Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement des Mathematiques et de l'Informatique



Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplome de master en mathématiques

Spécialité : ANALYSE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

présenté par :

MESSAOUDI Somia

Thème :

Introduction a la théorie de Nevanlinna

Évalué par le jury composé de :

Encadreur	Mr.Haoues BAGUA	MCB Université de Médéa
Examinateur	Mr.Hocine AYADI	MCB Université de Médéa
Examinateur	Mr. Khaled BOUADJILA	MCB Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019 – 2020

REMERCIEMENT

Arrivant à faire ce mémoire je dit **"el hamde Li Allah "** pour m'avoir donné la santé et la volonté pour accomplir ce modeste travail

Je ne peux exprimer par les mots le sens de mes remerciements pour ma mère et mon père que serais-je sans leurs permanents soutiens dans ma vie.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mon promoteur monsieur **HAOUAS BAGUA** pour avoir accepté d'encadrer cette thèse ,pour son aide, sa patience ainsi sa gentillesse.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants que je rencontré durant mon cursus Universitaire

Merci à toute personne m'ayant aidé, soutenue, ou encouragé de prés ou de loin

DÉDICACE

Tout les lettres ne sauraient exprime la gratitude , l'amour ,le respect ,la reconnaissance , c'est tous simplement que je dédie cette thèse à :

A la prunelle de mes yeux, les parents les plus chers au monde papa et maman , que Dieu les garde et les protège.

A mes frères , mes sœurs ainsi que mes amis et tout la famille **"MESSAOUDI "** sans exception,remercies pour leur soutient et pour avoir supporté

A tout les enseignantes qui m'ont guidée tout au long de mon parcours éducatif

A tous mes amis de la promotion de la deuxième année Master 2019/2020

MESSAOUDI Somia

RÉSUMÉ

Ce mémoire principalement intéresse à exposer un introduction à la théorie de Nevanlinna par donner des outils et des notions de ce théorie pour prouver le premier théorème fondamental correspondant.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé i

Introduction 1

1 Résultats préliminaires et matériels 4

1.1 Fonctions holomorphes 4

1.1.1 Points singuliers isolés. 7

1.2 Fonctions entières 10

1.2.1 Définitions de base 10

2 La théorie de Nevanlinna 13

2.1 La formule de Poisson -Jensen 13

2.1.1 Formule de Poisson 15

2.1.2 Formule de Jensen 16

2.2 La fonction caractéristique de Nevanlinna 16

2.2.1 La fonction $\log^+$ et quelques propriétés 16

2.2.2 La fonction a-points N(r,f) 18

2.2.3 La fonction de proximité m(r,f) 19
2.2.4 La fonction caractéristique de Nevanlinna 20
2.3 Premier théorème fondamental de Nevanlinna 23
2.4 Exemples 25

3 Quelques compléments **30**
3.1 L'identité de Henri Cartan 30
3.2 L'ordre de croissance 33
3.3 La relation entre $T(r, f)$ et $M(r, f)$ 35

Conclusion **37**

Bibliographie **38**

INTRODUCTION

Une fonction holomorphe dans le plan complexe $\mathbb{C}$ est appelée entière. Une telle fonction f a un développement en série de puissance :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

qui est converge pour tout $z \in \mathbb{C}$

Exemple

- $f_1(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- $f_2(z) = \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- $f_3(z) = \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

Une fonction qui est holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ à l'exception des pôles est appelée méromorphe dans $\mathcal{D}$. En particulier si $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ nous disons simplement que la fonction est méromorphe. Les fonctions méromorphes en $\mathbb{C}$sont précisément celles qui peuvent s'écrire comme un quotient de deux fonctions entières.

Exemple

$$\tan z = \frac{\sin z}{cosz}$$

Le résultat suivant peut être vu comme le point de départ du domaine mathématique dont nous parlerons dans cette mémoire :

Théorème de Picard (1879) :Soit f une fonction entière et soit $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sont distincts.

Supposons que $f(z) \neq a_j$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout$j \in 1, 2$. Alors f est constante.

Exemple Soit $f(z) = e^z$. Alors $f(z) \neq 0$pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Soit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Une fonction méromorphe f est donc une fonction $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$, avec $f(z_0) = \infty$ signifiant que z_0 est un pôle. Une fonction f entière peut également être considérée comme une fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$, avec $f(z) \neq \infty$pour tout $z \in \mathbb{C}$ Cela conduit au résultat suivant :

Théorème de Picard pour les fonctions méromorphes : Soit$f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ une fonction méromorphe et $a_1, a_2, a_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ sont distincts. Supposons que $f(z) \neq a_j$pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $j \in 1, 2, 3$. Alors f est constante.

Exemple

La fonction tangente satisfait tan $z \neq \pm i$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Vers 1900, Borel et d'autres ont trouvé des versions quantitatives du théorème de Picard pour des fonctions entières. Soit $n(r, a)$ le nombre de solutions de $f(z) = a$ dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, $(r \in \mathbb{R}_+^*)$et soit

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

est le module maximum de f. Par le théorème de Liouville, $M(r, f) \to \infty$ lorsque $r \to \infty$ si f est non constante. Borel a montré que $n(r, a)$ et $\log M(r, f)$ sont du même ordre de croissance pour tous les $a \in \mathbb{C}$, avec au plus une exception.

Théorème de Borel

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log n(r, a)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}$$

Exemple

Considérons $f(z) = e^z$. Alors $M(r, f) = e^r$ donc $\log M(r, f) = r$. Soit $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. en écrivant $a = |a|e^{i\varphi}$ on voit que les solutions de $e^z = a$ sont données par $z = z_k = \log |a| + i(\varphi + 2\pi k)$, où $k \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que

$$n(r, f) = \frac{\sqrt{r^2 - (\log |a|)^2}}{\pi} + \mathrm{O}(1)$$

donc

$$n(r, f) \sim \frac{r}{\pi}$$

lorsque $r \to \infty$. En particulier

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log n(r,a)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log M(r,f)}{\log r} = 1$$

pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En 1924, Nevanlinna a développé une théorie donnant des estimations quantitatives également pour les fonctions méromorphes, en remplaçant $\log M(r,f)$ par une fonction caractéristique $T(r,f)$. Cela donne des résultats plus forts également pour des fonctions entières. La théorie produit des généralisations profondes des théorèmes de Picard et Borel. La mémoire donnera une introduction à la théorie de Nevanlinna (Le premier théorème fondamental), ainsi que d'autres résultats sur les fonctions entières et méromorphes.

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres. Dans le premier chapitre, on va donner des notions fondamentales de la théorie des fonctions holomorphes, entières et méromorphes, qui nous aident à les résultats du deuxième chapitre. Dans le deuxième chapitre on va donner les résultats principaux avec les démonstrations et des exemples de la théorie de Nevanlinna (le premier théorème fondamental). Le troisième chapitre consiste à étudier quelques compléments tels que l'identité de Henri Cartan, l'ordre de croissance et la relation entre $T(r,f)$ et $M(r,f)$.

