République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Département des Mathématiques et Informatiques



MÈMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Par :
AMMOUR AMINA

Intitulé

Relations Linéaires

Les membres du jury

Benaichouche Noureddine	Examinateur 1
Ayadi Houcine	Examinateur 2
Bouadjila Khaled	Encadreur

REMERCIEMENT

Tout d'abord, nous remercions **Dieu** le tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a données durant tous ces années d'étude.

Je remercie mon exceptionnel encadreur **M.Bouadjila Khaled** . D'abord de m'avoir fait confiance, ensuite de m'avoir laissé la liberté et le temps nécessaire d'enquêter sur des questions qui m'étaient apparues intéressantes, ainsi sans ses orientations et ses suggestions les plus inestimables, ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour. J'exprime ma profonde et sincère gratitude à toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail, et qui m'ont encouragé, soutenu tout au long de ce travail.

Un grand merci à tous **les enseignants du département des Mathématiques et Informatiques à Médéa** pour leurs précieuses aides et orientations.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mes chères parents pour leur amour, et leur soutien, pour mon bonheur et ma réussite.

À mon frère et à mes soeurs

À toute ceux qui me sont chères

À mes amies

Pour ceux qui m'aiment et m'estiment ...

Table des matières

1 Relations sur les ensembles **2**

1.1 Définitions 2

1.2 Compositions des relations 4

1.3 Restrictions et extensions des relations 5

2 Relations linéaires **7**

2.1 Algèbre des relations linéaires 13

2.2 Relations linéaires normés 17

2.2.1 Norme d'une relation linéaire 17

2.2.2 Module minimum d'une relation linéaire 22

3 Relations linéaires continues **23**

3.1 Continuité et ouverture 23

3.2 Principe de la borne uniforme 29

Introduction Générale

Le concept de relation linéaire est apparu dans la littérature il y a quelques décennies , non seulement par la nécessité de considérer des adjoints d'opérateur différentiel non densément linéaire (Voir [7]), mais aussi par la nécessité de considérer les inverses de certains opérateurs utilisés, par exemple, dans l'étude de certains problèmes de Cauchy associés à des équations de type parabolique dans des espaces de Banach (Voir [4]).
A travers cette mémoire, on essayera de mieux connaître les propriétés des relations linéaires et de mettre en évidence quelques-uns des résultats de la théorie des opérateurs multi-valeurs (relations linéaires).
Notre travail se divise en trois chapitre. Dans le premier chapitre on donne les notions principales des relations sur les ensembles.
Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la définition et les propriétés algébriques des relations linéaires, ensuite on donne les définitions et les propriétés de la norme et du module minimun d'une relation linéaire.

Le troisième chapitre représente la notion de continuité des relations linéaires, et on termine par un résultat fondamental dans la théorie des opérateurs, c'est "le principe de la borne uniforme" pour les relations linéaires.

Chapitre 1

Relations sur les ensembles

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Relation sur un ensemble) *Soient U, V deux ensembles arbitraires non vides. Une* ***relation*** *T de U dans V est toute application ayant domaine $D(T)$, un sous-ensemble non vide de U, et en prenant des valeurs dans $2^V \setminus \emptyset$ (la collection de sous-ensembles non vides de V). Une telle application T est également connue comme une application* ***multi-valeur****. Si T associe les points de son domaine en singletons, alors T est dite* ***une relation à valeur unique ou une fonction****.*

Définition 1.2 (Domaine d'une relation) *Pour $u \in U$, $u \notin D(T)$ nous définissons $Tu = \emptyset$. Avec cette convention, on a :*

$$D(T) := \{u \in U \ : \ Tu \neq \emptyset\}.$$

Notation :

- La classe de toutes les relations de U dans V sera notée $\mathcal{R}(U, V)$.
- On note par fois Tu seulement au lieu de $T(\{u\})$ ou $T(u)$.

Définition 1.3 (Graphe d'une relation) *Soit $T \in \mathcal{R}(U, V)$,* ***le graphe*** *de T est le sous-ensemble $G(T)$ de $U \times V$ défini par :*

$$G(T) := \{(u, v) \in U \times V \ : \ u \in D(T), \ v \in T(u)\}.$$

Remarque 1.1 *Une relation dans $\mathcal{R}(U,V)$ est déterminée de façon unique par son graphe, et inversement, tout sous-ensemble non vide de $U \times V$ détermine de façon unique une relation.*

Définition 1.4 (Relation inverse) *Soit $T \in \mathcal{R}(U,V)$, **l'inverse** de T est la relation T^{-1} donnée par :*

$$G(T^{-1}) := \{(v,u) \in V \times U \ : \ (u,v) \in G(T)\}.$$

Définition 1.5 (Image d'un sous-ensemble) *Soit M un sous-ensemble de U, **l'image** de M par T est donnée par :*

$$T(M) := \cup\{T(m) : m \in M \cap D(T)\}. \tag{1.1}$$

L'image de la relation T est donnée, donc par :

$$R(T) \ := \ T(U) \qquad (= \ T(D(T)), \ \textit{par}\,(1.1)).$$

Définition 1.6 (Surjectivité et Injectivité) *Soit $T \in \mathcal{R}(U,V)$*

- *T est dite **surjective**, si $R(T) = V$.*
- *T est dite **injective**, si T^{-1} est à valeur unique.*

Propriété : Si T est injective, alors on a l'implication suivante :

$$T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2 \qquad (\forall u_1, u_2 \in D(T)).$$

Définition 1.7 (Image réciproque) *Soit $\emptyset \neq N \subset V$. L'image réciproque de N est donnée par :*

$$T^{-1}(N) = \{u \in D(T) : N \cap Tu \neq \emptyset\}$$

En particulier, pour $v \in R(T)$,

$$T^{-1}v = \{u \in D(T) : v \in Tu\}.$$

De plus, on a : $D(T^{-1}) = R(T)$, et $R(T^{-1}) = D(T)$.

Définition 1.8 (Relation identité) ***La relation identité** définie sur un sous-ensemble E non vide de U est notée par I_E ou simplement I, c'est la relation dans $\mathcal{R}(U,U)$ dont le graphe est :*

$$G(I_E) = \{(e,e) : e \in E\}.$$

1.2 Compositions des relations

Définition 1.9 *Soit $T \in \mathcal{R}(U,V)$ et $S \in \mathcal{R}(V,W)$, où $R(T) \cap D(S) \neq \emptyset$.*
***la composition** ou **le produit** $S \circ T$ dans $\mathcal{R}(U,W)$ est définie comme suit :*

$$(S \circ T)(u) := S(Tu), (u \in U).$$

Définition 1.10 (Domaine du produit) ***Le domaine de** $S \circ T$ est donné par :*

$$\begin{aligned} D(S \circ T) &= \{u \in U : S(Tu) \neq \emptyset\} \\ &= \{u \in U : Tu \cap D(S) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Définition 1.11 (Graphe du produit) *Le graphe de $S \circ T$ est donné par :*

$$G(S \circ T) = \{(u,w) \in U \times W : \ (u,v) \in G(T) \text{ et } (v,w) \in G(S) \text{ pour certain } v \in V\}.$$

Propriétés

1. $T = TI_U = I_V T$.
2. $G(I_{D(T)}) \subset G(T^{-1}T)$.
3. $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.
4. $D(ST) = T^{-1}S^{-1}(R(S))$.
5. La composition est associative, c'est à dire, si $R \in \mathcal{R}(W,Z)$ alors :

$$R(ST) = (RS)T.$$

Proposition 1.1 *Soit $T \in \mathcal{R}(U,V)$, alors :*

1. *T est injective $\iff T^{-1}T = I_{D(T)}$.*
2. *T est à valeur unique $\iff TT^{-1} = I_{R(T)}$.*

Preuve

1. Supposons que T est injective et montrons que $T^{-1}T = I_{D(T)}$,
   c-à-d $G(T^{-1}T) = G(I_{D(T)})$. On a :

   $G(T^{-1}T) = \{(u,w) \in U \times U, (u,v) \in G(T) \text{ et } (v,w) \in G(T^{-1}) \text{ pour certain } v \in V\}.$

   On a : $(u,v) \in G(T)$, donc $(v,u) \in G(T^{-1})$, c-à-d $v \in R(T)$ *et* $u \in T^{-1}v$,
   d'où $T^{-1}v = u$. (car T^{-1} est à valeur unique). D'autre part, on a :
   $(v,w) \in G(T^{-1})$, donc $w \in R(T)$ *et* $w \in T^{-1}v$, et ainsi $T^{-1}v = w$.
   Donc $u = w$, d'où $G(T^{-1}T) = G(I_{D(T)})$.

