**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**



**Université Dr. Yahia Farès de Médéa**
**Faculté des Sciences**



**Département de Mathématiques et de l'Informatique**

**Projet de fin d'étude**
**Présenté en vue de l'obtention du**

**DIPLÔME DE MASTER EN MATHEMATIQUES**

**Spécialité : Recherche Opérationnelle**

Thème

# Subdivision et nombre b-chromatique

**Par :**

- **LAKEHALI Kawthar**
- **MAZARI Youssra**

**Devant le jury composé de :**

| | | |
|---|---|---|
| M. ZAMIME | Maître de Conférences, UYFM | Promoteur |
| L. OULDRABAH | Maître de Conférences, UYFM | Examinateur |
| M. BOUZEFRANE | Maître Assistant, UYFM | Examinateur |

Année universitaire : 2020-2021

# *Résumé*

Dans ce mémoire on s'intéresse principalement à la détermination du nombre de subdivision b-chromatique de certains graphes particuliers.

Une coloration propre des sommets d'un graphe G = (V, E) consiste à affecter une couleur à chaque sommet de G telle que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Le nombre minimum de couleurs d'une coloration propre des sommets de G est le nombre chromatique, noté $\chi$(G). Une coloration de G avec $k$ couleurs peut être vue comme une partition des sommets de G en $k$ stables (ou $k$ classes de couleurs). Une b-coloration d'un graphe G est une coloration propre telle que chaque classe de couleur contient au moins un sommet ayant au moins un voisin dans chaque classe de couleurs, un tel sommet est appelé b-dominant ou b-sommet. Le nombre b-chromatique de G, noté $b$(G), est le plus grand entier $k$ tel que G admet une b-coloration avec $k$ couleurs. Une subdivision S(G) d'un graphe G est un graphe obtenu en remplaçant au mois une arête $uv$ de G par un nouveau sommet $w$ et en reliant $w$ a $u$ et $v$. Le nombre de subdivision b-chromatique , noté $sd_b$(G), est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut subdiviser pour faire un changement dans le nombre b-chromatique de G.

Nous présentons dans ce mémoire quelques résultants existants sur le nombre de subdivision b-chromatique. Ensuite, nous déterminons les valeurs de nombre de subdivision b-chromatique de quelques graphes particuliers.

# *Abstract*

In this report we are mainly interested in the determination of the subdivision b-chromatic of some particular graphs.

A proper coloring of the vertices of a graph G = (V, E) consists in assigning a color at each vertex of G such that two adjacent vertices have different colors. The minimum number of colors of a proper coloring of the vertices of G is the number chromatic, noted $\chi$(G). A coloring of G with $k$ colors can be seen as a partition of the vertices of G into k stable (or k color classes). A b-coloring of a graph G is a proper coloring such that each color class contains at least a vertex having at least one neighbor in each color class, such a vertex is called b-dominant or b-top. The b-chromatic number of G, noted $b$(G), is the most large integer k such that G admits a b-coloring with k colors. A subdivision S(G) of a graph G is a graph obtained by replacing at least one edge $uv$ of G by a new one vertex w and connecting $w$ a u and $v$. The number of b-chromatic subdivision, noted $sd_b$(G), is the minimum number of edges that must be subdivided to make a change in the b-chromatic number of G.

We present in this report some existing results on the number of b-chromatic subdivision. Next, we determine the values of subdivision number b-chromatic of some particular graphs.

# *Remerciements*

Nous tenons à remercie en premier lieu, Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nous remerciements les plus vifs à, Mademoiselle BENDALI-BRAHAM AMEL pour son aide et ses conseils.

Nous voudrons sincèrement exprimer nos plus vifs remerciements à notre promoteur Monsieur ZAMIME MOHAMED, Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'intéressant sujet qu'il nous a proposé. Sa disponibilité et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. On lui doit toute notre reconnaissance.

Nos remerciements vont également à Monsieur OULDRABAH LYES, Maître de conférences à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, et à Monsieur BOUZEFRANE MOHAMED, Maître de conférences à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Je tiens également a exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. Yahia Farès de Médéa.

Enfin, il est important pour nous de remercier nos parents, d'avoir fait de leur mieux pour que nous puisons accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de nous encourager. Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous les membres de la famille surtout notre sœurs et frères, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à notre formation.

# *Dédicace*

**J***e dédie ce mémoire*

**A** *mes chers parents, ma mère et mon père*

**P***our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

**A** *mes frères Djilali, Youcef et a mes sœurs Samira, Hanane et Assia*

**A** *leurs maris et leurs enfants*

**A** *ma belle-famille*

**A** *mes amies*

**A** *ma chère binôme* ***Kawthar*** *et sa famille*

**S***ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

**YOUSSRA**

# *Dédicace*

**J***e dédie ce mémoire*

**A** *mes chers parents, ma mère et mon père*

**P***our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

**A** *mes frères Oussama, Mohamed Anis, Taha Houcine et a ma sœur Mounira*

**A** *ma grande mère*

**A** *mon mari Billel et ma belle-famille*

**A** *mes amies*

**A** *ma chère binôme* ***Youssra*** *et sa famille*

**S***ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

**KAWTHAR**

# Table des matières

**Introduction** **8**

**1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes** **9**

1.1 Définitions et notations . . . . . 9

1.1.1 Graphes . . . . . 9

1.1.2 Sous graphe et graphes partiel . . . . . 10

1.1.3 Voisinages . . . . . 10

1.1.4 Degré d'un sommet . . . . . 11

1.1.5 Ensemble minimal et maximal / minimum et maximum . . . . . 11

1.1.6 Chaînes et cycles . . . . . 11

1.1.7 Graphes particuliers . . . . . 12

1.1.8 Graphe milieu, graphe total et graphe central . . . . . 17

1.1.9 Quelques invariants de graphes . . . . . 19

1.1.10 Quelques opérations sur les graphes . . . . . 20

1.2 Complexité algorithmique . . . . . 21

1.2.1 Problème de décision . . . . . 22

1.2.2 Classes de complexité . . . . . 22

**2 Coloration dans les graphes** **24**

2.1 Coloration propre et nombre chromatique . . . . . 24

2.2 Quelques bornes sur le nombre chromatique . . . . . 25

2.3 a-coloration et nombre a-chromatique . . . . . 26

2.4 Coloration de Grundy . . . . . 27

2.5 b-coloration et nombre b-chromatique . . . . . 27

2.6 Le m-degré et m-degré modifié d'un graphe . . . . . 28

2.7 Quelques résultats sur le nombre b-chromatique . . . . . 30

2.7.1 Bornes sur le nombre b-chromatique . . . . . 30

2.8 Valeurs exactes du nombre b-chromatique pour des graphes particuliers . . . . 32

2.8.1 Le nombre b-chromatique des graphes discrets . . . . . 32

2.8.2 Le nombre b-chromatique de $K_n$ et $Cr(K_n)$ . . . . . 32

2.8.3 Le nombre b-chromatique de $K_{n,p}$ et $Cr(K_{n,p})$ . . . . . 32

2.8.4 Le nombre b-chromatique de $F_n$ et $Cr(F_n)$ . . . . . 33

2.8.5 Le nombre b-chromatique de $W_n$, $Cr(W_n)$ et $T(W_n)$ . . . . . 33

2.8.6 Le nombre b-chromatique de $K_{1,n}$, $Cr(K_{1,n})$ et $T(K_{1,n})$ . . . . . 34

2.8.7 Le nombre b-chromatique de $P_n$, $M(P_n)$, $T(P_n)$, $C(P_n)$ et $Cr(P_n)$ . . . . . 34

2.8.8 Le nombre b-chromatique de graphe Splitting de $P_n$ . . . . . 35

2.8.9 Le nombre b-chromatique de $C_n$, $M(C_n)$, $T(C_n)$, $C(C_n)$ et $Cr(C_n)$ . . . . . 35

2.8.10 Le nombre b-chromatique dans les arbres . . . . . 35

2.8.11 Le nombre b-chromatique des graphes réguliers . . . . . 36

2.9 Quelques applications de la b-coloration . . . . . 36

2.10 Quelques résultats existants sur le nombre de subdivision b-chromatique . . . 37

2.10.1 Le nombre de subdivision des graphes simples . . . . . 37

2.10.2 Le nombre de subdivision b-chromatique de la couronne de certains graphes . . . . . 38

**3 La subdivision b-chromatique de quelques graphes particuliers**

**40**

3.1 Quelques définitions . . . . . 40

3.2 Borne pour $b(G_{uv})$ . . . . . 41

3.3 Le nombre de subdivision de $M(K_{1,n})$ . . . . . 42

3.4 Le nombre de subdivision de $T(K_{1,n})$ . . . . . 44

3.5 Le nombre de subdivision de $C(K_{1,n})$ . . . . . 46

3.6 Le nombre de subdivision de $M(P_n)$ . . . . . 46

3.7 Le nombre de subdivision de $T(P_n)$ . . . . . 48

3.8 Le nombre de subdivision de $M(C_n)$ . . . . . 50

3.9 Le nombre de subdivision de $T(C_n)$ . . . . . 51

3.10 Le nombre de subdivision de $W_n$ . . . . . 52

3.11 Le nombre de subdivision du graphe k-parti complet . . . . . 54

3.12 Le nombre de subdivision du graphe de Petersen . . . . . 55

3.13 Le nombre de subdivision du joint de deux graphes . . . . . 56

3.14 Le nombre de subdivision du graphe Splitting de $P_n$ . . . . . 57

**Conclusion** **59**

**Bibliographie** **60**

# Table des figures

1.1 Un graphe G. . . . . 10
1.2 Graphe, sous graphe et graphe partiel. . . . . 10
1.3 Une chaîne $P_7$ et un cycle $C_7$. . . . . 12
1.4 $K_5$ . . . . . 13
1.5 Un graphe discret. . . . . 13
1.6 Un graphe G et son complémentaire. . . . . 13
1.7 Un graphe 3-régulier. . . . . 14
1.8 Le graphe de Petersen $G_{10}$ . . . . . 14
1.9 Un graphe biparti et un graphe biparti complet ($K_{33}$). . . . . 14
1.10 Représentation planaire de $K_4$ . . . . . 15
1.11 Un arbre T. . . . . 15
1.12 Une chenille C(2,1,3). . . . . 15
1.13 Une fôret. . . . . 16
1.14 Un étoile ($K_{1,4}$). . . . . 16
1.15 G est connexe ; H est non connexe avec deux composante connexe. . . . . 17
1.16 $Cr(C_3)$. . . . . 17
1.17 Le graphe milieu de $C_3$. . . . . 18
1.18 Le graphe total de $C_3$. . . . . 18

1.19 Un graphe G et son graphe central. . . . . 19

1.20 $\{a,b\}$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$ $et$ $\{c,e\}$ sont des stables de taille maximal et $\alpha(G) = 2$. . . . . 19

1.21 $M = \{bc, df\}$ $et$ $\beta(G) = 2$. . . . . 20

1.22 $\{a,b,c,f\}$ $c'est\ la\ clique\ maximum\ avec$ $\omega(G) = 4$. . . . . 20

1.23 Exemple de la suppression d'un sommet $v$ dans un graphe. . . . . 20

1.24 Exemple de la suppression d'une arête $uv$ dans un graphe. . . . . 21

1.25 $P_2 \vee C_4$. . . . . 21

2.1 Un graphe G avec $\chi(G) = 3$. . . . . 25

2.2 Un graphe G avec $\chi(G) = 3$. . . . . 28

2.3 Un graphe G avec $m(G) = 2$. . . . . 28

2.4 Exemples de roues. . . . . 33

2.5 La subdivision de $K_{3,3}$. . . . . 38

3.1 Un graphe $C_5$ et $S(C_5)$ en subdivisant trois arêtes $e_1$,$e_2$ et $e_3$ . . . . . 40

3.2 La subdivision de $M(K_{1,1})$. . . . . 43

3.3 La subdivision de $M(K_{1,3})$. . . . . 44

3.4 La subdivision de $T(K_{1,1})$. . . . . 44

3.5 La subdivision de $T(K_{1,2})$. . . . . 45

3.6 La subdivision de $T(K_{1,3})$. . . . . 46

3.7 La subdivision de $M(P_2)$. . . . . 47

3.8 La subdivision de $M(P_3)$. . . . . 47

3.9 La subdivision de $T(P_2)$ . . . . . 48

3.10 La subdivision de $T(P_5)$. . . . . 48

3.11 La subdivision de $T(P_4)$. . . . . 49

3.12 La subdivision de $M(C_5)$. . . . . 51

3.13 La subdivision de $T(C_3)$. . . . . 51

3.14 La subdivision de $T(C_4)$. . . . . 52

3.15 La subdivision de $W_4$ . . . . . 53

3.16 La subdivision de $W_5$. . . . . 53

3.17 La subdivision de $W_6$. . . . . 54

3.18 La subdivision de graphe 3-parti complet. . . . . 55

3.19 La subdivision de P. . . . . 56

3.20 La subdivision de $C_3 \vee P_3$. . . . . 56

3.21 La subdivision de $SP(P_2)$. . . . . 57

3.22 La subdivision de $SP(P_3)$. . . . . 57

3.23 La subdivision de $SP(P_4)$. . . . . 58

# *Introduction*

La recherche opérationnelle est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la recherche opérationnelle s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la recherche opérationnelle a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux du mathématicien suisse *Euler* au siècle $18^{\text{ème}}$, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des ponts de *Konigsberg*, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même point et revenir à son point de départ. Dès le début du $20^{\text{ème}}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de *Konig, Menger, Cayley* puis de *Berge* et *d'Erdös*.

Un des problèmes les plus connus de la théorie des graphes vient de la coloration des graphes, où le but est de déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun sommet n'ait la même couleur que ses voisins. En 1852, le mathématicien anglais *Francis Guthrie* énonça le problème des quatre couleurs par une discussion à son frère, qui demandera à son professeur *Auguste De Morgan* si toute carte peut être coloriée avec quatre couleurs de façon que des pays voisins aient des couleurs différentes. En 1976, le problème des quatre couleurs est devenus le théorème des quatre couleurs puisque *Appel et Hakens*[26], assistés d'un ordinateur, l'ont résolu.

Le problème de la coloration a suscité l'intérêt de grands chercheurs en théorie des graphes. Cet intérêt sans cesse croissant est largement motivé par le fait que beaucoup de problèmes concrets peuvent être modélisés en termes de coloration de graphes comme l'ordonnancement de tâches, l'allocation de fréquences et le problème d'emploi de temps.
La coloration des sommets est certainement le concept le plus ancien et le plus étudié . Il s'agit d'affecter des couleurs (entiers positifs) aux sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne doivent pas avoir la même couleur, une telle coloration est dite propre (classique). Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique, la plupart de ces colorations cherchent à minimiser le nombre de couleurs. Toute fois, il existe d'autre colorations propre de sommets où l'objectif est de maximiser le nombre de couleurs utilisées, on cite par exemple la b-coloration qui fera l'objet de notre étude dans ce mémoire.