CHAPITRE 1

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ET MATÉRIELS

1.1 Fonctions holomorphes

Définition 1.1.1 ***(Limites)*** *Soit f est une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 exclu, la définition habituelle donne*

$$\lim_{z \to z_o} f = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, t.q \quad 0 < |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon.$$

Définition 1.1.2 ***(Continuité)*** *On a*

$$f \text{ continue au point } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Définition 1.1.3 ***(Dérivation)*** *Soit f définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant z_0, on a*

$$f \text{ dérivable au point } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Définition 1.1.4 ***(Fonction holomorphe)***

$$f \text{ holomorphe dans } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{C} \Leftrightarrow f \text{ dérivable en tout point de } \Omega.$$

Théorème 1.1.1 *Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ telle que $P = \Re f$ et $Q = Imf$. Alors f est holomorphe sur Ω si et seulement si f et de classe C^1 et vérifie les équations de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Théorème 1.1.2 *Si f est holomorphe dans un ouvert Ω alors $P = Ref$ et $Q = Imf$ sont des fonctions harmoniques dans Ω (c'est-a-dire sont de classe C^2 et vérifient l'équation de Laplace $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans Ω.)*

Théorème 1.1.3 ***(Théorème de Cauchy)*** *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω et Γ une courbe fermée simple orientée incluse dans Ω ainsi que son intérieur, alors $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Théorème 1.1.4 ***(Formule de Cauchy)*** *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D contenant une courbe simple fermée Γ dont l'intérieur Δ est inclus dans D alors, pour tout point a de Δ, on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Théorème 1.1.5 *Si f est holomorphe dans un domaine D contenant une courbe fermée simple Γ dont l'intérieur Δ est inclus dans D, ses dérivées successives en un point a de Δ sont données par*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Théorème 1.1.6 *(**Développement en série de Taylor**) Toute fonction holomorphe dans un domaine D est développable en série entière autour de tout point z_0 de D, le développement étant convergent dans le plus grand disque centré en z_0 et inclus dans D. Les coefficients a_n du développement sont donnés par la formule*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du$$

Théorème 1.1.7 *(**Inégalités de Cauchy**) Soit f une fonction holomorphe dans un domaine contenant l'origine, $M(r)$ le maximum de $|f|$ sur le cercle $|z| = r$ inclus dans D, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $r^n |a_n| \leqslant M(r)$, où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Théorème 1.1.8 *(**Principe du maximum**) Si f est holomorphe dans un domaine D et sur sa frontière et n'est pas constante, le maximum de son module dans le domaine et sur sa frontière est atteint en un point de la frontière.*

Définition 1.1.5 *(**Fonction entière**) Une fonction holomorphe dans tout le plan complexe est dite une fonction entière.*

Proposition 1.1.1 *L'ensemble des fonctions entières est identique à celui des séries entières dont le rayon de convergence est infini.*

Théorème 1.1.9 *(**Théorème de Cauchy-Hadamard**) Le rayon de convergence R d'une série entière à coefficients complexes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donné par :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Théorème 1.1.10 *(**Théorème de Liouville**) Si f est une fonction définie et holomorphe sur tout le plan complexe, alors f est constante dès lors qu'elle est bornée.*

1.1.1 Points singuliers isolés.

Étudions les points en lesquels est violée l'holomorphie des fonctions. Commençons par les plus élémentaires de ces points.

Définition 1.1.6 *On dit qu'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier isolé d'une fonction f s'il existe un voisinage pointé de z_0 (i.e. un ensemble $\{0 < |z - z_0| < r\}$ si z_0 est fini ou un ensemble $\{R < |z| < \infty\}$ si $z_0 = \infty$) dans lequel f est holomorphe.*

On distingue trois types de points singuliers selon le comportement de f lorsque z tend vers un tel point.

Définition 1.1.7 *On dit qu'un point singulier z_0 d'une fonction f est*

1. *artificiel ou éliminable si $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = A < +\infty$;*
2. *un pôle si $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$;*
3. *essentiel si f ne possède ni une limite finie, ni une limite infinie lorsque $z \longrightarrow z_0$.*

Exemple 1.1.1 *Le point $z = 0$ est un point singulier éliminable pour la fonction $\frac{\sin z}{z}$ ceci découle du fait que pour $z \neq 0$ on a le développement suivant :*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...,$$

d'où il s'ensuit que $\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{\sin z}{z}=1$.

Exemple 1.1.2 *Les fonctions* $f(z)=\frac{1}{z^n}$ *, où* $n>0$ *est un entier, présentent un pôle au point* $z=0$.

Exemple 1.1.3 *Le point* $z=0$ *est un point singulier essentiel de la fonction* $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$*, car lorsque, par exemple,* $z=x$ *tend vers 0 suivant l'axe réel, les limites à droite et à gauche sont distinctes (la limite à droite est égale à l'infini, la limite à gauche, à 0) ; la fonction* $e^{\frac{1}{z}}=\cos\frac{1}{y}-i\sin\frac{1}{y}$*, n'admet pas de limite lorsque* $z=iy$ *tend vers 0 suivant l'axe imaginaire.*

Remarque 1.1.1 *Il peut de toute évidence exister des points singuliers non isolés. Par exemple, la fonction* $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$ *présente des pôles en* $z=\frac{1}{n}(n=\pm1,\pm2,...)$*, donc* $z=0$ *est un point singulier non isolé qui est un point d'accumulation des pôles.*

Exemple 1.1.4 *La fonction*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2^n}=1+z^2+z^4+z^8+... \tag{1.1.1}$$

présente des points singuliers de nature plus compliquée. D'après la formule de Cauchy-Hadamard, la série (1.1.1) *converge dans le disque* $\{z:|z|<1\}$ *et par suite la fonction f est holomorphe dans ce disque. Elle tend vers l'infini lorsque* z *tend vers 1 suivant l'axe réel, donc le point* $z=1$ *est un point singulier de* f*. Or*

$$f(z^2)=1+z^4+z^8+...=f(z)-z^2,$$

donc $f(z)=z^2+f(z^2)$ *tend aussi vers l'infini lorsque* z *tend vers* -1 *suivant un rayon du disque. De façon analogue,* $f(z)=z^2+z^4+f(z^4)$*, donc* $f\to+\infty$ *lorsque* $z\to\pm i$ *suivant un rayon du disque. D'une façon générale,*

$$f(z)=z^2+...+z^{2^n}+f(z^{2^n}),$$

pour tout n *naturel, donc* $f\to+\infty$ *lorsque* z *tend suivant un rayon vers tout point « dyadique »* $z=e^{k\cdot\frac{2\pi i}{2^n}},(k=0,1,...,2^n-1)$ *du cercle. L'ensemble des points « dyadiques » étant partout dense sur le cercle* $\{z:|z|=1\}$*, tout point de ce dernier est un point singulier de* f*. Donc* f *possède toute une ligne composée de points singuliers non isolés (une ligne singulière.)*

Théorème 1.1.11 ***(Laurent.)*** *Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine contenant la couronne $C_{z_0}(r, R)$ (centre z_o, rayons r et R, avec $0 < r < R$) et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R \tag{1.1.2}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \tag{1.1.3}$$

C_ρ désignant le cercle de centre z_0 et de rayon $\rho (r < \rho < R)$ parcouru dans le sens positif.

