Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques et de L'informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'optention du

Diplôme de Master en

Mathématiques

Option :

Recherche Opérationnelle

Thème

Etude de la 2-domination rainbow dans les digraphes

Par

SADOUDI Mohamed

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. A.BOUCHOU	M.C.B	U.D.Y.F-Médéa	Président.
Mr. L. OULD RABAH	M.A.A	U.D.Y.F-Médéa	Encadreur.
Mr. M. BENATALLAH	M.A.A	U. Djelfa	Examinateur.

Date de soutenance : 19/06/2018

Résumé

Soit $D = (V, A)$ un digraphe simple où V l'ensemble des sommets et A l'ensembles des arcs. On définit la fonction $f : V(D) \longrightarrow (\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\})$. On dit que f est une fonction de 2-domination rainbow (2-RDF) sur un digraphe D, si pour tout sommet $v \in V(D)$ avec $f(v) = \emptyset$, $\bigcup_{u \in N^-(v)} f(u) = \{1, 2\}$, où $N^-(v)$ est l'ensemble des prédécesseurs de v. Le poids d'une fonction de 2-domination rainbow est la valeur $\omega(f) = \sum_{u \in V} |f(u)|$. Le poids minimum d'une 2-RDF sur D est appelé le nombre de 2-domination rainbow de D noté par $\gamma_{r2}(D)$. Une fonction de 2-domination rainbow de poids minimum est appelé $\gamma_{r2}(D)$-fonction.

Dans ce mémoire, en premier lieu nous allons caractériser des classes spéciales de digraphes, à savoir les chaînes et les cycles orientés sans arcs symétriques, des arbres orientés, des graphes orientés out-réguliers et des tournois satisfaisants, $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$. Enfin, nous prouvons que le problème de décider si un graphe orienté D satisfait $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ est CO-NP-complet.

Abstract

Let $D = (V, A)$ be a finite and simple digraph of order n. A 2-rainbow dominating function (2-RDF) of a digraph D is a function $f : V(D) \longrightarrow (\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\})$ such that for any vertex $v \in V$ withe $f(v) = \emptyset$ the condition $\cup_{u \in N^-(v)} f(u) = \{1, 2\}$, is fulfilled, where $N^-(v)$ is the set of in-neighbors of v. The weight of a 2-RDF of f is the value $w(f) = \sum_{v \in V} |f(v)|$. The 2-rainbow domination number of a digraph D denoted by $\gamma_{r2}(D)$, is the minimum weight of a 2-RDF of D. A mimimum 2-rainbow domination function is called a $\gamma_{r2}(D)$-fonction.

In this memory, firstly we will characterize some special classes of oriented graphs, namely oriented chains and oriented cycles without symmetrical arcs(*asymmetrical* arcs), oriented trees, out-regular oriented graphs and tournaments satisfying $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$. In the end, we prove that the problem of deciding whether an oriented graph D satisfies $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ is CO-NP-complet.

مـلـــخـــص

ليكن $D = (V, A)$ بيانا موجها بسيطا رتبته n وسعته m حيث V مجموعة الـرؤوس و A مجموعة الأسهم. نعرف الدالة المهيمنة 2- قوس قزح في D $f: V \longrightarrow \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ بـ : من أجل كل رأس $v \in V(G)$ حيث $f(v) = \emptyset$ يحقق $\bigcup_{u \in N_D^-(v)} f(u) = \{1,2\}$ ، علما أن $N_D^-(v)$ هي مجموعة السوابق للرأس v ، ونعرف وزن دالة الهيمنة 2-قوس قزح بـالمقدار $w(f) = \sum_{u \in V} |f(u)|$. القيمة الدنيا للدالة المهيمنة 2- قوس قزح للبيان الموجه D هـي $\gamma_{r2}(D)$. دالة الهيمنة 2-قوس قزح للقيمة الدنيا ترمز بـ $\gamma_{r2}(D)$ – دالة.

في هذه المذكرة، أولا سنقوم بتمييز فئات خاصة من البيانات الموجهة ، وهي عبارة عن سلاسل وحلقات موجهة بدون أسهم متناظرة، أشجار موجهة ، رسوم بيانية من نوع (out-réguliers) و دورات ، الـتي تحقق المساواة $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ ، و فـي الأخـير نثبت أن مشكل تحديد المسـاواة $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ إذا كانت محققة في بـيـان مـوجه D هو مشكل من نـوع *CO-NP-complete*.

Remerciements

Je tiens a exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance a mon promoteur Mr. L. Ould rabah, maître assistant à l'université de Médéa pour l'honneur qu'il nous a fait en assurant la direction du présent mémoire. je le remerce pour sa disponibilité et pour la pertinence de ses conseils avec lesquels, il a su me guider durant mes travaux de recherche.

Je remercie vivement Mr A. Bouchou, maitre de conférence à l'université de Médéa qui a bien voulu me faire honneur en acceptant de prendre en charge la présidence du jury.

Je remercie également Mr M. Benatallah, maitre assistant à l'université de Djalfa, pour l'honneur qu'il m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Je tenon également à remercier ma famille pour leurs soutiens et leurs aides précieuses pendant tout ce temps.

J'aimerais également remercier mes enseignants pendant les années de mes études, sans oublier mes amis durant le cursus universitaire.

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A *ma mère et mon père pour leur soutien durant toute ma formation,*

leurs efforts constants dans mes études, et

pour leur encouragement.

A *ma fiancée.*

A *mes frères et tous leurs enfants.*

A *toutes ma familles :*

SADOUDI et SADAOUI.

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

molakhas **iv**

Introduction **1**

1 Généralités sur les graphes orientés **4**

1.1 Définitions et notations utilisées dans les graphes 4

1.2 Définitions et notations utilisées dans les digraphes 9

1.2.1 Digraphe, sommet, arc. 9

1.2.2 Chaînes orientées, cycles orientés, chemins, circuits 14

1.3 Problèmes de complexité 17

1.3.1 Notion de complexité 17

1.3.2 Problème de décision 18

1.3.3 Classes de complexité 18

2 Des résultats existants sur la domination romain et 2-domination rainbow dans les digraphes **20**

2.1 Domination dans les digraphes 20

2.1.1 Quelques résultats sur la domination 21

2.2 Domination romaine dans les graphes orientés 22

2.2.1 Quelques résultats existant sur la domination romaine 22

2.3 Domination rainbow dans les digraphes 23
2.3.1 Nombre de 2-domination rainbow de certains graphes particuliers . . 24
2.3.2 Quelques bornes sur la domination rainbow dans les digraphes 24

3 Quelques résultats sur la 2-domination rainbow dans les digraphes 26
3.1 Caractérisation des chaînes et des cycles orientés satisfaisants $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$. 31
3.1.1 Chaines orientées sans arcs symétriques $\overrightarrow{P_n}$ 31
3.2 Arbres orientés avec $\gamma_{r2}(T) = n - 1$ 37
3.3 Graphes orientés out-régulier et tournois avec $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$. 39
3.4 NP-Complétude avec $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ 42

Conclusion et Perspectives 47

Liste des Figures

1.1.1 Une boucle et deux arêtes multiples. 5
1.1.2 Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G. 5
1.1.3 Un graphe 3-régulier d'ordre 6. 6
1.1.4 les graphes K_3 etK_4. 6
1.1.5 Le complémentaire d'un graphe G. 6
1.1.6 Une chaine P_5 et un cycle C_6. 7
1.1.7 G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexes. 8
1.1.8 Un arbre $G = (V, E)$. 8
1.1.9 Une étoile $K_{1,3}$, une étoile subdivisée $K^*_{1,3}$ et une double étoile $S_{3,5}$. 9
1.2.1 Un digraphe D sans boucles et sans d'arcs multiples. 10
1.2.2 Un digraphe D et son associe le graphe G. 11
1.2.3 $d^-(x) = |N^-(x)| = 3$. 12
1.2.4 $d^+(x) = |N^+(x)| = 5$. 13
1.2.5 $N^-(g) = \{c, h, i\}$ et $N^+(g) = \{c, d, f\}$. 13
1.2.6 $N^-_D(S) = \{a, b, c, e, g\}$ et $N^+_D(S) = \{a, c, i\}$ 13
1.2.7 Un chaîne orientée. 14
1.2.8 Un chaîne orientée sans arcs symétriques. 15
1.2.9 Un chemin. 15
1.2.10 Un cycle orienté. 15
1.2.11 Un cycle orienté sans arc symétrique. 16
1.2.12 Un circuit. 16
1.2.13 Un arbre orienté $T = (V, A)$ d'ordre 10. 16

1.2.14 Tournoi T_4 17

2.1.1 $\gamma(D) = 4$. 21
2.2.1 Un digraphe D avec $\gamma_R(D) = 3$. 22
2.3.1 Un digraphe D. 23
2.3.2 Une chaîne oriéntée 24
2.3.3 Chemin et circuit. 24

3.0.1 Un arbre orienté avec $\gamma_{r2}(D) < n - \Delta^+ + 1$. 28
3.1.1 $\overrightarrow{K^+[x_i]}$ 31
3.1.2 $\overrightarrow{K^-[x_i]}$ 31
3.1.3 $\overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]}$. 32
3.1.4 $\overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]}$. 32
3.1.5 $\overrightarrow{P_n^3[x_i]}$. 32
3.1.6 $\overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]}$. 33
3.1.7 $\overrightarrow{x_{i-1}x_{i-2}} \in A$. 34
3.1.8 $(\overrightarrow{x_{i-2}, x_{i-1}})$. 34
3.1.9 $(\overrightarrow{x_{i-1}, x_{i-2}})$. 35
3.1.10 $(\overrightarrow{x_{i-2}, x_{i-1}})$. 35
3.1.11 $(\overrightarrow{x_{i+1}, x_{i+2}})$. 36
3.1.12 $(\overrightarrow{x_{i+2}, x_{i+1}})$. 37
3.2.1 Un arbre $T \in \mathcal{F}_1$. 38
3.2.2 Deux arbres $a, b \in \mathcal{F}_2$. 38
3.3.1 Des tournnois T_3 et T_5. 42
3.4.1 Le graphe orienté H_i. 43
3.4.2 l'instance $I = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$. 45

Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au $XVIIIe$ siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg. En effet les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ. La marche du cavalier sur l'échiquier ou problème de coloriage de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, réseau de communication, réseaux de transport (ferries, routiers, aériens), réseaux d'ordinateurs et ordonnancement d'un ensemble des tâches, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle, elle est devenue aujourd'hui une des branche les plus florissantes de l'algèbre moderne. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représenté par un schéma. Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) noté par V représentant des individus, des objets, des situations, etc.,... et qui sont reliés par des flèches (arcs) et dans ce cas on parle d'un graphe orienté (ou digraphe) noté par $D = (V, A)$ (où A représente l'ensemble des arcs de D) ou bien par des lignes (arêtes) et dans ce cas on parle d'un graphe non orienté noté par $G = (V, E)$ (où E représente l'ensemble des arêtes de G) symbolisant les relations existant entre eux.

Parmi les problèmes les plus étudiés en théorie des graphes, les problèmes de domination dans les graphes orientés et non orientés sont les plus cités.

En 1962, Ore [15] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connue sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [5]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [12, 11] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années.

En 1994, Lee [3] a introduit dans sa thèse de doctorat le concept de domination dans les digraphes, c'est une généralisation du concept de domination dans les graphes où chaque graphe ici considéré comme un graphe associe (underlying graphe en anglais) d'un digraphe symétrique.

Dans ce mémoire, trois chapitres fondamentaux sont développés et nous nous intéressons principalement à l'étude de la 2-domination rainbow dans les digraphes.

