(G)$. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.*

Remarque 2.2. *Si S est un ensemble dominant d'un graphe simple $G = (V, E)$, alors:*

1. Un sous-ensemble de S n'est pas nécessairement un ensemble dominant de G, tandis que tout ensemble contenant D est un ensemble dominant de G.

2. S contient tous les sommets isolés de G.

3. Puisque l'ensemble des sommets d'un graphe est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq n$.

    - $\gamma(G) = 1$ si et seulement si G possède un sommet v de degré $n - 1$ (sommet universel), dans ce cas $\{v\}$ est un ensemble dominant minimum de G.

- $\gamma(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$, dans ce cas $V(G)$ est l'unique ensemble dominant de G.

2.1.2 Quelques résultats existants sur la domination dans les graphes

On résume ci-dessous quelques bornes concernant le nombre de domination. Walikar Acharya et Sampathkumar [40] ont présenté deux bornes inférieur pour le nombre de domination γ.

Théorème 2.3 (**Walikar, Acharya et Sampathkumar [40]**). *Pour tout graphe simple G avec n sommets et m arêtes et de degré maximum $\Delta(G)$, on a:*

$$\gamma(G) \geq n - m \qquad et \qquad \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1}.$$

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ a été donnée indépendamment par Payan et Xuang [25] et Fink, Jacobson, Kirch et Roberts [41].

Théorème 2.4 (**Payan, Xuang [25] et Fink et al. [41]**). *Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est la couronne $J \circ K_1$ où J est un graphe connexe, ou $G = C_4$.*

Jaeger et Payan [42] ont établi sur $\gamma(G)$ les résultats de type Nordhaus-Gaddum suivants.

Théorème 2.5 (**Jaeger, Payan [42]**). *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1.$$

$$2 \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n.$$

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$, est donnée par Cockayne, Hedetniemi [15].

Théorème 2.6 (**Cockayne, Hedetniemi [15]**). *Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1,$$

si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{G} = \overline{K_n}$.

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$ est donnée par Laskar, Peters [23].

Théorème 2.7 (**Laskar, Peters [23]**). *Soit G un graphe et $\overline{G}$ son complémentaire, si G et $\overline{G}$ sont connexes, alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n,$$

Une autre notion est apparue dans la théorie des graphes avant la notion de domination, c'est la notion d'*indépendance* (*stabilité*).

2.1.3 Ensemble indépendant (ou stable)

Définition 2.8. *Un sous ensemble de sommets $S \subseteq V$ d'un graphe G est appelé* indépendant *(ou stable) s'il n'existe pas deux sommets adjacents dans S. Un ensemble indépendant S est dit* indépendant maximal *si aucun indépendant de V ne le contient.*

Cette notion est reliée à celle de la domination par le fait qu'un stable maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant. Le nombre d'indépendance, $\alpha(G)$, est égal à la cardinalité maximale d'un ensemble maximal indépendant dans G. Un ensemble indépendant de cardinalité $\alpha(G)$ est appelé $\alpha(G)$-ensemble.

Exemple 2.9. *Pour le graphe G de la Figure* 2.1*, on a $\gamma(G) = 2$ et $\alpha(G) = 4$. L'ensemble $\{x_1, x_2\}$ est un $\gamma(G)$-ensemble et l'ensemble $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ est un $\alpha(G)$-ensemble.*

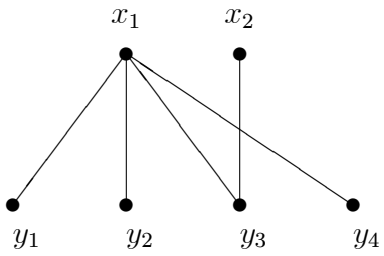


FIGURE 2.1. Un graphe G avec $\gamma(G) = 2,\ \alpha(G) = 4$.

2.1.4 Couplage

Définition 2.10. *Soit $G = (V, E)$. Un ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes de G deux à deux non adjacentes est appelé un couplage de G. Un couplage de cardinalité maximum est appelé couplage maximum et le nombre d'arêtes dans un couplage maximum de G est noté par $\beta(G)$. Le couplage est dit parfait si $\beta(G) = \frac{n}{2}$.*

Exemple 2.11. *Les arêtes indépendantes représentées dans la figure* 2.4 *correspondant à la Figure* 2.3 *forment un couplage maximum de G et le nombre de ses arêtes $\beta(G) = 3$, ce couplage est parfait.*

Dans l'étude des paramètres de domination, les chercheurs s'intéressent souvent à déterminer les valeurs de ces paramètres soit de façon exacte, grâce à des relations directes en fonction de quelques invariants de base tels que l'ordre du graphe, degré maximum du graphe ...etc ou bien à trouver des algorithmes polynomiaux. Cependant, pour un graphe quelconque, la détermination de la plupart de ces paramètres est un problème NP-complet. De ce fait, et en l'absence des valeurs exactes pour ces paramètres, on est contraint à chercher des bornes supérieures et inférieures qui encadrent le plus possibles ces paramètres. Évidement, la borne qui sera atteinte sera acceptable et souvent il est difficile de l'améliorer.

En 1975, Cockayene et al. [12] ont construit le premier algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination $\gamma(T)$ pour tout arbre T. Johnson (1975) [19] était le premier qui a montré que le problème de détermination du nombre $\gamma(G)$ pour un graphe arbitraire G est NP-complet. La domination n'a connue sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi (1977) [15]. Depuis, l'étude

de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir [9, 23, 24]). En outre, Dewdney (1981) [17], Chang et Nemhauser (1984) [28], Bertossi (1984) [10], indépendamment, ont montré que le problème reste NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis. Booth et Johnson (1982) [9] ont montré que le problème reste aussi NP-complet pour les graphes triangulés.