Définition 1.1.8 *La série (1.1.2) dont les coefficients sont définis par les formules (1.1.3) s'appelle série de Laurent de la fonction f dans la couronne $C_{z_0}(r, R)$. L'ensemble des puissances positives s'appelle partie régulière de cette série, celui des puissances négatives, partie principale .*

La nature d'un point singulier isolé $z = z_0$ est étroitement liée à celle de la série de Laurent de la fonction dans un voisinage pointé de z_0 (nous dirons plus brièvement série de Laurent au voisinage de a). Pour les points finis z_0 ce lien est exprimé par les trois théorèmes suivants.

Théorème 1.1.12 *Un point singulier isolé $z_0 \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est éliminable si et seulement si la série de Laurent de f au voisinage de z_0 ne contient pas la partie principale :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.1.4}$$

Remarque 1.1.2 *En prolongeant f par continuité au point z_0, i.e. en posant $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$, on obtient une fonction holomorphe en z_0 (c'est-à-dire $z \to z_0$ on élimine la singularité en z_0). Ceci justifie le terme de « point éliminable ». Nous conviendrons dans la suite que ces points sont réguliers et non pas singuliers pour la fonction étudiée.*

Théorème 1.1.13 *Un point singulier isolé $a \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est un pôle si et seulement si la partie principale de la série de f dans un voisinage pointé de z_0 ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls :*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad m > 0. \tag{1.1.5}$$

Théorème 1.1.14 *Un point singulier isolé z_0 d'une fonction f est essentiel si et seulement si la partie principale de la série de Laurent de f dans un voisinage pointé de z_0 contient une infinité de termes non nuls.*

Remarque 1.1.3 *Ce théorème est en fait déjà contenu dans les théorèmes 1.1.12 et 1.1.13 (si la partie principale contient une infinité de termes, le point z_0 ne peut être ni éliminable, ni un pôle, si z_0 est un point singulier essentiel, la partie principale ne peut ni pas exister, ni contenir un nombre fini de termes).*

Théorème 1.1.15 ***(Théorèmes de Picard)***

1. *Le petit théorème de Picard dit qu'une fonction entière non constante prend tout nombre complexe comme valeur, sauf peut-être un.*
2. *Le grand théorème de Picard dit qu'une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle prend, sur tout voisinage de cette singularité, tout nombre complexe une infinité de fois comme valeur, sauf peut-être un.*

Remarque 1.1.4 *Le « sauf peut-être un» dans ces énoncés est nécessaire, comme le montrent les exemples suivants. La fonction entière $z \mapsto \mathrm{e}^z$ (l'exponentielle complexe) ne s'annule pas. Elle possède même une singularité essentielle en l'infini (c'est une fonction transcendante). La fonction $z \mapsto \mathrm{e}^{1/z}$ est un exemple de fonction ne s'annulant pas avec singularité essentielle bornée (au point 0).*

1.2 Fonctions entières

1.2.1 Définitions de base

Dans ce qui suit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ désigne une fonction entière transcendante c'est-à-dire ayant un nombre infini de coefficients a_k non nuls.

Définition 1.2.1 ***(Le module maximal)*** *Soit f une fonction entière. et soit $r > 0$. On définit le module maximal sur le cercle $|z| = r$, par*

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}. \tag{1.2.1}$$

Remarque 1.2.1 *D'après le principe du maximum, nous avons*

$$M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|\leqslant r\}.$$

De plus $M(r,f)$ est une fonction strictement croissante si f est non constante.

Exemple 1.2.1

$$M(r,\cos z)=\max_{|z|\leqslant r}|\cos z|$$

Puisque

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+...,\quad |z|<\infty,$$

alors

$$|\cos z|\leqslant 1+\frac{|z|^2}{2!}+\frac{|z|^4}{4!}+....$$

Donc

$$|\cos z|\leqslant 1+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^4}{4!}+...=\cosh r.$$

Par suite

$$|\cos z|\leqslant\frac{e^r+e^{-r}}{2},\quad |z|\leqslant r.$$

En remarquant que

$$\cos ir=\frac{e^r+e^{-r}}{2}$$

On déduit que

$$M(r,\cos z)=\frac{e^r+e^{-r}}{2}.$$

De même

$$M(r,\sin z)=\frac{e^r-e^{-r}}{2},\qquad M(r,e^z)=e^r.$$

Définition 1.2.2 ***(Ordre)*** *L'ordre ρ d'une fonction entière $f(z)$ non identiquement nulle, est défini par*

$$\rho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log\log M(r,e^z)}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

Exemple 1.2.2 *Si* $f(z) = \cos z$ *on a*

$$M(r, \cos z) = \frac{e^r + e^{-r}}{2} = e^r \frac{1 + e^{-2r}}{2}$$

Comme

$$\frac{\log \log M(r, \cos z)}{\log r} = \frac{\log \left| r\Big(1 + r^{-1}\Big(\log \frac{1+e^{-2r}}{2}\Big)\Big)\right|}{\log r},$$

il vient que

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \Big(1 + \frac{\log\Big(1 + r^{-1}\Big(\log \frac{1+e^{-2r}}{2}\Big)\Big)}{\log r}\Big) = 1,$$

Définition 1.2.3 ***(Fonction méromorphe)*** *Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.*

Remarque 1.2.2 *Toute fonction méromorphe peut s'écrire comme le rapport de deux fonctions entières (dont celle du dénominateur n'est pas identiquement nulle) ; les pôles de la fonction correspondent aux zéros du dénominateur.*

Des exemples de fonctions méromorphes sont :

Exemple 1.2.3 *Toutes les fonctions rationnelles comme* $\frac{z^3-2z+1}{z^5+3z-1}$.