2. Supposons maintenant que $T^{-1}T = I_{D(T)}$ et montrons que T est injective, c-à-d T^{-1} est à valeur unique. Soit $v \in R(T)$, $\exists u \in D(T)$ tel que : $v \in Tu$, donc

$$T^{-1}v \subset T^{-1}Tu = I_{D(T)}(u) = \{u\},$$

ce qui implique que $T^{-1}v = u$. Donc T^{-1} est à valeur unique, d'où T est injective.

3. Comme T est à valeur unique, alors T^{-1} est injective, on remplace T par T^{-1} dans la première équivalence on obtient la deuxième.

■

1.3 Restrictions et extensions des relations

Définition 1.12 (Restriction) *Soit M un sous-ensemble de U tel que $M \cap D(T) \neq \emptyset$. **La restriction** de T à M, notée $T\mid_M$, est définie par :*

$$T\mid_M \in \mathcal{R}(U,V),$$

$$D(T\mid_M) = D(T) \cap M,$$

$$(T\mid_M)m = Tm, \text{ pour } m \in M.$$

Définition 1.13 *Le graphe de $T\mid_M$ est donné par :*

$$\begin{aligned} G(T\mid_M) &= G(T) \cap (M \times V) \\ &= \{(u,v) \in G(T) \ : \ u \in M\}. \end{aligned}$$

Définition 1.14 (Extension) *Soient S et T deux relations de $\mathcal{R}(U,V)$, on dit que S est **une extension** de T si :*

$$S\mid_{D(T)} = T.$$

Remarque 1.2 *Si S est une extension de T, alors*

$$G(T) \subset G(S).$$

Remarque 1.3 *L'inverse est cependant faux, c'est à dire, $G(T) \subset G(S)$ n'implique pas que S est une extension de T.*

Exemple 1.1 *Soit E un sous-ensemble de U et soit J_E l'injection canonique de E dans U, c-à-d $J_E \in \mathcal{R}(E,U), D(J_E) = E$ et $J_E(e) = e$ pour tout $e \in E$, on a :*

$$T\mid_E = TJ_EJ_E^{-1}. \tag{1.2}$$

On note que $I_E = I_U\mid_E$ (en particulier, les deux cotés sont dans $\mathcal{R}(U,V)$), ainsi, d'après (1.2), on a :

$$I_E = J_EJ_E^{-1}.$$

Bien que I_E et J_E ont des graphes identiques, mais I_E n'est pas une extension de J_E.

Chapitre 2

Relations linéaires

Définition 2.1 *Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, une relation $T \in \mathcal{R}(X,Y)$ est dite relation linéaire si pour tous $x, z \in D(T)$ et pour tout scalaire non nuls $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :*

$$Tx + Tz = T(x+z),$$

$$\alpha Tx = T(\alpha x).$$

Proposition 2.1 *Si T est une relation linéaire, alors $D(T)$ est un sous-espace vectoriel de X.*

Preuve Soit T une relation linéaire, montrons que $D(T)$ est sous-espace vectoriel de X. Soient $x, z \in D(T)$, donc

$$x \in X \text{ et } Tx \neq \emptyset, \text{ et } z \in X \text{ et } Tz \neq \emptyset,$$

alors $x + z \in X$ et $Tx + Tz \neq \emptyset$, c-à-d $T(x+z) \neq \emptyset$ (car T est une relation linéaire), d'où

$$x + z \in D(T). \tag{2.1}$$

Soient $x \in D(T)$ et $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, on a : $x \in X$ et $Tx \neq \emptyset$, donc $\alpha Tx \neq \emptyset$, c-à-d $T(\alpha x) \neq \emptyset$, d'où

$$\alpha x \in D(T). \tag{2.2}$$

De plus on a $0 \in D(T)$ d'après (2.1) et (2.2). Donc $D(T)$ est un sous espace vectoriel. ■

Notation : La classe des relations linéaires de $\mathcal{R}(X,Y)$ sera notée $\mathcal{LR}(X,Y)$, et on écrit $\mathcal{LR}(X,X) := \mathcal{LR}(X)$.

Proposition 2.2 *Soient M un sous espace vectoriel de X et $T \in \mathcal{LR}(X,Y)$, alors*

$$T\mid_M \in \mathcal{LR}(X,Y),$$

et

$$TJ_M \in \mathcal{LR}(X,Y).$$

Preuve On a $T \in \mathcal{LR}(X,Y)$ et comme $D(T) \cap M \subset D(T)$ alors $D(T\mid_M) \subset D(T)$ d'où $T\mid_M \in \mathcal{LR}(X,Y)$ et on a

$$\begin{aligned} D(TJ_M) &= \{m \in M \ : \ J_M(m) \cap D(T) \neq \emptyset\} \\ &= \{m \in M \ : \ m \subset D(T)\}. \end{aligned}$$

donc $D(TJ_M) \subset D(T)$ d'où $TJ_M \in \mathcal{LR}(X,Y)$. ■

Exemple 2.1 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^2$. Considérons l'opérateur de matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$G(A) = \{\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \ : \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\},$$

et

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + A^{-1}(0),$$

tel que $A^{-1}(0) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \ : \ x_2 \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Il est simple de vérifier que A^{-1} est une relation linéaire avec le domaine

$$D(A^{-1}) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Considérons la relation $S \in \mathcal{LR}(X)$ définit par :

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A^{-1}(0),$$

alors S est une extension de A^{-1}. En effet, en écrivant $J = J_{R(A)}$ on a selon (1.2) de l'exemple 1.1 que

$$SI_{R(A)} = SJJ^{-1} = A^{-1}.$$

et donc $A = JJ^{-1}S^{-1}$; cependant, $A \neq S^{-1}$.

Proposition 2.3 *Soit $T \in \mathcal{R}(X, Y)$. les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T relation linéaire.

(ii) $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$.

(iii) T^{-1} relation linéaire.

(iv) $G(T^{-1})$ est un sous-espace vectoriel de $Y \times X$.

Preuve

1. On suppose que T est une relation linéaire, et on montre que $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G(T)$, alors $y_1 \in Tx_1$ et $y_2 \in Tx_2$, et ainsi :

$$y_1 + y_2 \in Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2), \tag{2.3}$$

d'où $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in G(T)$. De plus, on a pour $y \in Tx$, et $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha y \in \alpha Tx = T(\alpha x),$$

d'où

$$(\alpha x, \alpha y) = \alpha(x, y) \in G(T). \tag{2.4}$$

Enfin, $(0, 0) \in G(T)$ par (2.3), donc (2.4) est vérifiée aussi pour $\alpha = 0$. Par conséquent, $G(T)$ est un sous-espace vectoriel.