2.2 Les fonctions de domination romaines

L'étude initiale de la domination romaine était motivée par les stratégies de défense utilisées pour défendre l'empire romain sous le règne de l'empereur Constantin 1er, de 272 à 337 ap. Il décréta que pour toutes les villes de l'empire romain, une légion ou deux légions devraient être stationnées dans chaque ville, et si un lieu ne comportant aucune légion était attaqué, il devait alors se situer à proximité d'au moins une ville dans laquelle deux légions étaient stationnées, afin qu'une des deux légions puisse être envoyée pour défendre la ville attaquée. Cette partie de l'histoire de l'Empire romain a donné naissance au concept mathématique de domination romaine, défini et discuté à l'origine par un article de Steward dans Scientific American, intitulé "Defend the Roman Empire!" [35] en 1999, puis développé par Cockayne et al. [14] en 2004, Il s'agissait donc de sécuriser toutes les villes de l'empire romain par un nombre minimum de légions. Ceci peut être modélisé comme suit:

Soit $G = (V, E)$ un graphe dont un sommet de G représente une ville dans l'empire romain. Soit $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ une fonction. Une ville (sommet v) est considérée non-sécurisée si elle n'a aucune légion ($f(v) = 0$) et elle est sécurisée sinon ($f(v) \in \{1, 2\}$). Une ville non-sécurisée (sommet u) peut être sécurisée par l'envoi d'une légion d'une ville v voisine (sommet adjacent). Cependant, l'empereur Constantine, décréta que toute ville qui n'a pas de légion pour la sécuriser ($f(u) = 0$) doit être voisine à au moins une autre ville qui a deux légions ($f(v) = 2$). Si la $1^{ère}$ serait attaquée, alors la $2^{ème}$ pourrait déployer une légion pour la protéger sans qu'elle devient vulnérable elle même. De cette manière,

l'empereur Constantine pouvait défendre tout l'empire romain. Vu que le maintient d'une légion à une ville coute chère, alors l'objectif de l'empereur est de minimiser le nombre total de légions nécessaires pour protéger tout l'empire.

2.2.1 Fonction de domination romaine

Définition 2.12. *[14] Une fonction de domination romaine (RDF) sur un graphe G est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ tel que si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin dans V_2. Soit (V_0, V_1, V_2) une partition ordonnée de V induite par f, où $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$, pour $i = 0, 1, 2$. Notons qu'il existe un* 1-1 *correspondance entre la fonction $f : V \to \{0, 1, 2\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1, V_2) de V. On écrira donc $f = (V_0, V_1, V_2)$. Le poids d'une FDR est la valeur*

$$w(f) = f(V) = \sum_{u \in V} f(u) = |V_1| + 2|V_2|.$$

Le poids minimum de f est appelé le *nombre de domination romaine* de G, noté $\gamma_R(G)$, $\gamma_R(G) = \min\{w(f) : f \text{ est une } FDR\}$. Cockayne et al. [14] ont donné des relations entre le nombre de domination romaine et le nombre de domination d'un graphe G, $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$.

Exemple 2.13. *La fonction de domination romaine $f : V \to \{0, 1, 2\}$ pour le graphe G donnée par la Figure* 2.3, *est de poids minimum $\gamma_R(G) = 4$.*

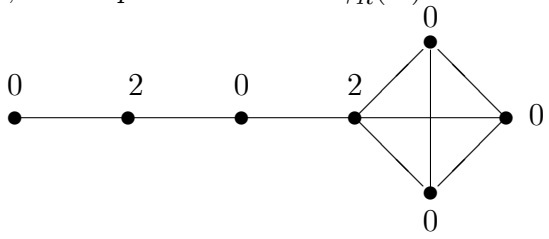


FIGURE 2.2. $\gamma_R(G) = 4$.

Le concept de domination romaine dans les graphes est largement étudié dans la littérature, au moins 200 articles ont été publiés sur divers aspects de la domination romaine dans les graphes notamment: la domination romaine, la domination romaine indépendante et faible domination romaine, pour plus de détail voir ([13, 14, 18, 22, 26, 33, 34, 36, 37]).

2.2.2 Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les graphes

Nous citons ici quelques résultats existant pour le paramètre $\gamma_R(G)$.

Proposition 2.14. *[14] Si G est une chaîne P_n ou un cycle C_n, alors $\gamma_R(G) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.*

Proposition 2.15. *[13] Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, alors on a*

$$\gamma_R(G) \leq n - \Delta(G) + 1.$$

Théorème 2.16 (**Chambers et al. [36]**). *Si G est un graphe connexe d'ordre n, alors*

$$\gamma_R(G) \leq \frac{4n}{5},$$

avec l'égalité si et seulement si G est un C_5 ou G est obtenu de $\frac{n}{5}P_5$ en identifiant chaque sommet d'un sous graphe connexe au centre d'une seule composante connexe de $\frac{n}{5}P_5$.

Une borne inférieure du nombre de domination romaine est donnée par Cockayne et al. [14].

Proposition 2.17 (**Cockayne et al. [14]**). *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, on a*

$$\gamma_R(G) \geq \frac{2n}{\Delta(G) + 1}.$$

Proposition 2.18 (**Cockayne et al. [14]**). *Si G est un graphe d'ordre n avec $\Delta(G) = n - 1$, alors*

$$\gamma_R(G) = 2.$$

Cockayne et al. [14] ont donné une caractérisation des graphes G tels que $\gamma_R(G) = n$.

Proposition 2.19 (**Cockayne et al. [14]**). *Si G est un graphe sans sommets isolés d'ordre n, alors*

$$\gamma_R(G) = n,$$

si et seulement si $G = \frac{n}{2}K_2$.