Exemple 1.2.4 *les fonctions* $\frac{e^z}{z}, \tan(z), \frac{\sin(z)}{(z-1)^2}$ *ou même la fonction gamma d'Euler et la fonction zêta de Riemann.*

Des exemples de fonctions non méromorphes sont :

Exemple 1.2.5 *Toutes les fonctions algébriques (non rationnelles) (ex. :* $\sqrt{z}$*) et plus généralement toute fonction présentant un point de branchement algébrique ;*

Exemple 1.2.6 *Toutes les fonctions ayant un point de branchement logarithmique (ex. :* $\log(z)$*) ;*

CHAPITRE 2

LA THÉORIE DE NEVANLINNA

Dans ce chapitre, on va exposer les outils nécessaires de la théorie de Nevanlinna , et donner la fonction caractéristique de Nevanlinna .ensuite, la manière d'accès à sa formule aussi on va prouver son premier théorème fondamental.

2.1 La formule de Poisson -Jensen

la formule de Poisson -Jensen est le point départ de la théorie de Nevanlinna .Voici l'énnoncé du théorème :

Théorème 2.1.1 *([3],[4]) : soit $f(z)$une fonction méromorphe dans le disque$|z| \leq R$ $(0 < R < \infty)$,et soit a_j(j=1,2,..,m)et b_k(k=1,2,...,n)respectivement ,les zéros et les pôles de $f(z)$ dans $|z| < R$ chaque zéro et pôle étant comptés selon leur multiplicités .si z=$re^{i\theta}$ est un point dans $|z| < R$ distinct de a_j et b_k alors :*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} \mathrm{d}\phi$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{R(z-a_j)}{(R^2-\bar{a_j}z)}\right|-\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R(z-b_k)}{(R^2-\bar{a_k}z)}\right|$$

Preuve Tout d'abord on considère le cas spécial où $f(\zeta)$ n'a pas des zéros et des pôles dans $|\zeta|\leq R(z=0)$ on a par le théorème de résidus :

$$\log f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\log f(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\log f(Re^{i\phi})\mathrm{d}\phi \tag{2.1.1}$$

prenons les parties réel :

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\mathrm{d}\phi$$

Dans le cas général nous effectuons la transformation conforme en définit $w=\dfrac{R(z-\zeta)}{R^2-\bar{z}\zeta}$ qui transforme $|\zeta|\leq R$ sur $|w|\leq 1$ et $\zeta=z$ à $w=0$.
Inversement, on a $\zeta=\dfrac{R(Rw+z)}{R+\bar{z}w}$ et soit $F(w)=f(\zeta)$ .On a F est une fonction méromorphe dans $|w|\leq 1$et n'a pas des zéros et des pôles alors d'après (2.1.1) :

$$\log F(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\log F(\zeta)\frac{\mathrm{d}w}{w}$$

comme

$$\frac{\mathrm{d}w}{w}=\mathrm{d}(\log w)=\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}d\zeta}{R^2-\bar{z}\zeta}=\frac{R^2-|z|^2}{(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$$

on déduit que :

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\log f(\zeta)\frac{R^2-|z|^2}{(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta \tag{2.1.2}$$

donc , sur $|\zeta|=R$ on a $\zeta=Re^{i\phi}\Longleftrightarrow\mathrm{d}\zeta=iRe^{i\phi}\mathrm{d}\phi$ et :

$$\begin{aligned}(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z) &= (R^2-Rre^{i(\phi-\theta)})(Re^{i\phi}-re^{i\theta})\\ &= Re^{i\phi}(R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2)\end{aligned}$$

remplaçons cette quantités dans (2.1.2) et prenons les parties réel on obtient :

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi$$

Dans le cas ou $f(z)$ a un nombre finie de zéros (pôles) on peux traité de la même façon.[3] finalement ,le cas ou $f(z)$ a des zéros a_j et des pôles b_k on pose :

$$g(\zeta) = f(\zeta)\frac{\prod_{k=1}^{m}\frac{R(\zeta-b_k)}{(R^2-\bar{b_k}\zeta)}}{\prod_{j=1}^{n}\frac{R(\zeta-a_j)}{(R^2-\bar{a_j}\zeta)}} \tag{2.1.3}$$

alors $g(\zeta)$ est une fonction méromorphe et n'a pas de zéro et de pôle dans $|\zeta| < R$ selon les résultat précédent on a :

$$\log|g(\zeta)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(Re^{i\phi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi \tag{2.1.4}$$

de(2.1.3) et (2.1.4) on a :

$$\log|f(\zeta)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(Re^{i\phi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{R(\zeta-a_j)}{(R^2-\bar{a_j}\zeta)}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R(\zeta-b_k)}{(R^2-\bar{b_k}\zeta)}\right| \tag{2.1.5}$$

pour $|\zeta| = R$ et donc a partir (2.1.3) il s'ensuit que $\log|g(\zeta)| = \log|f(\zeta)|$ donc avec (2.1.5)

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{R(z-a_j)}{(R^2-\bar{a_j}z)}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R(z-b_k)}{(R^2-\bar{b_k}z)}\right|$$

ce qui preuve le théorème de Poisson Jensen.

2.1.1 Formule de Poisson

Théorème 2.1.2 *[?] : Soit f une fonction holomorphe dans $|z| \leq R$,si $f(z)$ n'ayant ni zéro ni pôle dans $|z| < R$ alors pour tout point z avec $|z| = r < R$:*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi$$

Cette formule s'appelle la formule de Poisson

2.1.2 Formule de Jensen

Théorème 2.1.3 *([3],[4]) : Soit $f(z)$une fonction méromorphe dans le disque$|z| \leq R$, et soit a_j(j=1,2,..,m)(respectivement b_k(k=1,2,...,n))ses zéros (respectivement ses pôles) $f(z)$ dans $|z| \leq R$ chacun étant compté avec son ordre de multiplicité si $f(0) \neq 0, \infty$ pour $z = 0$ alors*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\phi})|\mathrm{d}\phi - \sum_{j=1}^{m}\frac{R}{|a_j|} + \sum_{k=1}^{n}\frac{R}{|b_k|} \tag{2.1.6}$$

cette formule s'appelle la formule de Jensen

si $f(0) = 0, \infty$ alors avec le développement de Laurent de f à l'origine

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} C_k Z^k \qquad C_m \neq 0 \;\; m \in \mathbb{Z}$$

alors on pose

$$g(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta)(\dfrac{R}{\zeta})^m & \zeta \neq 0 \\ C_m R^m & \zeta = 0 \end{cases}$$

Il est clair que $g$est méromorphe dans $|\zeta| \leq R$ et que $g(0) \neq 0, \infty$ et elle a les mêmes pôles et zéros de f,maintenant on applique la formule de Jensen on obtient :

$$\log|C_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})|d\phi + \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{a_j}{R}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{b_k}{R}\right| - m\log R \tag{2.1.7}$$

(2.1.7) *c'est la forme générale de Jensen*

2.2 La fonction caractéristique de Nevanlinna

2.2.1 La fonction $\log^+$ et quelques propriétés

Définition 2.2.1 *([3],[4]) :pour tout réel $x \geq 0$, on définie*

$$\log^+(x) = max\{\log x, 0\} = \begin{cases} \log x & si \;\; x > 1 \\ 0 & si \;\; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lemme 2.2.1 *on a les propriétés suivant :*

1. $\log x \leq \log^+ x$
2. $\log^+ x \leq \log^+ y$ *pour* $x \leq y$
3. $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$
4. $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$
5. $\log^+(\prod_{k=1}^n x_k) \leq \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$
6. $\log^+(\sum_{k=1}^n \log^+ x_k) \leq \log n + \log^+ x_k$

Preuve

1- vraie car $\log^+$ est positive .