2. Réciproquement, on suppose que $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$. Puis $D(T)$ est un sous espace vectoriel de X.
Soient $x_1, x_2 \in D(T)$. Pour montrer que

$$Tx_1 + Tx_2 \subset T(x_1 + x_2), \tag{2.5}$$

on choisi $y_1 \in Tx_1, y_2 \in Tx_2$, c-à-d $y_1 + y_2 \in Tx_1 + Tx_2$, puis

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in G(T).$$

Donc $y_1 + y_2 \in T(x_1 + x_2)$, d'où (2.5). Ensuite, pour montrer que

$$T(x_1 + x_2) \subset Tx_1 + Tx_2, \tag{2.6}$$

on prend $y \in T(x_1 + x_2)$ et on choisi $y_1 \in Tx_1$ arbitrairement. puis

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y - y_1) \in G(T),$$

et donc $(x_2, y - y_1) \in G(T)$, d'où $y - y_1 \in Tx_2$. Par conséquent
$y \in y_1 + Tx_2 \subset Tx_1 + Tx_2$.
Maintenant, soient $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in D(T)$,
Si $y \in Tx$, alors $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in G(T)$, de sorte que $\alpha y \in T(\alpha x)$. D'où $\alpha T(x) \subset T(\alpha x)$. D'autre part si $y \in T(\alpha x)$, ainsi $T(\alpha x) \subset \alpha T(x)$.
Par conséquent

$$\alpha T(x) = T(\alpha x).$$

Ainsi T est une relation linéaire. Les équivalences restants suivent désormais par symétrie.

■

Corollaire 2.1 *Soit T une relation linéaire, alors $T(0)$ et $T^{-1}(0)$ sont des sous-espaces vectoriels.*

Preuve Soient $y_1, y_2 \in T(0)$, on a $y_1 + y_2 \in T(0) + T(0) = T(0 + 0) = T(0)$.
Pour tout $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ on a $\alpha y_1 \in \alpha T(0) = T(\alpha 0) = T(0)$. T est une relation linéaire, alors $G(T)$ est un sous espace vectoriel, donc $(0, 0) \in G(T)$, d'où $0 \in T(0)$. Ainsi $T(0)$ est un sous espace vectoriel.
De la même manière on peut montrer que $T^{-1}(0)$ est un sous espace vectoriel de X. ■

Corollaire 2.2 (Voir [3]) *Soit $T \in \mathcal{R}(X, Y)$, alors T est une relation linéaire si et seulement si*

$$\alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2),$$

pour tout $x_1, x_2 \in D(T)$ et pour tout scalaire α, β non nuls.

Définition 2.2 *Le sous-espace $T^{-1}(0)$ est appelé l'espace nul ou le noyau de T, et est dénoté par $N(T)$. Nous allons utiliser à la fois $N(T)$ et $T^{-1}(0)$ tout au long de la suite.*

Exemple 2.2 *Soit P la projection linéaire définie sur $X = M + N$ de gamme M et d'espace nul N . Écrivez $T = P^{-1}$. Alors $T \in \mathcal{LR}(X), D(T) = M, T$ est injective , et pour chaque $x \in M$ on a :*

$$Tx = x + N.$$

Proposition 2.4 *(a) Pour $x \in D(T)$ on a l'équivalence suivante :*

(i)

$$y \in Tx \Longleftrightarrow Tx = y + T(0).$$

En particulier ,

(ii)

$$0 \in Tx \Longleftrightarrow Tx = T(0).$$

(b) Pour $x_1, x_2 \in D(T)$ on a l'équivalence :

$$Tx_1 \cap Tx_2 \neq \emptyset \Longleftrightarrow Tx_1 = Tx_2.$$

Preuve

(a) (i) Soit $y \in Tx$, alors $y + T(0) \subset Tx + T(0) = Tx$
D'autre part pour tout $y_1 \in Tx$, on a

$$y_1 = y + (y_1 - y) \in y + Tx - Tx = y + T(0).$$

D'où $Tx = y + T(0)$. L'inverse est évidente.
(ii) On a

$$\begin{aligned} 0 \in Tx &\Longleftrightarrow Tx = 0 + T(0) \text{ (par (a)(i))} \\ &\Longleftrightarrow Tx = T(0). \end{aligned}$$

(b) Soit $y \in Tx_1 \cap Tx_2$, donc $y \in Tx_1$ et $y \in Tx_2$, puis (par (a)(i))
$Tx_1 = y + T(0) = Tx_2$. L'inverse est trivial.

■

Corollaire 2.3 *(a) T est à valeur unique si et seulement si $T(0) = \{0\}$.*

(b) T est injective si et seulement si $N(T) = \{0\}$.

Preuve

(a) On suppose que T est à valeur unique, et on montre que $T(0) = \{0\}$. D'après le corollaire 2.1, on a $0 \in T(0)$ et comme T est à valeur unique alors $T(0) = \{0\}$.
Réciproquement, soit $x \in D(T)$, supposons que $y_1, y_2 \in Tx$,
donc $y_1 - y_2 \in T(0) = \{0\}$, d'où $y_1 = y_2$.

(b) On suppose que T est injective, et on montre que $N(T) = \{0\}$.
On a $0 \in T^{-1}(0)$ et comme T est injective c-à-d T^{-1} est à valeur unique, alors $T^{-1}(0) = \{0\}$, d'où $N(T) = \{0\}$.
Inversement, soit $y \in R(T)$, supposons que $x_1, x_2 \in T^{-1}y$,
donc $x_1 - x_2 \in T^{-1}(0) = N(T) = \{0\}$, d'où $x_1 = x_2$, c-à-d T^{-1} est à valeur unique, ainsi T est injective.

■

Corollaire 2.4 *$TT^{-1}(0) = T(0)$ et $T^{-1}T(0) = T^{-1}(0)$.*

Preuve D'après le Corollaire 2.1, $0 \in TT^{-1}(0)$, donc $TT^{-1}(0) = T(0)$ (par la Proposition 2.4). Pour la deuxième égalité, on remplace T^{-1} par T dans la première égalité. ■

Corollaire 2.5 *On a*

(a) $TT^{-1}y = y + T(0)$ $(y \in R(T))$ et $T^{-1}Tx = x + T^{-1}(0)$ $(x \in D(T))$.

(b) Si $G(S) \subset G(T)$, alors T est une extension de S si et seulement si $S(0) = T(0)$.

Proposition 2.5 *Soit T une relation de X à Y. alors T est une relation linéaire si et seulement si pour tout $x_1, x_2 \in D(T)$, et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

$$\alpha Tx_1 + \beta Tx_2 \subset T(\alpha x_1 + \beta x_2). \tag{2.7}$$

Preuve Soient T une relation linéaire et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2 \in D(T)$.
On prend $y_1 \in Tx_1$ et $y_2 \in Tx_2$. Puisque $G(T)$ est un sous espace vectoriel, on a $(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) \in G(T)$ d'où

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \subset T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Inversement, soit T vérifie la condition (2.7) et soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G(T)$. Alors pour $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in \alpha T x_1 + \beta T x_2 \subset T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Donc $\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) \in G(T)$, et par conséquent $G(T)$ est un sous-espace linéaire de $X \times Y$, d'óu T est une relation linéaire d'aprés proposition 2.3. ■

2.1 Algèbre des relations linéaires

Définition 2.3 *Soient S et T deux relations linéaires dans $\mathcal{LR}(X, Y)$, et soit α un scalaire. Les relations $S + T$ et αT sont définies comme suit :*

$$(S + T)x = Sx + Tx, (x \in X),$$

$$(\alpha T)x = \alpha(Tx), (x \in X, \alpha \in \mathbb{K}).$$

Proposition 2.6 *Soient $S, T, R \in \mathcal{LR}(X, Y)$, on a :*

(1) $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$

(2) $D(\alpha T) = D(T)$

(3) $G(S + T) = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ y = s + t$ *, tel que* $(x, s) \in G(S)$ *et* $(x, t) \in G(T)\}$

(4) $G(\alpha T) = \{(x, \alpha y) \in X \times Y \ : \ (x, y) \in G(T)\}$.