Une b-coloration des sommets d'un graphes est une coloration propre telle que toute classe de couleur $i$ contient au moins un sommets qui possède au moins un voisin dans chaque classe $j \neq i$, un tel sommet est appelé b-sommet. Le nombre b-chromatique noté $b$(G), est le nombre maximum de classe de couleurs dans une b-coloration. Ce concept a été introduit en 1999 par *Irving et Manlove* [9, 11]. Il convient de mentionner que toutes les colorations considérées dans ce manuscrit sont propres, même si ce n'est pas toujours précise.

Ce mémoire est développé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous donnons également un petit aperçu de quelques notions élémentaires de complexité algorithmique.

Dans le deuxième chapitre, nous nous définissons la coloration classique, la a-coloration et la b coloration dans les graphes. Ainsi que nous présentons quelques bornes et résultats existantes sur le nombre chromatique dominant d'un graphe. Ensuite, nous rappelons quelques résultats existantes de la subdivision b-chromatique de quelques graphes particuliers.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la détermination de nombre du subdivision b-chromatique de quelques graphes particuliers.

Ce mémoire s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

# Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes. La première partie est un rappel de quelques définitions nécessaires qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

## 1.1 Définitions et notations

### 1.1.1 Graphes

Un graphe G = (V,E) est la donnée de deux ensembles finis, V un ensemble non vide des éléments appelés sommets et E est l'ensemble des paires de sommets appelés arêtes. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G, noté par $n$(G) et le cardinal de E est appelé la taille de G, noté par $e$(G). Les sommets sont notés usuellement par des lettres minuscules : $u, v, x, y, a, b$ etc... Les arêtes sont des couples des sommets notées par : $uv, xy, ab$ ...etc. Si $u$ et $v$ sont deux sommets reliés par une arête $e$, alors $u$ et $v$ sont dits adjacents (ou voisins), et $e$ est dite incidente à $u$ et $v$ ; dans ce cas, $u$ et $v$ sont les extrémités de $e$ on écrit donc : $e = uv$ ou $e = vu$. Un sommet $u$ est dit isolé s'il n'existe aucune arête dans E incidente à $u$. Une boucle est une arête dont les extrémités sont confondues. Un ensemble d'arêtes est dit multiple s'ils ont les mêmes extrémités.

Un graphe simple est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et tout arête de G a ses extrémités distinctes. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis.

La Figure 1.1 montre un graphe G = (V, E) avec V(G) = $\{a, b, c, d, e\}$ et E(G) = $\{ab, bc, ca, cd, ad, de\}$.

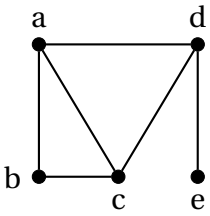



FIGURE 1.1 – Un graphe G.

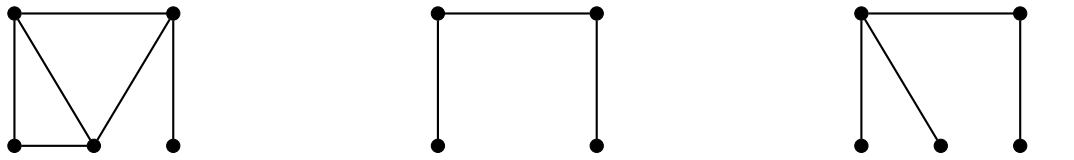
### 1.1.2 Sous graphe et graphes partiel

Soit G = (V, E) un graphe simple

◄ G′ = (V′, E′) est un graphe partiel de G si V′ = V et E′ ⊆ E.

◄ G′ = $\left(V', E'\right)$ est un sous graphe de G si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. En outre, si $E' = \{uv \in E : u, v \in V'\}$, c'est à dire les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans V′ alors G′ est dit sous-graphe induit (ou engendré) par V′, dans ce cas G′ est noté par $G\left[V'\right]$.

(Voir Figure 1.2 un sous-graphe et graphe partiel de G.)



Graphe G Sous graphe de G Graphe partiel de G

FIGURE 1.2 – Graphe, sous graphe et graphe partiel.

### 1.1.3 Voisinages

Soit G = (V, E) un graphe simple, pour un sommet $v$ de G :

◄ Le voisinage ouvert d'un sommet $v$ est défini par l'ensemble suivant :

$\mathrm{N_G}(v) = \{u \in \mathrm{V(G)} : uv \in \mathrm{E(G)}\}$.

◄ Le voisinage fermé d'un sommet $v$, noté $\mathrm{N_G}[v]$ est défini par :

$\mathrm{N_G}[v] = \mathrm{N_G}(v) \cup \{v\}$.

Pour un sous-ensemble $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{V(G)}$ :

◄ Le voisinage ouvert d'un sous-ensemble S est :

$\mathrm{N_G(S)} = \cup_{v \in \mathrm{S}} \mathrm{N_G}(v)$.

◄ Le voisinage fermé d'un sous-ensemble S est :

$\mathrm{N_G}[\mathrm{S}] = \cup_{v \in \mathrm{S}} \mathrm{N_G}[\mathrm{S}] \cup (\mathrm{S})$.

### 1.1.4 Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet $v$ d'un graphe G, noté $deg_{\mathrm{G}}(v)$ ou $d(v)$, est le nombre de voisins de ce sommet. Un sommet de degré 0 est dit sommet isolé et un sommet de degré 1 est dit sommet pendant. On note par $\Delta(\mathrm{G})$ et $\delta(\mathrm{G})$ le degré maximum et minimum dans G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $deg(v)$ ou $d(v)$, $\Delta$ et $\delta$ pour désigner respectivement $deg_{\mathrm{G}}(v)$, $\Delta(\mathrm{G})$ et $\delta(\mathrm{G})$.

### 1.1.5 Ensemble minimal et maximal / minimum et maximum

Soit $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ un graphe, on dit qu'un sous-ensemble A de V est minimal (resp. Maximal) par rapport à une propriété $\mathscr{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ (resp. $\mathrm{B} \supseteq \mathrm{A}$) tel que $\mathrm{G}[\mathrm{B}]$ vérifie $\mathscr{P}$. On dit qu'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (resp. Maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété $\mathscr{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{V}$ tel que $\mathrm{G}[\mathrm{B}]$ vérifie $\mathscr{P}$ et $|\mathrm{A}| > |\mathrm{B}|$ (resp.$|\mathrm{B}| > |\mathrm{A}|$) où $|\mathrm{A}|$ est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

### 1.1.6 Chaînes et cycles

Soit $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ un graphe.

◄ Une chaîne $P_k$ d'un graphe G est une suite alternée finie de sommets et d'arêtes de la forme : $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$, où $k$ est un entier positif ou nul, les $v_i$ et $v_{i+1}$ sont des sommets de G et les $e_i$ sont des arêtes, tel que pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$, $v_i$ et $v_{i+1}$ sont les extrémités de l'arête $e_i$ tel que les sommets $v_0$ et $v_k$ sont les extrémités de la chaîne $P_k$, et les sommets $v_1$, $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de $P_k$.

◄ Une chaîne $P_k$ est simple si elle ne passe pas deux fois par la même arête.

◄ Une chaîne $P_k$ est élémentaire si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

◄ Dans une chaîne $P_k$, une arête qui relie deux sommets non consécutifs est dite une corde.

◄ Une chaîne minimale induite par $n$ sommets, notée par $P_n$, est une chaîne élémentaire sans corde.

◄ La longueur de la chaîne $P_k$ est le nombre de ses arêtes donc c'est l'entier $k$.

◄ Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. On note par $C_n$ le cycle induit par $n$ sommets. De la même manière, on définit un cycle simple et un cycle élémentaire. La longueur d'un cycle est le nombre de ses arêtes.

◄ La maille de G, notée $g$(G), est la longueur du plus petit cycle dans G.



$P_7$ $C_7$

FIGURE 1.3 – Une chaîne $P_7$ et un cycle $C_7$.

### 1.1.7 Graphes particuliers

#### Graphe complet

Le graphe complet d'ordre n, noté $K_n$, est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré $n-1$. Ainsi, deux sommets quelconques de $K_n$ sont adjacents.

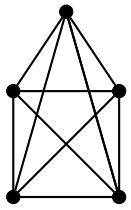


FIGURE 1.4 – $K_5$

**Graphe discret**

Soit G un graphe. Le graphe discret est un graphe dont tout les sommets sont non adjacents. Un graphe discret G est un graphe $(0)-$régulier.

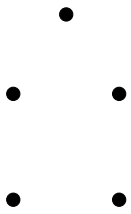


FIGURE 1.5 – Un graphe discret.

**Graphe complémentaire**

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe complémentaire de G est le graphe noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $\overline{E} = E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.




FIGURE 1.6 – Un graphe G et son complémentaire.

**Graphe régulier**

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré est égal à $d$ pour tout sommet, alors on dit que le graphe est $d$-régulier. Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique.

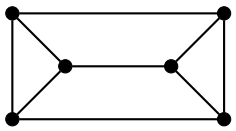


FIGURE 1.7 – Un graphe 3-régulier.

◄ Un graphe est k-régulier ou régulier de degré k si tous ses sommets sont de degré k. Prenons par exemple le graphe de Petersen $G_{10}$ de la figure 1.8. Le graphe $G_{10}$ est un graphe 3-régulier.

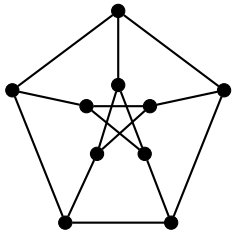


FIGURE 1.8 – Le graphe de Petersen $G_{10}$ .

**Graphe biparti**

Un graphe G = (V, E) est dit biparti si V peut se partitionner en deux sous-ensembles stables $V_1$ et $V_2$, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de $V_1$ à un sommet de $V_2$. Un graphe biparti complet est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante : tous les sommets de $V_1$ sont adjacents à tous les sommets de $V_2$.

Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.



Graphe biparti Graphe biparti complet ($K_{3,3}$)

FIGURE 1.9 – Un graphe biparti et un graphe biparti complet ($K_{33}$).

### Graphe planaire

Un graphe G = (V, E) est dit planaire si il peut être dessiné dans la plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.



$K_4$ $R(K_4)$

FIGURE 1.10 – Représentation planaire de $K_4$ .

### Arbre

On appelle *arbre* à $n$ sommets et on note par T un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre un sommet de degré 1 (sommet pendant).

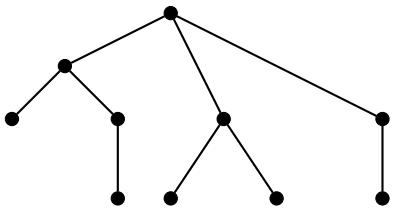


FIGURE 1.11 – Un arbre T.

### Une chenille

Une chenille $C(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un arbre dont la suppression de ses sommets pendants donne une chaîne $u_1, u_2, \ldots, u_n$ où $t_i$ est le nombre de sommets pendants adjacents à $u_i$.

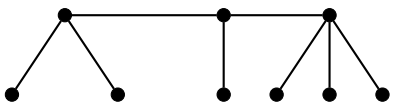


FIGURE 1.12 – Une chenille C(2,1,3).

### Fôret

Une fôret est un graphe non connexe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

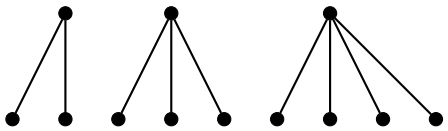


FIGURE 1.13 – Une fôret.

### Étoile

On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, $(n \geq 3)$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant $n$ feuilles.

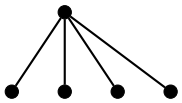


FIGURE 1.14 – Un étoile ($K_{1,4}$).

### Graphe adjoint

Soit G = (V, E) un graphe. Le *graphe adjoint* de G (ou graphe de ligne) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

### Graphe connexe

On dit qu'un graphe G est connexe si pour chaque paire de sommets distincts $u$ et $v$ de V(G), il existe une chaîne joignant $u$ et $v$.

◄ Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

◄ Un graphe qui n'est pas connexe est dit non connexe.

◄ Un graphe G est connexe, s'il ne possède qu'une seule composante connexe.




FIGURE 1.15 – G est connexe ; H est non connexe avec deux composante connexe.

◄ Un cactus est un graphe où chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit unicycle.

◄ Un graphe est dit sans griffe (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

◄ On appelle couronne d'un graphe G, notée $Cr(G)$ ou $G \circ K_1$, le graphe obtenu en attachant à chaque sommets de G un sommet pendant, et donc il est évident que l'ordre de $Cr(G)$ est égal à $2|V(G)|$.

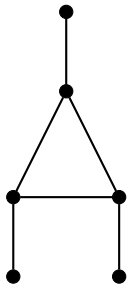


FIGURE 1.16 – $Cr(C_3)$.

### 1.1.8 Graphe milieu, graphe total et graphe central

#### Graphe milieu

**Définition 1.1.1** ***(Hamada et Yoshimura)****[24] Soit* $G = (V(G), E(G))$ *un graphe simple. Le graphe milieu de* G*, noté* $M(G)$ *est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* $M(G)$ *est* $V(G) \cup E(G)$*, et deux sommets* $x, y$ *de* $M(G)$ *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

◄ $x, y \in E(G)$ *et x est adjacent à y dans* G.

◄ $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et x est incident à y dans* G.

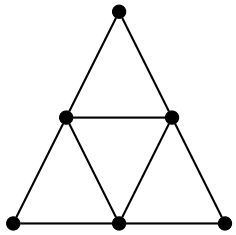


FIGURE 1.17 – Le graphe milieu de $C_3$.

### Graphe total

**Définition 1.1.2** ***(Behzad)****[25] Soit* $G = (V(G), E(G))$ *un graphe simple. Le graphe total de* G, *noté* $T(G)$, *est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* $T(G)$ *est* $V(G) \cup E(G)$, *et deux sommets* $x, y$ *de* $T(G)$ *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- $x, y \in V(G)$ *et* $x, y$ *sont adjacents dans* G.
- $x, y \in E(G)$ *et* $x$ *est adjacent à* $y$ *dans* G.
- $x \in V(G), y \in E(G)$ *et* $x$ *est incident à* $y$ *dans* G.

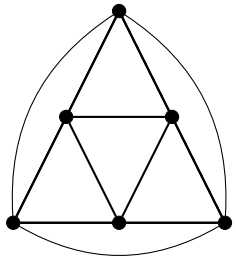


FIGURE 1.18 – Le graphe total de $C_3$.

### Graphe central

**Définition 1.1.3** *Soit* $G = (V(G), E(G))$ *un graphe simple. Le graphe central de* G, *noté* $C(G)$, *est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* $C(G)$ *est* $V(G) \cup E(G)$, *et deux sommets* $x, y$ *de* $C(G)$ *sont adjacents si la conditions suivante est vérifiée :*

- $x, y \in V(G)$ *et* $x, y$ *sont non adjacents dans* G.
- $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et* $x$ *est incident à* $y$ *dans* G.




FIGURE 1.19 – Un graphe G et son graphe central.

### 1.1.9 Quelques invariants de graphes

Soit G = (V, E) un graphe simple.

◄ Un stable dans un graphe G, appelé aussi ensemble indépendant, est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G, noté α(G) et est appelé nombre de stabilité de G.