2- Comme $\log$ est un fonction croissante alors $\log^+$ aussi croissante .

3 - on a :

$$\begin{aligned} \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} &= max\{\log x, 0\} - max\{\log \frac{1}{x}, 0\} \\ &= max\{\log x, 0\} - max\{-\log x, 0\} \\ &= max\{\log x, 0\} + min\{logx, 0\} \\ &= \log x \end{aligned}$$

4 - on a :

$$\begin{aligned} \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} &= max\{\log x, 0\} + max\{\log \frac{1}{x}, 0\} \\ &= max\{\log x, 0\} + max\{-\log x, 0\} \\ &= max\{\log x, 0\} - min\{\log x, 0\} \\ &= |\log x| \end{aligned}$$

5 - Si $(\prod_{k=1}^{n} x_k) \leq 1$ alors l'inégalité est évidente

supposons que $\prod_{k=1}^{n} x_k > 1$ Alors :

$$\begin{aligned} log^+(\prod_{k=1}^{n} x_k) &= \log(\prod_{k=1}^{n} x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \log x_k \end{aligned}$$

6 - D'apres (2) et (5) on a :

$$\begin{aligned} \log^+(\sum_{k=1}^{n} x_k) &\leq \log^+(n \max_{1\leq k\leq n} x_k) \\ &\leq \log n + \log^+ \max_{1\leq k\leq n} x_k \\ &\leq \log n + \sum_{k=1}^{n} \log^+ x_k \end{aligned}$$

2.2.2 La fonction a-points N(r,f)

Notation : Pour f une fonction méromorphe sur $|z| \leq r$. Pour tous nombre complexe a, On note par $n(t, f)$ le nombre de pôles de la fonction $f(z)$ dans $|z| \leq t$, $(0 < t < r)$, et par $n(t, \frac{1}{f-a})$ ou $n(t, a)$ le nombre de racine de l'équation $f(z) = a$ dans $|z| \leq t$.Chaque racine et chaque pôle étant compte avec son ordre de multiplicité.

Définition 2.2.2 *([3],[4],[2]) : Soit f une fonction méromorphe sur $|z| \leq r$ .on définie la fonction a-point de f par :*

$$\begin{cases} N(r, \frac{1}{f-a}) = N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t,a) - n(0,a)}{t}\, \mathrm{d}t + n(0, a) \log r & si\ \ a \neq \infty \\ et \\ N(r, f) = N(r, \infty) = \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t}\, \mathrm{d}t + n(0, f) \log r & si\ \ a = \infty \end{cases}$$

2.2.3 La fonction de proximité m(r,f)

Définition 2.2.3 *([3],[4],[2]) : Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors On définie la fonction de proximité de f par :*

$$\begin{cases} m(r,a) = m(r,\dfrac{1}{f-a}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\phi})-a|}\,\mathrm{d}\phi & si\ \ a \neq \infty \\ et & \\ m(r,\infty) = m(r,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})|\,\mathrm{d}\phi & si\ \ a = \infty \end{cases}$$

Maintenant en peux reformuler la formule de Jensen (2.1.6).Tout d'abord , on applique la troisième propriété de $\log^+$ on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\phi})|\mathrm{d}\phi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\phi})|\mathrm{d}\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\frac{1}{|f(re^{i\phi})|}\mathrm{d}\phi \\ &= m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}) \end{aligned}$$

Ensuite,soit $|b_k| = r_k$ nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \log\frac{r}{r_k} &= \int_0^r \log\frac{r}{t}\mathrm{d}[n(t,f)-n(0,f)] \\ &= [n(t,f)-n(0,f)]\log\frac{r}{t}|_0^r + \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\mathrm{d}t \\ &= N(r,f) \end{aligned}$$

On fait le même chose avec $\sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|a_j|}$ on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|a_j|} &= \int_0^R \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} \mathrm{d}t \\ &= N(r, \frac{1}{f}) \end{aligned}$$

avec ces notions et de(2.1.6) et (2.1.7),(avec $m = n(0, \frac{1}{f}) - n(0, f)$)on obtient :

$$\log |f(0)| = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) - N(r, \frac{1}{f}) + N(r, f) \tag{2.2.1}$$

et

$$\log |C_m| = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) - N(r, \frac{1}{f}) + N(r, f) \tag{2.2.2}$$

2.2.4 La fonction caractéristique de Nevanlinna

Définition 2.2.4 *([3],[4],[2]) : Soit f une fonction méromorphe et a un nombre complexe tel que $a = \infty$.La fonction caractéristique de Nevanlinna est définie par :*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.1 *: par l'utilisation de* (2.2.3)*dans* (2.2.1) *et* (2.2.2) *la formule de Jensen se réduit à :*

$$\log |f(0)| = T(r, f) - T(r, \frac{1}{f})$$

et

$$\log |C_m| = T(r, f) - T(r, \frac{1}{f})$$

Le lemme suivant résumé les propriétés principales de la fonction caractéristique de Nevanlinna :

Lemme 2.2.2 *[3] :Soit $f_1, f_2, f_3, ..., f_k$des fonction méromorphes sur $|z| < R$ .alors pour $r \in]0, R[$:*

a - $m(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) \leq \log n + \sum_{k=1}^{n} m(r, f_k)$

b - $m(r, \prod_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum_{k=1}^{n} m(r, f_k)$

c - $N(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum_{k=1}^{n} N(r, f_k)$

d - $N(r, \prod_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum_{k=1}^{n} N(r, f_k)$

e - $T(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) \leq \log n + \sum_{k=1}^{n} T(r, f_k)$

f - $T(r, \prod_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum_{k=1}^{n} T(r, f_k)$

g- $T(r, f^n) = nT(r, f) \quad (n \in N)$

Preuve

a - On a

$$\begin{aligned} m(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(re^{i\phi}) \right| \mathrm{d}\phi \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(re^{i\phi}) \right| \mathrm{d}\phi + \log n \\ &= \sum_{k=1}^{n} m(r, f_k) + \log n \end{aligned}$$

b - On a :

$$\begin{aligned} m(r, \prod_{k=1}^{n} f_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \prod_{k=1}^{n} f_k(re^{i\phi}) \right| \mathrm{d}\phi \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_k(re^{i\phi})| \mathrm{d}\phi \\ &= \sum_{k=1}^{n} m(r, f_k) \end{aligned}$$

e - On a :