(5) $\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)T \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{K})$

(6) $S + T = T + S$

(7) $R + (S + T) = (R + S) + T$.

Preuve

(1) Soit $x \in D(S) \cap D(T)$, puis $Sx + Tx = (S+T)x \neq \emptyset$, et donc $x \in D(S+T)$.
Inversement, si $x \in D(S + T)$, alors $(S + T)x = Sx + Tx \neq \emptyset$
on a donc $Sx \neq \emptyset$ et $Tx \neq \emptyset$, par conséquent $x \in D(S) \cap D(T)$.

(2) Soit $x \in D(\alpha T)$ puis $(\alpha T)x = \alpha(Tx) \neq \emptyset$ c'est à dire $Tx \neq \emptyset$
donc $x \in D(T)$, d'où $D(\alpha T) \subset D(T)$. (1)
Inversement , soit $x \in D(T)$ puis $T(x) \neq \emptyset$ alors $\alpha(Tx) = (\alpha T) \neq \emptyset$
donc $x \in D(\alpha T)$ d'où $D(T) \subset D(\alpha T)$ (2)
alors d'aprés (1) et (2) on a l'égalité .

(3) $(x,s) \in G(S) \Leftrightarrow s \in Sx$
$(x,t) \in G(T) \Leftrightarrow t \in Tx$
$s+t \in Sx+Tx = (S+T)x \quad$ alors $\quad (x, s+t) \in G(S+T)$

(4) $(x,y) \in G(T) \Leftrightarrow y \in Tx \quad$ puis $\quad \alpha y \in \alpha(Tx) = (\alpha T)x$
donc $(x, \alpha y) \in G(\alpha T)$

(5) soit $x \in X$ on a

$$(\alpha(\beta T))x = \alpha(\beta T)x = (\alpha\beta)Tx$$

Donc $\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)T$

(6) soit $x \in X$ on a

$$(S+T)x = Sx + Tx = Tx + Sx = (T+S)x$$

donc $S+T = T+S$

(7) soit $x \in x$ on a

$$\begin{aligned}(R+(S+T))x &= Rx + (S+T)x = Rx + Sx + Tx \\ &= (R+S)x + Tx = ((R+S)+T)x\end{aligned}$$

donc $R+(S+T) = (R+S)+T$.

■

Proposition 2.7 *Soient R, S, T des relations linéaires*

(a) $TT^{-1} = I + (TT^{-1} - TT^{-1})$

(b) $\lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T) \qquad (0 \neq \lambda \in \mathbb{K})$

(c) Si $G(S) \subset G(T)$ then , $G(SR) \subset G(TR)$.

(d) $(R+S)Tx \subset (RT+ST)x \qquad (x \in X)$ *et si T est à valeur unique , alors*

$$(R+S)T = RT + ST$$

(e) $T(R+S)$ est une extension de $TR+TS$. De plus , si $D(T)$ contient les rangs de R et S (en particulier , si $D(T)$ est tout l'espace) alors :

$$T(R+S) = TR + TS.$$

Preuve

(a) pour $y \in R(T)$, on a par proposition 2.4 que $TT^{-1}(y) = y + T(0)$ et $TT^{-1}(y) - TT^{-1}(y) = T(0)$. d'où

$$\begin{aligned} TT^{-1} &= I_{R(T)} + TT^{-1} - TT^{-1} \\ &= I + TT^{-1} - TT^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Soit $\lambda \neq 0$. on a

$$\begin{aligned} (x,z) \in G((\lambda S)T) &\Longleftrightarrow (\exists y)(x,y) \in G(T), (y,z) \in G(\lambda S) \\ &\Longleftrightarrow (\exists y)(x,y) \in G(T), (y,\lambda^{-1}z) \in G(S) \\ (1) \qquad &\Longleftrightarrow (x,z) \in G(\lambda(ST)) \\ &\Longleftrightarrow (x,\lambda^{-1}z) \in G(ST) \\ &\Longleftrightarrow (\exists y)(x,\lambda^{-1}y) \in G(T), (\lambda^{-1}y,\lambda^{-1}z) \in G(S) \\ &\Longleftrightarrow (\exists y)(x,y) \in G(\lambda T), (y,z) \in G(S) \\ (2) \qquad &\Longleftrightarrow (x,z) \in G(S(\lambda T)) \end{aligned}$$

D'où (1) et (2) , $(\lambda S)T = \lambda(ST) = S(\lambda T)$

(c) Soit $(z,y) \in G(SR)$. alors $(z,x) \in G(R)$ et $(x,y) \in G(S) \subset G(T)$ pour certain $x \in D(S)$, d'où $(z,x) \in G(TR)$.

(d) Soient $R, S \in \mathcal{LR}(Y,Z), T \in \mathcal{LR}(X,Y)$. On a

$$\begin{aligned} G((R+S)T) &= \{(x,z) : (x,y) \in G(T) \text{ et } (y,z) \in G(R+S)\} \\ &= \{(x,z) : (x,y) \in G(T), (y,z_1) \in G(R), (y,z_2) \in G(S), z_1 + z_2 = z\} \\ &\subset \{(x,z) : (x,z_1) \in G(RT), (x,z_2) \in G(ST), z_1 + z_2 = z\} \\ &= G(RT + ST). \end{aligned}$$

Il est évident que $RT + ST = (R+S)T$ si T est à valeur unique .

(e) Soit $T \in \mathcal{LR}(X,Y)$ et $R, S \in \mathcal{LR}(Z,X)$. on vérifie que

$$G(TR + TS) \subset G(T(R+S)) \tag{2.8}$$

On a

$$\begin{aligned}
G(TR+TS) &= \{(z,y) : y = r+s \text{ ou } (z,r) \in G(TR) \text{ et } (z,s) \in G(TS)\} \\
&= \{(z,y) : y = r+s, (z,x_1) \in G(R), (x_1,r) \in G(T), \\
&\qquad (z,x_2) \in G(S), (x_2,s) \in G(T)\} \\
&\subset \{(z,y) : y = r+s, (z,x_1+x_2) \in G(R+S), (x_1+x_2, r+s) \in G(T)\} \\
&= \{(z,y) : (z,x) \in G(R+S), (x,y) \in G(T)\} \\
&= G(T(R+S)).
\end{aligned}$$

Maintenant que $z \in D(TR+TS)$. alors par (2.8) , $z \in D(T(R+S))$. Soit $y \in T(R+S)z$. Alors $y \in Tx$, où $x \in (R+S)z$. écrit $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in Rz, x_2 \in Sz$. Alors

$$y \in T(x_1+x_2) = Tx_1 + Tx_2 \subset TRz + TSz.$$

Donc $T(R+S)z \subset TRz + TSz$. D'où (2.8) , $T(R+S)z = TRz + TSz$. Si le rang de R et S sont continus dans $D(T)$. alors

$$\begin{aligned}
D(T(R+S)) &= D(R+S) = D(R) \cap D(S) \\
&= D(TR) \cap D(TS) = D(TR+TS).
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.3 *(a) Mettre $R = -S$ dans (d) de la proposition 2.7 , soit S à valeur unique et non nulle, et soit $T(0) = Y \neq \{0\}$. Alors*

$$(R+S)T(0) = (S-S)T(0) = 0,$$

et

$$(RT+ST)(0) = (ST-ST)(0) = ST(0) = S(Y) \neq 0$$

Cela montre que $RT+ST$ n'est pas, généralement, une extension de $(R+S)T$ (voir corollaire 2.5 (b)).