Dans le graphe ci-dessous, $\{a, b\}$ forment un stable ; $\{b, d\}$ aussi, ainsi que $\{b, e\}$ et $\{c, e\}$.

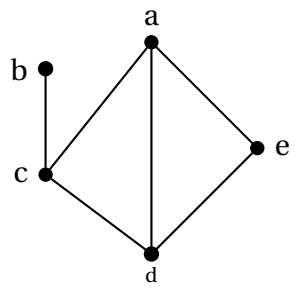



FIGURE 1.20 – $\{a, b\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$ *et* $\{c, e\}$ sont des stables de taille maximal et α(G) = 2.

◄ Un couplage dans un graphe G est un sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacents. Un sommet $x$ est dit saturé par un couplage M si $x$ est l'extrémité d'une arête de M. Dans le cas contraire, $x$ sera dit est insaturé par M.

◄ Un couplage maximum est un couplage de taille maximal. On désigne par β(G) la taille d'un couplage maximum dans G. Dans la figure 1.22, les arêtes $bc$ et $df$ forment un couplage de taille 2.

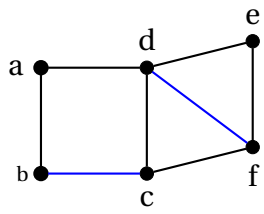



FIGURE 1.21 – M = $\{bc, df\}$ *et* $\beta(G) = 2$.

Ce couplage n'est pas parfait car les sommets ne sont pas saturés.

◄ Une clique dans G est un sous ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

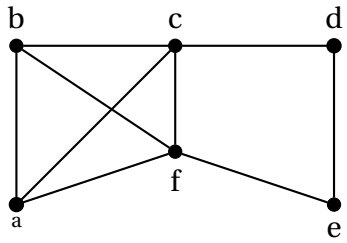



FIGURE 1.22 – $\{a, b, c, f\}$ *c'est la clique maximum avec* $\omega(G) = 4$.

### 1.1.10 Quelques opérations sur les graphes

Nous donnons, ci-après, les différentes opérations de base sur les graphes.

◄ Soit $v$ un sommet d'un graphe G = (V, E). On note par G/{S} le sous-graphe engendré par l'ensemble V/S, pour un sous ensemble de sommets S ⊆ V. Le graphe G/{$v$} est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet $v$ et toutes les arêtes incidentes à $v$ .




FIGURE 1.23 – Exemple de la suppression d'un sommet $v$ dans un graphe.

◄ Soit $uv$ une arête de G. Le graphe G/$\{uv\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête $uv$ (les extrémités de $uv$ ne sont pas supprimées ).




G G/$\{uv\}$

FIGURE 1.24 – Exemple de la suppression d'une arête $uv$ dans un graphe.

◄ Soient G = (V, E) et H = (V′, E′) deux graphes. L'union de G et H est le graphe G + H dont l'ensemble des sommets est V∪V′ et l'ensemble des arêtes est E∪E′. Pour un entier $k$ donné, l'union de $k$ copies de G est notées par $k$G.

◄ Le joint de G et H est le graphe noté G ∨ H obtenu à partir de G + H en ajoutant toutes les arêtes entre G et H.

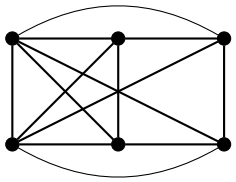


FIGURE 1.25 – $P_2 \vee C_4$.

◄ Le produit cartésien (ou somme cartésienne) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe G = (V, E) tel que $V = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\}$ et deux sommets $(u_1, v_1)$ et $(u_2, v_2)$ sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.

## 1.2 Complexité algorithmique

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon efficace. On introduit quelques éléments de base sur la complexité algorithmique et on définit quelques problèmes connus.

Un algorithme est une procédure décomposable en opérations élémentaires (la comparaison, l'affectation, les quatre opérations usuelles, etc ...) qui pour toute instance du problème à traiter, transforme les données initiales (entrées) en résultats (sorties).

La complexité d'un algorithme est la durée d'exécution de cet algorithme en fonction de la taille des données.

### 1.2.1 Problème de décision

Un problème de *décision* est une question dont la réponse est Oui ou Non.

Un problème de décision $D_1$ est dit réductible à un autre problème de décision $D_2$ (noté $D_1 \alpha D_2$), s'il existe une fonction polynomiale $f$ qui transforme chaque énoncé de $D_1$ en un autre énoncé de $D_2$ de taille manière que la réponse pour $D_1$ est oui si, et seulement si, la réponse pour $D_2$ est oui.

### 1.2.2 Classes de complexité

Le but de la théorie de la complexité est la classification des problèmes de décision suivant leur degré de difficulté de résolution.

#### Classe P

Un problème de décision est dans la classe P s'il existe un algorithme déterministe pour le résoudre en temps polynomial par rapport à la taille des données. Les problèmes de cette classe est dit facile.

#### Classe NP

Un problème de décision est dans NP ( Non déterministe polynomial) , s'il est résoluble par un algorithme non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance. Un problème dans cette classe est dit difficile, nous retrouvons dans cette classe tous les problèmes classiques en théorie des graphes tels : l'indépendance, la coloration, la domination,... etc.

On constate immédiatement que $P \subseteq NP$.

**Classe NP-complet :**

Parmi l'ensemble des problèmes appartenant à NP, il existe un sous-ensemble qui contient les problèmes les plus difficiles, on les appelle les problèmes NP-complet.

Un problème est dit NP-complet s'il est dans NP et que tout problème de la classe NP est réductible polynomiale en ce problème.

Chapitre 2

# Coloration dans les graphes

Dans ce chapitre, nous présentons quelques types de coloration des graphes et leur paramètres associées. Dans ce contexte, nous rappelons les définitions de la a-coloration ensuite nous focalisons essentiellement sur la notion de la b-coloration et le nombre b-chromatique. Ensuite nous passons en revue les principaux travaux réalisés ou existants liés à la b-coloration et au nombre b-chromatique.

## 2.1 Coloration propre et nombre chromatique

**Définition 2.1.1** *Une $k$-coloration propre d'un graphe* $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ *est une application $c$ qui associé à chaque sommet de* $\mathrm{V}(\mathrm{G})$ *une couleur de l'ensemble* $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ *de telle façon que les sommets voisins (adjacents) ont des couleurs distinctes :*

$$c(u) \neq c(v), \forall \{(uv)\} \in \mathrm{E}\,.$$

◄ *Une $k$-coloration propre des sommets de* G *peut être vue comme une partition de* V *en $k$ stables.*

◄ *Une classe de couleur est un sous-ensemble stable des sommets de* V *qui ont la même couleur.*

**Définition 2.1.2** *Le nombre chromatique d'un graphe* G*, noté* $\chi(\mathrm{G})$*, est le nombre minimum de couleurs pour une coloration propre de* G.

◄ Une $\chi$(G)-coloration d'un graphe G est dite coloration optimale (minimal) de G, il est dit aussi que G est $\chi$(G)-chromatique.

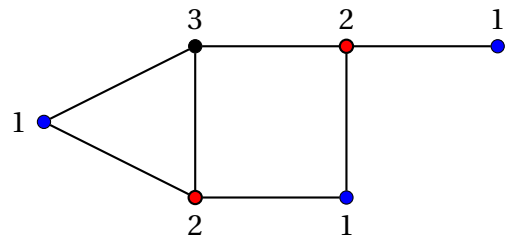



FIGURE 2.1 – Un graphe G avec $\chi(G) = 3$.

**Proposition 2.1.1** *[1] Soit* G *un cycle d'ordre n alors :*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & si \quad n \text{ est pair} \\ 3 & si \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

**Remarque 2.1.1** *Soit* G *un graphe d'ordre n. Il clair que* $1 \leq \chi(G) \leq n$.

◄ $\chi(G) = 1$ *si et seulement si* G *est un graphe discret.*

◄ $\chi(G) = n$ *si et seulement si* G *est un graphe complet.*

◄ $\chi(G) = 2$ *si et seulement si* G *est un graphe biparti.*

## 2.2 Quelques bornes sur le nombre chromatique

Le problème de décision lié à ce paramètre dans la cas général est NP-complet. Pour cette raison, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre chromatique en fonction d'autre paramètres. L'un des résultats classiques établi en termes de bornes du nombre chromatique est celui de R.brooks [2].

**Théorème 2.2.1** *[3] Pour tout graphe* G *de degré maximum* $\Delta(G)$,

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

**Théorème 2.2.2** *[1] Si* $\overline{G}$ *est le graphe complémentaire de* G, *alors :*

$$\chi(G) + \chi\left(\overline{G}\right) \leq n + 1.$$

**Théorème 2.2.3** *[2] Soit* G = (V, E) *un graphe connexe. Si* G *n'est ni un cycle d'ordre impaire, ni un graphe complet, alors :*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

**Proposition 2.2.1** *[4] Si* H *est un sous-graphe de* G, *alors* $\chi(H) \leq \chi(G)$.

**Proposition 2.2.2** *[4] Pour tout graphe* G, *on a :*

$$\chi(G) \geq \omega(G),$$

*où* $\omega(G)$ *est la taille d'une clique maximum.*

**Proposition 2.2.3** *Berge 1973 [4] Pour tout graphe* G *d'ordre n,*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1,$$

*où* $\alpha(G)$ *est le nombre de stabilité de* G.

De nombreux paramètres de coloration propre ont été dérivés du nombre chromatique $\chi(G)$, la plus part de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs nécessaires à la colorations d'un graphe. Il existe d'autre paramètres qui cherchent à maximiser le nombre de couleur. Parmi de ces derniers, on cite le nombre a-chromatique $\Psi(G)$ et le nombre b-chromatique $b(G)$. Une manière de réduire le nombre de couleurs et d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs en unifiant ou en jumelant des classes de couleurs différentes, d'où l'introduction de la a-coloration et du nombre a-chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins [6] en 1967.

## 2.3 a-coloration et nombre a-chromatique

Dans ce paragraphe, nous introduisons la a-coloration et le nombre a-chromatique. Notons que cette coloration et ce paramètre ne font pas l'objet de notre étude, mais comme ils ont été à l'origine de la b-coloration et le nombre b-chromatique, nous rappelons la notion de la a-coloration et le nombre a-chromatique.

Étant donnée une k-coloration propre d'un graphe G, avec $k > \chi(G)$. Une manière de réduire le nombre de couleurs à l'aide d'une recoloration de tous les sommets d'une classe de

couleurs par une et une seule couleur. Cette manière de recoloration n'est plus valables des qu'il existe une arête entre chaque paire de couleurs, d'où l'introduction de la a-coloration par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967 [6].

**Définition 2.3.1** *Une a-coloration d'un graphe* G *est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes $i$ et $j$, le sous graphe engendré par les deux classes de couleurs $i$ et $j$, contient au moins une arête.*

*Le nombre a-chromatique, noté* $\Psi(G)$*, est le nombre maximum de classes de couleurs dans une a-coloration.*

**Remarque 2.3.1** *Le problème de décider si* $\Psi(G) \geq k$*, pour un graphe* G *et un entier $k$ donné est* NP*-complet en général[7].*

## 2.4 Coloration de Grundy

**Définition 2.4.1** *Une $k$-coloration de Grundy d'un graphe* G *est une coloration propre utilisant $k$ couleurs vérifiant la propriété suivante :*
*chaque sommet $v$, coloré par une couleur $i$, $1 \leq i \leq k$, doit être adjacent à au moins $i-1$ sommets colorés par chacune des couleurs $j$ telles que $1 \leq j \leq i-1$. Le nombre de Grundy d'un graphe* G*, noté* $\gamma(G)$*, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration de Grundy de* G.

## 2.5 b-coloration et nombre b-chromatique

**Définition 2.5.1** *Une b-coloration d'un graphe* G *est une coloration propre telle que toute classe de couleur $i$ contient au moins un sommet qui a un voisin dans toutes les autres classes de couleurs $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet b-dominant pour la couleur $i$.*

*Le nombre b-chromatique est le nombre maximum de classes de couleurs dans une b-coloration (coloration dominante) noté* $b(G)$.

***Proposition 2.5.1*** *Toute* $\chi(G)$*-coloration satisfait la définition de la b-coloration, et cette dernière vérifie la définition de la a-coloration, alors les résultat suivant est trivial :*

$\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$.

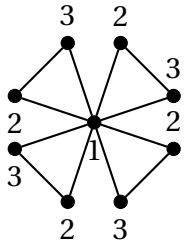



FIGURE 2.2 – Un graphe G avec $\chi(G) = 3$.

## 2.6 Le m-degré et m-degré modifié d'un graphe

**Définition 2.6.1** *Soit les sommets $v_1, v_2, \ldots v_n$ d'un graphe* G *ordonnés tel que :*

$d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$ *où $d(v_i)$ est le degré de $v_i$. Le m-degré de* G*, noté $m(G)$ est défini par : $m(G) = \max\{i : d(v_i) \geq i-1\}$.*

◄ *Un sommet $v$ vérifiant $d(v) \geq m(G) - 1$ est dit sommet dense.*

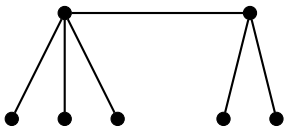


FIGURE 2.3 – Un graphe G avec $m(G) = 2$.

**Remarque 2.6.1** *Si* G *est le graphe d-régulier, alors $m(G) = d + 1$.*

**Remarque 2.6.2** *Si* H *est un sous-graphe de* G*, alors $m(H) \leq m(G)$.*

Nous présentons dans ce paragraphe la notion du $m$-degré modifié, qui fournira une nouvelle borne supérieure du nombre b-chromatique et qui ne sera utile pour déterminer la valeur exacte du nombre b-chromatique de certains graphes particuliers. D'abord, nous rappelons encore une fois la définition du m-degré.

**Condition 1** *Lors du calcul du m-degré, nous ne prenons pas en compte la relation entre les sommets denses, en terme d'inclusion de voisinages. Or, comme le montre la proposition suivante, si le voisinage d'un sommets u est inclus dans le voisinage d'un autre sommet v, alors si u est b-dominant, le sommet v l'est aussi, est pour la même couleur. Ainsi il est inutile de prendre en compte à la fois u et v dans l'ensemble des sommets candidats à la b-dominance.*

**Proposition 2.6.1** *Soit* $G = (V,E)$ *un graphe et u et v deux sommets de* G *tels que* $N_G(u) \subseteq N_G(v)$. *Soit* $G'$ *le graphe induit* $V \setminus \{u\}$. *Alors :*

1. *Tout* $(k)$*b-coloration de* $G'$ *peut être étendue à* G.

2. $b(G') \leq b(G)$.

3. *Pour toute b-coloration de* G, *si u est b-dominant, alors v est b-dominant et pour la même couleur.*

**Définition 2.6.2** *Soient* $G = (V,E)$ *un graphe de n sommets, et un ordre* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *des sommets de* V *de* G, *tel que* $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ *où* $d_i$ *est le degré du sommets* $v_i$. *Nous supprimons de la liste* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *les sommets* $v_i$ *pour lesquels il existe* $j$, *avec* $j < i$, *tel que* $N_G(v_i) \subseteq N_G(v_j)$.