2.3 Les fonctions de domination romaines doubles

En 2016, Beeler et al. [8] ont initié l'étude des fonctions de domination romaines doubles pour les graphes, et ils ont défini ce nouveau concept comme suit:

2.3.1 Fonction de domination romaine double

Définition 2.20. *[8] Une fonction de domination romaine double (*FDRD*) d'un graphe G est une fonction $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ telle que:*

1. si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins deux voisins dans V_2 ou un voisin dans V_3.

2. si $f(v) = 1$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin dans $V_2 \cup V_3$.

Le poids d'une *FDRD* est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum de f est appelé le *nombre de domination romaine double* de G, noté $\gamma_{dR}(G)$.

Exemple 2.21. *La fonction de domination romaine double $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ donnée par la Figure* 2.5, *est de poids* 6.

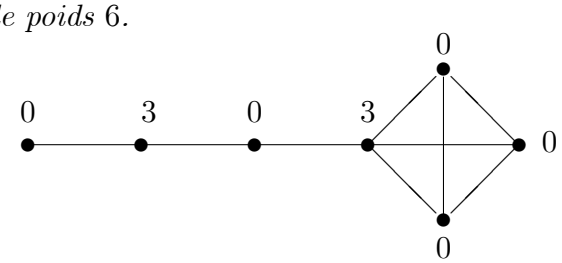


FIGURE 2.3. Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G) = 6$.

Dans [1], les auteurs ont montré que le problème de décision associé à γ_{dR} est NP-complet, même pour les graphes bipartis et triangulés. Ils ont également caractérisé les graphes pour les petites valeurs de γ_{dR}. Dans [32], les auteurs ont présenté un algorithme linéaire qui détermine la valeur de ce paramètre dans les arbres. De plus, ils ont donné une caractérisation des arbres T avec $2\gamma(T) + 1 = \gamma_{dR}(T)$ et $\gamma_{dR}(T) + 1 = 2\gamma_{dR}(T)$. Des résultats supplémentaires sur les graphes concernant la domination romaine double sont disponibles dans [4, 6, 5, 30, 31, 32].

2.3.2 Quelques résultats existants sur la domination romaine double dans les graphes

Nous citons ici quelques résultats existant pour le paramètre $\gamma_{dR}(G)$.

Proposition 2.22. *[8] Pour une fonction de domination romaine double de poids $\gamma_{dR}(G)$, aucun sommet n'a besoin d'avoir la valeur* 1.

Proposition 2.23. *[8] Pour tout graphe G, alors*

$$\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G).$$

Corollaire 2.24. *[8] Pour tout graphe G non trivial connexe,*

$$\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G) < 2\gamma_R(G).$$

Théorème 2.25. *[8] Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_{dR}(G) \leq 5n/4.$$

Théorème 2.26. *[38] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\gamma_{dR}(G) \leq 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1.$$

Preuve. Soit G un graphe d'ordre n et soit v un sommet de degré maximum. Alors la fonction $h = (N(v), V - N[v], \{v\})$ est une FDRD de G de poids $2n - 2\Delta + 1$, et donc $\gamma_{dR}(G) \leq 2\left(n - \Delta\left(G\right)\right) + 1$. □

Théorème 2.27. *[38] Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$,*

$$\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 3,$$

avec égalité si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{K_n}$.

Proposition 2.28 (Ahangar et al. [1])**.** *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors*

1. $\gamma_{dR}(G) = 3$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 1$.
2. $\gamma_{dR}(G) = 4$ *si et seulement si* $G = \overline{K_2} \vee H$, *où* H *est un graphe avec* $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$.
3. $\gamma_{dR}(G) = 5$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 2$ *et* $G \neq \overline{K_2} \vee H$ *pour tout graphe* H *d'ordre* $n - 2$.

Les résultats suivants sont donnés par Deboub Abdelali et Rabehi Allal dans leur mémoire de Master [39].

Proposition 2.29. *[39] Soit G un graphe d'ordre n de degré maximum $\Delta(G)$. Si*

$$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1,$$

alors pour tout sommet v de degré maximum on a:

1. *chaque sommet de $N(v)$ est adjacent à au plus un sommet de $\overline{N}(v)$,*
2. *$\overline{N}(v)$ est indépendant, et*
3. *$N(v)$ a au moins un sommet sans voisin dans $\overline{N}(v)$.*

Proposition 2.30. *[39] Pour tout graphe G connexe d'ordre $n \geq 3$, et de degré maximum $\Delta(G)$, alors*

$$\gamma_{dR}(G) \geq \frac{3n}{\Delta(G) + 1}.$$

Proposition 2.31. *[39] Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$. Si*

$$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)),$$

alors pour tout sommet v de degré maximum on a:

1. *Chaque sommet de $N(v)$ est adjacent à au plus deux sommets dans $\overline{N}(v)$.*
2. *$G[\overline{N}(v)]$ contient au plus un arête.*
3. *$\overline{N}(v) \neq \varnothing$.*

CHAPITRE 3

La domination Romaine double dans les graphes

3.1 Introduction

Nous rappelons ici la définition de la domination Romaine double dans les graphes donnée par Beeler et al.[8], ainsi quelques résultats obtenus par Ahangar,et al.[1].

Définition 3.1. *[8] Une fonction de domination romaine double (*FDRD*) d'un graphe G est une fonction $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ telle que:*

1. si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins deux voisins dans V_2 ou un voisin dans V_3.

2. si $f(v) = 1$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin dans $V_2 \cup V_3$.

Le poids d'une *FDRD* est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum de f est appelé le *nombre de domination romaine double* de G, noté $\gamma_{dR}(G)$.