Si z_0 est un pôle de degré λ_k pour la fonction f_k,alors il est de degré égale au plus $\max\limits_{1\leq k\leq n}\lambda_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$ pour la fonction f_k. Alors :

$$N(r,\sum_{k=1}^{n}f_k)\leq\sum_{k=1}^{n}N(r,f_k)$$

et

$$m(r,\sum_{k=1}^{n}f_k)\leq\log n+\sum_{k=1}^{n}m(r,f_k)$$

d'où :

$$T(r,\sum_{k=1}^{n}f_k)\leq\log n+\sum_{k=1}^{n}T(r,f_k)$$

f - On a :

si z_0 est un pôle de degré λ_k pour la fonction f_k , alors z_0 est un pôle de la fonction $\prod\limits_{k=1}^{n}f_k$ de degré égale au plus $\max\limits_{1\leq k\leq n}\lambda_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$ alors :

$$N(r,\prod_{k=1}^{n}f_k)\leq\sum_{k=1}^{n}N(r,f_k)$$

et

$$m(r,\prod_{k=1}^{n}f_k)\leq\sum_{k=1}^{n}m(r,f_k)$$

donc

$$T(r,\prod_{k=1}^{n}f_k)\leq\sum_{k=1}^{n}T(r,f_k)$$

g- $T(r,f^n)=nT(r,f)\quad(n\in N)$

On a $|f^n|=|f|^n>1\Longleftrightarrow|f|>1$ alors Si $|f|>1$

$$\begin{aligned} T(r,f^n) &= m(r,f^n)+N(r,f^n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f^n(re^{i\phi})|\mathrm{d}\phi + nN(r,f) \\ &= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\phi})|\mathrm{d}\phi + nN(r,f) \\ &= n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\phi})|\mathrm{d}\phi + N(r,f)\right) \\ &= n\left(m(r,f)+N(r,f)\right) \\ &= nT(r,f) \end{aligned}$$

Si $|f|\leq 1$, alors

$$\begin{aligned} T(r,f^n) &= m(r,f^n)+N(r,f^n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\phi})|\mathrm{d}\phi + nN(r,f) \\ &= 0+nN(r,f) = n\left(m(r,f)+N(r,f)\right) \\ &= nT(r,f) \end{aligned}$$

2.3 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 2.3.1 *([3],[4],[2]) :Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante dans $|z|<R$; $(0<R<\infty)$ alors :*

$$\forall a\in\mathbb{C}\,,\ \forall r\in[0,R[:\ T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f)-\log|C_m|+\epsilon(r,a)$$

ou $|\epsilon(r,a)|\leq\log^+|a|+\log 2$, et C_m est le premier coefficient non nul du développement en série de Laurent de la fonction $z\longrightarrow f(z)-a$

Avant de démontrer le premier théorème fondamental de R.Nevanlinna on a besoin d'utiliser les la proposition suivant :

Proposition 2.3.1 *:Soit f une fonction meromorphe avec le développement de Laurent*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{\infty} C_j z^j \quad C_m \neq 0$$

Alors

$$\log|C_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\phi})|\,\mathrm{d}\phi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f})$$

Preuve

1- dans le cas particulière Si $a = 0$ d'après la proposition $(2.3.1)$ et le lemme $(2.2.1)$ (3) on a :

$$\begin{aligned}
\log|C_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\phi})|\,\mathrm{d}\phi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\phi})|\,\mathrm{d}\phi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\phi})|\,\mathrm{d}\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\frac{1}{|f(re^{i\phi})|}\,\mathrm{d}\phi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) \\
&= m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}) + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) \\
&= T(r,f) - T(r,\frac{1}{f})
\end{aligned}$$

Donc

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) - \log C_m, \quad \epsilon(r,0) \equiv 0 \tag{2.3.1}$$

2- Montrons le théorème dans le cas général $a \neq 0$.on pose $h(z) = f(z) - a$ alors

$$N(r,h) = N(r,f)$$

$$m(r,h) = m(r,\frac{1}{f-a}))$$

. on a

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2$$

et

$$\log^+|f| = \log^+|f+a-a| \leq \log^+|f-a| + \log^+|a| + \log 2$$

en intégrant les deux inégalités on aura :

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+ |a| + \log 2$$

et

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+ |a| + \log 2$$

posons :

$$\epsilon(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$$

par conséquence :

$$(\log^+ |a| + \log 2) \leq \epsilon(r,a) \leq \log^+ |a| + \log 2 \Longleftrightarrow |\epsilon(r,a)| \leq \log^+ |a| + \log 2$$

On applique maintenant (2.3.1) pour h on obtient :

$$\begin{aligned} T(r,\frac{1}{h}) &= T(r,h) - \log |C_m| \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \log |C_m| \\ &= m(r,f) + N(r,f) + \epsilon(r,a) + \log |C_m| \\ &= T(r,f) - \log |C_m| + \epsilon(r,a) \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1 *Le premier théorème fondamental de Nevanlinna peut aussi être formulé sous la forme*

$$T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f) + O(1)$$

où O (1) reste bornée quand $r \longrightarrow \infty$

2.4 Exemples

Exemple 2.4.1 *Soit* $f(z) = e^z$.

1- *Si* $a = 0, \infty$, *la fonction* f *n'a pas des pôles alors* $N(r,f) = 0$ *par conséquence* $T(r,f) = m(r,f)$

on a :

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{re^{i\phi}}\right| \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{r\cos\phi}\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\phi\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

donc

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}$$

2- *Si $a \neq 0, \infty$, et si z_0 est un racine de l'équation $f(z) = a$ et puisque f est périodique ,les autres racine sont écrit sous la forme $z_0 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ et comme le nombre de racines de $f(z) = a$ dans $|z| \leq t$ est :*

$$n(t,a) = \frac{t}{\pi} + \mathcal{O}(1) \Longleftrightarrow N(t,a) = \frac{t}{\pi} + \mathcal{O}(\log r)$$

aussi après les calcules[4] on nous obtenons : $m(r,a) = \mathcal{O}(1)$

Exemple 2.4.2 *Soit f une fonction rationnelle tel que :*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_0} \quad a_n, b_m \neq 0$$

et P , Q deux polynômes premiers entre eux.