**Définition 2.6.3** *Nous appelons séquence réduite la liste des sommets* $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$ *restants et séquence réduite des degrés, la séquence* $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \ldots \geq d_{i_k}$.

**Remarque 2.6.3**

◄ *La liste* $(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k})$ *dépend de l'ordre choisi pour la liste initiale ( au cas où plusieurs sommets auraient le même degré ).*

◄ *La séquence des degrés modifiée* $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \ldots \geq d_{i_k}$ *est la même quel que soit le choix de la liste initiale* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

En utilisant la séquence de degré modifiée, nous allons améliorer le m-degré.

**Définition 2.6.4** *Soit* $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \ldots \geq d_{i_k}$ *la séquence des degrés modifiée d'un graphe* G. *On appelle le m-degré modifié et on note par* $m' = \max\left\{ j : d_{i_j} \geq j-1 \right\}$.

## 2.7 Quelques résultats sur le nombre b-chromatique

Les premiers travaux s'intéressant au concept de b-coloration sont dûs à Irving et Manlove[9] en 1999 qui ont montré que le problème de décision lié au nombre b-coloration chromatique est un problème NP-complet en général, même restreint aux graphes bipartis [10]. Par contre, ce problème devient polynomial pour les arbres[9, 11].

### 2.7.1 Bornes sur le nombre b-chromatique

**Proposition 2.7.1** *[9, 11] Pour un graphe* G *d'ordre n.*

$$b(\mathrm{G}) \leq m(\mathrm{G})$$

Il est facile de vérifier que cette borne est atteinte pour les chaînes et les cycles d'ordre $n \geq 5$ et pour les cliques. Cependant, il existe d'autres graphes pour lesquels la différence entre $m(\mathrm{G})$ et $b(\mathrm{G})$ est très large. Par exemple, si $\mathrm{G} = \mathrm{K}_{n,n}$ est le graphe biparti complet, alors $m(\mathrm{G}) = n+1$ et $b(\mathrm{G}) = 2$. De ce fait, il est naturel de chercher à caractériser les graphes réalisant l'égalité dans la proposition 2.6.1.

**Proposition 2.7.2** *[9, 11] Soit* G *un graphe de degré maximum* $\Delta(\mathrm{G})$ *et* $\chi(\mathrm{G})$ *son nombre chromatique. Alors :*

$$\chi(\mathrm{G}) \leq b(\mathrm{G}) \leq \Delta(\mathrm{G}) + 1.$$

◄ *Dans[12], Kouider et Mahéo ont borné le nombre b-chromatique d'un graphe en fonction de son nombre de stabilité.*

**Théorème 2.7.1** *[12] Soient* G *un graphe connexe d'ordre n et* $\alpha(\mathrm{G})$ *le nombre de stabilité de* G. *Alors,*

$$b(\mathrm{G}) \leq n - \alpha(\mathrm{G}) + 1.$$

Dans[12], Kouider et Mahéo fournissent d'autres bornes supérieures.

**Proposition 2.7.3** *[12] Pour tout graphe* $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ *d'ordre n, on a :*

$$\frac{n}{\alpha(\mathrm{G})} \leq b(\mathrm{G}) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m},$$

*où* $\alpha(\mathrm{G})$ *le nombre de stabilité de* G.

**Proposition 2.7.4** *[12] Si* G *est un graphe non connexe avec des composantes connexe* $C_1, C_2, \ldots, C_P$, $p \geq 2$. *Alors,*

$$b(G) \geq \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}.$$

**Proposition 2.7.5** *[12] Soit* G = (V, E) *un graphe d'ordre n et* $\overline{G}$ *son complémentaire alors,* $b(G)b(\overline{G}) \geq n \quad et \quad b(G) + b(\overline{G}) \leq n + 1$.

◄ Dans [13], Kouider et Zaker ont présenté une borne supérieure de $b(G)$ dans le cas d'un graphe sans griffes généralisés $(\text{sans } K_{1,t})$.

**Proposition 2.7.6** *[13] Si* G *est un graphe sans* $K_{1,t}$ *avec* $t \geq 3$, *alors*

$$b(G) \leq (t-1)(\chi(G) - 1) + 1.$$

*Il ont également montré que cette borne est atteinte.*

**Proposition 2.7.7** *[13] Pour tout entier* $t \geq 3$ *et k, il existe un graphe sans* $K_{1,t}$ *tel que :*

$$\chi(G) = k \quad et \quad b(G) = (t-1)(k-1) + 1.$$

*Si* $t = 3$ *alors* G *est dit sans griffe.*

◄ *Dans* [20], *les auteurs ont montré que le nombre b-chromatique du joint de deux graphes est égale à la somme de leurs nombres b-chromatique.*

**Théorème 2.7.2** *[14] Soit* G *un graphe. Si* G *est le joint de deux graphes* $G_1$ *et* $G_2$ *de sommets disjoints, alors* $b(G) = b(G_1) + b(G_2)$.

Ils ont prouvé également que le nombre b-chromatique d'un graphe discret D et d'un graphe complet $K_n$ (les deux sont d'ordre n) est égale à 1 et n respectivement.

**Théorème 2.7.3** *[13] Si* G *est le complémentaire d'un graphe biparti et* $\omega(G)$ *est la taille de sa clique maximum. Alors :*

$$b(G) \leq \frac{4\omega(G)}{3}.$$

**Théorème 2.7.4** *[15] Soient* G *un graphe d'ordre n différent du graphe complet, alors :*

$$b(G) \leq \left\lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \right\rfloor.$$

Dans T.Faik [8] montre que le m-degré modifié est une borne supérieure du nombre b chromatique.

**Proposition 2.7.8** *pour tout graphe* G, *nous avons* $b(G) \leq m'(G)$.

## 2.8 Valeurs exactes du nombre b-chromatique pour des graphes particuliers

Dans cette partie, nous rappelons quelques définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite et nous donnons des bornes et des valeurs exactes du nombre b-chromatique de certains classes des graphes.

### 2.8.1 Le nombre b-chromatique des graphes discrets

**Proposition 2.8.1** *[12] Soit* $G = D_n$ *un graphe discret. Alors pour tout n, on a :*

$$b(D_n) = 1.$$

### 2.8.2 Le nombre b-chromatique de $K_n$ et $Cr(K_n)$

**Proposition 2.8.2** *[11, 16] Soit* $G = K_n$ *un graphe complet, alors pour tout* $n \geq 3$, *on a :*

$$b(K_n) = b(Cr(K_n)) = n.$$

### 2.8.3 Le nombre b-chromatique de $K_{n,p}$ et $Cr(K_{n,p})$

**Proposition 2.8.3** *[12, 16] Soit* $G = K_{n,p}$ *un graphe biparti complet. Alors pour tout* $n, p \in \mathbb{N}$ *on a :*

*i)* $b(K_{n,p}) = 2$.

*ii)* $$b(Cr(K_{n,p})) = \begin{cases} 2 & si \quad n = p = 1 \\ 3 & si \quad min\{n,p\} = 1 \text{ et } \max\{n,p\} \geq 2 \\ 4 & si \quad min\{n,p\} \geq 2 \end{cases}$$

### 2.8.4 Le nombre b-chromatique de $F_n$ et $Cr(F_n)$

**Définition 2.8.1** *Le graphe de Friendship noté* $F_n$*, est un graphe planaire avec* $2n+1$ *sommets et* $3n$ *arêtes, peut être construit à partir de n copies de* $C_3$ *par identification d'un sommet de chaque copie* $C_3$.

**Exemple 2.8.1** *(voir la figure 2.2).*

**Proposition 2.8.4** *[16] Soit* $G = F_n$ *un graphe de Friendship. Alors pour tout* $n \geq 2$*, on a :*

*i)* $b(F_n) = 3$.

*ii)* $b(Cr(F_n)) = 4$.

### 2.8.5 Le nombre b-chromatique de $W_n$, $Cr(W_n)$ et $T(W_n)$

**Définition 2.8.2** *On appelle graphe roue, noté* $W_n$*, un graphe d'ordre* $n \geq 4$ *obtenu on ajoutant un sommet centre relié à tous les sommets de cycle* $C_{n-1}$.



$W_4$ $W_5$

FIGURE 2.4 – Exemples de roues.

**Proposition 2.8.5** *[28] Soit le graphe roue* $W_n$ *d'ordre* $n \geq 4$*, on a :*

$$b(W_n) = \begin{cases} 3 & si \quad n = 5 \\ 4 & si \quad n = 4 \ ou \ n \geq 6 \end{cases}$$

**Théorème 2.8.1** *[17] Soit le graphe roue* $W_n$ *d'ordre* $n \geq 4$*, alors :*

$$b(M(W_n)) = \begin{cases} n+1 & si \quad 4 \leq n \leq 6 \\ n & si \quad n \geq 7 \end{cases}$$

**Théorème 2.8.2** *[17] Soit* $W_n$ *la roue d'ordre* $n \geq 4$*. Alors,* $b(T(W_n)) = n$.

### 2.8.6 Le nombre b-chromatique de $K_{1,n}$, $Cr(K_{1,n})$ et $T(K_{1,n})$

**Proposition 2.8.6** *[12, 16] Soit* $G = K_{1,n}$ *une étoile. Alors pour tout* $n \geq 2$*, on a :*

*i)* $b(K_{1,n}) = 2$.

*ii)* $b(Cr(K_{1,n})) = 3$.

**Proposition 2.8.7** *[29] Soit* $G = K_{1,n}$ *une étoile. Alors pour tout* $n \geq 2$*, on a :*

*i)* $b(M(K_{1,n})) = n+1$.

$$ii)\ b(C(K_{1,n})) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 1 \\ 3 & si \quad n = 2,3 \\ n & si \quad n \geq 4 \end{cases}$$

$$iii)\ b(T(K_{1,n})) = \begin{cases} 3 & si \quad n = 1 \\ n+1 & si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

### 2.8.7 Le nombre b-chromatique de $P_n$, $M(P_n)$, $T(P_n)$, $C(P_n)$ et $Cr(P_n)$

**Proposition 2.8.8** *[12, 17, 16] Pour toute chaîne* $P_n$ *d'ordre* $n \geq 2$*, on a :*

$$i) \quad b(P_n) = \begin{cases} 2 & si \quad n \in \{2,3,4\} \\ 3 & si \quad n \geq 5 \end{cases}$$

$$ii) \quad b(M(P_n)) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 2 \\ 3 & si \quad n = 3,4 \\ 4 & si \quad n = 5,6,7 \\ 5 & si \quad n \geq 8 \end{cases}$$

$$iii) \quad b(T(P_n)) = \begin{cases} 3 & si \quad n = 2,3 \\ 4 & si \quad n = 4 \\ 5 & si \quad n \geq 5 \end{cases}$$

$$iv) \quad b(Cr(P_n)) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 2 \\ 3 & si \quad n = 3,4,5 \\ 4 & si \quad n \geq 6 \end{cases}$$

### 2.8.8 Le nombre b-chromatique de graphe Splitting de $P_n$

**Définition 2.8.3** *[26] Le graphe Splitting d'un graphe* G*, noté par* SP(G)*, est obtenu en ajoutant un nouveau sommet $v'$ correspondant à chaque sommet $v$ de* G*, tel que le nombre de voisinage ouvert de $v$ dans* G *est égal le nombre de voisinage ouvert de $v'$ dans* SP(G).

**Proposition 2.8.9** *[27] Soit* $SP(P_n)$ *le graphe Splitting des chaînes d'ordre* $n \geq 2$*, alors le nombre b-chromatique de* $SP(P_n)$ *est :*

$$b(SP(P_n)) = \begin{cases} 5 & si \quad n \geq 9. \\ 4 & si \quad n = 6,7,8. \\ 3 & si \quad n = 5. \\ 2 & si \quad n = 2,3,4. \end{cases}$$

### 2.8.9 Le nombre b-chromatique de $C_n$, $M(C_n)$, $T(C_n)$, $C(C_n)$ et $Cr(C_n)$

**Proposition 2.8.10** *[12, 17, 16] Pour toute cycle* $C_n$ *d'ordre* $n \geq 3$*, on a :*

*i)* $$b(C_n) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 4 \\ 3 & si \quad n = 3 \text{ ou } n \geq 5 \end{cases}$$

*ii)* $$b(M(C_n)) = \begin{cases} n & si \quad n = 3,4 \\ 5 & si \quad n \geq 5 \end{cases}$$

*iii)* $$b(Cr(C_n)) = \begin{cases} 3 & si \quad n \in \{3,5\} \\ 4 & si \quad n = 4 \text{ ou } n \geq 6 \end{cases}$$

*iv)* $$b(T(C_n)) = \begin{cases} n & si \quad n = 3,4 \\ 5 & si \quad n \geq 5 \end{cases}$$

### 2.8.10 Le nombre b-chromatique dans les arbres

**Définition 2.8.4** *[9] Un arbre* T *est dit pivoté si* T *admet exactement* $m(T)$ *sommets denses et contient un sommet $v$ spécial et unique appelé pivot, tel que :*

◄ *$v$ n'est pas dense.*

◄ *Tout sommet dense de* T *est adjacent à $v$ où à un sommet dense adjacent à $v$.*

◄ *Tout sommet dense de* T *adjacent à $v$ et à un autre sommet dense est de degré* $m(\mathrm{T})-1$.

**Théorème 2.8.3** *[9, 25] Soit* T *un arbre, alors :*

$$b(\mathrm{T}) = \begin{cases} m-1 & si \quad \mathrm{T} \text{ est pivoté} \\ m & sinon \end{cases}$$

### 2.8.11 Le nombre b-chromatique des graphes réguliers

Les graphes réguliers jouent un rôle intéressant et important pour le nombre b-chromatique puisque pour chaque graphe régulier, l'égalité $m(\mathrm{G}) = \Delta(\mathrm{G}) + 1$ est vérifiée[18].

**Corollaire 2.8.1** *[10] Soit* G *un graphe d-régulier* $(d \geq 2)$ *a au moins* $d^4$ *sommets. Alors* $b(\mathrm{G}) = \Delta(\mathrm{G}) + 1$.

**Théorème 2.8.4** *[18] Soit* G *un graphe d-régulier sans cycles d'ordre* 6 *et de maille au moins* 5. *Alors le nombre b-chromatique de* G *est* $d+1$.

## 2.9 Quelques applications de la b-coloration

De nombreux problèmes réels peuvent être modélisés comme des problèmes de coloration des graphes. Nous pouvons citer par exemple les problèmes d'ordonnancement et de planning de la vie de tous les jours. La $b$-coloration a été utilisée dans les problèmes de Clustering. Un tel problème consiste à regrouper les éléments d'un ensemble de données en classes (ou clusters) de façon que chaque classe comporte des éléments qui sont le plus similaires possible, et chaque deux éléments de chaque deux classes disjointes sont le plus dissemblables possible.