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire. Nous commençons d'abord par donner les définitions de base pour les graphes non orientés, puis nous donnons les définitions de base utilisées dans les graphes orientés nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Ensuite nous donnons un aperçu sur la complexité algorithmique.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les définitions de la domination et de la 2-domination rainbow dans les digraphes et certains résultats sur le nombre de 2-domination rainbow γ_{2r} dans les digraphes se présent (quelques propriétés, quelques bornes sur γ_{2r} ,et des valeurs exactes de γ_{2r} pours certaines classes de digraphe).

Dans le troisième chapitre, nous allons aborder la borne supérieure de $\gamma_{r2}(D)$ de la fonction dominante rainbow dans les digraphes à savoir $\gamma_{r2}(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$ qui a été introduite par J. Amjadi, et all. en 2013 [1]. Et nous allons caractériser des classes spéciales de digraphes, à savoir les chaînes et les cycles orientés sans arcs symétriques, arbres orientés, des graphes orientés out-réguliers et des tournois satisfaisants, $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$. Enfin, nous prouvons que le problème de décider si un graphe orienté D satisfait $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ est CO-NP-complet.

Enfin,

Nous terminons ce mémoire en donnant une conclusion et quelques perspectives pour les travaux futurs dans ce domaine de recherche.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes orientés

Nous introduisons dans ce chapitre les définitions de base et les notations usuelles dans la théorie des graphes, notamment dans les digraphes, en donnant en bref aperçu sur les paramètres structurels d'un digraphe. Ensuite nous citons quelques invariants de digraphes, les notions propres à un chapitre donné sont définies dans le chapitre en question. Nous introduisons après la notion de complexité algorithmique dans les digraphes. Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de C. Berge [2], et de T W Haynes S.T Hedetniemi et P J Slater [12, 11].

1.1 Définitions et notations utilisées dans les graphes

Graphe, Graphe multiple, sommet, arête, boucle

Un **graphe** fini $G = (V, E)$ est défini par un l'ensemble fini V dont les éléments sont appelés **sommets** (Vertices en anglais), et par un l'ensemble fini E dont les éléments sont appelés **arêtes** (Edges en anglais). Lorsque plusieurs arêtes relient deux sommets, on les appelle des **arêtes multiples** et le graphe G est appelé **graphe multiple**. Une arête e de l'ensemble E est définie par une **paire non ordonnée** de sommets, appelés les extrémités de e. Si l'arête e relie les sommets a et b, on dira que ces sommets sont adjacents, ou incidents avec e, ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets a et b. Une **boucle** est une arête dont les deux extrémités sont identiques. Voir la Figure 1.1.1.



Figure 1.1.1 : Une boucle et deux arêtes multiples.

Le cardinal de V est appelé l'**ordre** de G, noté n ($n = |V|$). Le cardinal de E est appelé la taille de G, noté m ($m = |E|$).

Graphe simple

Un **graphe simple** est un graphe dont tout couple de sommets est relier par au plus une arête (sans arêtes multiples) et toute arête de G a ses extrémités distinctes (sans boucle).

Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis. Au vu de cette définition, il est naturel de représenter graphiquement un graphe où les points du graphe représentent les sommets du graphe et les lignes entre deux points représentent les arêtes.

Sous graphe induit

Pour un sous ensemble de sommets non vide $U \subseteq V$ du graphe G:

Le sous graphe **induit** par U dans G, noté par $\langle U \rangle$ ou $G[U]$ où l'ensemble d'arêtes

$$E_U = \{uv \in E(G) : u, v \in U\}.$$

Graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe H est appelé graphe partiel de G, noté $G\,[H]$ si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

Et le graphe H est appelé sous-graphe induit partiel de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ (Voir Figure 1.1.2)

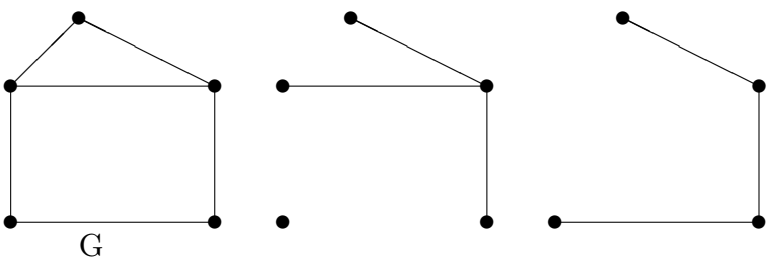


Figure 1.1.2 : Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G.

Graphe régulier

Un graphe G est **régulier** si tous ses sommets ont le même degré. Un graphe simple dont tous les sommets ont le même degré k est un graphe k-régulier. (Voir Figure 1.1.3)

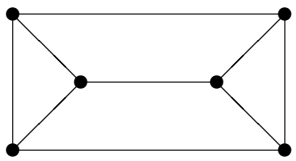


Figure 1.1.3 : Un graphe 3-régulier d'ordre 6.

Graphe complet

Un **graphe complet** d'ordre n est un graphe dont tous les sommets sont adjacents. Un graphe complet G est un graphe $(n-1)$-régulier.

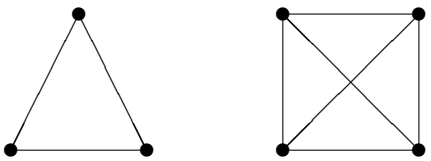


Figure 1.1.4 : les graphes K_3 etK_4.

Graphe complémentaire

Le **graphe complémentaire** d'un graphe simple, noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, défini par $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ et $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u \in V\,(G)\ ,\ v \in V\ \ (G)\ \text{ et } u\ v\ \notin E(G)\ \}$.

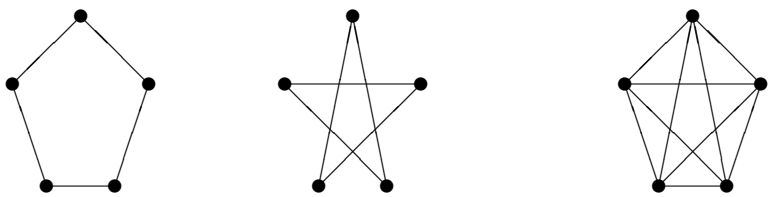


Figure 1.1.5 : Le complémentaire d'un graphe G.

Chaînes et cycles

- Une **chaîne** d'un graphe $G = (V, E)$, est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et d'arêtes de la forme $(v_0, e_1, v_1, ..., e_k, v_k)$ où k est un entier positif ou nul, les v_i sont des sommets de G et les e_i sont des arêtes de G tels que pour tout $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$, v_i et v_{i+1} sont extrémités de l'arête e_i . L'entier k est la longueur de la chaîne commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités (voir Figure 1.1.6).

Les sommets x_1 et x_k sont appelés les extrémités de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite **élémentaire**. L'entier $k - 1$ représente la longueur de C (nombre de ses arêtes).

- Un **cycle** est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. La figure 1.1.6, représente la chaîne P_5 et le cycle C_6.



Figure 1.1.6 : Une chaine P_5 et un cycle C_6.

Connexité

Un graphe est **connexe** si toute paire de sommets du graphe est reliée par une chaîne. Une composante connexe d'un graphe non connexe est un sous-ensemble de sommets C maximal tel que le sous-graphe induit $G[C]$ est connexe. Nous noterons $cc(G)$ le nombre de composantes connexes du graphe G. Dans la Figure 1.1.7 , le graphe G est connexe puisque il contient une seule composante connexe, tandis que H est non connexe car il contient deux composantes connexes.

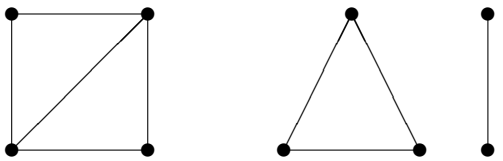


Figure 1.1.7 : G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexes.

Distance

Considérons un graphe $G = (V, E)$ et deux sommets x et y de ce graphe. On appelle **distance** entre x et y, notée $d(x, y)$, la longueur d'un plus courte chaîne reliant x et y. Si aucune chaîne n'existe, on prendra $d(x, y) = +\infty$.

Arbre

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycles il contient exactement $(n - 1)$ arête. Un graphe sans cycles mais non-connexe est appelé forêt. (voir Figure 1.1.8).

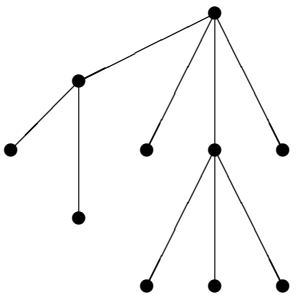


Figure 1.1.8 : Un arbre $G = (V, E)$.

Ètoile

Une **étoile** d'ordre $n + 1$, est un graphe bipartie $K_{1,n}$. On peut considérer une étoile comme étant un arbre T d'ordre $n \geq 2$ possède un centre c ayant une excentricité minimum dans T est égale à $exc(c) = d(c, y) = 1$, $\forall y \in V \setminus \{c\}$ et une étoile subdivisée comme étant un arbre obtenu à partir d'une étoile telle que chaque arête est subdivisée une seule fois. Un exemple d'une étoile et la subdivision d'une étoile sont montrés dans la figure 1.1.9.

Double étoile

Un arbre T est une **double étoile** s'il contient deux sommets qui ne sont pas pendants. Une double étoile avec p sommets pendants attachés l'un des sommets supports et q sommets pendants à l'autre est notée par $S_{p,q}$.

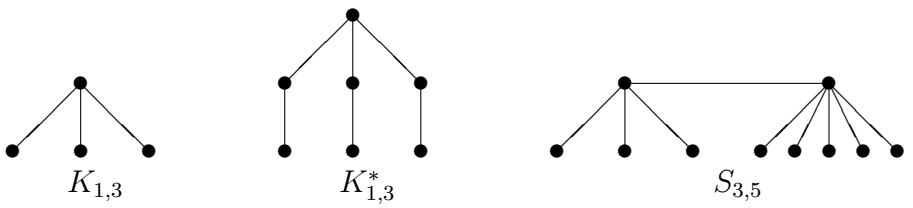


Figure 1.1.9 : Une étoile $K_{1,3}$, une étoile subdivisée $K^*_{1,3}$ et une double étoile $S_{3,5}$.

1.2 Définitions et notations utilisées dans les digraphes

1.2.1 Digraphe, sommet, arc.

En donnant un sens aux arêtes d'un graphe, on obtient un digraphe. Le mot « digraphe » est la contraction de l'expression anglaise « directed graph ».

Un **digraphe** $D = (V, A)$ est défini par l'ensemble fini noté V (ou $V(D)$) dont les éléments sont appelés **sommets**, et par l'ensemble fini A non vide dont les éléments sont appelés **arcs** (ou arêtes orientées). Le cardinal de V est appelé l'**ordre** de D, noté n (ou $n(D)$). Le cardinal de A est appelé la taille de D, noté m (ou $m(D)$). Un **arc** a de l'ensemble A est défini par une **paire ordonnée** de sommets. Lorsque $a = (x, y)$ (ou $a = \overrightarrow{xy} \in A$) on dit que l'arc a va de x à y (ou bien l'arc est orienté de x vers y). Pour un arc $a = \overrightarrow{xy}$, le sommet x est son l'origine ou son extrémité initiale et le sommet y son extrémité terminale.

Arc symétrique, antisymétrique, boucle

Un arc de la forme $u = \overrightarrow{xx}$ est appelé une **boucle**. Un arc $\overrightarrow{xy} \in A$ est dit **symétrique** si l'arc $\overrightarrow{yx}$ est aussi existe dans D i.e. $\overrightarrow{yx} \in A$ (on dit aussi que l'arc $\overrightarrow{xy}$ ou (x, y) et inversible et son inverse est l'arc $\overrightarrow{yx}$ ou (y, x)). Un arc $(x, y) \in A$ est dit **antisymétrique** (ou **asymétrique**) si son inverse $(y, x) \notin A$.