(b) On construit un exemple faisant de $T(R+S)$ en proposition 3.2(e) d'une extension appropriée de $TR+TS$. Soient $R, S, T \in \mathcal{LR}(\mathbb{R}^2)$ définissent par :

$$R = I,$$

$$G(S) = \{\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix}\right) : x, w \in \mathbb{R}\},$$

$$T = I\,|_M \ \textit{telque}\ M = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $D(TR) = D(T)$
et $D(TS) = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$.
Donc $D(TR + TS) = \{0\}$,
et $G(R+S) = \{\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}\right) : x, z \in \mathbb{R}\}$.
Donc $D(T(R+S)) = (R+S)^{-1}(D(T)) = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$,
d'où $TR + TS \neq T(R+S)$.
Dans l'exemple S *est l'inverse de l'application à valeur unique,* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Soient $R, S, T \in \mathcal{LR}(X)$ *. Si* $RT = TR$ *et* $ST = TS$ *alors*

$$G((R+S)T) \subset G(T(R+S)). \tag{2.9}$$

(d) L'égalité échoue dans (2.9). même si R, S *et* T *sont des tous à valeur unique comme on le voit en considérant l'exemple suivant :* $S = -R = I$*, et* T *tout opérateur linéaire avec* $D(T) \neq X$.

2.2 Relations linéaires normés

2.2.1 Norme d'une relation linéaire

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et T une relation linéaire de X dans Y.

Définition 2.4 (L'application quotient naturelle) *Soit* E *un sous espace vectoriel fermé de* X*, et soit* Q *une application définie comme suit :*

$$\begin{aligned} Q : & X \longrightarrow X \mid E \\ & x \longrightarrow \overset{\bullet}{x} = \{y \in X \ ; \ y - x \in E\} \end{aligned}$$

tel que $D(Q) = X$ *et* $\ker(Q) = E$.

Notation :

$$\begin{aligned} Q : Y &\longrightarrow Y \mid \overline{T(0)} \\ y &\longrightarrow \overset{\bullet}{y} = \{z \in Y \ ; \ z - y \in \overline{T(0)}\} \end{aligned}$$

$\forall y \in Y \ ; \ Qy = y + \overline{T(0)}$, et $\|Qy\| = \left\|\overset{\bullet}{y}\right\| = d(y, \overline{T(0)})$.

Proposition 2.8 *QT est à valeur unique.*

Preuve Soient $z_1, z_2 \in QTx$ et $x \in D(T)$, donc on a

$$z_1 - z_2 \in QTx - QTx = QT(0) \subset Q\overline{T(0)} = \overset{\bullet}{0} \Longrightarrow z_1 = z_2$$

■

Définition 2.5 *On définit :*

$$\|Tx\| = \|QTx\|,$$

$$\|T\| = \|QT\|.$$

Définition 2.6 (Relation bornée) *Si $\|T\| < \infty$ et $D(T) = X$, alors on dit que T est bornée.*

Définition 2.7 *Soient U et V deux ensembles non vides d'un espace vectoriel normé X, on a*

- $d(U, V) = \inf\{\|u - v\| \ , \ u \in U, v \in V\}$.
- $d(u, V) = \inf\limits_{v \in V} \|u - v\|$, *pour* $u \in X$.

Proposition 2.9 *Soit $T \in \mathcal{LR}(X, Y)$*

(1) Si $y_1, y_2 \in Tx$ alors $d(y_1, T(0)) = d(y_2, T(0))$.

(2) On a pour $x \in D(T)$, $\inf\limits_{y \in Tx} d(y, T(0)) = \sup\limits_{y \in Tx} d(y, T(0))$.

(3) $\|Tx\| = d(y, T(0))$, $\forall y \in Tx$.

(4) $\|Tx\| = d(Tx, T(0)) = d(Tx, 0)$, $(x \in D(T))$.

Preuve

(1) Puisque $y_1 - y_2 \in T(0)$, on a :

$$\begin{aligned} d(y_1, T(0)) &= \inf_{z \in T(0)} \|y_1 - z\| \\ &= \inf_{z \in T(0)} \|y_2 + (y_1 - y_2) - z\| \\ &= \inf_{k \in T(0)} \|y_2 - k\| = d(y_2, T(0)). \end{aligned}$$

(2) $\exists y_1 \in Tx$ tel que : $\inf\limits_{y \in Tx} d(y, T(0)) = d(y_1, T(0))$,
$\exists y_2 \in Tx$ tel que : $\sup\limits_{y \in Tx} d(y, T(0)) = d(y_2, T(0))$.
D'après (1) on obtient : $\inf\limits_{y \in Tx} d(y, T(0)) = \sup\limits_{y \in Tx} d(y, T(0))$.

(3)

$$\begin{aligned} \|Tx\| = \|QTx\| &= \|Q(y + T(0))\| \qquad \textit{avec } y \in Tx \\ &= \|Qy\| = d(y, \overline{T(0)}) \\ &= d(y, T(0)). \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} d(Tx, 0) &= \inf_{y \in Tx} \|y\| = \inf_{y \in Tx} \|z - (z - y)\| \\ &= \inf_{k \in T(0)} \|z - k\| = d(z, T(0)) = d(Tx, T(0)) \\ &= \|QTx\| = \|Tx\|. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.10 *Soient $S, T \in \mathcal{LR}(X, Y)$ on a :*

(a) $\|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\|, (x \in D(T + S))$.

(b) Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in D(T)$ on a :

$$\|\alpha Tx\| = |\alpha| \|Tx\|.$$

Preuve

(a) Soient $s \in Sx$, $t \in Tx$, donc $s + t \in (S + T)x = Sx + Tx$, et d'après la proposition 2.9, on a :

$$\begin{aligned} \|Sx + Tx\| &= d(s + t, (S + T)(0)) \\ &\leq d(s, S(0) + T(0)) + d(t, S(0) + T(0)) \\ &\leq d(s, S(0)) + d(t, T(0)) = \|Sx\| + \|Tx\|. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\|\alpha Tx\| &= \|Q(\alpha T)(x)\| \qquad (\alpha T(0) = T(0) \text{ pour } \alpha \neq 0)\\ &= \|\alpha QTx\| = |\alpha| \, \|QTx\| \\ &= |\alpha| \, \|Tx\| .\end{aligned}$$

■

Proposition 2.11

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| .$$

Preuve

$$\|T\| = \|QT\| = \sup_{x \in B_X} \|QTx\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| .$$

■

Proposition 2.12 *Soient $S, T \in \mathcal{LR}(X, Y)$. On a*

(a) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$

(b) $\|\alpha T\| = |\alpha| \, \|T\|$, $(\alpha \in \mathbb{K})$

Preuve

(a) D'après les propositions 2.11 (a) et 2.12, on a :

$$\begin{aligned}\|S + T\| &= \sup\{\|(S + T)x\| \ : \ x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} \\ &\leq \sup\{\|Sx\| + \|Tx\| \ : \ x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} \\ &\leq \sup\{\|Sx\| : x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} \\ &+ \sup\{\|Tx\| : x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} \\ &\leq \sup\{\|Sx\| : x \in B_{D(S)}\} + \sup\{\|Tx\| \ : \ x \in B_{D(T)}\} \\ &= \|S\| + \|T\| .\end{aligned}$$

(b) On combine les propositions 2.11 (b) et 2.12.