L'un des premiers résultats impliquant la $b$-coloration est celui de Effantin et Kheddouci [19] qui ont donné un algorithme distribué pour calculer le nombre $b$-chromatique d'un graphe, et afin d'illustrer leur algorithme, ils ont proposé une application au problème de

routage dans les réseaux. El Ghazel et al. [20] ont également proposés une méthode de clustering avec une application dans le domaine médical. La $b$-coloration a été appliquée dans certains problèmes de classification des documents [21] et des services web [22].

Pour plus d'information sur les résultats liés à la $b$-coloration, le lecteur est invité à lire l'article de Jakovac et Peterin [23].

## 2.10 Quelques résultats existants sur le nombre de subdivision b-chromatique

Nous commençons d'abord par donner quelques résultats qui sont simples à vérifier.

### 2.10.1 Le nombre de subdivision des graphes simples

**Le nombre de subdivision de** $\mathrm{P}_n$

**Proposition 2.10.1** *Pour tout chaîne d'ordre* $n \geq 2$ *on a :*

$$sd_b(\mathrm{P}_n) = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2 \ ou \ n \geq 5. \\ 2 & si \quad n = 3. \\ 1 & si \quad n = 4. \end{cases}$$

**Le nombre de subdivision de** $\mathrm{C}_n$

**Proposition 2.10.2** *Pour tout cycle d'ordre* $n \geq 3$ *on a :*

$$sd_b(\mathrm{C}_n) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 4. \\ 0 & si \quad n = 3 \ ou \ n \geq 5. \end{cases}$$

**Le nombre de subdivision de** $\mathrm{K}_n$

**Proposition 2.10.3** *Pour tout graphe complet d'ordre* $n \geq 3$ *on a :*

$$sd_b(\mathrm{K}_n) = 0.$$

**Le nombre de subdivision de** $K_{n,p}$

**Proposition 2.10.4** *Soit* $G = (V_1 \cup V_2, E)$ *un graphe biparti complet d'ordre* $n+p$ *avec* $|V_1| = n$ *et* $|V_2| = p$*, alors :*

$$sd_b(G) = \begin{cases} 0 & si \quad n = p = 1. \\ 1 & si \quad min\{n,p\} \geq 2. \\ 2 & si \quad min\{n,p\} = 1 \ et \ max\{n,p\} \geq 2. \end{cases}$$

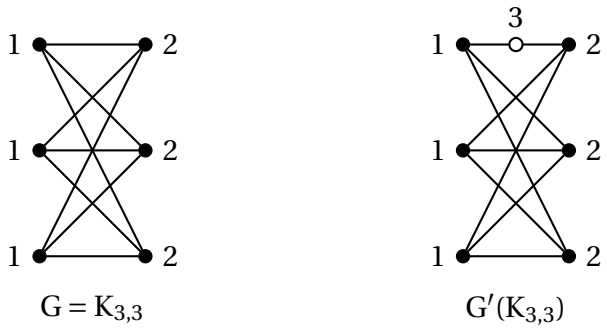



FIGURE 2.5 – La subdivision de $K_{3,3}$.

**Le nombre de subdivision de** $F_n$

**Proposition 2.10.5** *Soit* $G = F_n$*, un graphe de Freindship, alors pour tout* $n \geq 2$*,*

$$sd_b(G) = 0.$$

## 2.10.2 Le nombre de subdivision b-chromatique de la couronne de certains graphes

**Le nombre de subdivision de** $Cr(P_n)$

**Proposition 2.10.6** *Pour tout chaîne d'ordre* $n \geq 2$ *on a :*

$$sd_b(Cr(P_n)) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 2. \\ 0 & si \quad n \geq 3. \end{cases}$$

**Le nombre de subdivision de** $Cr(C_n)$

**Proposition 2.10.7** *Pour tout cycle d'ordre* $n \geq 3$ *on a :*

$$sd_b(Cr(C_n)) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 5. \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

**Le nombre de subdivision de** $Cr(K_n)$

**Proposition 2.10.8** *Pour tout graphe complet d'ordre* $n \geq 3$ *on a :*

$$sd_b(Cr(K_n)) = 0.$$

**Le nombre de subdivision de** $Cr(F_n)$

**Proposition 2.10.9** *Pour tout* $n \geq 2$,

$$sd_b(Cr(F_n)) = 0.$$

Chapitre 3

# La subdivision b-chromatique de quelques graphes particuliers

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de la subdivision dans les graphes. Dans ce contexte, nous allons présenter quelques résultats concernant ce nouveau paramètre dans certains graphes.

## 3.1 Quelques définitions

Dans cette partie, nous citons les notions et les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce chapitre.

**Définition 3.1.1** *Une subdivision d'un graphe* G, *noté par* S(G), *c'est une opération qui consiste à remplacer au moins une arête* $uv$ *de* G *par un nouveau sommet* $w$ *et on reliant* $w$ *à* $u$ *et à* $v$.

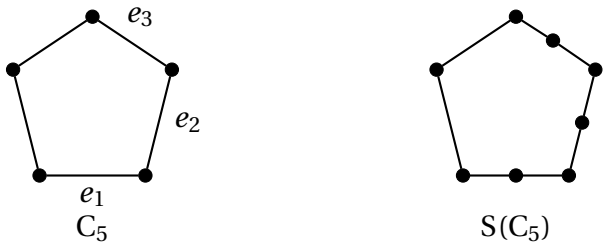



FIGURE 3.1 – Un graphe $C_5$ et $S(C_5)$ en subdivisant trois arêtes $e_1$,$e_2$ et $e_3$ .

**Définition 3.1.2** *Soit* G′ *le graphe obtenu en subdivisant un ensemble d'arêtes* F *d'un graphe* G. *Le nombre de subdivision b-chromatique noté* $sd(G)$ *est le minimum d'arêtes* F *à subdiviser telles que* $b(G') \neq b(G)$.

**Remarque 3.1.1** *Si la subdivision de toutes les arêtes de* G *ne fait pas un changement dans le nombre b-chromatique, alors on pose* $sd(G) = 0$.

## 3.2 Borne pour $b(G_{uv})$

**Théorème 3.2.1** *Soit* G *un graphe d'ordre* $n \geq 2$, *alors pour toute arête* $e = uv$ *de* G *on a :*

$$b(G) - 1 \leq b(G_{uv}) \leq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1.$$

**Preuve.**

1) Pour la borne inférieure : on pose $b(G) = k$, si $k = 2$, alors $b(G_{uv}) \geq 2 \geq b(G) - 1$.

Supposons que $k \geq 3$, soit $c$ une b-coloration de G et $c_1, c_2, \ldots, c_k$ les classes de couleurs, soit $u \in c_i$ et $v \in c_j$.

Nous considérons deux cas :

$1^{er}$ Cas : $c$ reste une b-coloration dans $G_{uv}$ implique que $b(G_{uv}) \geq b(G) > b(G) - 1$.

$2^{ème}$ Cas : $c$ n'est pas une b-coloration dans $G_{uv}$, dans ce cas l'un des sommets $u, v$ disons $u$ est le seul sommet b-dominant dans $c_i$ et $v$ est l'unique voisin de $u$ dans $c_j$. Colorons $u$ par $j$, colorons les autres sommets de $c_i$ par une couleur manquante dans leur voisinage. Comme $k \geq 3$, alors il existe une autre classe $c_l$. Colorons $w$ par $l$, soit $c'$ la coloration obtenue, $c'$ est une b-coloration de G′ par $k-1$ couleurs, les sommets b-dominants de $c'$ autre que $u$ sont les sommets b-dominants pour $c$. D'où $b(G) \geq b(G) - 1$.

2) Pour la borne supérieure :

Puisque G contient au moins une arête, alors :

$$b(G) \geq 2.$$

On peut vérifier facilement que si $n = 2$ ou 3, on a $b(G_{uv}) \leq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ pour toute arête $uv$.

Si $n \geq 4$, supposons que il existe une arête $e = uv$, $e \in E(G)$ telle que $b(G_{uv}) > b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$.

Il clair que pour $n \geq 4$,

$$b(G_{uv}) \geq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil. \tag{3.1}$$

Soit c est une b-coloration de $G_{uv}$ par $b(G_{uv})$ couleurs .Désignons par S l'ensemble de classes de couleurs qui contiennent un seul sommet et T l'ensemble des autres classes de couleurs. Soit V(G[S]) = V(S) et V(G[T]) = V(T), alors on déduit que | V(S) |=| S | et | V(T) |≥ 2 | T | et $b(G_{uv})$ =| S | + | T |. L'ensemble T est non vide sinon $G_{uv}$ est un graphe complet, contradiction. Soit $c_i$ une classe se couleur dans T et $x_i \in c_i$ un sommet b-dominant. Il est facile de voir que l'ensemble S ∪ $\{x_i\}$ est une clique dans $G_{uv}$ et par conséquent dans G. D'où,

$$| S | \leq b(G) - 1. \tag{3.2}$$

On a $b(G_{uv})$ =| S | + | T |, en utilisant les conditions (3.1) et (3.2) on trouve | T |≥ $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Nous considérons deux cas selon la parité de $n$.

$\underline{1^{er} \text{ Cas :}}$ $n$ est pair.

Alors | T |≥ $\frac{n}{2} + 1$ et donc | V($G_{uv}$) |≥| V(T) |≥ 2 | T |≥ $n+2$, contradiction.

$\underline{2^{\text{ème}} \text{ Cas :}}$ $n$ est impair.

Alors | T |≥ $\frac{n+1}{2} + 1$. Donc | V($G_{uv}$) |≥| V(T) |≥ 2 | T |≥ $n+3$. Ceci implique que V(G) ≥ $n+1$, contradiction. Ceci termine la preuve du théorème 3.2. ■

## 3.3 Le nombre de subdivision de $M(K_{1,n})$

**Proposition 3.3.1** *Soit* $M(K_{1,n})$ *le graphe milieu de l'étoile, alors :*

$$sd_b(M(K_{1,n})) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 1 \\ 1 & si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

**Preuve.** Soit G = $M(K_{1,n})$.

• Si $n = 1$, alors G = $P_3$ et $b(G) = 2$, si on subdivise une arête $e_1$ de G on obtient le graphe G′

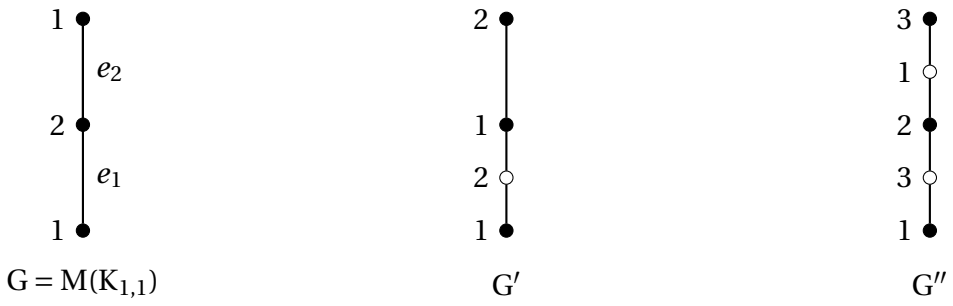
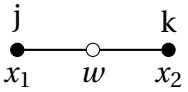



FIGURE 3.2 – La subdivision de $M(K_{1,1})$.

tel que $G' = P_4$ et $b(G') = 2$. On subdivise l'arête $e_2$ de $G'$ on obtient le graphe $G'' = P_5$ et $b(G'') = 3$. Donc $sd_b(G) = 2$.

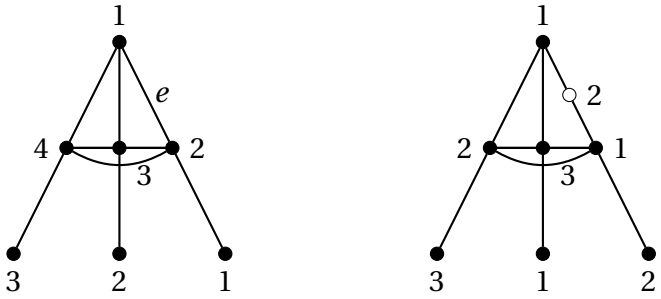
• Si $n \geq 2$, le graphe G contient une clique d'ordre $n+1$ ($K_{n+1}$), alors $b(G) = n+1$. Soit $x_i$, $1 \leq i \leq n+1$ les sommets de G et $w$ est le sommet subdivisé, on subdivise l'arête $e = x_1x_2$ on obtient le graphe $G'$ tel que $m(G') \leq n+1$ et $b(G') \leq n+1$. Supposons que $b(G') = n+1$, considérons une b-coloration $c'$ de $G'$ par $n+1$ couleurs. Sans perte de généralité, colorons $x_i$ par $i$ avec $1 \leq i \leq n+1$. La couleur $k$ est une couleurs manquante dans le voisinage de $x_1$ et la couleurs $j$ est une couleur manquante dans le voisinage de $x_2$, ceci implique que les couleurs disponibles pour le sommet $w$ sont $j$ et $k$, c'est une contradiction. Donc $b(G') \leq n$.




L'arête $e$

Maintenant, on montre que $b(G') = n$, Colorons $x_1$ et $x_2$ par la couleur 1. Colorons $x_i$ par $i-1$, $i \geq 3$. Colorons $w$ par une couleur appartient à $\{2,3,\ldots,n\}$. De ce fait, $sd_b(G)) = 1$. ■

**Exemple 3.3.1** *On obtient comme un exemple le graphe* $M(K_{1,3})$.




$G = M(K_{1,3}), b(G) = 4$ $\quad$ $G', b(G') = 3$

FIGURE 3.3 – La subdivision de $M(K_{1,3})$.

## 3.4 Le nombre de subdivision de $T(K_{1,n})$

**Proposition 3.4.1** *Soit* $T(K_{1,n})$ *le graphe total de l'étoile, alors :*

$$sd_b(T(K_{1,n})) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 1 \ ou \ n \geq 3. \\ 2 & si \qquad n = 2 \end{cases}$$

**Preuve.** Soit $G = T(K_{1,n})$ et $G'$ le graphe obtenu après la subdivision.

• Si $n = 1$, alors $G = K_3$ et d'après la proposition 2.8.2 on a $b(G) = 3$, si on subdivise une arête quelconque de G alors $G' = C_4$ et $b(G') = 2$ donc $sd_b(G) = 1$.

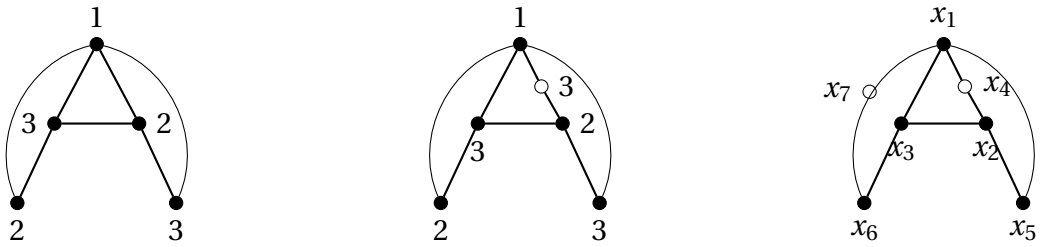



$G = T(K_{1,1})$ $\quad$ $G'$

FIGURE 3.4 – La subdivision de $T(K_{1,1})$.