Exemple 1.2.1 *Le digraphe $D = (V, A)$ représenté par la figure* 1.2.1. *L'ensemble de sommets de D est $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ l'ordre de D est $n = |V| = 9$. Le cardinal de A est $m = |A| = 18$ (chaque arc symétrique représente deux arcs). Le digraphe D ni symétrique ni transitif, en effet, on a par exemple l'arc $(b, a) \in A$ est asymétrique et de plus les deux arcs $(f, i) \in A$, $(i, h) \in A$, mais l'arc $(i, f) \notin A$.*

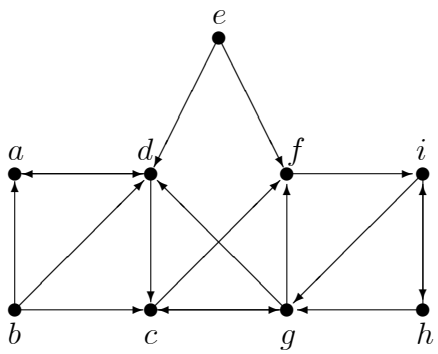


Figure 1.2.1 : Un digraphe D sans boucles et sans d'arcs multiples.

Sommet adjacent, arc incident, arcs adjacents.

Deux sommets x et y sont dit **adjacents** s'ils ont au moins un arc qui les relie, i.e. s'il existe un arc a tel que $a = (x\ , y)$ ou $a = (y\ , x)$ et cet arc peut être symétrique. Soit $a = (x, y)$ un arc d'un digraphe D, a est **incident** à x vers l'extérieur et incident à y vers l'intérieur. Deux arcs a_1 et a_2 sont dit adjacents s'ils ont au moins une extrémité en commun.

Digraphe symétrique

Un digraphe $D = (V, A)$ est symétrique si tous ses arcs sont symétriques.

Digraphe antisymétrique

Un digraphe $D = (V, A)$ est asymétrique (ou antisymétrique) si

$$(x, y) \in A \Longrightarrow (y, x) \notin A, \forall x, y \in V.$$

Graphe orienté

Un digraphe asymétrique ou un graphe orienté D est un graphe qui peut être obtenu à partir d'un graphe G en assignant une direction à (c'est-à-dire en orientant) chaque arête de G. Le digraphe résultant D est appelé une orientation de G. Ainsi, si D est un graphe orienté, alors pour chaque paire u et v des sommets distincts de D, au plus un de (u, v) et (v, u) est un arc de D. Par un notre définition de graphe orienté est un digraphe asymétrique.

Graphe non orienté associé à un graphe orienté (underline graph)

Le graphe non orienté G **associé (Underlying graph** en anglais) à un digraphe D est le graphe obtenu à partir de D en supprimant l'**orientation** des arcs, et une arête reliant deux sommets x et y existe dans G si les deux sommets x et y sont adjacents dans D. Donc le graphe non orienté G est appelé le graphe associé à D et le digraphe D est l'orientation de G. (voir Figure 1.2.2). Un sommet est pendant (resp. support) dans D s'il est pendant (resp. support) dans le graphe G associé à D.

Exemple 1.2.2 *Dans la figure* 1.2.2*, on a le graphe orienté D et son associe le graphe non orienté G.*

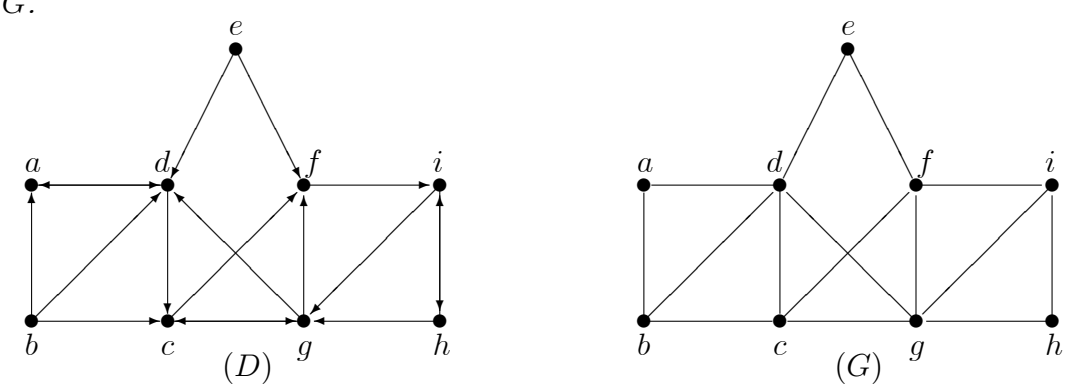


Figure 1.2.2 : Un digraphe D et son associe le graphe G.

Dans ce mémoire, le digraphe $D = (V, A)$ considéré est simple et fini, c'est-à- dire ne contient pas de boucles ni d'arcs multiples (mais les arcs symétriques sont autorisés). Au vu de cette définition, il est naturel de représenter graphiquement un digraphe où les points du digraphe représentent les sommets du digraphe et les flèches entre deux points représentent les arcs.

L'ensemble des prédécesseurs, successeurs et degré d'un sommet d'un digraphe

- Un sommet x de V est un **prédécesseur** d'un sommet y s'il existe un arc a tel que $a = (x\ , y)$. Un sommet y de V est un **successeur** d'un sommet x s'il existe un arc a tel que $a = (x, y)$.

- On appelle **voisinage intérieur** (in-voisin) du sommet x l'ensemble $N^-(x) = \{y :\ (x\ , y) \in A\}$ des prédécesseurs du sommet x. Et le **voisinage intérieur fermé** de x par $N^-[x] = N^-(x) \cup \{x\}$ et si $S \subseteq V$ alors $N^-(S) = \bigcup_{s\ \in\ S} N^-(s)$ et $N^-[S] = \bigcup_{s \in S} N^-[s]$.

- Le nombre d'arcs incidents à x vers l'intérieur (ou **le demi-degré intérieur** (**in-voisin**)) du sommet x est donné $d^-(x) = |N^-(x)|$

- Le **maximum** du demi degré-intérieur d'un sommet dans D est noté par $\Delta^- = \max\{d^-(x),\ x \in V\}$.

- Le **minimum** du demi degré-intérieur d'un sommet dans D est noté par $\delta^- = \min\{d^-(x), x \in V\}$.

- Pour un entien $k > 0$, si tout sommet $v \in V$, $d^-(v) = k$ alors D est appelé *k-in-régulier*.

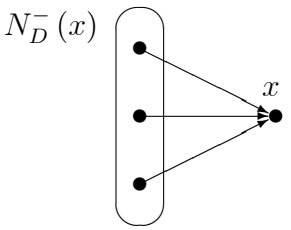


Figure 1.2.3 : $d^-(x) = |N^-(x)| = 3$.

- On appelle **voisinage extérieur** (out-voisin) du sommet x l'ensemble $N^+(x) = \{y :\ (x\ , y) \in A\}$ des successeurs du sommet x. Et le **voisinage extérieur fermé** de x $N^+[x] = N^+(x) \cup \{x\}$ et si $S \subseteq V$ alors $N^+(S) = \bigcup_{s\ \in S} N^+(s)$ et $N^+[S] = \bigcup_{s\ \in S} N^+[s]$.

- Le nombre d'arcs incidents à x vers l'extérieur (ou l**e demi-degré extérieur** (**in-voisin**)) du sommet x est donné par $d^+(x) = |N^+(x)|$.

- Le maximum du demi degré-extérieur d'un sommet dans D est noté par $\Delta^+ = \max\{d^+(x), x\ \in V\}$.

– Le minimum du demi degré-extérieur d'un sommet dans D est noté par $\delta^+ = \min\{d^+(x), x \in V\}$.

– Pour un entien $k > 0$, si tout sommet $v \in V$, $d^+(v) = k$ alors D est appelé *k-out-régulier.*

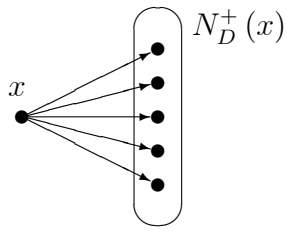


Figure 1.2.4 : $d^+(x) = |N^+(x)| = 5$.

Exemple 1.2.3 *Considérons le digraphe correspondant à la figure* 1.2.1. *On a par exemple les ensembles des prédécesseurs et successeurs de g sont $N_D^-(g) = \{c, h, i\}$ et $N_D^+(g) = \{c, d, f\}$. (Voir Figure* 1.2.5*).*

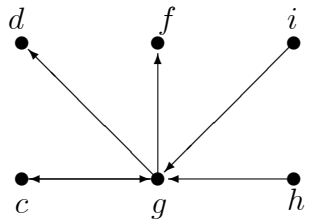


Figure 1.2.5 : $N^-(g) = \{c, h, i\}$ et $N^+(g) = \{c, d, f\}$.

Exemple 1.2.4 *De même, si on prend par exemple l'ensemble $S = \{d\ , f\ \}$ dans le digraphe précédent, alors l'ensemble $N^-(S) = \{a, b, c, e, g\}$ et $N^+(S) = \{a, c, i\}$ (Voir Figure* 1.2.6*).*

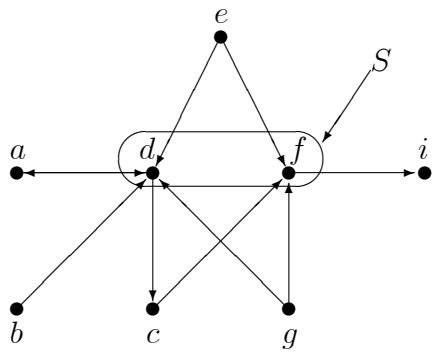


Figure 1.2.6 : $N_D^-(S) = \{a, b, c, e, g\}$ et $N_D^+(S) = \{a, c, i\}$

Exemple 1.2.5 *Le tableau suivant détermine les demis degrés-intérieurs et extérieurs des sommets du digraphe représenté dans la figure* 1.2.1.

x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	$\sum$	δ_-	Δ_-	δ_+	Δ_+
$d^+(x)$	1	3	2	2	2	1	3	2	2	18	/	/	1	3
$d^-(x)$	2	0	3	4	0	3	3	1	2	18	0	4	/	/
$d(x)$	3	3	5	6	2	4	6	3	4	36				

On voit bien que $\sum\limits_{x\in V} d^+(x) = \sum\limits_{x\in V} d^-(x) = 18$ et que $\sum\limits_{x\in V} d_D(x) = 2m = 36$ (m est le nombre d'arcs dans le digraphe D).

1.2.2 Chaînes orientées, cycles orientés, chemins, circuits

Chaînes orientées, chaînes orientées sans arcs symétriques

Une **chaîne orientée** d'ordre n noté par P_n (éventuellement les arcs peuvent être symétriques) est un digraphe D dont son graphe associe G est une chaîne. Dans le cas les arcs symétriques ne présentent pas dans la chaîne, alors est appelée **chaîne orientée sans arc symétrique** et notée par $\overrightarrow{P_n}$.

Exemple 1.2.6 *La chaîne orientée d'ordre* 8 *où* $V(P_8) = \{b, a, d, c, g, h, i, f\}$ *voir la Figure* 1.2.7.

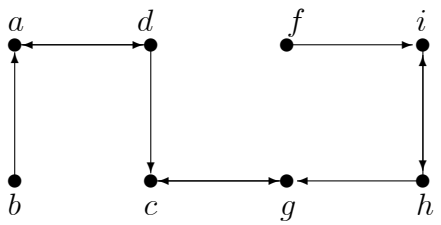


Figure 1.2.7 : Un chaîne orientée.

Exemple 1.2.7 *Dans la figure* 1.2.8 *on a la chaîne orientée sans arcs symétriques 'dordre* 8 *où* $V(\overrightarrow{P_5}) = \{b, c, f, g, i\}$.