■

Exemple 2.4 *Calculer la norme de Q_E^{-1}*
Soit E sous espace fermé de X. Puis pour $y \in D(Q_E^{-1})$ on a :

$$\left\|Q_E^{-1} y\right\| = \|y\| .$$

En effet, écrire $Q = Q_E$
Si $y = Qx$, *alors*

$$\begin{aligned}\left\|Q^{-1}Qx\right\| &= d(Q^{-1}Qx, 0)\\ &= \inf_{e\in E}\|x+e\|\\ &= \|Qx\| = \|y\|.\end{aligned}$$

Donc : $\left\|Q_E^{-1}\right\| = 1$, *avec* $(E \neq X)$

Exemple 2.5 *Soit* P *une projection linéaire (pas nécessairement bornée)*
de domaine X *on a pour* $y \in D(P^{-1}) = P(X)$ *, que* $y = Py$ *et donc*
$P^{-1}y = y + P^{-1}(0)$ *, par conséquent ,*
$\left\|P^{-1}y\right\| = d(y + P^{-1}(0)) = d(y, P^{-1}(0)) = \|Q_{P^{-1}}y\|$, *d'où*

$$\left\|P^{-1}\right\| = \begin{cases} 1 & si\overline{N(P)} \not\supseteq P(x)\\ 0 & sinon\end{cases}$$

Proposition 2.13 *(a)* $\|T\| < \infty$ *si et seulement si il existe un nombre* $\lambda > 0$ *pour lequel :*

$$TB_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0) \tag{2.10}$$

(b) Si $\|T\| < \infty$ *alors*

$$\|T\| = \inf_{\lambda>0}\{\lambda \ : \ TB_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\} \tag{2.11}$$

Preuve

(a) Supposons que $\|T\| < \infty$, alors par la proposition 2.9(4)

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{y\in Tx} d(y, T(0)) = \|T\| < \infty.$$

Donc si $x \in B_{D(T)}$ et $y \in Tx$, alors il existe $k \in T(0)$ tel que pour un certain $\varepsilon > 0$, on a :

$$\|y - k\| < \|T\| + \varepsilon,$$

c-à-d : $y - k \in (\|T\| + \varepsilon)B_{R(T)}$ et par conséquent

$$y \in (\|T\| + \varepsilon)B_{R(T)} + T(0). \tag{2.12}$$

Inversement, supposons que (2.10) soit vraie. Soit $x \in B_{D(T)}$ et considérons alors $y = \lambda y_1 + k$, où $\|y_1\| \leq 1$ et $k \in T(0)$ donc $\|y - k\| \leq \lambda$, par conséquent $d(y, T(0)) \leq \lambda$ d'où $\|T\| \leq \lambda < \infty$.

(b) Soit $\|T\| < \infty$. Si $\|T\| = 0$, alors $TB_{D(T)} \subset \overline{T(0)}$ et ainsi (2.11) suit trivialement.

Maintenant, soit $\|T\| > 0$, par (2.12)

$$\inf_{\lambda>0}\{\lambda \ : \ TB_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\} \leq \|T\|\,.$$

Supposons maintenant que α est un nombre satisfaisant $0 < \alpha < \|T\|$ choisissons $x \in B_{D(T)}$ et $y \in Tx$ pour que

$$\alpha < d(y, T(0)). \tag{2.13}$$

Suppose que $TB_{D(T)} \subset \alpha B_{R(T)} + T(0)$. Alors il existe $y_1 \in B_{R(T)}, k \in T(0)$ tels que $y = \alpha y_1 + k$. Alors

$$\|y - k\| \leq \alpha < d(y, T(0)).$$

par (2.13) contradiction. On conclut que

$$\alpha < \inf\{\lambda > 0 \ : \ TB_{D(Y)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\}.$$

■

2.2.2 Module minimum d'une relation linéaire

Définition 2.8 *Soit $T \in \mathcal{LR}(X, Y)$. Le module minimum de T est la quantité*

$$\gamma(T) := \sup\{\lambda; \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(T)) \text{ pour } x \in D(T)\}.$$

Une formule utile est équivalent à la proposition(2.14) ci-dessous.

Proposition 2.14 *On a*

$$\gamma(T) := \begin{cases} \infty, & si\ D(T) \subset N(T), \\ \inf & \{\frac{\|Tx\|}{d(x,N(T))}, x \in D(T), x \notin \overline{N(T)}\},\ sinon. \end{cases}$$

Preuve Voir [3]

■

Chapitre 3

Relations linéaires continues

3.1 Continuité et ouverture

Définition 3.1 *Soit S une relation arbitraire d'un espace topologique à un autre. Alors S est dite continue si pour chaque voisinage V dans $R(S)$, l'image inverse $S^{-1}(V)$ est un voisinage dans $D(S)$.*
La relation S est dite ouverte, si pour chaque voisinage U dans $D(S)$, l'image $S(U)$ est un voisinage dans $R(S)$.

Remarque 3.1 *On remarque que*

(1) S est continue si et seulement si S^{-1} est ouverte.

(2) La composition des relations à valeur unique continues est continue.

(3) Soit U_X la boule unité ouverte de X, i.e :

$$U_X := \{x \in X \ : \ \|x\| < 1\},$$

et soit E un sous-espace fermé de X.

(4) On a

$$Q_E U_X = U_{Q_E(X)},$$

$$Q_E B_X = B_{Q_E(X)}.$$

On note le critère topologique simple suivant pour la continuité.

(5) T est continu si et seulement si $T\overline{\Omega} \subset \overline{T\Omega}$ pour tout sous ensemble Ω de $D(T)$.

Proposition 3.1 *Soit $T \in \mathcal{LR}(X,Y)$, alors*

(a) T est continue si et seulement si $\|T\| < \infty$.

(b) T est ouverte si et seulement si $\gamma(T) > 0$.

En particulier :

(c) Si dim $D(T) < \infty$, alors T est continue.

(d) Si dim $R(T) < \infty$, alors T est ouverte.

Preuve

(a) Soit T une relation continue, il existe alors un voisinage ouvert U dans $D(T)$ tel que $T^{-1}U_{R(T)} \supset U$, D'où

$$T^{-1}U_{R(T)} - T^{-1}U_{R(T)} \supset U - U$$

un voisinage ouvert de $\{0\}$ dans $D(T)$. Aussi

$$2T^{-1}U_{R(T)} = T^{-1}(U_{R(T)} - U_{R(T)}) = T^{-1}U_{R(T)} - T^{-1}U_{R(T)},$$

il existe donc $\lambda > 0$ tel que

$$T^{-1}(U_{R(T)}) \supset \lambda U_{D(T)},$$

donc

$$T^{-1}(B_{R(T)}) \supset 1/2\lambda B_{D(T)},$$

par conséquent

$$TT^{-1}(B_{R(T)}) = B_{R(T)} + T(0) \supset 1/2\lambda T B_{D(T)},$$

et ainsi $\|T\| < \infty$ d'aprés proposition (2.14)

Inversement, supposons que $\|T\| < \infty$, soit V un voisinage de boule ouverte dans $R(T)$ de centre y. Alors

$$V_0 = V - \{y\} = \alpha U_{R(T)} \qquad \textit{pour certains } \alpha > 0.$$

D'aprés proposition (2.14), on a pour certains $\lambda > 0$,

$$TU_{D(T)} \subset \lambda U_{R(T)} + T(0),$$

donc $\quad U_{D(T)} + T^{-1}(0) \subset \lambda T^{-1}U_{R(T)} = \alpha^{-1}\lambda T^{-1}V_0.$

donc $\quad T^{-1}(V_0) = T^{-1}(V - y) \supset \lambda^{-1}\alpha U_{D(T)} + T^{-1}(0).$

d'où $\quad T^{-1}V - T^{-1}y + T^{-1}y \supset \lambda^{-1}\alpha U_{D(T)} + T^{-1}y$

i.e $\quad T^{-1}V \supset \lambda^{-1}\alpha U_{D(T)} + T^{-1}y$, qui est un voisinage de $D(T)$.

Par conséquent, T est continue.

(b) Suit immédiatement de (a).

(c) Découle de la continuité de l'opérateur linéaire QT, puisque $\|T\| = \|QT\|$.

(d) On substitue T par T^{-1} dans (c).

■

Exemple 3.1 *Soit P un opérateur de projection linéaire. Si $\overline{N(P)} \not\supseteq R(P)$, alors puisque $\left\|P^{-1}\right\| = 1$ (voir l'exemple 2.5), P^{-1} est continu (proposition 3.1) et $\gamma(P) = 1$; si non, si $\overline{N(P)} \supset R(P)$, alors $\left\|P^{-1}\right\| = 0$ et donc $\gamma(P) = \infty$ (voir exemple 2.5), dans les deux cas, P est ouvert.*

Proposition 3.2 *On a :*

(a) $N(T) \subset N(QT)$ avec égalité si $T(0)$ est relativement fermé dans $R(T)$.