• Si $n = 2$, alors d'après la proposition 2.8.7 on a $b(G) = 3$. Il est clair que G contient trois cliques d'ordre 3 : $K_3^1$, $K_3^2$ et $K_3^3$, on subdivise une arête $e_1 \in K_3^1 \cup K_3^2$ on obtient le graphe $G'$ et puisque $m(G') = 3$ alors $b(G') \leq 3$. Maintenant, on a $G'$ contient la clique $K_3^3$ implique que $b(G') \geq 3$ donc $b(G) = 3$. On subdivise l'arête $e_2 \in K_3^3 - K_3^1$, on obtient le graphe biparti

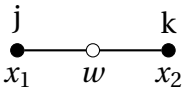
G″ et comme le graphe G″ contient deux sommets charismatiques $x_1$ et $x_3$ alors $b(G'') = 2.$, donc $sd_b(G)) = 2$.




G = T($K_{1,2}$))　　G′　　G″

FIGURE 3.5 – La subdivision de T($K_{1,2}$).

• Si $n \geq 3$, le graphe G contient une clique d'ordre $n+1$ ($K_{n+1}$) et d'après la proposition 2.7.6 on a $b(G) = n+1$. Soit $x_i,\ 1 \leq i \leq n+1$ les sommets de G. Subdivisons l'arête $e = x_1x_2$, soient $w$ le sommet subdivisé et G′ le graphe obtenu après la subdivision de $e$, il est claire que $m(G') \leq n+1$ alors $b(G') \leq n+1$. Supposons que $b(G) = n+1$, considérons une b-coloration $c'$ de G′ par $n+1$ couleurs, Sans perte de généralité, colorons $x_i$ par $i$ avec $1 \leq i \leq n+1$. La couleur $k$ est une couleurs manquante dans le voisinage de $x_1$ et la couleurs $j$ est une couleur manquante dans le voisinage de $x_2$, ceci implique que les couleurs disponibles pour le sommet $w$ sont $j$ et $k$, c'est une contradiction. Donc $b(G') \leq n$.




L'arête $e$

Maintenant, on montre que $b(G') = n$, Colorons $x_1$ et $x_2$ par la couleur 1. Colorons $x_i$ par $i-1$, $i \geq 3$. Colorons $w$ par une couleur appartient à $\{2,3,\ldots,n\}$. De ce fait, $sd_b(G)) = 1$. ■

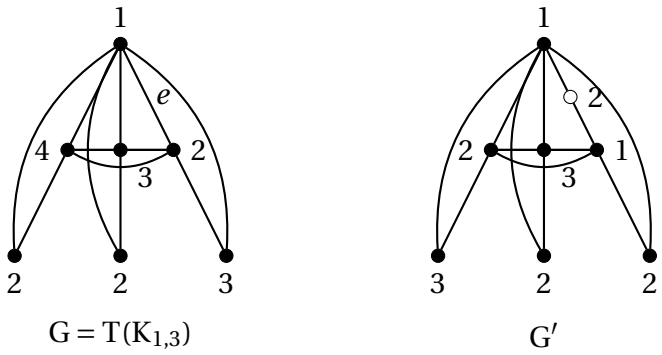



FIGURE 3.6 – La subdivision de $T(K_{1,3})$.

## 3.5 Le nombre de subdivision de $C(K_{1,n})$

**Proposition 3.5.1** *Soit* $C(K_{1,n})$ *le graphe central de l'étoile, alors :*

$$sd_b(C(K_{1,n})) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 1 \ ou \ n \geq 3. \\ 0 & si \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

**Preuve.** Soit $G = C(K_{1,n})$.

• Si $n = 1$, alors $G = P_3$ et $b(G) = 2$, si on subdivise une arête $e_1$ de G alors $G' = P_4$ et $b(G') = 2$. On subdivise l'arête $e_2$ de $G'$ on obtient $G'' = P_5$ et $b(G'') = 3$, Donc $sd_b(G) = 2$.

• Si $n \geq 2$, Soit $G'$ le graphe obtenu après la subdivision de G. Si on subdivise au plus $|E(G)| - 1$ arêtes , alors $b(G') = b(G)$. Maintenant, on subdivise $|E(G)|$ arêtes et le m-degré de G ne change pas car les nouveaux sommets ajoutés sont de degré deux, alors $b(G') = b(G)$ et $m(G') = m(G)$. De ce fait $sd_b(G) = 0$. ■

## 3.6 Le nombre de subdivision de $M(P_n)$

**Proposition 3.6.1** *Soit* $M(P_n)$ *le graphe milieu des chaînes d'ordre* $n \geq 2$*, alors :*

$$sd_b(M(P_n)) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 2 \\ 1 & si \quad n = 3 \\ 0 & si \quad n \geq 4 \end{cases}$$

**Preuve.** Soit $G = M(P_n)$.

• Si $n = 2$, alors $G = P_3$ et d'après la proposition 2.8.8 on a $b(G) = 2$, si on subdivise une

arête $uv$ de G on obtient G′ tel que G′ = $P_4$, alors $b(G') = 2$. On subdivise l'arête $vw$ de G′ on obtient G″ = $P_5$ et $b(G'') = 3$, Donc $sd_b(G) = 2$.

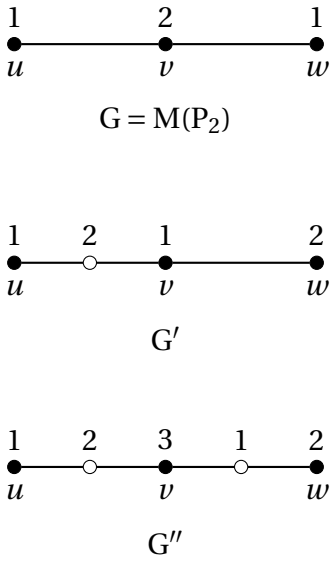



FIGURE 3.7 – La subdivision de $M(P_2)$.

• Si $n = 3$, alors d'après la proposition 2.8.8 on a $b(G) = 3$. Il est clair que, G contient une clique d'ordre 3, si on subdivise l'arête $e \in K_3$ alors le graphe subdivisé G′ est sans cycles impairs et comme G′ est un graphe biparti qui contient deux sommets charismatiques $x_2$ et $x_5$ alors $b(G') = 2$. Donc $sd_b(G) = 1$.

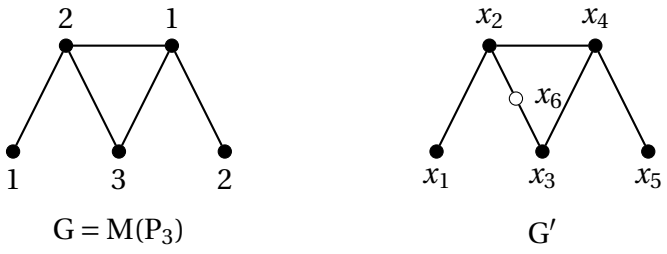



FIGURE 3.8 – La subdivision de $M(P_3)$.

• Si $n \geq 4$, Soit G′ le graphe obtenu après la subdivision de G. Si on subdivise au plus $|E(G)| - 1$ arêtes , alors $b(G') = b(G)$. Maintenant, on subdivise $|E(G)|$ arêtes et le m-degré de G ne change pas car les nouveaux sommets ajoutés sont de degré deux, alors $b(G') = b(G)$ et $m(G') = m(G)$. De ce fait $sd_b(G) = 0$. ■

## 3.7 Le nombre de subdivision de $\mathrm{T}(\mathrm{P}_n)$

**Proposition 3.7.1** *Soit* $\mathrm{T}(\mathrm{P}_n)$ *le graphe total des chaînes d'ordre* $n \geq 2$, *alors :*

$$sd_b(\mathrm{T}(\mathrm{P}_n)) = \begin{cases} 0 & si \quad n = 3 \; ou \; n \geq 6. \\ 1 & si \quad n = 2 \; et \; n = 5. \\ 2 & si \qquad n = 4 \end{cases}$$

**Preuve.** Soit $\mathrm{G} = \mathrm{T}(\mathrm{P}_n)$.

• Si $n = 2$, alors $\mathrm{G} = \mathrm{C}_3$ et $b(\mathrm{G}) = 3$. Si on subdivise une arête quelconque de G alors on obtient le graphe subdivisé G′ tel que $\mathrm{G}' = \mathrm{C}_4$ d'où $b(\mathrm{G}') = 2$. Donc $sd_b(\mathrm{G}) = 1$.

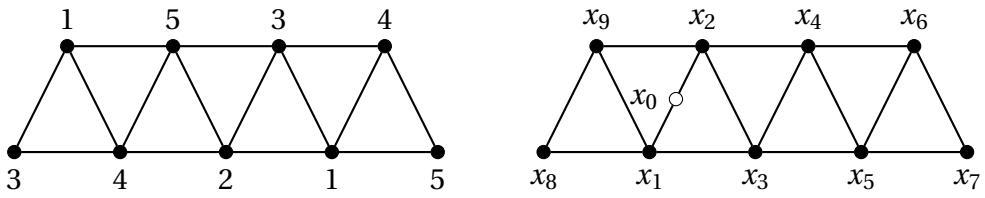



$\mathrm{G} = \mathrm{T}(\mathrm{P}_2)$ $\qquad$ $\mathrm{G}'$

FIGURE 3.9 – La subdivision de $\mathrm{T}(\mathrm{P}_2)$

• Si $n = 5$, alors d'après la proposition 2.8.8 on a $b(\mathrm{G}) = 5$. Si on subdivise l'arête $x_1x_2$ on obtient le graphe G′ tel que $b(\mathrm{G}') \leq 5$, Soit $x_0$ le sommet obtenu après la subdivision de l'arête $x_1x_2$. On suppose que $b(\mathrm{G}') = 5$, dans ce cas les sommets b-dominants sont $x_1, x_2, x_3, x_4 \; et \; x_5$, sans perte de généralité colorons les $x_1, x_2, x_3, x_4 \; et \; x_5$ par des couleurs différentes de la manière suivante :

Colorons $x_i$ par $i$, $1 \leq i \leq 5$ .Pour que $x_2$ soit b-dominant, il faut que $x_0$ soit coloré par 1 et pour que $x_1$ soit b-dominant, il faut que $x_0$ soit coloré par 2. Contradiction, ceci implique que $b(\mathrm{G}) \leq 4$. Donc $sd_b(\mathrm{G}) = 1$.




$\mathrm{G} = \mathrm{T}(\mathrm{P}_5)$ $\qquad$ $\mathrm{G}'$

FIGURE 3.10 – La subdivision de $\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)$.

• Si $n = 3$ et $n \geq 6$, Soit G′ le graphe obtenu après la subdivision de G. Si on subdivise au plus | E(G) | −1 arêtes , alors $b(G') = b(G)$. Maintenant, on subdivise | E(G) | arêtes et puisque le m-degré de G ne change pas car les nouveaux sommets ajoutés sont de degré deux, alors $b(G) = b(G')$ et $m(G') = m(G)$. De ce fait $sd_b(G) = 0$.

• Si $n = 4$, alors d'après la proposition 2.8.8 on a $b(G) = 4$, et on peut vérifier facilement que $m(G) = 4$. Si on subdivise l'arête $e_1$ de G on obtient le graphe G′ tel que $b(G') = 4$. Maintenant, on subdivise l'arête $e_2$ de G on obtient le graphe G″ et comme $m(G'') = 4$ alors $b(G'') \leq 4$.

Supposons que $b(G'') = 4$, soit D l'ensemble des sommets b-dominants tel que $D \subset \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

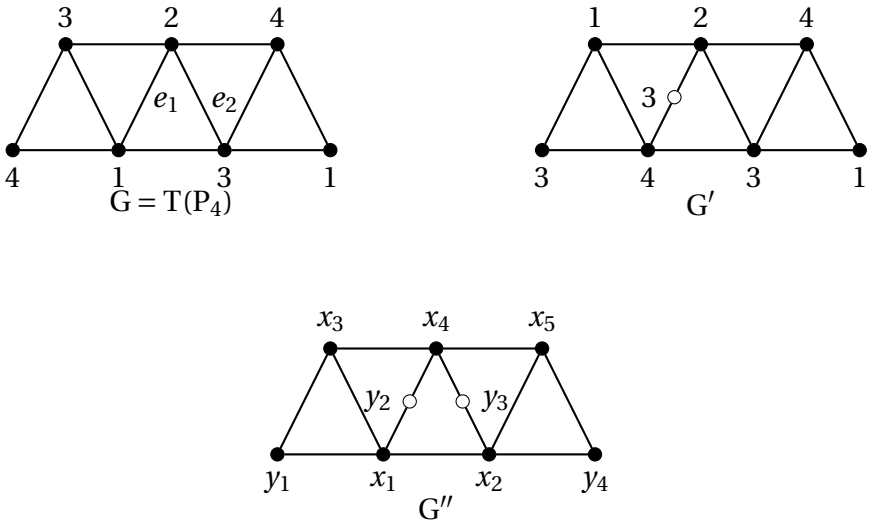



FIGURE 3.11 – La subdivision de $T(P_4)$.

1) Si $x_3, x_4 et x_5$ sont les sommets b-dominants et l'un des sommets $x_1, x_2$ disons $x_1$ est b-dominant. Colorons $x_1$ par 1, $x_4$ par 3 et $x_5$ par 4, comme $x_3$ est b-dominant alors $y_1$ doit être colorer par 4. Comme $x_1$ est b-dominant la couleur 3 doit être dans son voisinage, $y_2$ ne peut être colorer par 3, donc colorons $x_2$ par 3.
Dans ce cas, $x_5$ contient deux couleurs répétés dans son voisinage et comme $d(x_5) = 3$, alors $x_5$ n'est pas un sommet b-dominant, contradiction.
2) Si $x_3, x_4, x_1$ et $x_2$ sont des sommets b-dominants, alors colorons $x_i$ par $i$, $1 \leq i \leq 4$. Comme $x_1$ est b-dominant il a besoin de la couleur 4, $y_2$ ne peut pas être colorer par 4, donc colorons $y_1$ par 4.

Dans ce cas, $x_3$ a deux couleurs répétés dans son voisinage et comme $d(x_3) = 3$, alors $x_3$ ne peut être b-dominant, contradiction.

3) Si $x_1, x_2, x_3$ et $x_5$ sont des sommets b-dominants, alors colorons $x_i$ par $i$, $1 \leq i \leq 3$, colorons $x_5$ par 4 et comme $x_3$ est b-dominant alors il a besoin de 4 et puisque $x_4$ ne reçois pas la couleur 4 alors colorons $y_1$ par 4 et colorons $x_4$ par 2.