Proposition 3.2. *[1] pour* $n \geq 1, \gamma_{dR}(P_n) = \begin{cases} n & si \quad n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)\,, \\ n+1 & si \quad n \equiv 1, 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)\,. \end{cases}$

Proposition 3.3. *[1] pour* $n \geq 3$, $\gamma_{dR}(C_n) = \begin{cases} n & si \quad n \equiv 0, 2, 3, 4 \,(\mathrm{mod}\, 6)\,, \\ n+1 & si \quad n \equiv 1, 5 \,(\mathrm{mod}\, 6)\,. \end{cases}$

Beeler et al.[8] a observé que dans un DRDF de poids minimum, aucun sommet ne doit se voir attribuer la valeur 1.

Proposition 3.4. *[8] pour toute fonction de domination Roman double g, il existe une fonction de domination Roman double f d'un poids non supérieur à g pour lequel aucun sommet ne reçoit la valeur* 1.

Par Proposition 3.4, dans ce qui suit quand on considère un γ_{dR}-fonction d'un graphe nous supposons qu'aucun sommet de G ne reçoit la valeur 1.

Beeler et al.(2016) ont montré qui si G est un graphe sans sommets isolés, alors $\gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$ et Cockayne (1978) a montré que $\gamma(G) \leq \beta$, et cela conduit immédiatement à la nouvelle borne supérieure:

$$\gamma_{dR}(G) \leq 3\beta(G).$$

Rappelons que le nombre $\beta(G)$ peut être calculé pour tout graphe G en temps polynomial [2].

Théorème 3.5. *Pour tout graphe G sans sommet isolé,*

$$\gamma_{dR}(G) \leq 3\beta(G) \tag{3.1}$$

et cette borne est atteindre pour $\frac{n}{2}K_2$.

Dans ce chapitre on s'intéresse principalement à la caractérisation descriptive de quelques classes de graphes pour lesquelles la borne supérieure (3.1) est atteinte. Nous commençons tout d'abord par caractériser certaines classes de graphes, à savoir les chaînes, les cycles, les graphes réguliers et les blocs graphes tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$. En plus, on montre que le problème de décision associé à $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ est $CO - NP$-complet pour les graphes bipartis.

3.2 Chaînes et cycles tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$

Proposition 3.6. *Si $G \in \{P_n, C_n\}$ alors $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ si et seulement si $n \in \{2, 3, 5\}$ pour $n \geq 2$.*

Preuve. Si $G \in \{P_n, C_n\}$ alors $\beta \in \left\{\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right\}$. Supposons que $\gamma_{dR}(P_n) = 3\beta(P_n)$ où $n \geq 2$. D'après la Propositions 3.2, on distingue 4 cas:

Case 1. $n \equiv 0 \pmod 3$ et $n \equiv 0 \pmod 2$. On a $n = \gamma_{dR}(P_n) = 3\beta(P_n) = 3\frac{n}{2}$, une contradiction.

Case.2. $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ and $n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$. On a $n = \gamma_{dR}(P_n) = 3\beta(P_n) = 3\frac{n-1}{2}$, ce qui implique que $n = 3$.

Case 3. $n \equiv 1, 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ and $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2)$. On a $n+1 = \gamma_{dR}(P_n) = 3\beta(P_n) = 3\frac{n}{2}$, ce qui implique que $n = 2$.

Case.4. $n \equiv 1, 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ and $n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$. On a $n+1 = \gamma_{dR}(P_n) = 3\beta(P_n) = 3\frac{n-1}{2}$, ce qui implique que $n = 5$.

Maintenant, supposons que $\gamma_{dR}(C_n) = 3\beta(C_n)$ où $n \geq 3$. On utilise la Propositions 3.3 et en suivant les mêmes arguments dans les Case 1 à Case 4 on obtient $n \in \{3, 5\}$.

La condition suffisante est facile à vérifier. □

3.3 Graphes réguliers tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$

On 1995, Volkmann [3] a donné une caractérisation descriptive sur les graphes régulier satisfaisants $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$.

Proposition 3.7. *[3] Soit G un graphe connexe r-régulier avec $r > 0$. Alors on a $\gamma(G) = \beta(G)$ si et seulement si $G = K_2$, C_3, C_4, C_5 ou C_7.*

Puisque $\gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G) \leq 3\beta(G)$, on observe que la famille des graphes G avec $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ est un sous classe de la famille des graphes avec $\gamma(G) = \beta(G)$. D'après ce résultat et par le Théorème 3.7, ainsi la Proposition 3.6, on peut déduire le résultat suivant.

Proposition 3.8. *Soit G un graphe r-régulier avec $r > 0$. Alors $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ si et seulement si $G = K_2$, C_3 ou C_5.*

3.4 Graphes de blocs tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$

Soit G un graphe de blocs connexe d'ordre $n \geq 2$. Soit $\Omega = \Omega(G)$ l'ensemble des feuilles de G et $G^* = G - N[\Omega]$. On 1995, Volkmann [3] a prouvé le résultat suivant:

Théorème 3.9. *[3] Soit G un graphe de blocs connexe d'ordre $n \geq 2$, $\Omega = \Omega(G)$ et $G^* = G - N[\Omega]$. Alors $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ si et seulement si $G^* = \emptyset$ ou chaque composante de G^* est un sommet isolé, une étoile, ou un triangle, où les centres des étoiles ne sont pas adjacents a un sommet de $N(\Omega)$ mais au moins un sommet de chaque triangle est adjacent à un sommet de $N(\Omega)$.*

Pour le résultat suivant, soit $X_1 \subseteq N(\Omega)$ l'ensemble des sommets supports, tel que chaque sommet de X_1 est adjacent exactement a une feuille et $X_2 = N(\Omega) - X_1$.