(b) $\gamma(T) \leq \gamma(QT)$ avec égalité si $T(0)$ est relativement fermé dans $R(T)$.

Preuve

(a)

$$\begin{aligned} N(T) &= \{x \ : \ (x,0) \in G(T)\} \\ &= \{x \ : \ Tx \cap T(0) \neq \emptyset\} \\ &\subset \{x \ : \ Tx \cap \overline{T(0)} \neq \emptyset\} \\ &= N(QT), \end{aligned}$$

avec égalité lorsque $T(0)$ est fermé dans $R(T)$.

(b)

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \sup\{\lambda \ : \ \|Tx\| \geq \lambda \, d(x, N(T)) \ pourtout \ x \in D(T)\} \\ &\leq \sup\{\lambda \ : \ \|Tx\| \geq \lambda \, d(x, N(QT)) \ pour \ x \in D(T)\}, \end{aligned}$$

avec égalité lorsque $T(0)$ est fermé dans $R(T)$. Le résultat découle maintenant de l'égalité

$$\|Tx\| = \|QTx\|.$$

■

Exemple 3.2 *Soit f une fonction linéaire discontinue définie par tout sur un espace normé de dimension infini X et soit $T = f^{-1}$. Alors $T(0)$ est un hyperplan dense dans X et donc $Q_X = O_X$,d'ou*

$$N(T) = \{O\} \neq \mathbb{K} = N(QT),$$

et on a :

$$\gamma(T) = O, \gamma(QT) = \infty.$$

Remarque 3.2 *De la proposition 3.1 et 3.2 on vois que*

$$T \text{ est ouverte } \Rightarrow QT \text{ est ouvert.}$$

L'inverse est faux, comme le montre l'exemple 3.2.

Proposition 3.3 *Soit T une relation ouverte. Alors*

$$R(T) \cap \overline{T(0)} \subset T\overline{T^{-1}(0)}$$

avec égalité si $T^{-1}(0)$ est relativement fermé dans $D(T)$ (par exemple si T est injective).

Preuve Soit T une relation ouverte, et soit $\{y_n\}$ une suite dans $T(0)$ telle que $\lim y_n = y \in R(T)$. Supposons d'abord que T est injectif. Par la continuité de T on a :

$$\lim \left\|T^{-1}(y_n - y)\right\| \leq \lim \left\|T^{-1}\right\| \|y_n - y\| = 0,$$

donc $\left\|T^{-1}y\right\| = 0$, d'où $y \in N(T^{-1}) = T(0)$ puisque T^{-1} est à valeur unique. Passons maintenant au cas général, Soit $Q := Q_{T^{-1}}$. On vois (4) du remarque 3.1, donc que TQ^{-1} est ouvert. par conséquent, d'après ce qui a été prouvé, nous avons

$$D(QT^{-1}) \cap \overline{N(QT^{-1})} = N(QT^{-1})$$

En combinant avec la proposition 3.2 on obtient

$$\begin{aligned} R(T) \cap \overline{T(0)} &= D(T^{-1}) \cap \overline{N(T^{-1})} \subset D(QT^{-1}) \cap \overline{N(QT^{-1})} \\ &= N(QT^{-1}) = T\overline{(T^{-1}(0))}. \end{aligned}$$

■

Exemple 3.3 *L'exemple suivant montre que l'inclusion dans la proposition 3.3 peut être correcte. Soit P une projection linéaire dont l'espace nul est un sous-espace propre dense du domaine de P. Alors P est ouvert et*

$$R(P) \cap \overline{P(0)} = \{0\} \neq P\overline{N(P)} = R(P).$$

Corollaire 3.1 *Si T est ouverte et $N(T)$ est fermé, Alors $N(T) = N(QT)$ et $\gamma(T) = \gamma(QT)$.*

Preuve combiner proposition 3.2 avec proposition 3.3 . ■

Proposition 3.4 *Soit M un sous ensemble non vide de $R(T)$ et soit $\gamma(T) < \infty$. puis pour $N \subset D(T)$ on a :*

$$d(TN, M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $m \in M$ et $x \in N$ tel que

$$d(T(N), M) > d(Tx - m, 0) - \varepsilon. \tag{3.1}$$

Maintenant, $Tx - m = T(x - T^{-1}m)$, d'où

$$\begin{aligned}
d(Tx - m, 0) &= d(Tx - m - T(0), 0) = d(Tx, m + T(0)) \\
&= d(Tx, TT^{-1}m) = \inf_{h \in T^{-1}m} d(Tx, Th) \\
&= \inf_{h \in T^{-1}m} d(Tx - h, 0) = \inf_{h \in T^{-1}m} \|T(x - h)\| \qquad (\textit{voir proposition } 2.9) \\
&\geq \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(x - h, T^{-1}(0)) \\
&= \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(x, h + T^{-1}(0)) \\
&= \gamma(T) d(x, T^{-1}m) \geq \gamma(T) d(x, T^{-1}M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).
\end{aligned}$$

Donc d'après (3.1), on a

$$d(T(N), M) > \gamma(T) d(N, T^{-1}M) - \varepsilon.$$

■

Théorème 3.1 *Soient $S \in \mathcal{LR}(Y, Z), T \in \mathcal{LR}(X, Y)$, alors*

$$\gamma(ST) \geq \gamma(S \mid_{R(T)}) \gamma(T) \qquad (\infty \cdot 0 \; exclue), \tag{3.2}$$

avec $\gamma(ST) = \infty$, lorsque $\gamma(T) = \infty$ (même si $\gamma(S \mid_{R(T)}) = 0$).
De plus on a l'implication

$$S^{-1}(0) \subset R(T) \Rightarrow \gamma(ST) \geq \gamma(S)\gamma(T) \tag{3.3}$$

Preuve Soit $x \in D(ST)$. Puisque $ST = (S \mid R(T))T$.
On suppose que $S = S \mid R(T)$. Supposons d'abord $\gamma(S), \gamma(T) < \infty$. On a de la proposition 3.4.

$$\begin{aligned} \|ST\| = d(STx, ST(0)) &\geq \gamma(S) d(Tx, S^{-1}ST(0)) \\ &\geq \gamma(S)\gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}ST(0)) \end{aligned}$$

(puisque $S^{-1}ST(0) = T(0) + S^{-1}(0) \subset R(T) = \gamma(S)\gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}(0)))$
D'où l'inégalité (3.2) qui suit.
Suppose maintenant que $S^{-1}(0) \subset R(T)$ (ici , on ne suppose plus que
$S = S \mid R(T)$). Dans ce cas $S^{-1}ST(0) = T(0) \cap D(S) + S^{-1}(0) \subset R(T)$ et donc
$d(Tx, S^{-1}ST(0)) \geq \gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}(0))$
et donc , comme précédemment , on obtient

$$\|STX\| \geq \gamma(S)\gamma(T)d(x, S^{-1}T^{-1}(0)).$$

d'où découle l'implication (3.3).

Maintenant, soit $\gamma(T) = \infty$. Alors $T^{-1}(0)$ est dense dans $D(T)$. D'où
$d(x, T^{-1}(0)) = 0$ pour tous x dans $D(ST)$. Mais alors $N(ST)$ est dense en $D(ST)$
ce qui signifie que $\gamma(ST) = \infty$.
Enfin, supposons que $\gamma(S) = \infty, \gamma(T) < \infty$. De puis maintenant
$d(Tx, S^{-1}(0)) = 0$, donc $\gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}(0)) = 0$ (3.4), donc $\gamma(ST) = \infty$
si $\gamma(T) \neq 0$.
La preuve de l'implication (3.3) dans ce cas est suit de la même manière. ■

Remarque 3.3 *(1) Le théorème 3.1 montre déjà que l'inégalité*

$$\|STx\| \geq \gamma(S)d(Tx, T(0) \cap D(S) + S^{-1}(0)),$$

vaut pour tous les $x \in D(ST)$.