i- *Si $\underline{\boldsymbol{m \geq n}}$: on a $\lim\limits_{|z|\longrightarrow\infty} f(z)$ est finie alors il existe un nombre réel positif r_0 tel que :$n(r,f) = m \ \ \forall r > r_0$ donc :*

$$\begin{aligned} N(r,f) &= \int_0^{r_0} \frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\mathrm{d}t + \int_{r_0}^{r} \frac{m-n(0,\infty)}{t}\mathrm{d}t + n(0,\infty)\log r \\ &= (m-n(0,\infty))(\log r - \log r_0) + n(0,\infty)\log r + \mathcal{O}(1) \\ &= m\log r - m\log r_0 + n(0,\infty)\log r_0 + \mathcal{O}(1) \\ &= m\log r + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Notons que pour un polynômeP$(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ *avec* $a_n \neq 0$.*alors pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $r_0 > 0$ *tel que* $\forall r = |z| > r_0$ *nous avons :*

$$(1-\epsilon)|a_n|r^n \leq |P(z)| \leq (1+\epsilon)|a_n|r^n$$

Donc pour $r \geq r_0$ *nous pouvons écrire :*$|P(z)| = |a_n|r^n(1+\mathcal{O}(1))$
et $|Q(z)| = |b_m|r^m(1+\mathcal{O}(1))$ *et donc*

$$\log|f| = \log|a_n| + n\log r + log|1+\mathcal{O}(1) - \log|b_m| - m\log r - log|1+\mathcal{O}(1)$$

et comme $m \geq n$ *on trouve* $\log^+|f| = \mathcal{O}(1)$ *donc* $m(r,f) = \mathcal{O}(1)$ *en peux maintenant calculer la fonction caractéristique de f qui est clairement :*

$$T(r,f) = m\log r + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\log r)$$

ii- Si $\underline{\boldsymbol{m < n}}$ *: dans ce cas nous peux pas prouver la croissance de* f *la même manière mais par le premier théorème de Nevanlinna en s ensuis :*

$$T(r,f) = n\log r + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\log r)$$

comme un raisonnement général, pour une fonction rationnelle f nous avons $T(r,f) = \mathcal{O}(\log r)$ *: En outre. L'inverse de cette assertion est vrai Autrement dit, si f est une fonction méromorphe avec*$T(r,f) = \mathcal{O}(\log r)$ *alors f est une fonction rationnelle.*

Exemple 2.4.3 *Soit* f *une fonction méromorphe non constante on considère la fonction*

suivant :

$$g = \frac{af+b}{cf+d}$$

ou a,b,c, et d sont des constantes avec $ad - bc \neq 0$

1- si $c = 0$ *alors :*

$$\begin{aligned} T(r,g) = T(r,\frac{af+b}{d}) &= T(r,\frac{a}{d}f+\frac{b}{d}) \\ &\leq T(r,\frac{a}{d}) + T(r,f) + T(r,\frac{a}{d}) + \log 2 \\ &\leq T(r,f) + \log^+\left|\frac{a}{d}\right| + \log^+\left|\frac{b}{d}\right| + \log 2 \\ &= T(r,f) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

2- Si $c \neq 0$ *on définit :*

$$\begin{aligned} g_1 &= f + \frac{d}{c} \\ g_2 &= cg_1 \\ g_3 &= \frac{1}{g_2} \\ g_4 &= \frac{(bc-ad)}{c} g_3 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T(r,g_4) + \mathrm{O}(1) \\ &= T(r,g_3) + \mathrm{O}(1) \\ &= T(r,g_2) + \mathrm{O}(1) \\ &= T(r,g_1) + \mathrm{O}(1) \\ &= T(r,f) + \mathrm{O}(1) \end{aligned}$$

plus précisément ,on applique le cinquième et sixième propriétés de la fonction caracté-

ristique de Nevanlinna :

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &\leq T(r,\frac{a}{c}) + T(r,\frac{bc-ad}{c^2}) + T(r,\frac{1}{f+\frac{d}{c}}) + \log 2 \\ &= T(r,f+\frac{d}{c}) + \mathcal{O}(1) \\ &\leq T(r,f) + \log^+ \frac{d}{c} + \mathcal{O}(1) \\ &\leq T(r,f) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

QUELQUES COMPLÉMENTS

Dans ce chapitre , on donne L'identité de Henri Cartan qui est un représentation alternative de $T(r,f)$ et l ordre de croissance avec la clarification de relation entre $M(r,f)$ et $T(r,f)$.

3.1 L'identité de Henri Cartan

Théorème 3.1.1 *([3],[4]) :Si f une fonction méromorphe dans* $|z| < R$ *tel que* $f(0) \neq \infty$ *alors :*

$$\forall r \in [0,R[, T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, \frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta + \log^+|f(0)| \tag{3.1.1}$$

Pour démontrer l'identité de Henri Cartan , on a besoin d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *([3],[4]) :*

$$\forall\ a \in \mathbb{C} : \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\phi}-a|d\phi = \log^+|a| \tag{3.1.2}$$

Preuve de lemme : On suppose que $a \neq 0$

i- pour **|a|** ≥ 1 ; la fonction $z-a$ n'ayant ni zéros ni pôles dans $|z| \leq 1$; on applique la

formule de Jensen sur $f(z) = z - a$ avec $r = 1$ on trouve :

$$log|0 - a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\phi} - a|d\phi = \log|a|$$

ii- Pour **|a|** < 1 la fonction $z - a$ ayant un seul zéro et n'a pas des pôles alors :

$$\begin{aligned}\log|a| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\phi} - a|d\phi - \log\frac{1}{|a|} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\phi} - a|d\phi - \log 1 + \log|a|\end{aligned}$$

ce equivalent que : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log|e^{i\phi} - a|d\phi = 0$

d ou

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\phi} - a|d\phi = \begin{cases} \log|a| & |a| \geq 1 \\ 0 & |a| < 1 \end{cases} = \log^+|a|$$

Preuve On applique la formule de Jensen avec $r = 1$ a $f(z) - e^{i\theta}$ on trouve :

$$\log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}\right| d\phi - N(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}) + N(r, f - e^{i\theta})$$

on intègre par rapport à θ de 0 à 2π on obtient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}\right| d\phi\right] d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}})d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, f - e^{i\theta})d\theta$$

comme f et $f - e^{i\theta}$ ayant les mêmes pôles alors $N(R, f) = N(R, f - e^{i\theta})$, et comme l'intégrale double est convergente alors on applique le théorème de Fubini pour montre que les intégrales de intégrale double est commutent alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\phi})-e^{i\theta}\right|d\phi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,f)d\theta$$

utilisons le lemme précédent avec $a=f(re^{i\phi})$ on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\phi})\right|d\phi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,f)d\theta\\ &= m(r,f)+N(r,f)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta\\ &= T(r,f)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta\end{aligned}$$

d'autre part on a : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|d\theta=\log^+|f(0)|$
ce qui achève la démonstration

Corollaire 3.1.1 *:La fonction caractéristique* $T(r,f)$*est convexe de* $\log r$ *et par suite croissante de r*