Théorème 3.10. *Soit G un graphe de blocs connexe d'ordre $n \geq 2$, $\Omega = \Omega(G)$ et $G^* = G - N[\Omega]$. Alors $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ si et seulement si $G^* = \emptyset$ ou chaque composante de G^* est un sommet isolé, ou triangle et exactement un sommet de chaque triangle est adjacent a un seul sommet de X_2 de plus X_1 est un ensemble indépendant, il n'ya pas d'arêtes entre X_1 et X_2 et $|[x, X_1]| \leq 2$ pour chaque sommet x in G^*.*

Preuve. Supposons que G^* a $m \geq 0$ copies de triangles K_3^i avec $V(K_3^i) = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i\}$ pour $i = 1, 2, ..., m$. Si G remplit les conditions du Théorème 3.10, la fonction f: $V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $f(x) = 3$ pour $x \in N(\Omega)$, $f(u_1^i) = 3$ pour $i = 1, 2, ..., m$ et $f(x) = 0$ sinon, est une fonction de domination Romaine double minimum G de poids $3|N(\Omega)| + 3m = 3\beta(G)$ et donc $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$.

Inversement, supposons que G est un graphe de blocs connexe d'ordre $n \geq 2$ avec $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$. Comme nous l'avons vu ci-dessus, la classe des graphes G vérifiant $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ est une sous classe des graphes de blocs connexes décrit dans le Théorème 3.9.

Supposons que G^* contient $m' \geq 1$ étoiles S_i de centres a_i. Si G^* ne contient pas de triangles ($m = 0$), alors $N(\Omega) \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{m'}\}$ est un ensemble dominant minimum, et donc $\beta(G) = \gamma(G) = |N(\Omega)| + m'$. Cependant, si nous définissons la fonction f: $V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(x) = 3$ pour $x \in N(\Omega)$, $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_{m'}) = 2$ et $f(x) = 0$ sinon, alors f est une *FDRD* de poids $3|N(\Omega)| + 2m' < 3\beta(G)$, contradiction. Maintenant supposons que $m \geq 1$ et supposons que pour un triangle disons K_3^i avec $V(K_3^i) = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i\}$. D'après le Théorème 3.9, n'est pas tout les sommets sont adjacents

a un sommet de $N(\Omega)$, donc, sans perte de généralité nous supposons que $u_1^i \notin N(N(\Omega))$ pour $i= 1, 2, ..., m$. Alors $N(\Omega) \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{m'}\} \cup \{u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^m\}$ est un ensemble dominant minimum, et donc $\beta(G) = \gamma(G) = |N(\Omega)| + m' + m$. Nous définissons la fonction f: $V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(x) = 3$ pour $x \in N(\Omega)$, $f(a_i) = 2$ pour $i = 1, 2, ..., m'$ et $f(u_1^i) = 2$ pour $i = 1, 2, ..., m$, et $f(x) = 0$ sinon, alors f est une *FDRD* de poids $3|N(\Omega)| + 2m' + 2m < 3\beta(G)$, une contradiction.

Maintenant supposons que $m \geq 1$. Supposons que pour un triangle, disons K_3^1, u_1^1, u_2^1 est adjacent a un sommet de $N(\Omega)$. Clairement, nous avons $\beta(G) = |N(\Omega)| + m$. Définissons la fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(x) = 3$ pour $x \in N(\Omega)$, $f(u_1^i) = 3$ pour $i = 2, 3, ..., m$, $f(u_3^1) = 2$ et $f(x) = 0$ sinon, alors f est un *FDRD* de poids $3|N(\Omega)| + 3m - 1 < 3\beta(G)$, contradiction, par conséquent chaque triangle de G^* est adjacent exactement à un sommet de $N(\Omega)$.

Supposons maintenant et sans perte de généralité, que u_1^1 est adjacent à un sommet $u \in X_1$ et soit u_1 la feuille adjacente à u. Définissons la fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(x) = 3$ pour $x \in N(\Omega) - \{u\}$, $f(u_1) = 2$, $f(u_1^i) = 3$ pour $i = 1, 2, ..., m$ et $f(x) = 0$ sinon, alors f est une *FDRD* de poids $3|N(\Omega)| + 3m - 1 < 3\beta(G)$, une contradiction. Par conséquent chaque triangle de G^* est adjacent exactement à un sommet de X_2.

Dans ce qui suit, nous montrons que X_1 est un ensemble indépendant et qu'il n'ya pas d'arêtes entre X_1 et X_2. Supposons d'abord qu'il existe une arête uv avec $u, v \in X_1$. Soit u_1 la feuille adjacente à u. Définissons la fonction f: $V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(x) = 3$ pour $x \in N(\Omega) - \{u\}$, $f(u_1) = 2$ et $f(x) = 0$ sinon, alors f est une *FDRD* de poids $3|N(\Omega)| - 1 < 3\beta(G)$, une contradiction.

Maintenant, supposons qu'il ya une arête uv avec $u \in X_1$ et $v \in X_2$. Soit u_1 la feuille adjacente à u. Définissons la fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(x) = 3$ pour $x \in N(\Omega) - \{u\}$, $f(u_1) = 2$ et $f(x) = 0$ sinon, alors f est une *FdRD* de poids $3|N(\Omega)| - 1 < 3\beta(G)$, une contradiction.