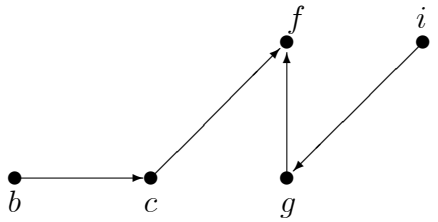


Figure 1.2.8 : Un chaîne orientée sans arcs symétriques.

Chemin

Un **chemin** d'ordre n noté par $\vec{P_n}$ est une chaîne orientée sans arc symétrique et ses arcs sont tous orientés dans le même sens .

Exemple 1.2.8 *Dans la figure* 1.2.9 *on a le chemin d'ordre* 6 *où* $V(\overrightarrow{P_6}) = \{b, d, c, f, i, g\}$.

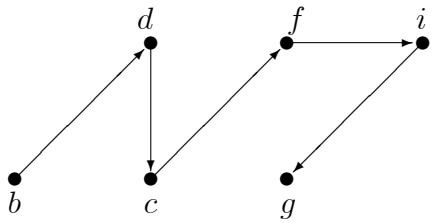


Figure 1.2.9 : Un chemin.

Cycles orientés, Cycle orientés sans arcs symétriques

Un c**ycle orienté** d'ordre n noté par C_n est une chaîne orientée fermée. Dans le cas les arcs symétriques ne présentent pas dans le cycle orienté alors est appelé **cycle orienté sans arcs symétriques** et noté par $\overrightarrow{C_n}$.

Exemple 1.2.9 *La figure* 1.2.10 *représente le cycle orienté* C_7 *d'ordre* 7.

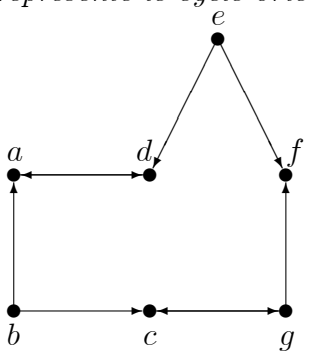


Figure 1.2.10 : Un cycle orienté.

Exemple 1.2.10 *La figure* 1.2.11 *représente le cycle orienté* $\overrightarrow{C_3}$ *d'ordre* 3.

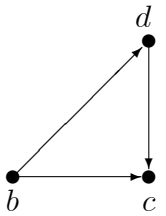


Figure 1.2.11 : Un cycle orienté sans arc symétrique.

Circuit

Un **circuit** est un chemin fermé et noté par $\vec{C_n}$.

Exemple 1.2.11 *Un circuit d'ordre* 3 *est représenté par la figure* 1.2.12.

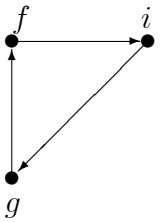


Figure 1.2.12 : Un circuit.

Arbre orienté

On dit que T un **arbre orienté** (**Directed tree** en anglai) si son graphe associe est un arbre $T = (V, E)$ non orienté.

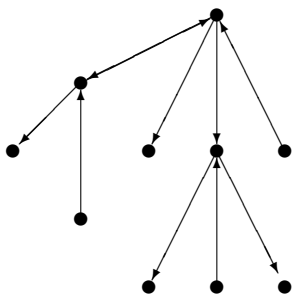


Figure 1.2.13 : Un arbre orienté $T = (V, A)$ d'ordre 10.

Graphes orientés, connexe, fortement connexe

Un digraph $D = (V, A)$ est dit connexe si son graphe associe $G = (V, E)$ est un graphe connexe. Et dit **fortement** connexe si $(\forall x \in V), (\forall y \in V)\ d(x, y) < +\infty$ et $d(y, x) < +\infty$ c.-à-d. pour toute paire de sommets, disant, x et y, ils existent un chemin de x à y et un chemin de y à x.

Tournoi

Un **tournoi** est un graphe orienté complet, c'est-à-dire pour toute paire de sommets, disant, x et y de V ou bien $(x, y) \in A$ ou bien $(y, x) \in A$ mais pas les deux. Un exemple d'un tournoi d'ordre 4 noté par T_4 est représenté dans la figure 1.2.14

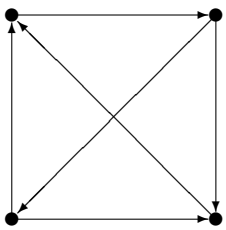


Figure 1.2.14 : Tournoi T_4

1.3 Problèmes de complexité

Beaucoup de problèmes sont réputés difficiles en théorie des graphes. Dans cette section, nous introduisons quelques éléments de base sur la complexité algorithmique et nous définissons quelques problèmes que l'on rencontre dans ce mèmoire.

1.3.1 Notion de complexité

Algorithme

Un **algorithme** est une procédure de résolution composée d'une suite finie d'opérations élémentaires qui, pour toute instance du problème à traiter, transforme les données initiales (entrées) en résultats (sorties). Le mot "algorithme" vient du nom du mathématicien Al

Khawarizmi ($9^{ème}$ siecle) qui a fournit le premier algorithmique pour résoudre les équations linéaires et quadratiques.

* Un problème d'**optimisation combinatoire** consiste à déterminer un meilleur élément parmi un nombre fini d'éléments mais souvent très élevé. Pour ce type de problèmes, il est nécessaire de mesurer l'efficacité de tout algorithme mis en oeuvre. Ainsi, pour comparer les performances de plusieurs algorithmes résolvant un même problème, il existe une mesure basée sur leur temps d'exécution; c'est la complexité en temps.

* L'**analyse de la complexité** d'un algorithme donne une estimation de son temps d'exécution, exprimé en termes du nombre d'opérations élémentaires, en fonction de la taille de l'entrée, exprimée en termes du nombre de caractères nécessaires pour coder les données du problème. La notation de Landau O est utilisée pour donner une majoration du nombre d'opérations effectuées en fonction de la taille de l'entrée.

La notion d'**algorithme efficace ou polynomial** a été introduite par J. Edmonds [7]. Un algorithme est dit polynomial si le nombre d'opérations élémentaires $T(n)$, nécessaire pour résoudre un problème de taille n, est borné par un polynôme en n, c'est-à-dire, si $T(n) \leq c.n^k$ (c et k étant des constantes). Un tel algorithme est dit de complexité $O(n^k)$.

1.3.2 Problème de décision

Un **problème de décision** est un problème dont la réponse attendue est de type "oui" ou "non". La théorie de la complexité fournit une classification des problèmes de décision selon leur niveau de difficulté.

1.3.3 Classes de complexité

Classe P

Un problème de décision est dit appartenir à la **classe P** (classe facile), s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Plusieurs problèmes de graphes appartiennent à P, tels que: la **connexité**, le **couplage parfait**, le **plus court chemin**, le **flot maximum**, l'**arbre de poids minimum** etc.

Classe NP

Un problème de décision est dit appartenir à la **classe NP** s'il existe, pour toute instance dont la réponse est "oui", un **certificat** vérifiable en temps polynomial en la taille des données. La classe NP (**Non déterministe Polynomial**) réunit les problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps polynomial par un algorithme non déterministe. Nous retrouvons dans cette classe, tous les problèmes classiques en théorie des graphes, tels : l'**indépendance**, la **coloration** la **domination** etc.

Évidemment, P $\subseteq$ NP. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. De ce fait, une question majeure reste posée à ce jour : Est-ce que P = NP?

Réduction

Plusieurs classes de complexité sont définies à l'aide de réductions. Une *réduction* est une transformation d'un problème P_1 à un autre problème P_2, s'il existe un algorithme pour P_1 qui fait appel à un algorithme de résolution de P_2. On dit que P_2 est au moins aussi difficile que P_1. Il existe plusieurs réductions, la plus utilisée est la réduction polynômiale.

Classe NP-*complet*

Un problème de la classe NP est dit *complet*, si tout problème dans NP peut lui être réduit en temps polynomial. En d'autres termes, s'il existait un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP, et on aurait l'égalité P = NP. Les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

Problème NP-difficil

Un problème NP-difficile (ou NP-dur) est un problème au moins aussi difficile qu'un problème NP-complet.

Pour une présentation plus complète, le lecteur peut consulter l'article de Cook [6], ou l'ouvrage de Garey et Johnson [8].

Chapitre 2

Des résultats existants sur la domination romain et 2-domination rainbow dans les digraphes

La domination dans les digraphes n'a pas été étudiée intensivement comme dans les graphes sans orientation. Quelques résultats connus sur la domination orientée donnés par J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone [9], peuvent être trouvés aussi dans l'ouvrage de Teraza Haynes 1998 [12, 11], mais la plupart de ces résultats sont consacrés à l'étude du concept d'un noyau et la domination dans les tournois.

Voici les définitions de quelques invariants d'un digraphe $D = (V, A)$ utilisées dans ce mémoire.

2.1 Domination dans les digraphes

Dons cette partie, nous présentons les définitions principales de la domination dans les digraphes.

Définition 2.1.1 *Un ensemble $S \subseteq V$ d'un digraphe D est un ensemble dominant de D si tout sommet de $V \setminus S$, est un successeur à au moins un sommet de S, autrement dit, pour tout $x \in S$; $N^-[x] \cap S \neq \emptyset$ ou $N^+(S) \cup S = V$. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de D appelé nombre de domination est noté par $\gamma(D)$.*

Exemple 2.1.1 *L'ensemble* $S_1 = \{2, 3, 6, 8\}$ *(resp.* $S_2 = \{1, 4, 6, 7, 8\}$*) est un* $\gamma(D)$ *- ensemble, avec* $\gamma(D) = 4$ *(resp. (Voir Figure* 2.1.1*).*

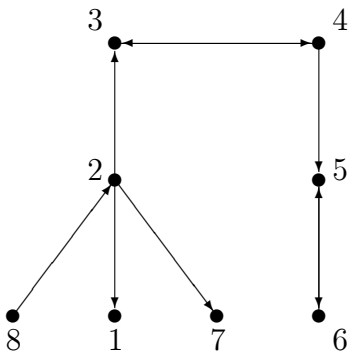


Figure 2.1.1 : $\gamma(D) = 4$.

2.1.1 Quelques résultats sur la domination

Nous citons dans cette section quelques bornes et formules de Gallai-type pour quelques invariants (paramètres de dominations) dans les graphes orientés.

Théorème 2.1.1 *[11] Pour tout digraphe D avec n sommets, on a:*

$$\frac{n}{1+\Delta^+} \leq \gamma(D) \leqslant n - \Delta^+.$$

En 1994, Changwoo Lee a établi dans la classe de digraphes fortement connexes une borne supérieure pour le nombre de domination orienté $\gamma(D)$, ce résultat est donné par le théorème suivant:

Théorème 2.1.2 *[3] Pour un digraphe D fortement connexe avec n sommets, on a:*

$$\gamma(D) \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Théorème 2.1.3 *[3] Soit D un digraphe d'order n et in-degré minimum* $\delta^-(D) \geq 1$*. Alors* $\gamma(D) \leq \frac{2n}{3}$*, et cette borne est atteinte pour le circuit* C_3*.*

2.2 Domination romaine dans les graphes orientés

Définition 2.2.1 *Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Une fonction de dominations romaine* (RDF) *sur D est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ tel que chaque sommet u avec $f(u) = 0$ est un successeur d'un sommet v avec $f(v) = 2$. Le poids d'une fonction de dominations romaine est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum de f est appelé le nombre de domination romain de D noté $\gamma_R(D)$.*

Exemple 2.2.1 *Un digraphe D d'ordre 5 avec $\gamma_R(D) = 3$.*

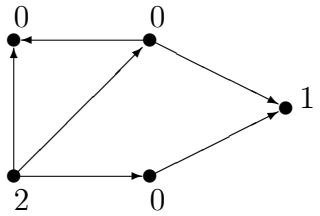


Figure 2.2.1 : Un digraphe D avec $\gamma_R(D) = 3$.