Dans ce cas, $x_5$ a deux couleurs répétés dans son voisinage et comme $d(x_5) = 3$, alors $x_5$ n'est pas un sommet b-dominant, contradiction. Alors $b(G'') \leq 3 \ldots (1)$. D'autre part, on a $b(G'') \geq \chi(G'') \geq \chi(H)$ tel que H est un sous graphe de $G''$, $H = C_5$ et il est clair que $\chi(H) = 3$ d'où $b(G'') \geq 3 \ldots (2)$. De (1) et (2) alors $b(G'') = 3$, donc $sd_b(G) = 5$. ■

## 3.8 Le nombre de subdivision de $M(C_n)$

**Proposition 3.8.1** *Soit* $M(C_n)$ *le graphe milieu des cycles d'ordre* $n \geq 3$*, alors :*

$$sd_b(M(C_n)) = \begin{cases} 0 & si \quad n = 3,4 \text{ ou } n \geq 6. \\ 1 & si \qquad n = 5. \end{cases}$$

**Preuve.** Soit $G = M(C_n)$.

• Si $n = 3,4$ ou $n \geq 6$, Soit $G'$ le graphe obtenu après la subdivision de G. On subdivise au plus $|E(G)| - 1$ arêtes , alors $b(G') = b(G)$. Maintenant, on subdivise $|E(G)|$ arêtes et le m-degré et le nombre b-chromatique de G ne change pas car les nouveaux sommets ajoutés sont de degré deux, alors $b(G) = b(G')$ et $m(G') = m(G)$. De ce fait $sd_b(G) = 0$.

• Si $n = 5$, alors d'après la proposition 2.8.9 on a $b(G) = 5$ et on peut vérifié facilement que $m(G) = 5$, si on subdivise une arête $e$ de G on obtient le graphe $G'$ et comme $m(G') = 5$ alors $b(G') \leq 5$. Supposons que $b(G') = 5$, soit $x_1, x_2, x_3, x_4$ et $x_5$ les sommets denses, sans perte de généralité, colorons $x_i$ par $i$, $1 \leq i \leq 5$. La couleur 4 est présente dans le voisinage de $x_4$, contradiction, alors $b(G') \leq 4$. Donc $sd_b(G') = 1$. ■

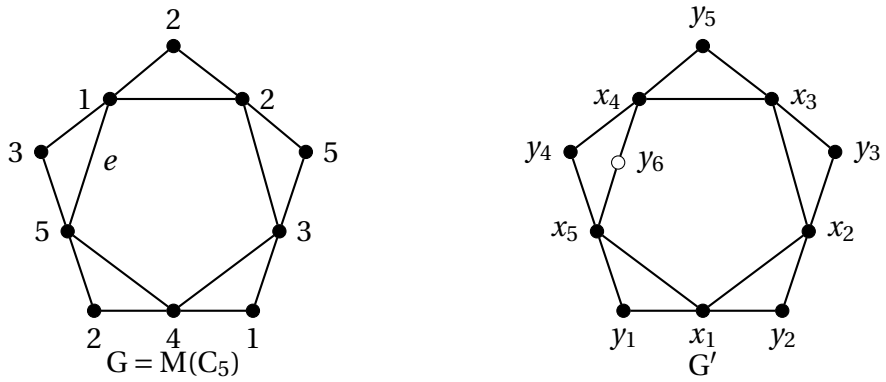



FIGURE 3.12 – La subdivision de $M(C_5)$.

## 3.9 Le nombre de subdivision de $T(C_n)$

**Proposition 3.9.1** *Soit* $T(C_n)$ *le graphe total des cycle d'ordre* $n \geq 3$, *alors :*

$$sd_b(T(C_n)) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 3 \; et \; n = 4. \\ 0 & si \qquad n \geq 5. \end{cases}$$

**Preuve.** Soit $G = T(C_n)$.

• Si $n = 3$, alors d'après la proposition 2.8.9 on a $b(G) = 3$. Si on subdivise une arête quelconque de G, alors on obtient le graphe subdivisé $G'$ et puisque $b(G') \geq b(G) + 1$ d'où $b(G') \geq 4$. De ce fait, $sd_b(G) = 1$.

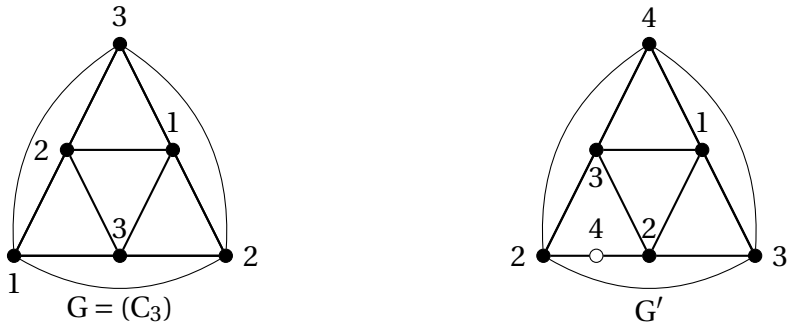



FIGURE 3.13 – La subdivision de $T(C_3)$.

• Si $n = 4$, alors d'après la proposition 2.8.9 on a $b(G) = 4$. Si on subdivise une arête quelconque de G, alors on obtient le graphe subdivisé $G'$ et puisque $b(G') \geq b(G) + 1$ d'où $b(G') \geq 5$. Donc, $sd_b(G) = 1$.




FIGURE 3.14 – La subdivision de $T(C_4)$.

• Si $n \geq 5$, alors d'après la proposition 2.8.9 on a $b(G) = 5$. Si on subdivise au plus $|E(G)| - 1$ arêtes , alors $b(G') = b(G) = 5$. Maintenant, on subdivise $|E(G)|$ arêtes et le m-degré de G ne change pas car les nouveaux sommets ajoutés sont de degré deux, alors $b(G) = 5$. De ce fait $sd_b(G) = 0$. ■

## 3.10 Le nombre de subdivision de $W_n$

**Proposition 3.10.1** *Soit* $W_n$ *le graphe roue d'ordre* $n \geq 4$, *alors :*

$$sd_b(W_n) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 4 \text{ et } n = 5. \\ 5 & si \quad n = 6. \\ 0 & si \quad n \geq 7. \end{cases}$$

**Preuve.** Soit $G = W_n$.

• Si $n = 4$, alors d'après la proposition 2.8.5 on a $b(G) = 4$ et on peut vérifié facilement que $m(G) = 4$, si on subdivise une arête quelconque de G on obtient le graphe $G'$ et soit w le sommet subdivisé, comme $G'$ contient un clique $K_3$, alors $b(G') \geq 3 \ldots (1)$ et on a $m(G') = 4$ ceci implique que $b(G') \leq 4$. Supposons que $b(G') = 4$, colorons $x_i$ par i, $1 \leq i \leq 4$ et w ne peut être colorer par 1 et 2, c'est une contradiction alors $b(G') \leq 3 \ldots (2)$. De (1) et (2) alors $b(G') = 3$, donc $sd_b(G) = 1$.

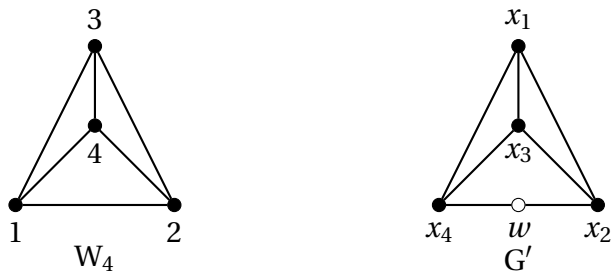



FIGURE 3.15 – La subdivision de $W_4$

• Si $n = 5$, alors d'après la proposition 2.8.5 on a $b(G) = 3$ et il est clair que $m(G) = 4$, si on subdivise une arête $e = uv$ on obtient le graphe G′. Soit w le sommet subdivisé et comme $m(G') = 4$ alors $b(G') \leq 4 \ldots (1)$.

Soit c une b-coloration de G′ définit de la manière suivante : colorons $x_i$ par i, $1 \leq i \leq 4$ et colorons $x_5$ par 3 et w par 2 alors $b(G') \geq 4 \ldots (2)$. De (1) et (2) alors $b(G') = 4$, d'où $sd_b(G) = 1$.

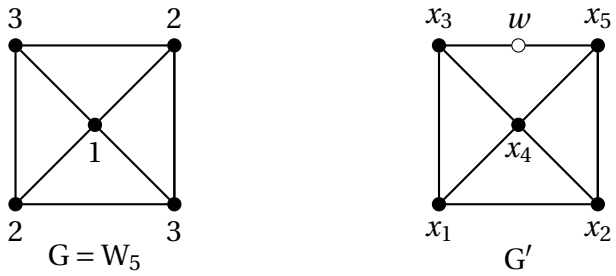



FIGURE 3.16 – La subdivision de $W_5$.

•Si $n = 6$, alors d'après la proposition 2.8.5 on a $b(G) = 4$ , si on subdivise au plus quatre arêtes on obtient le graphe subdivisé G′ tel que $b(G') = 4$. Maintenant en subdivise cinq arêtes alors $b(G') \leq 4$. Supposons que G′ admet une b-coloration avec 4 couleurs.

Soit D l'ensemble des sommets b-dominants, $D \subset \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

1) Si $x_1$ est b-dominant, dans ce cas il existe deux sommets b-dominant sont adjacents, sans perte de généralité, $x_2$ et $x_3$ sont dominants et adjacents.

La couleur $c(x_1)$ doit être présente dans les voisinages de $x_2$ et $x_3$ donc $c(x_4) = c(x_1$ et $c(x_6) = c(x_1$, dans ce cas $x_5$ ne peut être b-dominant car $d(x_5) = 3$ et $x_5$ a deux sommets de même couleur dans son voisinage, contradiction.

2) Si $x_1$ n'est pas b-dominant, sans perte de généralité, $x_2$, $x_3$ , $x_4$, $x_5$ sont b-dominants de couleurs distincts. $c(x_i) = i - 1$, $2 \leq i \leq 5$. Les couleurs disponible pour $x_6$ sont 2 et 3, dans ce

cas $x_2$ ou $x_5$ ne sont pas b-dominants, contradiction. Alors $b(G') \leq 3 \ldots (1)$. D'autre part, on a $b(G') \geq \chi(G') \geq \chi(H)$ tel que H est un sous graphe de $G'$, $H = C_5$ et il est clair que $\chi(H) = 3$ d'où $b(G') \geq 3 \ldots (2)$. De (1) et (2) alors $b(G') = 3$, donc $sd_b(G) = 5$. ■

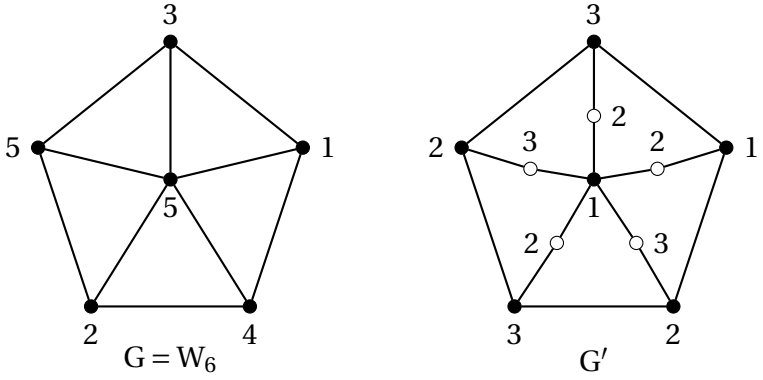



FIGURE 3.17 – La subdivision de $W_6$.

## 3.11 Le nombre de subdivision du graphe k-parti complet

**Proposition 3.11.1** *Soient* G *un graphe* $k-parti$ *complet avec* $K_i$, $1 \leq i \leq k$ *sont les classes de la partition de* G *et* $p = |K_j|$ *tel que* $k_j = \min_{i \in \{1,\ldots,k\}} k_i$ *et* $q = |K_l|$ *tel que* $K_l = \min_{i \in \{1,\ldots,j-1;j+1,\ldots,k\}} K_i$ *alors :*

$$sd_b(G) = \begin{cases} 0 & si \quad k = 2 \ et \ \min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| = 1. \\ 1 & si \quad k \geq 3 \ et \ \min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| = 1 \ ou \ k = 2 \ \min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| \geq 2. \\ p \times q & si \quad k \geq 3 \ et \ \min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| \geq 2. \\ 2 & si \quad k = 2 \ et \ \min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| = 1 \ et \ \max_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| \geq 2. \end{cases}$$

**Preuve.** • Si $k = 2$ et $\min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| = 1$, alors $G = P_2$ et $b(G) = 2$. Si on subdivise une arête de G on obtient le graphe $G'$ tel que $G' = P_3$ alors $b(G') = 2$. Donc $sd_b(G) = 0$.

• Si $k \geq 3$ et $\min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| = 1$, alors G est une clique d'ordre $k$ et $b(G) = k$. Si on subdivise une arête de G on obtient le graphe $G'$ tel que $b(G') = k-1$, donc $sd_b(G) = 1$.

• Si $k = 2$ $\min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| \geq 2$, d'après la proposition 2.9.4 alors $sd_b(G) = 1$.

• Si $k \geq 3$ $et$ $\min_{i \in \{1,\ldots,k\}} |K_i| \geq 2$, on a $b(G) = k$ et soit $G'$ le graphe obtenu après la subdivision de G. On subdivise toutes les arêtes entre $k_j$ et $K_l$, il est claire que le nombre d'arêtes entre $k_j$ et $K_l$ est $p \times q$. Colorons les sommets de $k_j$ et $K_l$ par la même couleur $j$ ou $l$. Colorons

les sommets subdivisés par une couleurs appartient à $\{1,2,\ldots,k\}-\{j,l\}$ alors $b(\mathrm{G})=k-1$. Donc $sd_b(\mathrm{G})=p\times q$.

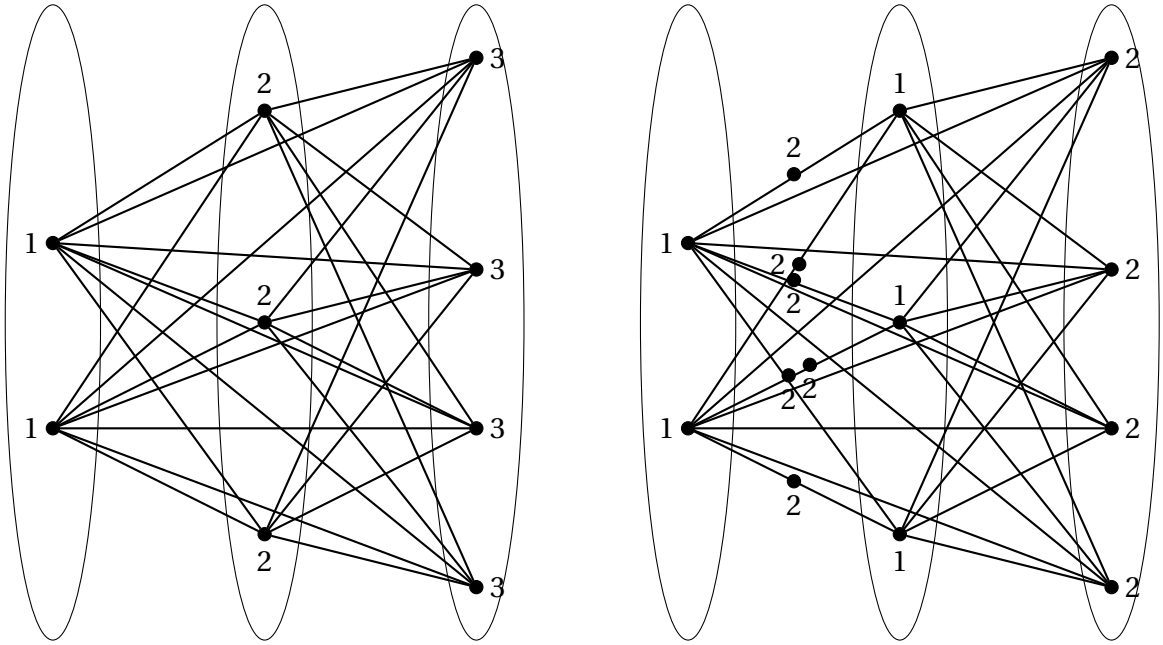



FIGURE 3.18 – La subdivision de graphe 3-parti complet.