Enfin, nous montrons que $|[x, X_1]| \leq 2$ pour chaque sommet $x \in G^*$. Supposons qu'il existe un sommet $w \in G^*$ tel que $|[w, X_1]| \geq 3$. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_t \in X_1$ $(t \geq 3)$ les voisins de w, et soit v_i est la feuille adjacente à u_i pour $1 \leq i \leq t$. Définissons maintenant la fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(w) = 2$, $f(v_1) = f(v_2) = \ldots = f(v_t) = 2$, $f(x) = 3$

pour $x \in (X_1 - \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}) \cup X_2$ et $f(x) = 0$ sinon, alors f est une *FDRD* de poids

$$3|X_2| + 3(|X_1| - t) + 2 + 2t = 3|X_2| + 3|X_1| + 2 - t < 3|N(\Omega)|,$$

une contradiction. □

Corollaire 3.11. *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Alors on a $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ si et seulement si $T^* = \emptyset$ ou chaque composante de T^* est un sommet isolé tel que X_1 est un ensemble indépendant, il n'ya pas d'arêtes entre X_1 et X_2 et $|[x, X_1]| \leq 2$ pour tout sommet $x \in T^*$.*

3.5 $\mathcal{NP}$-Complétude avec $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$

Dans cette section, nous considérons la complexité du problème de décider si "**oui**" ou "**non**" un graphe G satisfait $\gamma_{dR}(D) = 3\beta(G)$. Nous montrons que ce problème est $CO-\mathcal{NP}$-complet en utilisant la **réduction** (i.e. une **transformation**) du problème de 3-satisfiabilité (3-SAT) au problème de décider si $\gamma_{dR}(G) \leq 3\beta(G) - 1$ est $\mathcal{NP}$-complet. Noter que le problème 3-SAT est un problème $\mathcal{NP}$-complet [19].

FONCTION MINIMUM DE DOMINATION ROMAINE DOUBLE (FMDRD)

INSTANCE: Un graphe biparti $G = (V, E)$.

QUESTION: Est-ce que G a une *FMDRD* f avec $f(V) = 3\beta(G)$?

FONCTION DE DOMINATION ROMAINE DOUBLE(FDRD)

INSTANCE: Un graphe biparti $G = (V, E)$.

QUESTION: Est-ce que G a une *FDRD* f avec $f(V) \leq 3\beta(G) - 1$?

3-SATISFIABILITY (3-SAT)

INSTANCE**:** Un ensemble fini $X = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et un ensemble $C = \{C_1, C_2, ..., C_q\}$ de la collection d'ensembles de 3 éléments de X, appelés clauses, telle que chaque clause $C_i = y_{i,1} \vee y_{i,2} \vee y_{i,3}$, où chaque occurrence $y_{i,j}$ soit x_i ou $\overline{x}_i$ (la négation de x_i).

QUESTION: Y a-t-il une instance (formule) $I = C_1 \wedge C_2 \cdots \wedge C_q$ de 3-SAT, pour l'ensemble des clauses C, telle que G ait un *FDRD* f avec $f(V) \leq k$ si et seulement si j'ai une assignation de vérité satisfiable ?

Nous notons par H_i le graphe décrit dans la Figure 3.1.

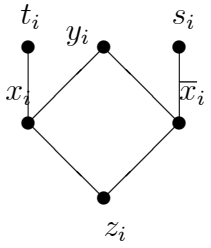


FIGURE 3.1. Le graphe H_i.

Théorème 3.12. *Le problème FDRD est $\mathcal{NP}$-complet pour les graphes bipartis.*

Preuve. Soit G un graphe d'ordre n. Premièrement, nous devons montrer que *FDRD* $\in NP$. En effet, il est facile de vérifier une instance 'oui' de *FDRD* en temps polynomial, c'est-à-dire, pour un graphe $G = (V, E)$, un entier positif k et une fonction arbitraire f avec $f(V) \leq k$, il est facile de vérifier en temps polynomial si f est un *FDR*. Deuxièmement, nous devons construire une réduction du problème NP-complet, 3-SAT bien connu au problème de *FDR*.

Soit $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ un ensemble de variables et $C = \{C_1, C_2, ..., C_q\}$ un ensemble de sous-ensembles de 3-éléments, appelés clauses, où chaque clause C_i contient trois occurrences distinctes d'une variable x_i ou $\overline{x}_i$ (la négation de x_i). Étant donné une instance I de 3-SAT, pour l'ensemble des clauses C, nous construirons une instance $G(I)$ (c'est-à-dire un graphe G correspondant à une instance I) telle que G a une *FDRD*, f avec $f(V) \leq k$ si et seulement si I est satisfiable (i.e., j'ai une affectation de vérité satisfiable).

Pour chaque clause C_j, de C, nous créons un sommet de clause étiqueté c_j, et pour chaque variable x_i dans X, nous construisons un graphe étiqueté H_i décrit dans la Figure 4.6. Ainsi on ajoute q copies de $K_{1,2}$ centrés aux a_j pour $j = 1$ à q. Puis nous ajoutons une chaîne $P_2 : uw$, et on relie le sommet u aux sommets y_i et a_j pour $j = 1$ à q.(Voir la Figure 3.2). Enfin, pour obtenir nôtre graphe biparti, pour chaque clause C_j, on ajoute