2.2.1 Quelques résultats existant sur la domination romaine

Nous commençons par donner quelques résultats connus sur sur la domination romaine dans les digraphes.

Proposition 2.2.1 *[13] Si D est un digraphe d'ordre n, avec maximum out-degré $\Delta^+(D)$, alors $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$.*

Proposition 2.2.2 *[13] Si D est un digraphe d'ordre n, alors $\gamma_R(D) < n$ si et seulement si $\Delta^+(D) \geq 2$.*

Proposition 2.2.3 *[13] Si T est un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_R(T) = n$ si et seulement si $\Delta^+(T) = 1$.*

Chen, Hao et Xie [4] ont donné la relation de type Nordhaus-Gaddum suivante.

Théorème 2.2.1 *[4] Soit D un digraphe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3.$$

2.3 Domination rainbow dans les digraphes

Nous nous sommes intéressés ici à un autre type de domination qui est la 2-domination rainbow dans les digraphes et nous établissons quelques bornes pour quelques classes des digraphes (pour plus d'informations voir [1, 10]).

Définition 2.3.1 *Soient $D = (V, A)$ un digraphe fini, simple, on définit la fonction f tel que $f : V \longrightarrow \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. On dit que f est une fonction de 2-domination rainbow (2-RDF) sur D, si pour chaque sommet $v \in V$ avec $f(v) = \emptyset$, $\bigcup_{u \in N^-(V)} f(u) = \{1, 2\}$, où $N^-(v)$ est l'ensemble des prédécesseurs de v. Le poids d'une fonction de 2-domination rainbow est la valeur $\omega(f) = \sum_{u \in V} |f(u)|$. Le poids minimum d'une 2-RDF sur D est appelé le nombre de 2-domination rainbow de D noté par $\gamma_{r2}(D)$. Une fonction de 2-domination rainbow de poids minimum est appelé $\gamma_{r2}(D)$-fonction.*

Remarque 2.3.1 *Si f est une fonction de 2-domination rainbow (2-RDF) définie sur $D = (V, A)$, alors on peut partitionner V en quatre sous-ensembles $V_0, V_1, V_2, V_{1,2}$, avec*

$$\begin{aligned} V_0 &= \{v \in V : f(v) = \emptyset\}, \\ V_1 &= \{v \in V : f(v) = \{1\}\}, \\ V_2 &= \{v \in V : f(v) = \{2\}\} \text{ et} \\ V_{1,2} &= \{v \in V : f(v) = \{1, 2\}\}. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 *Un digraphe D d'ordre 8 avec $\gamma_{r2} = 4$.*

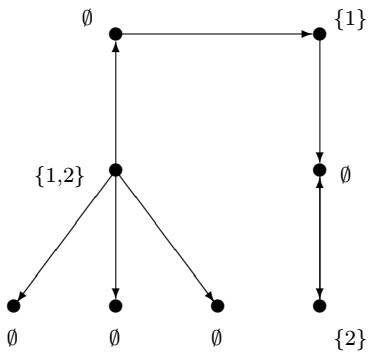


Figure 2.3.1 : Un digraphe D.

Exemple 2.3.2 *Une chaîne oriéntée d'ordre 6 avec $\gamma_{r2} = 4$.*



Figure 2.3.2 : Une chaîne oriéntée

2.3.1 Nombre de 2-domination rainbow de certains graphes particuliers

Dans cette section, nous présentons des résultats sur le paramètre de 2-domination rainbow pour certaines classes de digraphes.

Le résultat suivant, établi par Amjadi et Volkmann [1], ont donne le nombre de 2-domination rainbow des chemins et des circuits.

Proposition 2.3.1 *[1] Si D est un chemin ou circuit d'ordre n, alors $\gamma_{r2}(D) = n$.*

Exemple 2.3.3 $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_4}) = 4$ *et* $\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_5}) = 5$.

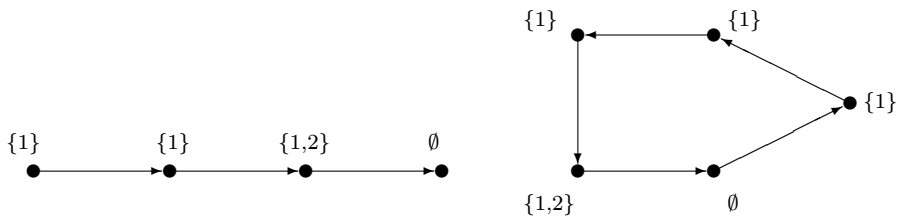


Figure 2.3.3 : Chemin et circuit.

2.3.2 Quelques bornes sur la domination rainbow dans les digraphes

Dans cette section on donne quelques bornes sur le nombre de 2-domination rainbow dans les digraphes.

Proposition 2.3.2 *[1] Si D est un digraphe d'ordre n, de maximum out-dégrée Δ^+. Alors*

$$\gamma_{r2}(D) \leq n - \Delta^+ + 1.$$

Proposition 2.3.3 *[1] Soit D un digraphe d'ordre $n > 2$. Alors $\gamma_{r2}(D) = 2$ si et seulement si $n = 2$ ou $n \geq 3$ et $\Delta^+ = n - 1$ ou il existe deux distincts sommets u et v tels que $V - \{u, v\} \subseteq N^+(u)$ et $V - \{u, v\} \subseteq N^+(v)$.*

Théorème 2.3.1 *[1] Pour un digraphe D, $\frac{3}{2}\gamma_R(D) \leq \gamma_{r2}(D) \leq \gamma_R(D)$.*

Théorème 2.3.2 *[1] Soit D un digraphe d'ordre n. Alors $\gamma_{r2}(D) \geq \left\lceil \frac{2n}{2+\Delta^+} \right\rceil$.*

Proposition 2.3.4 *[1] Soit D un digraphe d'ordre n. Alors $\gamma_{r2}(D) < n$ si et seulement si $\Delta^+ \geq 2$ ou $\Delta^- \geq 2$.*

Chapitre 3

Quelques résultats sur la 2-domination rainbow dans les digraphes

Dans ce chapitre nous donnons quelques caractérisations des digraphes D d'ordre n et de out-degré maximum $\Delta^+ \geq 1$, atteignant la borne supérieur $\gamma_{r2}(D) \leq n - \Delta^+ + 1$.

Soit D un digraphe d'ordre n et x un sommet de out-degré maximum $\Delta^+ \geq 1$. Nous définissons les sous ensembles suivants:

$$\overline{N^+[x]} = V - N^+[x],$$
$$B_x = N^+(N^+(x)) \cap \overline{N^+[x]},$$
$$C_x = \left\{ y \in N^+(x) : N^-(y) \cap \overline{N^+[x]} = \emptyset \right\}.$$

Nous rappelons d'abord les propositions suivantes.

Proposition 3.0.5 *[1] Si D est un digraphe d'ordre n, de out-degré maximum Δ^+. Alors*

$$\gamma_{r2}(D) \leq n - \Delta^+ + 1.$$

Proposition 3.0.6 *[13] Si D est un digraphe d'ordre $n \geq 2$ alors $\gamma_{r2}(T) < n$ si et seulement si $\Delta^+ \geq 2$ ou $\Delta^- \geq 2$.*

Nous montrons les résultats suivants.

Lemme 3.0.1 *Soit D un digraphe d'ordre n et x un sommet de out-degré maximum $\Delta^+ \geq 1$. Si $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ alors $\Delta^+(< \overline{N^+[x]} >) \leq 1$.*

Preuve. Supposons que $\Delta^+(< \overline{N^+[x]} >) \geq 2$. Donc, il existe au moins un sommet y appartient à $\overline{N^+[x]}$ avec $\left|N^+(y) \cap \overline{N^+[x]}\right| \geq 2$. Alors la fonction

$$f(v) = \begin{cases} \{1,2\} & \text{pour} \quad v \in \{x, y\} \\ \{1\} & \text{pour} \quad v \in \overline{N^+[x]} - \left(N^+[y] \cap \overline{N^+[x]}\right) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

est une 2-RDF de D avec $w(f) \leq n - \Delta^+$, une contradiction. ■

Lemme 3.0.2 *Soit D un digraphe d'ordre n et x un sommet de out-degré maximum $\Delta^+ \geq 1$. Si $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ alors $\Delta^-(< \overline{N^+[x]} >) \leq 1$.*

Preuve. Supposons que $\Delta^-(< \overline{N^+[x]} >) \geq 2$. Donc, il existe au moins un sommet y appartient à $\overline{N^+[x]}$ avec $\left|N^-(y) \cap \overline{N^+[x]}\right| \geq 2$. Soit $z \in N^-(y) \cap \overline{N^+[x]}$. Alors la fonction

$$f(v) = \begin{cases} \{1,2\} & \text{pour} \quad v = x \\ \{2\} & \text{pour} \quad v = z \\ \{1\} & \text{pour} \quad v \in \overline{N^+[x]} - \{y, z\} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

est une 2-RDF de D avec $w(f) \leq n - \Delta^+$. Contradiction. ■

Lemme 3.0.3 *Soit D un digraphe d'ordre n, x un sommet de out-degré maximum $\Delta^+ \geq 1$ et $y \in N^+(x)$. Si $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ alors $\left|N^+(y) \cap \overline{N^+[x]}\right| \leq 2$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un sommet $y \in N^+(x)$ tel que $\left|N^+(y) \cap \overline{N^+[x]}\right| \geq 3$. Alors la fonction

$$f(v) = \begin{cases} \{1,2\} & \text{pour} \quad v \in \{x, y\} \\ \{1\} & \text{pour} \quad v \in \overline{N^+[x]} - \left(N^+(y) \cap \overline{N^+[x]}\right) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

est une 2-RDF de D avec $w(f) = |V_1| + 2|V_{1,2}| \leq n - \Delta^+$. Contradiction. ■

Lemme 3.0.4 *Soit D un digraphe d'ordre n et x un sommet de out-degré maximum $\Delta^+ \geq 1$. Si $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ alors $|B_x| \leq 2\Delta^+ - 1$.*

Preuve. D'après Lemme 3.0.3, $|B_x| \leq 2\Delta^+$. Supposons que $|B_x| = 2\Delta^+$. Alors la fonction

$$f(v) = \begin{cases} \{1,2\} & \text{pour} \quad v \in N^+(x) \\ \{1\} & \text{pour} \quad v \in V - (N^+(x) \cup B) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

est une 2-RDF de D, avec $w(f) \leq n - \Delta^+$. Contradiction. ■

Lemme 3.0.5 *Soit D un digraphe d'ordre n, x un sommet de out-degré maximum $\Delta^+ \geq 1$. Si $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ alors $|C_x| \geq 1$.*

Preuve. Supposons au contraire que $C_x = \emptyset$. Alors la fonction

$$f(v) = \begin{cases} \{2\} & \text{pour} \quad v = x \\ \{1\} & \text{pour} \quad v \in \overline{N^+[x]} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

est une 2-RDF de D avec $w(f) \leq n - \Delta^+$. Contradiction. ■

Remarque 3.0.2 *Le contre exemple illustré dans la figure* 3.0.1*, montre que toutes les conditions nécessaires données par les Lemmes 3.0.1 à 3.0.4 ne sont pas suffisantes. En effet, $\gamma_{r2}(D) = 7 < n - \Delta^+(D) + 1 = 8$.*

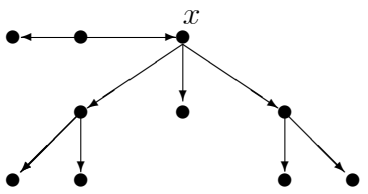


Figure 3.0.1 : Un arbre orienté avec $\gamma_{r2}(D) < n - \Delta^+ + 1$.