• Si $k=2$ et $\min\limits_{i\in\{1,\ldots,k\}} |\mathrm{K}_i|=1$ et $\max\limits_{i\in\{1,\ldots,k\}} |\mathrm{K}_i|\geq 2$, d'après la proposition 2.9.4 alors $sd_b(\mathrm{G})=2$.

■

## 3.12 Le nombre de subdivision du graphe de Petersen

**Proposition 3.12.1** *Soit* P = *le graphe de Petersen, alors :*

$$sd_b(\mathrm{P})=1$$

**Preuve.** Soient G = P le graphe de Petersen et G′ le graphe obtenu après la subdivision de G, et on a $b(\mathrm{G})=3$ et $m(\mathrm{G})=4$, $b(\mathrm{G})\leq m(\mathrm{G})$, si on subdivise une arête quelconque de G alors $b(\mathrm{G}')=4$. Donc $sd_b(\mathrm{G})=1$. ■

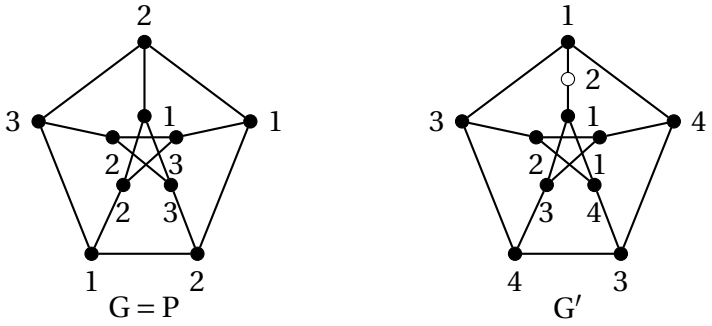



FIGURE 3.19 – La subdivision de P.

## 3.13 Le nombre de subdivision du joint de deux graphes

**Proposition 3.13.1** *Soit* $G_1$ *et* $G_2$ *deux graphes, leurs joint est* $G_1 \vee G_2$ *obtenu à partir de* $G_1 + G_2$ *alors :*

$$sd_b(G_1 \vee G_2) = \min(sd_b(G_1), sd_b(G_2)).$$

**Preuve.** Soient $H = G_1 \vee G_2$ le joint de deux graphes et $H'$ le graphe obtenu après la subdivision de H. On a $b(H) = b(G_1) + b(G_2)$, on choisit le minimum du nombre de subdivision entre les deux graphes. Si on subdivise ce nombre d'arêtes dans le graphe qui est le nombre de subdivision minimum alors on obtient le graphe subdivisé H tel que $b(H') \neq b(H)$. De ce fait, $sd_b(G_1 \vee G_2) = \min(sd_b(G_1), sd_b(G_2))$. ■

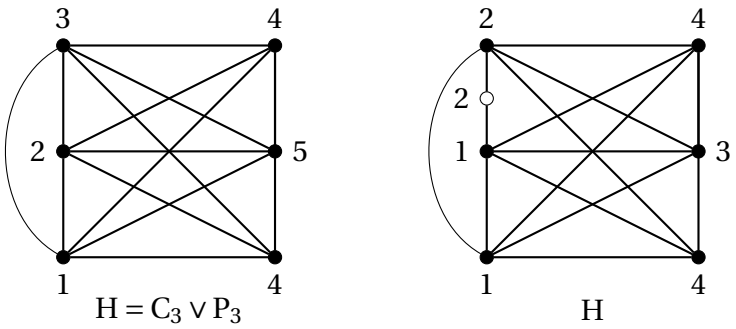



FIGURE 3.20 – La subdivision de $C_3 \vee P_3$.

## 3.14 Le nombre de subdivision du graphe Splitting de $\mathrm{P}_n$

**Proposition 3.14.1** *Soit* $\mathrm{SP}(\mathrm{P}_n)$ *le graphe Splitting des chaînes d'ordre* $n \geq 2$*, alors :*

$$sd_b(\mathrm{SP}(\mathrm{P}_n)) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 2,3,4. \\ 0 & si \quad n \geq 5. \end{cases}$$

**Preuve.** Soit $\mathrm{G} = \mathrm{SP}(\mathrm{P}_n)$.

• Si $n = 2$, alors d'après la proposition 2.8.10 on a $b(\mathrm{G}) = 2$. Si on subdivise une arête quelconque de G, alors on obtient le graphe subdivisé G′ tel que $\mathrm{G}' = \mathrm{P}_5$ d'où $b(\mathrm{G}') = 3$, ceci implique que $sd_b(\mathrm{G}) = 1$.

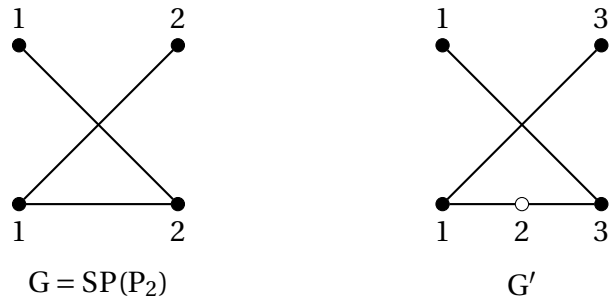



FIGURE 3.21 – La subdivision de $\mathrm{SP}(\mathrm{P}_2)$.

• Si $n = 3$, alors d'après la proposition 2.8.10 on a $b(\mathrm{G}) = 2$ et on peut vérifier facilement que $m(\mathrm{G}) = 3$. Si on subdivise une arête quelconque de G, alors on obtient le graphe subdivisé G′ tel que $b(\mathrm{G}') \leq 3 \ldots (1)$. D'autre part, on a $b(\mathrm{G}') \geq \chi(\mathrm{G}') \geq \chi(\mathrm{H})$ avec H est sous graphe de G′ tel que $\mathrm{H} = \mathrm{C}_5$ et puisque $\chi(\mathrm{H}) = 3$ alors $b(\mathrm{G}') \geq 3 \ldots (2)$. De (1)et (2) on a $b(\mathrm{G}') = 3$. De ce fait, $sd_b(\mathrm{G}) = 1$.

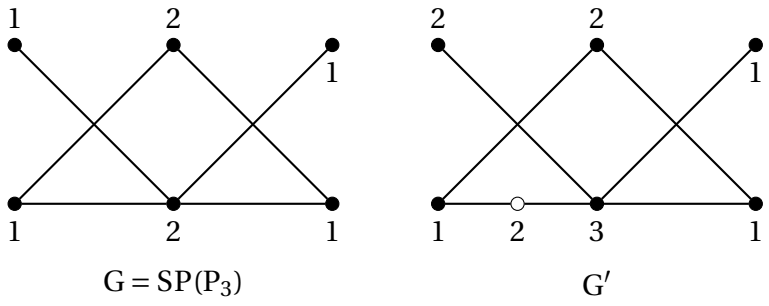
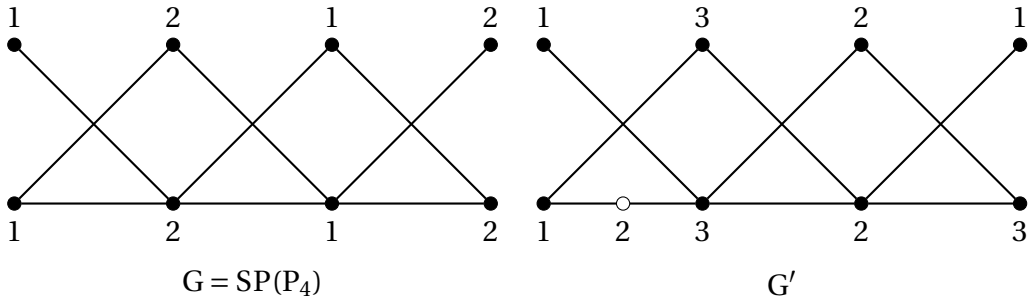



FIGURE 3.22 – La subdivision de $\mathrm{SP}(\mathrm{P}_3)$.

• Si $n = 4$, alors d'après la proposition 2.8.10 on a $b(G) = 2$ et on peut vérifier facilement que $m(G) = 3$. Si on subdivise une arête quelconque de G, alors on obtient le graphe subdivisé $G'$ tel que $b(G') \leq 3 \ldots (1)$. D'autre part, on a $b(G') \geq \chi(G') \geq \chi(H)$ avec H est sous graphe de $G'$ tel que $H = C_5$ et puisque $\chi(H) = 3$ alors $b(G') \geq 3 \ldots (2)$. De (1) et (2) on a $b(G') = 3$. De ce fait, $sd_b(G) = 1$.




$G = SP(P_4)$ $\qquad$ $G'$

FIGURE 3.23 – La subdivision de $SP(P_4)$.

• Si $n \geq 5$, Soit $G'$ le graphe obtenu après la subdivision de G. On subdivise au plus $|E(G)| - 1$ arêtes, alors $b(G') = b(G)$. Maintenant, on subdivise $|E(G)|$ arêtes et comme le m-degré et le nombre b-chromatique de G ne change pas car les nouveaux sommets ajoutés sont de degré deux, alors $b(G) = b(G')$ et $m(G') = m(G)$. De ce fait $sd_b(G) = 0$. ■

# *Conclusion*

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéressés à la notion de la b-coloration d'un graphe, et plus précisément à la détermination de nombre de subdivision b-chromatique de certains graphes particuliers.

Nous avons, dans un premier temps, rappelé quelques valeurs exactes du nombre b-chromatiques pour des graphes particuliers ensuite nous avons donnés quelques résultats existants sur le nombre de subdivision.

Dans un second temps, nous avons montré que pour tout graphe G et pour tout arête $uv$ de G, $b(G) - 1 \leq b(G_{uv}) \leq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ où $n$ est l'ordre de G tel que $n \geq 2$.

Enfin, nous avons déterminé les valeurs du nombre de subdivision b-chromatique de certain graphe particuliers.

# Bibliographie


[1] M. Blidia, N. Ikhlef, F. Maffray. On vertex b-critical trees. Opuscula Math-ematica 33(1)(2013)19-28.

[2] R. Brooks. On coloring the nodes of a network Math Proc Cambridge Philos. Soc,37(1941)194-197.

[3] M. Blidia, N. Ikhlef, F. Maffray. On graphs vertex critical with respect b-chromatic number colleque sur l'optimisation et les systèmes d'informatique COSI 2011, 24 28 Avril, Guelma, Algérie.

[4] C. Berge. Graphs. North Holland, 1985.

[5] L. W. Beineke : Charaterizations of derived graphs. Journal of combinatorial Theory,9(2)(1970)129-135.

[6] F. Harary, S. Hedetniemi. and G. Prins. An interpolation theorem for graphical homomorphisms. Portugaliae mathematica, 26 :453-462, 1967.

[7] F. Gavril, M. Yannakakis. Edge dominating sets in graphs. SIAM journal of Applied Mathimatics, 38(3)(1980), 364-372.

[8] T. Faik. La b-continuité des b-colorations : complixité, propriétés structurelles et algorithmes. Thèse d'univesité, univesité de PARIS-SUD U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY, 2005.

[9] R. W.Irving, D. F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math 91, 127-141, 1999.

[10] J. Kratochvil, Z. Tuza, M. Voigt. On the b-chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science 2573, 310-320, 2002.

[11] D. F. Manalove. Minimaximal and maxminimal optimisation problems : a partial orderbased approach phD thesis, thechnical report tr-1998-27 of the computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[12] M. Kouider, M. Mathéo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph. Discrete Math.256 :267-277, 2002.

[13] M. Kouider, M. Zaker.Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs Discrete mathematics, vol.306,no7,pp.617-623, 2006.

[14] C.T. Hoàng, M. Kouider. On the b-dominating coloring of graphs. Discrete Appl. Math. 152 :176-186, 2005.

[15] M. Blidia, N. Ikhlef, F. Maffray. b-coloring of some bipartitevgraphs, Aus-tralasian J.Combin 53(2012)67-76.

[16] S. Bachouche, S. Guettar. La b-coloration et le nombre de subdivision dans les graphes. Université de Yahia Fares de Médéa, 2014.

[17] N. Ikhlef Eshouf. Etude de la b-coloration dans les graphs : graphes extrémaux et graphes critiques. Université de SAAD DAHLAB de Blida, 2011.

[18] A. El Sahili, M.Kouider. About b-colorings of regular graphs. Res. Rep. 1432, LRI, Univ.Orsay,France, 2006.

[19] B. Effantin, H. Kheddouci. A distributed algothm for a b-coloring of a graph. In : Guo, M, Yang, L.T, Di Martino, B,Zima, H.P., Dongarra, J.,Tang,F.(eds.)ISPA.LNCS,vol.4330, pp.430 438, 2006.

[20] H. Elghazel, V. Deslandres, M.S. Hacid, A. Dussauchoy, H. Kheddpuci. A New Clustering Approach for Symbolic Data and Its Validation : Application to the Healthcare Data. F. Esposito et al.(Eds) : ISMIS, LNAI, pp.473 482, 2006.

[21] D. Gaceb, V. Eglin, F. Lebourgeois, H.Emptoz. Graph b-coloring for automatic recognition of documents. Dans International Conference on Analysis and Recognition (2009) 261-265.

[22] L. Dekar, H. Kheddouci. A Graph b-coloring Based Method for Composition-Oriented Web services classification.A. An et al. (Eds.) : ISMIS,LNAI 4994, pp.599 604, 2008.

[23] M. Jakovac, I. Peterin. The b-chromatic number and related topics-a survey. Priprint.

[24] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math.14 :247-256 ; 1976.

[25] M. Behzad : A criterion for the planarity of the total graph of a graph. proc. Camb. Philos. Soc.63 : 679-681 ; 1967.

[26] A. Souadkia. F. Dahmani avec Mr R. Lemdani. Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes. Univ de Médéa 2016.

[27] S. Arockiaraj. V. Premalatha. b-chromatic number of some splitting graphs. Journal of Informatique Mathematical Sciences. vol.7, No. 1,pp.49-67,2015.

[28] D. Ikhlef Eschouf. A. Maachou avec Mr M.Zamime. Caractérisation des graphes double b-critiques. Univ de Médéa 2017.

[29] M. Kadri avec N. Ikhlef Eschouf. Le nombre b-chromatique du graphe total de certains graphes particuliers. Univ de Médéa 2011.