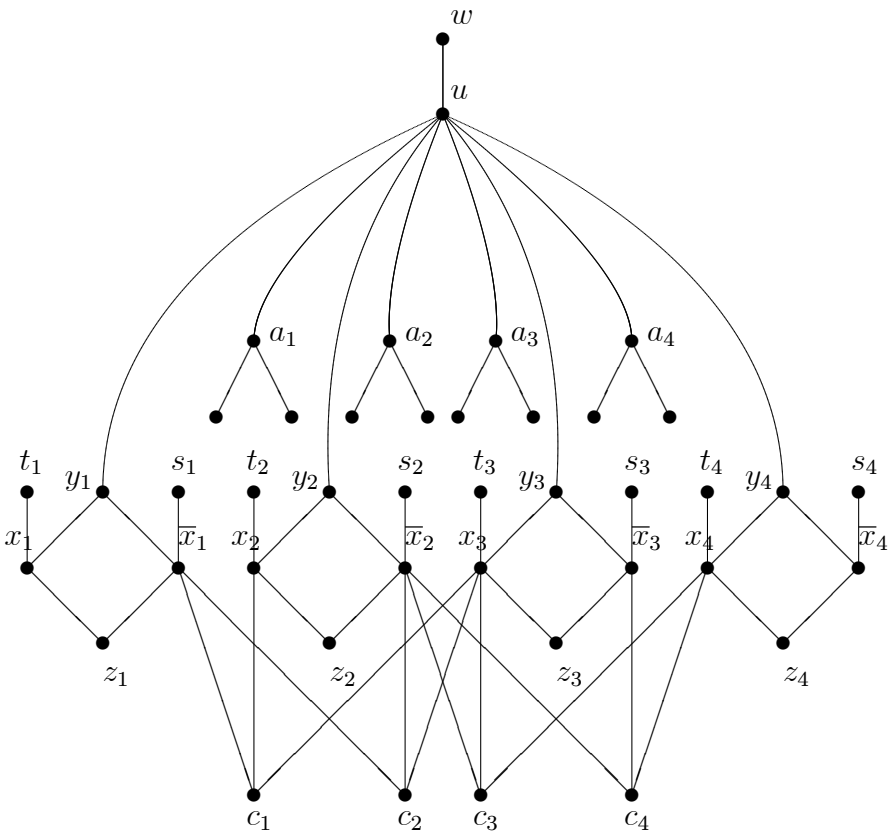


FIGURE 3.2. Instance $I = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)$.

trois arêtes de trois littéraux dans la clause C_j au sommet c_j correspondant (i.e., on ajoute les arêtes $c_j x_i$ si $x_i \in C_j$ ou $c_j \overline{x}_i$ si $\overline{x}_i \in C_j$). Clairement $G(I)$ peut être construit à partir d'une instance de 3-SAT en temps polynomial. Nous devons montrer que I a une affectation de vérité satisfiable si et seulement si le graphe $G(I)$ a un *FDRD*, f avec $f(V) \leq k$, dans ce cas $k = 6p + 3q + 2$.

Supposons d'abord que j'ai une affectation de vérité satisfiable. On va créer une fonction *FDRD* $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ comme suit: tous les $a_j \in V_3$. Si $I(x_i)$ =Vrai, alors $x_i, s_i \in V_3$, sinon, $\overline{x}_i, t_i \in V_3$. Ainsi, soit $V_1 = \emptyset$, $V_2 = \{w\}$ et tous les sommets restants sont dans V_0. Il est facile de voir que la fonction f est une *FDRD* sur $G(I)$ du poids $f(V) = 6p + 3q + 2$.

Inversement, supposons que $G(I)$ a une *FDRD* du poids au plus $k = 6p+3q+2$. Nous devons montrer que j'ai une affectation de vérité satisfiable. Pour le faire, parmi toutes les fonctions, soit $g = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ une *FDRD* avec $V_1 = \emptyset$ (d'après la Proposition 3.4). Clairement que chaque étoile $K_{1,2}$ a besoin d'un poids d'au moins 3, et ainsi nous pouvons supposer et sans perte de généralité, que $g(a_j) = 3$ pour chaque j, et toutes ses feuilles sont assignées à 0. Il est facile de vérifier que pour chaque sous-graphe H_i, nous devons avoir $g(V(H_i)) \geq 6$. Il est claire que $g(u) + g(w) \geq 2$, et donc $g(V) \geq 6p + 3q + 2$. L'égalité est obtenue par le fait que $g(V) \leq 6p + 3q + 2$, ce qui signifie que $g(V(H_i)) = 6$ pour chaque $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $g(x) = 2$, si $x = w$, $g(x) = 3$ si $x \in \{a_1, a_2, ..., a_q\}$ et $g(x) = 0$ sinon. Comme $g(V(H_i)) = 6$ et $V_2 \cap V(H_i) = \emptyset$, pour chaque H_i on a trois possibilités, ou bien,

$$g(x_i) = g(s_i) = 3 \text{ et } g(\overline{x}_i) = g(y_i) = g(z_i) = g(t_i) = 0$$

ou

$$g(x_i) = g(\overline{x}_i) = 3 \text{ et } g(t_i) = g(y_i) = g(z_i) = g(s_i) = 0$$

ou

$$g(\overline{x}_i) = g(t_i) = 3 \text{ et } g(x_i) = g(y_i) = g(z_i) = g(s_i) = 0.$$

Comme $V_2 \cap V(H_i) = \emptyset$, chaque sommet de clause doit être dominé par au moins un sommet de V_3. Nous pouvons donc créer une affectation de vérité satisfiable comme suit: pour chaque variable x_i, assigner à x_i la valeur TRUE si $x_i \in V_3$, sinon assigner la valeur

FALSE. Il est simple de voir que c'est une affectation de vérité satisfiable pour I. □

Corollaire 3.13. *Le problème FMDR est* CO-$\mathcal{NP}$*-complet pour les graphes bipartis.*

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié la domination romaine double dans les graphes. On a commencé par donné une nouvelle borne supérieure pour $\gamma_{dR}(G)$ à savoir $\gamma_{dR}(G) \leq 3\beta(G)$. Puis, nous avons caractérisé quelques classes spéciales de graphes, à savoir les chaînes, les cycles, les graphes réguliers et les blocs graphes G satisfaisant $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$. Enfin on a terminé par notre travail par prouvé que le problème de décider si un graphe G satisfait $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$ est $CO - NP$-complet pour les graphes bipartis.

Les travaux réalisés durant ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives, parmi eux nous proposons de caractériser quelques classes de graphes tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta(G)$.

Références

[1] H. Ahangar, M. Chellali and S. M. Sheikholeslami, " *On the double Roman domination in graphs*". Discrete Appl. Math. **232** (2017) 1-7.

[2] J. Edmonds, "*Paths, trees and fowers"*, Canad. J. Math. **17** (1965) 449-467.

[3] L. Volkmann, " *On graphs with equal domination and edge independence numbers* ". Ars Combin. **41** (1995) 45-56.

[4] H.A. Ahangar, M. Chellali and S.M. Sheikholeslami, " *On the double Roman domination in graphs* ". Discrete Appl. Math. (232), 1-7 (2017).