Proposition 3.0.7 *Soit D un digraphe d'ordre n de out-degré minimum $\delta^+ \geq 2$. Si $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$, alors D est connexe.*

Preuve. Supposons au contraire que D contient au moins deux composantes connexes, disant C_1 et C_2. Soit x un sommet de out-degré Δ^+, et sans perte de généralité supposons que x est dans C_1. Puisque $\Delta^+ \geq \delta^+ \geq 2$, tout sommet v dans C_2 a au moins deux out-voisins (successeurs) dans $\overline{N^+[x]}$, contradiction avec le Lemme 3.0.1. Par conséquent D est connexe. ■

Nous donnons maintenant une caractérisation des digraphes satsfaisants $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ avec $1 \leq \Delta^+ \leq 2$.

Proposition 3.0.8 *Soit D un digraphe d'ordre n et x un sommet de out-degré maximum Δ^+ avec $1 \leq \Delta^+ \leq 2$ alors $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ si et seulement si D vérifié les conditions suivantes:*

1. $\Delta^+(< \overline{N^+[x]} >) \leq 1$,
2. $\Delta^-(< \overline{N^+[x]} >) \leq 1$,
3. $|C_x| \geq 1$, et
4. s'il existe un sommet y avec $d^-(y) \geq 2$, alors tout sommet $z \in \overline{N^-[y]}$ satisfait $d^-(z) \leq 1$.

Preuve. Supposons que $\gamma_{2r}(D) = n - \Delta^+ + 1$. D'après les Lemmes 3.0.1, 3.0.2 et 3.0.5, les conditions 1, 2 et 3 sont vérifiées,

Supposons maintenant au contraire que la condition 4 n'est pas vérifiée. Alors, il existe un sommet y avec $d^-(y) \geq 2$ et il existe un sommet $z \in \overline{N^-[y]}$ tel que $|N^-(z) - \{y\}| \geq 2$. Nous distinguons deux cas:

Cas 1. $N^-(z) \cap N^-(y) = \emptyset$. Soient $u \in N^-(y)$ et $w \in N^-(z)$. La fonction

$$f(v) = \begin{cases} \{2\} & \text{pour} \quad v \in \{u, w\} \\ \emptyset & \text{pour} \quad v \in \{y, z\} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Il facile de voir que f est une 2-RDF de D avec $w(f) \leq |V_1| + |V_2| = (n-4) + 2 = n - 2 < n - 1 = n - \Delta^+ + 1$. Contradiction.

Cas 2. $N^-(z) \cap N^-(y) \neq \emptyset$. Soit $u \in N^-(y) \cap N^-(z)$. La fonction

$$f(v) = \begin{cases} \{2\} & \text{pour} \quad v = u \\ \emptyset & \text{pour} \quad v \in \{y, z\} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$$

est une 2-RDF de D avec $w(f) \leq (n-3)+1 = n-2 < n-1 = n-\Delta^+ +1$. Contradiction.

Inversement. Soit D un digraphe d'ordre n et x un sommet de out-degré maximum Δ^+. Si $\Delta^+ = 1$, alors $\Delta^- = 1$ (sinon, $\Delta^- \geq 2$ alors il existe v un sommet de D avec $d^-(v) \geq 2$, et comme $\Delta^-(< \overline{N^+[x]} >) \leq 1$, v doit être dans $N^+(x)$, i.e, $N^+(x) = \{v\}$, donc $|C_x| = 0$, qui contredit la condition 3) et d'après Proposition 3.0.6, $\gamma_{2r}(D) = n = n - \Delta^+ + 1$.

Supposons maintenant que $\Delta^+ = 2$ et $\gamma_{2r}(D) < n - \Delta^+ + 1$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2, V_{1,2})$ est une $\gamma_{r2}(D)$-fonction. Donc

$$|V_1| + |V_2| + 2|V_{1,2}| = \gamma_{r2}(D) < n - \Delta^+ + 1 = |V_0| + |V_1| + |V_2| + |V_{1,2}| - 1.$$

Alors, $|V_{1,2}| \leq |V_0| - 2$. On distingue trois cas:

Cas 1. $|V_{1,2}| \geq 2$. Comme $\Delta^+ = 2$, $V_{1,2}$ contient au moins deux sommets, disant x, y tels que $|N^+(x) \cap V_0| = |N^+(y) \cap V_0| = 2$ et $N^+[x] \cap N^+[y] = \emptyset$, ce qui implique que $\Delta^+(< \overline{N^+[x]} >) > 1$. Contradiction avec la condition 1.

Cas 2. $|V_{1,2}| = 1$. Comme $\Delta^+ = 2$, V_0 contient au moins un sommet y tel que $N^-(y) \cap V_{1,2} = \emptyset$. Ce que implique qu'il existe au moins deux sommets, disant u dans V_1 et v dans V_2 tels que $\{u, v\} \subseteq N^-(y) \subset \overline{N^+[x]}$ et donc $\Delta^-(< \overline{N^+[x]} >) > 1$. Contradiction avec la condition 2.

Cas 3. $|V_{1,2}| = 0$. Comme $\Delta^+ = 2$, dans ce cas, chaque sommet v dans V_0 satisfait $|N^-(v) \cap V_1| \geq 1$ et $|N^-(v) \cap V_2| \geq 1$. Puisque $|V_0| \geq 2$, soit $\{y, z\} \subset V_0$. On distingue deux sous-cas:

Sous-cas 3.1. $N^-(y) \cap N^-(z) = \emptyset$. Dans ce cas les deux sommets y et z sont dominants par deux pairs de sommets différents, alors $N^-(y) \geq 2$ et $N^-(z) \geq 2$. Contradiction avec la condition 4.

Sous-cas 3.2. $N^-(y) \cap N^-(z) \neq \emptyset$. Dans ce cas il existe au moins un sommet x dans $N^-(y) \cap N^-(z)$ tel que $N^+(x) = 2$ donc $|C_x| = 0$. Contradiction avec la condition 3. ■

3.1 Caractérisation des chaînes et des cycles orientés satisfaisants $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$.

3.1.1 Chaines orientées sans arcs symétriques $\overrightarrow{P_n}$

Nous commençons par donner une caractérisation discriptive pour les chaînes orientées sans arcs symétriques $\overrightarrow{P_n}$ d'ordre n satisfaisantes $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) = n - \Delta^+ + 1$.

Définition 3.1.1 *On définit l'obstruction par $\overrightarrow{K^+[x_i]}$ le sous digraphe induit où $V(\overrightarrow{K^+[x_i]}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ de centre x_i (Voir Figure 3.1.1).*

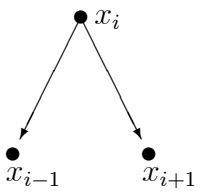


Figure 3.1.1 : $\overrightarrow{K^+[x_i]}$

Définition 3.1.2 *On définit l'obstruction par $\overrightarrow{K^-[x_i]}$ le sous digraphe induit où $V(\overrightarrow{K^-[x_i]}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ de centre x_i (Voir Figure 3.1.2).*

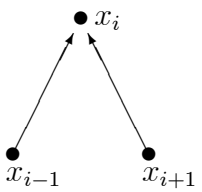


Figure 3.1.2 : $\overrightarrow{K^-[x_i]}$

Pour cette section on utilise les notaions suivantes:

1 - On note par $\overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]}$ la chaîne orientée d'ordre $n \geq 6$ obtenu à partir de $\overrightarrow{K^+[x_i]}$, et $\overrightarrow{K^+[x_j]}$ avec $i \geq 2$ et $j > i + 3$ en reliant x_{i+1} à x_{j-1}par une chaîne orientée sans arcs symétriques telle que la distance $d(x_{i+1}, x_{j-1}) \geq 1$. (Voir Figure 3.4).



Figure 3.1.3 : $\overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]}$.

2 - On note par $\overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]}$ la chaîne orientée d'ordre $n \geq 6$ obtenu à partir de $\overrightarrow{K^-[x_i]}$, et $\overrightarrow{K^-[x_j]}$ avec $i \geq 2$ et $j > i + 3$ en reliant x_{i+1} à x_{j-1}par une chaîne orientée sans arcs symétriques telle que la distance $d(x_{i+1}, x_{j-1}) \geq 1$. (Voir Figure 3.5).



Figure 3.1.4 : $\overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]}$.

3 - On note par $\overrightarrow{P_n^3[x_i]}$ la chaîne orientée d'ordre $n \geq 5$ obtenu à partir de $\overrightarrow{K^+[x_i]}$, avec $i \geq 2$ telle que $\overrightarrow{x_{i-2}x_{i-1}} \in A$ et $\overrightarrow{x_{i+2}x_{i+1}} \in A$ (Voir Figure 3.6).

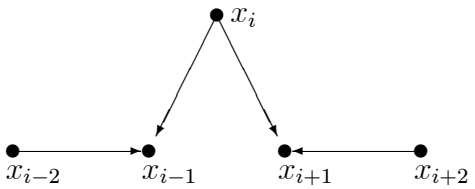


Figure 3.1.5 : $\overrightarrow{P_n^3[x_i]}$.

4 - On note par $\overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]}$ la chaîne orientée d'ordre $n \geq 6$ obtenu à partir de $\overrightarrow{K^+[x_i]}$, et $\overrightarrow{K^-[x_j]}$ avec $i \geq 2$ et $j > i + 3$ en reliant x_{i+1} à x_{j-1}par une chaîne orientée sans arcs symétriques telle que la distance $d(x_{i+1}, x_{j-1}) \geq 1$. (Voir Figure 3.7).



Figure 3.1.6 : $\overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]}$.

Théorème 3.1.1 *Une chaîne orientée $\overrightarrow{P_n}$ d'ordre $n \geq 3$ avec $\Delta^+ = 2$ et $\gamma_{r2}(P_n) = n - \Delta^+ + 1 = n - 1$ si et seulement si*

$$\overrightarrow{P_n} \notin \left\{ \overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]}, \overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]}, \overrightarrow{P_n^3[x_i]}\ , \overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]},\ où\ i \geq 2\ et\ j > i+2 \right\}.$$

Preuve. Soit $\overrightarrow{P_n}$ un chaine orientée et supposons que $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) = n - \Delta^+(P_n) + 1 = n - 1$, d'aprés les conditions 1, 2, 3 et 4 de la Proposition 3.0.8, $\overrightarrow{P_n} \neq \overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]}$, $\overrightarrow{P_n} \neq \overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]}$, $\overrightarrow{P_n} \neq \overrightarrow{P_n^3[x_i]}$ et $\overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]}$ où $i \geq 2$ et $j > i + 2$, la condition nécessaire est vérifiée.

Inversement. Comme $\Delta^+ = 2$ donc il existe un sommet x_i tel que $d^+(x_i) = 2$. Soit $\overrightarrow{K^+[x_i]}$ où $V(\overrightarrow{K^+[x_i]}) = \{x_{i-1}, x_i\ , x_{i+1}\}$.

Pour $n = 3$, 4 et 5 il facile de vérifier que $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) = n - 1$, la propriété est vérifiée pour ce cas. Supposons maintenant que $n \geq 6$.

Soit f un $\gamma(\overrightarrow{P_n})-$fonction avec $|V_0|$ minimum. On définit les deux sous ensembles suivants:

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_{i-2}\} \text{ et } B = \{x_{i+2}, ..., x_n\}.$$

On note par $\overrightarrow{P}_{n_A}[A]$(resp. $\overrightarrow{P}_{n_B}[B]$) la chaîne engendrée par A(resp. B) et posons $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{P_n} \backslash K[x_i]$, et d'après les conditions $\overrightarrow{P_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]}$, $\overrightarrow{P_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]}$ et $\overrightarrow{P_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]}$ où $j > i + 2$ donc forcément $\overrightarrow{P}_{n_A}[A]$ et $\overrightarrow{P}_{n_B}[B]$ sont des chemins.