(2) Si $0.\infty$ se produit sur le coté droit de théorème 3.1(3.2), alors $\gamma(ST) = \infty$. Cependant, le cas $\infty.0$ ne fonctionne pas. Considérons $f = S, f^{-1} = T$ où $f : X \to \mathbb{C}$ est une fonction linéaire non bornée. Alors

$$\gamma(ff^{-1}) = \gamma(I) = 1, \gamma(f^{-1}) = \left\|f^{-1}\right\| = 0$$

et

$$\gamma(f) = \infty. \ (\textit{puisque } \overline{N(f)} = X).$$

Corollaire 3.2 *Soit $T \in \mathcal{LR}(X,Y)$ et $S \in \mathcal{LR}(Y,Z)$, alors*

$$\|ST\| \leq \|S\| \left\|I_{D(S)}T\right\| \qquad (\infty.0 \text{ exclu}). \tag{3.4}$$

avec $\|ST\| = 0$, lorsque $\|S\| = 0$ (même si $\left\|I_{D(S)}T\right\| = \infty$). De plus , nous avons l'implication

$$T(0) \subset D(S) \Rightarrow \|ST\| \leq \|S\| \, \|T\| \tag{3.5}$$

Preuve L'inégalité (3.4) découle (3.2) du théorème (3.1).
Supposons maintenant que $T(0) \subset D(S)$. Alors pour $x \in D(ST)$ et $y \in Tx$
On a , depuis $x \in T^{-1}(D(S))$, que $Tx \subset D(S) + T(0) = D(S)$, donc
$I_{D(S)}Tx = Tx \cap D(S) = Tx$ .Donc

$$\|ST\| \leq \|S\| \left\|T \mid_{D(ST)}\right\|$$

et (3.5) suit ■

Remarque 3.4 *(1) Il n'y a pas de conclusion si le coté droit de corollaire 3.2(3.4) est de $\infty.0$ (voir remarque 3.3(2))*

(2) nous donnerons plus tard un exemple d'une paire d'opérateurs linéaires ouverts dont le compositions n'est pas ouverte
Il existe donc des relations linéaires continues dont la composition est définies mais non continue .

(3) En considérant la restriction de T à un sous-espace unidimensionnel de $D(ST)$, il résulte de (3.5) du corollaire 3.2 que
$T(0) \subset D(S) \Rightarrow \|STx\| \leq \|S\| \, \|Tx\|$ est valable pour chaque $x \in D(ST)$.

3.2 Principe de la borne uniforme

Lemme 3.5 (Lemme de Baire [2]) *Soit X un espace métrique complet, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable des fermés de X telles que*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Alors il existe n_0 tel que $int(A_{n_0}) \neq \emptyset$.

Théorème 3.2 (Banach Steinhaus) *Soit* $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *une famille d'espace normés , X un espace de Banach fixe , et* $\{T_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *une famille de relations linéaires telles que* $T_\alpha \in \mathcal{LR}(X, Y_\alpha)$ *pour chacun* $\alpha \in \Lambda$ *. Supposons que*

$$\sup\{\|T_\alpha x\| : \alpha \in \Lambda\} < \infty \qquad \textit{pour chaque } x \in X.$$

Alors

$$\sup\{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Lambda\} < \infty.$$

Preuve Considérons la séquence d'ensembles fermés
$A_n = \{x \in X : \|T_\alpha x\| \leq n \textit{ pour } \alpha \in \Lambda\}$. Puisque $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, selon le théorème de catégorie de Baire ,A_n contient un ensemble ouvert non vide pour certains $n \in \mathbb{N}$. Soit B une boule de centre z et de rayon r , contenue dans A_n . pour $x \in rB_X$. on a $x + z \in B$ et

$$\|T_\alpha x\| = \|T_\alpha(x + z - z)\| \leq \|T_\alpha(x + z)\| + \|T_\alpha z\| \leq 2n$$

D'ou $\|T_\alpha\| \leq 2n/r$ pour tout $\alpha \in \Lambda$ ■

Corollaire 3.3 *Soit* (T_n) *une suite de relations linéaires bornées dans* $\mathcal{LR}(X, Y)$*, et soit X complet. Si T est une relation définit partout dans* $\mathcal{LR}(X, Y)$ *telle que* $\overline{T(0)} \supset T_n(0) \qquad (n \in \mathbb{N})$ *et* $\lim_n \|T_n x - Tx\| = 0$ *pour tout* $x \in X$ *, Alors T est borné.*

Corollaire 3.4 *Soit X un espace normé et soit W un sous-ensemble de X telque*

$$\sup_{w \in W} \left|x'w\right| < \infty \qquad (x' \in X').$$

Alors W est borné.

Preuve Considérez W comme un sous-ensemble de X'' et appliquez
le théorème 3.2 (**Banach Steinhaus**). ■

Proposition 3.6 *Si* $X = M + N$ *où* $M \cap N = \{0\}$ *et M est fermé et a codimension fini, alors la projection se définit sur X avec le rang M et le noyau N est bornée.*

Preuve Soient $\{x_1, ..., x_n\}$ une base pour N et soit $N_i := sp\{x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n\}$.
Puisque chaque $M + N_i$ est fermé, il existe par le théorème de Hahn Banach
un $f_i \in X'$ tel que $f_i(x_i) = 1$ et $f_i(x) = 0$ pour $x \in M + N_i$.
On définit $Qx = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i \qquad (x \in X)$. Alors Q est une projection bornée avec une rang N et d'espace nul M, et $P = I - Q$ est la projection requise. ■

Corollaire 3.5 *Si M est un sous-espace, a codimension fini, de $D(T)$, fermé dans $D(T)$, et si $T\mid_M$ est continu, alors T est continu.*

Preuve Soit P définie comme dans proposition 3.6, on a :

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\leqslant \|TPx\| + \|T(I-P)x\| \\ &\leqslant (\|T\mid_M\| \, \|P\| + \|T\mid_N\| \, \|I-P\|) \, \|x\|\end{aligned}$$

où $\|T\mid_N\| < \infty$ par la proposition 3.1(c). ■

Proposition 3.7 *Soient T un ouvert et injectif et $S \in \mathcal{LR}(X,Y)$ un opérateur linéaire satisfaisant $\|S\| < \gamma(T)$. Alors $T+S$ est ouvert et injectif.*

Preuve On a pour $x \in D(T+S)$

$$\begin{aligned}\|(T+S)x\| &\geq \|Tx\| - \|Sx\| \qquad (\textit{puisque } S(0) = \{0\}) \\ &\geq \gamma(T) \, \|x\| - \|S\| \, \|x\| \\ &= (\gamma(T) - \|S\|) \, \|x\|\end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] R. Arens, Operational calculus of linear relations. Pac. J. Math. 11, 9–23 (1961).

[2] H. Brézis Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer Science and Business Media, 2010.

[3] R.W. Cross, Multivalued Linear Operators. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 213. Marcel Dekker, New York (1998).

[4] Favini, A., Yagi, A. : Multivalued linear operators and degenerate evolution equations. Ann. Mat. Pura Appl. 163(4), 353-384 (1993).

[5] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York Inc., 1966.

[6] Y. Shi, G. Xu and G. Ren Boundedness and closedness of linear relations, Linear and Multilinear Algebra, 66 :2, 309-333 (2018).

[7] Von Neumann, J. : Functional Operators. II. The geometry of orthogonal spaces. Ann. Math. Studies no. 22. Princeton University Press, Princeton, N.J.,(1950). Rend. Circ. Mat. Palermo. 27 :373-392 (1909).