[5] V. Anu and S.A. Lakshmanan, " *Double Roman domination number* ". Discrete Appl. Math. (244), 198-204 (2018).

[6] J. Amjadi, S. Nazari-Moghaddam. S.M. Sheikholeslami and L. Volkmann, *An upper bound on the double Roman domination number* ". J. Comb. Optim. (36), 81-89 (2018).

[7] C. Berge, " *The Theory of Graphs and Its Applications* ". John Wiley & Sons, New York, NY (1962).

[8] R. A. Beeler, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, " *Double Roman domination* ". Discrete Appl. Math. (211), 23-29 (2001). Mathematics, (159), 1-11 (1996).

[9] K.S. Booth et J.H. Johnson, " *Dominating sets in chordal graphs* " . SIAM J. Comput. (11), 191-199 (1982).

[10] A. A. Bertossi, " *Dominating set for split and bipartite graphs* ". Inform. Process. Lett., (19), 37-40 (1984).

[11] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg, L. Volkmann, " k-domination and k-independence in graphs ". A survey, Graphs Combin. (281), 1-55 (2012).

[12] E. Cockayne, S. Goodman and S. Hedetniemi, " *A linear algorithm for the domination number of a tree* " . Inform. Process. Lett., 4 (2), 41-4 (1975).

[13] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince and D. B. West, " *Extremal problems for Roman domination* ". SIAM J. Discreter. Math. (23), 1575-1586 (2009).

[14] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, " *Roman domination in graphs* ". Discrete Mathematics (278), 11-22 (2004).

[15] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domation in graphs*, Networks (7), 247-261 (1977).

[16] G. S. Domke, G H Fricke, R R Laskar, A. Majumdar, " *Fractional domination and related parameters* ". Domination in Graphs. New York: Marcel Dekker, (1998).

[17] A. K. Dewdney, " *Fast turning reductions between problems in NP; chapter 4; reductions between NP-compet problems. Technical report 71* ". Dep. Computer Science, Univ. Western Ontario, (1981).

[18] O. Favaron, H. Karami, R. Khoeilar, and S. M. Sheikholeslami, " *On the Roman domination number of a graph* ". Discrete Math. (309), 3447-3451 (2009).

[19] M.R. Garey and D.S. Johnson, " *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness* ". (Freeman, San Francisco), (1979).

[20] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, " *Fundamentals of domination in graphs* ". Marcel Dekker, New York, (1998).

[21] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, " *Domination in graphs: Advanced topics* ". Marcel Dekker, New York, (1998).

[22] C.-H. Liu and G. J. Chang, " *Upper bounds on Roman domination numbers of graphs* ". Discrete Math. 312 (2012), 1386-1391.

[23] R. Laskar and K. Peters, " *Domination and irredundance in graphs.* Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[24] R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, " *On the algorithmic complexity of total domination* " . SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, N°3, september (1984).

[25] C. Payan and N.H. Xuong, " *Domination-balanced graphs* ". J. Graph Theory (6), 23-32 (1982).

[26] N. J. Rad and L. Volkmann, "*Changing and unchanging the Roman domination numberof graph*", Util. Math. (89), 79-95 (2012).

[27] C.F. Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*, Petrograde (1862).

[28] G. J. Chang and G. L. Nemhauser, " *the k-domination and k-stability problems in sun-free chordal graphs*". SIAM J. Algebraic Discrete Methods, (5) , 332-345 (1984).

[29] O. Ore," *Theory of graphs* ". Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I.(1962).

[30] L. Volkmann, " *Double Roman domination and domatic numbers of graphs* ". Commun. Comb. Optim. (3), 71-77 (2018).

[31] J. Yue, M. Wei, M. Li and G. Liu, " *On the double Roman domination of graphs* ". Appl. Math. Comput. (338), 669-675 (2018).

[32] X. Zhang, Z. Li, H. Jiang, Z. Shao, " *Double Roman domination in trees ".* Article in Information Processing Letters. Preprint submitted to Elsevier, (13), 31-34 (2018).

[33] E. Zhu Z. Shao " *Extremal problems on weak Roman domination number* ". Information Processing Letters, (138), 12-18 (2018).

[34] S. Bermudo, H. Fernau, J.M. Sigarreta, " *The differential and the roman domination number of a graph* ". Appl. Anal. Discrete Math. (8) 155-171 (2014).

[35] I. Steward, " *Defend the Roman Empire!*, Sci. Amer. (281), 136-139 (1999) .

[36] E.W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince, D.B. West, " *Extremal problems for roman domination* ", SIAM J. Discrete Math. (23) 1575-1586 (2009).

[37] M. Chellali, N. Jafari Rad, " *Double equality between the roman domination and independent roman domination numbers in trees* ", Discuss. Math. Graph Theory (33) 337-346 (2013).

[38] N. Jafari Rad and H. Rahbani, " *Some progresse on the Double Roman domination in graphs* ", Discussiones Mathematica Graph Theory (39) 41-53 (2019). doi:10.7151/dmgt.2069.

[39] A. Deboub et A. Rabehi "*Etude sur la domination romaine double dans les graphes* " Mémoire Master en Recherche Opérationnelle. Encadreur. Dr. A. Bouchou U.Y.F Médéa. (2019).

[40] H.B. Walikar and B.D. Acharya and E. Sampathkumar. "*Recent develepments in the theory of domination in graphs*". In MRI Lecture Notes in Math., Mahta Reseearch Instit., Allahabad volume 1,(1979).

[41] J.F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, and J. Roberts. "*The bondage number of a graph*". Discrete Math., 86:47–57, (1990).

[42] F. Jaeger and C. Payan. "*Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombred'absorption d'un graphe simple*". C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 274728-730.(1972)