Comme $\overrightarrow{P}_{n_A}[A]$ et $\overrightarrow{P}_{n_B}[B]$ sont des chemins donc la structure de $\overrightarrow{P_n}$ est présentée pour les deux cas suivents:

Cas 1. $\overrightarrow{P}_{n_A} = (x_{i-2}, x_{i-3}, ..., x_1)$ et $\overrightarrow{P}_{n_B} = (x_{i+2}, ..., x_n)$. Et d'après la condition $\overrightarrow{P_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^3[x_i]}$ on distingue deux subcas:

Sous-cas 1.1. $\overrightarrow{x_{i-1}x_{i-2}} \in A$ et $(\overrightarrow{x_{i+1}, x_{i+2}})$.

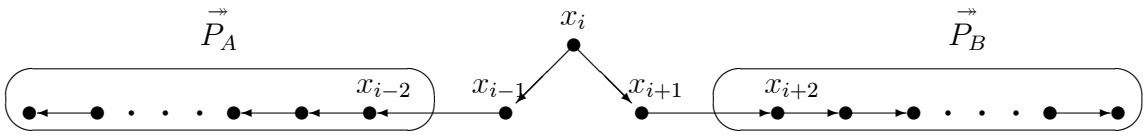


Figure 3.1.7 : $\overrightarrow{x_{i-1}x_{i-2}} \in A$.

Soit $H = \overrightarrow{P_n} - \{x_{i-1,}x_i, x_{i+1}\} = D\left[\left(V\left(\vec{P}_A\right) \cup V\left(\vec{P}_B\right)\right)\right]$. Danc H contient deux composantes connexes $\vec{P}_A$ et $\vec{P}_B$,(Voir Figure 3.1.7). Alors

$$\gamma_{r2}(H) = \gamma_{r2}(\vec{P}_A) + \gamma_{r2}(\vec{P}_B) = n_A + n_B. \tag{3.1.1}$$

Nous définissons la fonction g telle que $g(v) = f(v)\ \forall v \in V(H)$ donc g est une 2-RDF de H avec

$$w(g) \leq w(f) - 2 = \gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) - 2.$$

Comme $w(f) = \gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n})$, on a

$$\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) \geq w(g) + 2 \geq \gamma_{r2}(H) + 2.$$

Et comme $\gamma_{r2}(H) = n_A + n_B = n - 3$, donc

$$\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) \geq n - 3 + 2 = n - 1,$$

et d'autre part, on a $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) \leq n - 1$ alors $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) = n - 1$.

Sous-cas 1.2. $(\overrightarrow{x_{i-2,}x_{i-1}})$ et $(\overrightarrow{x_{i+1,}x_{i+2}})$.

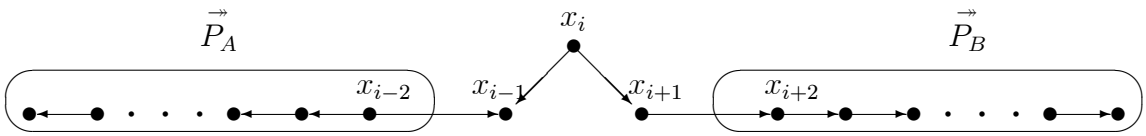


Figure 3.1.8 : $(\overrightarrow{x_{i-2,}x_{i-1}})$.

Soit $H = P_n - \{x_{i-1,}x_i, x_{i+1}\} = D[V(P_A) \cup V(P_B)]$ (Voir Figure 3.1.8). De même raisonement comme le Sous-cas 1.1 on obtient $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) = n - 1$.

Cas 2. $\vec{P}_{n_A} = \left(x_1, x_2, ..., x_{i-2}\right)$ et $\vec{P}_{n_B} = (x_{i+2,}..., x_n)$, ou bien $\vec{P}_{n_A} = (x_{i-2,}x_{i-3}, ..., x_1)$ et $\vec{P}_{n_B} = (x_{n,}..., x_{i+2})$.

Donc sans perte de généralité on peut prendre $\overrightarrow{P}_{n_A} = \left(x_1, x_2, ..., x_{i-2}\right)$ et $\overrightarrow{P}_{n_B} = (x_{i+2,}..., x_n)$. Et d'après la condition $\overrightarrow{P_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^3[x_i]}$ on distingue deux subcas:

Sous-cas 2.1. $(\overrightarrow{x_{i-1,}x_{i-2}})$ et $\left(\overrightarrow{\mathbf{x}_{i+1,}\mathbf{x}_{i+2}}\right)$.

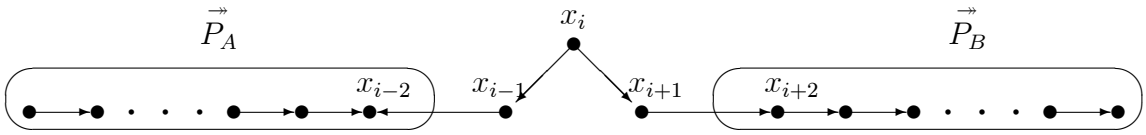


Figure 3.1.9 : $(\overrightarrow{x_{i-1,}x_{i-2}})$.

Soit $H = \overrightarrow{P_n} - \{x_{i-2,}x_{i-1,}x_i, x_{i+1}\} = D\left[(V(\overrightarrow{P}_A) - \{x_{i-2,}\}) \cup V(\overrightarrow{P}_B)\right]$. Danc H contient deux composantes connexes $\overrightarrow{P}_A$ et $\overrightarrow{P}_B$ (Voir Figure 3.1.9). Alors

$$\gamma_{r2}(H) = \gamma_{r2}(\overrightarrow{P}_A) + \gamma_{r2}(\overrightarrow{P}_B) = n_A + n_B - 1. \tag{3.1.2}$$

Nous définissons la fonction g telle que $g(v) = f(v)\ \forall v \in V(H)$ donc g est une 2-RDF de H avec

$$w(g) \leq w(f) - 3 = \gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) - 3.$$

Comme $w(f) = \gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n})$, on a

$$\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) \geq w(g) + 3 \geq \gamma_{r2}(H) + 3.$$

Et comme $\gamma_{r2}(H) = n_A + n_B - 1 = n - 4$, donc

$$\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) \geq n - 4 + 3 = n - 1,$$

et d'autre part, on a $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) \leq n - 1$ alors $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) = n - 1$.

Sous-cas 2.2. $(\overrightarrow{x_{i-2,}x_{i-1}})$ et $(\overrightarrow{x_{i+1,}x_{i+2}})$.

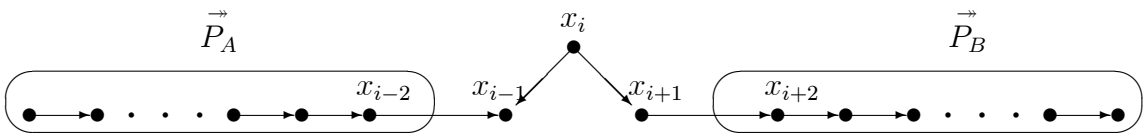


Figure 3.1.10 : $(\overrightarrow{x_{i-2,}x_{i-1}})$.

Soit $H = \overrightarrow{P_n} - \{x_{i-1,}x_i, x_{i+1}\} = D\left[V(P_A) \cup (V(P_B) - \{x_{i+2,}\})\right]$ (Voir Figure 3.1.10). De même raisonement comme le Sous-cas **1.1** on obtient $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) = n - 1$. ■

Cycles orientés sans arcs symétriques $\overrightarrow{C_n}$

Le résultat suivant est une caractérisation discriptive pour les cycles orientés sans arcs symétriques $\overrightarrow{C_n}$ d'ordre n satisfaisants $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_n}) = n - \Delta^+ + 1$.

Théorème 3.1.2 *Un cycle $\overrightarrow{C_n}$ d'ordre n avec $\Delta^+ = 2$ vérifie $\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) = n - \Delta^+ + 1 = n - 1$ si et seulement si*

$$\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]},\ \overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]},\ \overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^3[x_i]} \text{ et } \overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]}.$$

Preuve. Soit $\overrightarrow{C_n}$ un cycle orienté d'ordre $n \geq 6$. Supposons $\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) = n - \Delta^+(\overrightarrow{C_n}) + 1 = n - 1$, d'aprés les conditions 1, 2, 3 et 4 de la Proposition 3.0.8 on a successivement $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]}$, $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]}$, $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^3[x_i]}$ et $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]}$ la condition nécessaire est vérifiée.

Inversement. Comme $\Delta^+(D) = 2$ donc il existe un sommet x_i tel que $d^+(x_i) = 2$. Soit $\overrightarrow{K^+[x_i]}$ où $V(\overrightarrow{K^+[x_i]}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$. Pour $n = 3$, 4 et 5 il facile de vérifier que $\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) = n - 1$, la propriété est vérifiée pour ce cas. Supposons maintenant que $n \geq 6$.

Soit f un $\gamma(\overrightarrow{C_n})-$fonction avec $|V_0|$ minimum. On définit le sous ensemble suivant:

$$A = \{x_{i+2}, ..., x_n, x_1, x_2, ..., x_{i-2}\}$$

On note par $\overrightarrow{P}_{n_A}[A]$ la chaîne engendrée par A. D'apres les condions $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^1[x_i, x_j]}$, $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^2[x_i, x_j]}$ et $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^4[x_i, x_j]}$ où $j > i + 2$ donc forcément $\overrightarrow{P}_{n_A}$ est un chemin. D'apreés la conditon $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{P_n^3[x_i]}$ on distingue deux cas:

.Cas 1. $(\overrightarrow{x_{i+1}, x_{i+2}})$.

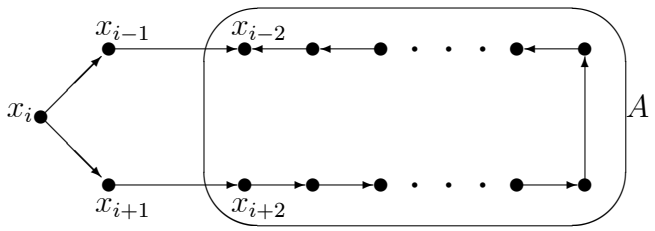


Figure 3.1.11 : $(\overrightarrow{x_{i+1}, x_{i+2}})$.

Soit $\overrightarrow{P_{n_A}} = \overrightarrow{C_n} - \{x_{i-1,}x_i, x_{i+1}\} = D\left[V\left(P_A\right)\right]$. Alors

$$\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_{n_A}}) = n_A. \tag{3.1.3}$$

Nous définissons la fonction g, tel que $g\left(v\right) = f\left(v\right)\ \forall v \in V\left(\overrightarrow{P_{n_A}}\right)$ donc g est une 2-RDF de $\overrightarrow{P_{n_A}}$, avec

$$w\left(g\right) \leq w\left(f\right) - 2 = \gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) - 2.$$

Comme $w\left(f\right) = \gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n})$, on a

$$\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) \geq w\left(g\right) + 2 \geq \gamma_{r2}(\overrightarrow{P_{n_A}}) + 2.$$

Et comme $\gamma_{r2}(\overrightarrow{P_{n_A}}) = n_A = n - 3$, donc

$$\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) \geq n - 3 + 2 = n - 1,$$

et d'autre part, on a $\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) \leq n - 1$ alors $\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) = n - 1$.

Cas 2. $(\overrightarrow{x_{i+2,}x_{i+1}})$.