Comme $N(r,e^{i\theta})$ est croissante de r et par l'identité de Cartan obtient que$T(r,f)$ est une fonction croissante de r.Encore de l'identité de Cartan nous avons :

$$\frac{dT(r,f)}{d\log r}=\frac{d}{d\log r}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r n(t,e^{i\theta})\frac{dt}{t}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n(t,e^{i\theta})d\theta$$

Comme le côté droit est positif et croissante avec r, il s'ensuit que T (r,f) est une fonction convexe de $\log r$

Corollaire 3.1.2 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}m(t,e^{i\theta})\leq\log 2$

Preuve D'après le premier théorème fondamental de Nevanlinna, nous avons :

$$T(r,f) = m(r,e^{i\theta}) + N(r,e^{i\theta}) + \log^+ \left|f(0) - e^{i\theta}\right| + \epsilon(r,e^{i\theta})$$

ou $\left|\epsilon(r,e^{i\theta})\right| \leq \log 2$. On fait L'intégration des deux côtés par rapport à θ de 0 à 2π :

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(0) - e^{i\theta}\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon(r,e^{i\theta})d\theta$$

de plus, en utilisant l'identité de Cartan (3.1.1) on obtient :

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta + T(r,f) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon(r,e^{i\theta})d\theta$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon(r,e^{i\theta})d\theta \\ &\leq \log 2 \end{aligned}$$

Ce qu'il faut démontrer

3.2 L'ordre de croissance

Définition 3.2.1 *[2] : Soit f une fonction meromorphe ,on définit la fonction maximum par :*

$$M(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$$

Définition 3.2.2 *([3],[4]) :Soit f une fonction entière , alors L'ordre de croissance de la fonction f est définie par :*

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

Définition 3.2.3 *([3],[4]) : Soit f une fonction méromorphe dans un plan complexe , alors*

L'ordre de croissance de la fonction f est définie par :

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}$$

Exemple 3.2.1 *On calcule l'ordre de la fonction $f(z) = e^z$; d'après l'exemple $(2,4,1)$ on a $T(r,f) = \frac{r}{\pi}$*

$$\begin{aligned}\rho(e^z) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \frac{r}{\pi}}{\log r} \\ &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log r - \log \pi}{\log r} \\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 *On dit que f est d'ordre finie si $\rho(f) \leq \infty$, équivalent à $T(r,f) = \mathcal{O}(1)$*

Proposition 3.2.1 *:Soit f et g deux fonctions méromorphes .Alors :*

a- $\rho(f+g) \leq max\{\rho(f), \rho(g)\}$

b- $\rho(fg) \leq max\{\rho(f), \rho(g)\}$

De plus si $\rho(g) < \rho(f)$ alors

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f)$$

Preuve Nous considérons que la somme $h = f + g$, les autres cas sont analogues. D'après le lemme 2.2.2, nous avons

$$T(r,h) \leq T(r,f) + T(r,g) + \log 2 \leq 2\max\left(T(r,f), T(r,g)\right) + \log 2$$

et donc

$$\log T(r,h) \leq \log^+\left(T(r,f), T(r,g)+\right) + \mathcal{O}(1)$$

ce qui implique que $\rho(h) \leq \max\left(\rho(f), \rho(g)\right)$. Supposons que $\rho(f) \neq \rho(g)$, disons $\rho(f) < \rho(g)$. Alors

$$\rho(g) = \rho(h-f) \leq \max\left(\rho(h), \rho(f)\right) \leq \rho(h)$$

puisque $\rho(f) < \rho(g)$. Donc $\rho(h) = \rho(g) = \max\left(\rho(f), \rho(g)\right)$.

Exemple 3.2.2 *Soit* $f(z)=z+3+\dfrac{e^{z^2}}{z+1}$. *on a* $\rho(z+3+\dfrac{e^{z^2}}{z+1})=\rho(\dfrac{e^{z^2}}{z+1})=\rho(e^{z^2})=2$

3.3 La relation entre $T(r,f)$ et $M(r,f)$

Proposition 3.3.1 *:([3],[4],[2]) Si* f *est une fonction meromorphe dans*$|z|\leq R$ *et* $M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|\leq r\}$ *alors :*

$$\forall r\in[0,R[:\quad T(r,f)\leq\log^+M(r,f)\leq\frac{R+r}{R-r}T(R,f)$$

Preuve comme f est holomorphe dans$|z|\leq R$,alors pour $r\in[0,R[$ on a :

$$\begin{aligned}T(r,f) &= m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta}\right|\mathrm{d}\theta\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+M(r,f)\mathrm{d}\theta\\ &= \log^+M(r,f)\end{aligned}$$

pour démontre le deuxième côté de l'inégalité on distingue deux cas :

(i) $M(r,f)<1$ dans ce cas $\log^+M(r,f)=0$ et $T(R,f)\dfrac{R+r}{R-r}$ est positive donc l'inégalité est satisfaite

(ii) $M(r,f)\geq 1$ implique que $\log^+M(r,f)=\log M(r,f)$ Puisque f n'a pas des pôles et $\left|\dfrac{R(z-a_k)}{(R^2-\bar{a_k}z)}\right|<1$, pour $z=re^{i\theta}$ la formule de poisson Jensen donne par :

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi$$

il est clair que

$$\log|f|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi\leq\log^+|f|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi$$

Donc

$$\begin{aligned}\log|f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\log^+|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\phi\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R+r}{R-r}\log^+|f(Re^{i\theta})|\\ &\leq \frac{R+r}{R-r}m(r,f)=\frac{R+r}{R-r}T(r,f)\end{aligned}$$

donc '

$\max_{|z|=r}\log|f(z)|\leq\frac{R+r}{R-r}T(r,f)$ par conséquence

$$\log^+ M(r,f)\leq\frac{R+r}{R-r}T(r,f)$$

Remarque 3.3.1 *:Pour une fonction de ordre infini ,* $T(r,f)$ *et* $\log^+ M(r,f)$ *n'ayant pas le même ordre nécessairement.*

CONCLUSION

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équation différentielles complexes notamment la croissance et l'oscillation des solution. En effet depuis 1925, l'année où R.Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans le même thématique et plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence, en particulier avec la théorie analytique des équations différentielle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Genet.J,Pupion.G** ; analyse Moderne 2,fonctions d'une variable complexe intégration calcul différentiel équations aux dérivées partielles, Vuibert, 1981.

[2] **Laine I** ; Nevanlinna theory and complex differential equations, Walter de Gruyter Berlin, New York, 1993.

[3] **Yang Lo** ; value distribution theory ; Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[4] **W.K.Hayman** ; Meromorphic functions ;Oxford Mathematical Monographs Claren- don Press, Oxford, 1964.