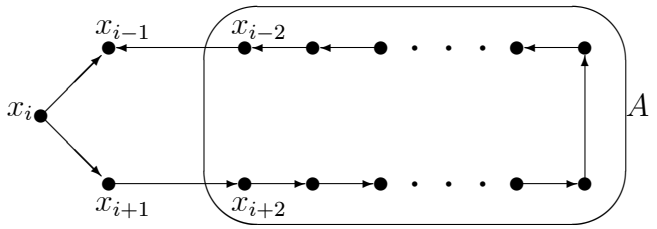


Figure 3.1.12 : $(\overrightarrow{x_{i+2,}x_{i+1}})$.

De même raisonement comme le Cas.1 on obtient $\gamma_{r2}(\overrightarrow{C_n}) = n - 1$. ■

3.2 Arbres orientés avec $\gamma_{r2}(T) = n - 1$

Nous donnons maintenant une caractérisation descriptive pour des arbres orientés T de out-dégré $\Delta^+ \geq 1$ tels que $\gamma_{r2}(T) = n - 1$. Posons $X_{\Delta^+} = \{x \in V, d^+\left(x\right) = \Delta^+\}$.

On note par $\mathcal{F}_1$ la famille de tous les arbres orientés T de out-dégré $\Delta^+ = 1$ et $\Delta^- \geq 2$. Dans la Figure 3.2.1, les sommets en noir doivent être présenté et les sommets blancs peuvent être existés ou non.

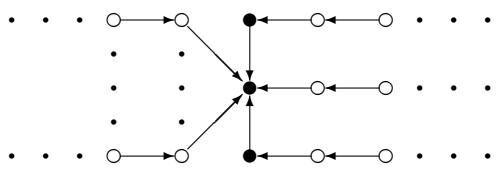
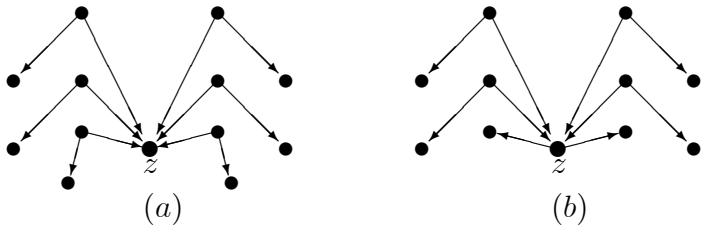


Figure 3.2.1 : Un arbre $T \in \mathcal{F}_1$.

On note par $\mathcal{F}_2$ la famille de tous les arbres orientés T de out-dégré $\Delta^+ = 2$ satisfaisants:

1. T possède au moins deux sommets de out-dégrés $\Delta^+ = 2$,
2. T a un seul sommet z tel que pour tout pair de sommets x et y de out-degré $\Delta^+ = 2$ satisfis $N^+[x] \cap N^+[y] = \{z\}$ où z est l' unique sommet de in-degré $d^-(z)$.



(a) (b)

Figure 3.2.2 : Deux arbres $a, b \in \mathcal{F}_2$.

Proposition 3.2.1 *Soit T un arbre orienté avec out-degré maximum $\Delta^+ = 1$. Alors $\gamma_{r2}(T) = n - 1$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}_1$.*

Preuve. $\Delta^+ = 1$. Alors d'après la Proposition 3.0.6, $\Delta^- \geq 2$. Donc $T \in \mathcal{F}_1$.

Inversement. Si $T \in \mathcal{F}_1$ (voir la Figure 3.2.1) il est facile de vérifier que $\gamma_{r2}(T) = n - 1$.

■

Proposition 3.2.2 *Soit T un arbre orienté avec out-degré maximum $\Delta^+ = 2$. Alors $\gamma_{r2}(T) = n - 1$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}_2$.*

Preuve. Soit T un arbre orienté avec $\Delta^+(T) = 2$. Supposons que $\gamma_{r2}(T) = n - 1$, et on suppose le contraire qu' il existe ou moins deux sommets x et y de out-degré $\Delta^+ = 2$ tels

que $\left|N_T^+[x] \cap N_T^+[y]\right| \neq 1$. Si $\left|N_T^+[x] \cap N_T^+[y]\right| = 0$ alors il ya deux composantes connexe ce qui contredit T est un arbre. Par conséquent, $\left|N_T^+[x] \cap N_T^+[y]\right| \geq 2$, mais dans ce cas on va trouver un cycle, encors une contradiction avec T est un arbre. Donc $\left|N_T^+[x] \cap N_T^+[y]\right| = 1$ ce que veut dire que T possède un seul sommet, disant z tel pour tout pair de sommets x et y de out-degré $\Delta^+ = 2$ satisfis $N^+[x] \cap N^+[y] = \{z\}$ (voir la Figure 1).

Inversement. Si $T \in \mathcal{F}_2$ (voir la Figure 3.2.2)(dans le cas $d^+(z) = \Delta^+$, x peut être z), la fonction $f = (N_T^+(x), V - N_T^+[x], \emptyset, \{x\})$ est un $\gamma_R(T)$-fonction avec

$$\gamma_{r2}(T) = |V_1| + 2|V_{1,2}| = (n-3) + 2 = n - 1.$$

■

3.3 Graphes orientés out-régulier et tournois avec $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$.

Dans ce qui suit, nous allons donner la structure des graphes orientés Δ^+-out-régulier D satisfaisant $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$. Nous commençons par le résultat suivant qui est important pour le suite.

Proposition 3.3.1 *Soit T_n un tournoi d'ordre n.*

(i) Si T_n est un Δ^+-out-régulier alors $n = (2\Delta^+ + 1)$

(ii) T_n est un tournoi Δ^+-out-régulier si et seulement si T_n est un tournoi Δ^+-in-régulier.

Preuve. Soit T_n un graphe orienté d'ordre n et $k \geq 1$ un nombre entier positif.

(i) Si T_n est un Δ^+-out-régulier alors pour chaque sommet $v \in V$, $d^+(v) = \Delta^+$. On a ,

$$\Delta^+ n = \sum_{v \in V} d_{T_n}^+(v) = \frac{n(n-1)}{2},$$

ce qui implique que $n = 2\Delta^+ + 1$.

(ii) Si T_n est un Δ^+-out-régulier, alors pour chaque sommet $x \in V$, $d^+(x) = \Delta^+ = (n-1)/2$. Comme

$$d^+(x) + d^-(x) = n - 1 \Rightarrow d^-(x) = (n-1)/2 = \Delta^+$$

Par conséquent, T_n est un Δ^+-in-régulier d'ordre $n = (2\Delta^+ + 1)$. L'inverse est obtenu de la même manière. ■

Pour les Lemmes suivants supposons que D est un graphe orienté Δ^+-out-régulie rsatisfait $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$.

Lemme 3.3.1 *Soit D un graphe orienté Δ^+-out-régulie d'ordre n. Si $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ alors $1 \leq \Delta^+ \leq 3$.*

Preuve. Il est clair que $\Delta^+ \geq 1$, (sinon $n \geq \gamma_{r2}(D) = n+1$, contradiction). Maintenant, soit $x \in V$, par le Lemme 3.0.3, chaque sommet y de $N^+(x)$ a au plus deux out-voisins dans $\overline{N^+[x]}$, ce qui implique que y a au moins $\Delta^+ - 2$ out-voisins dans $N_D^+(x)$. Il est clair que le sous-graphe orienté induit par $N^+[x]$ a au plus $\frac{\Delta^+(\Delta^+ + 1)}{2}$ arcs. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^+(\Delta^+ + 1)}{2} &\geq \sum_{y \in N^+[x]} d^+_{<N^+[x]>}(y) \\ &= d^+(x) + \sum_{y \in N_D^+(x)} d^+_{<N^+[x]>}(y) \\ &\geq \Delta^+ + \left(\Delta^+ - 2\right)\Delta^+,\end{aligned}$$

ce qui implique que $\Delta^+ \leq 3$. ■

Lemme 3.3.2 *Soit D un graphe orienté 3-out-régulie d'ordre n. Si $\gamma_{r2}(D) = n - 2$ alors chaque sommet dans $V - \{x\}$ a au plus deux in-voisins dans $N^+[x]$ pour tout sommet $x \in V$.*

Preuve. Supposons au contraire que il existe un sommet $y \in V - \{x\}$ avec au moins trois in-voisins dans $N^+[x]$. Si $y \in \overline{N^+[x]}$ alors y a au plus un out-voisin dans $N^+[x]$, cela signifie que y a au moins deux out-voisins dans $\overline{N^+[x]}$, une contradiction avec le Lemme 3.0.1. Donc, y doit être dans $N^+(x)$, mais dans ce cas y a trois out-voisins dans $\overline{N^+[x]}$, une contradiction avec le Lemme 3.0.3. ■

Pour les deux lemmes restants on suppose que D est un graphe orienté 3-out-régulier satisfait $\gamma_R(D) = n - 2$.

Lemme 3.3.3 *Soit D un graphe orienté 3-out-régulie d'ordre n. Si $\gamma_{r2}(D) = n - 2$ alors $< N^+(x) >$ est un circuit d'ordre 3 pour tout sommet $x \in V$.*

Preuve. Soit $N^+(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$, cela signifie que $x \Rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}$. Pour chaque sommet $y \in N^+(x)$, nous avons $|N^+(y) \cap N^+(x)| \leq 2$ et d'aprés le Lemme 3.0.3, $\left|N^+(y) \cap \overline{N^+[x]}\right| \leq 2$. Alors, il est clair que chaque sommet $y \in N^+(x)$ a exactement un out-voisin dans $N^+(x)$ et deux out-voisins dans $\overline{N^+[x]}$, ce qui implique que $< N^+(x) >$ est un circuit en D, et sans perte de généralité nous pouvons supposer que $y_1 \to y_2 \to y_3 \to y_1$. ■

Lemme 3.3.4 *Soit D un graphe orienté Δ^+-out-régulie d'ordre n. Si $\gamma_{r2}(D) = n-2$ alors $\Delta^+ \leq 2$.*

Preuve. Supposons au contraire que $\Delta^+ \geq 3$. D'après le Lemme 3.3.1, $\Delta^+ = 3$. Par le lemme 3.0.4 , $|B_x| \leq 5$. Le Lemme 3.3.2 implique $|B_x| \geq 3$. Si $|B_x| = 4$ alors $\gamma_{r2}(< N^+[x] \cup B_x >) \leq 5 = 1 + |B_x|$, et si $|B_x| = 5$ alors $\gamma_{r2}(< N^+[x] \cup B_x >) \leq 6 = 1 + |B_x|$. Comme $\gamma_{r2}(< \overline{N^+[x]} - B_x >) \leq \left|\overline{N^+[x]} - B_x\right|$, nous avons

$$\begin{aligned}\gamma_{r2}(D) &\leq \gamma_{r2}(< N^+[x] \cup B_x >) + \gamma_{r2}(< \overline{N^+[x]} - B_x >) \\ &\leq 1 + |B_x| + \left|\overline{N^+[x]} - B_x\right| \leq n - 3,\end{aligned}$$

une contradiction avec le fait $\gamma_{r2}(D) = n - 2$. Par conséquent, $|B_x| = 3$. Soit $N^+(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$,et soit $B_x = \{z_1, z_2, z_3\}$, sans perte de généralité, suppos que $y_1 \Rightarrow \{z_1, z_2\}$. En vue du Lemme 3.0.3, on a $y_2 \not\Rightarrow \{z_1, z_2\}$ et $y_3 \not\Rightarrow \{z_1, z_2\}$, sans perte de généralité, suppose que $y_2 \Rightarrow \{z_2, z_3\}$, alors $y_3 \Rightarrow \{z_3, z_1\}$. Ainsi, comme chaque sommet $z \in B_x$, $|N^+(z) \cap N^+[x]| \leq 2$ et par le Lemme 3.0.1, $\left|N^+(z) \cap \overline{N^+[x]}\right| \leq 2$ on a $z_1 \Rightarrow \{x, y_2\}$, $z_2 \Rightarrow \{x, y_3\}$ et $z_3 \Rightarrow \{x, y_1\}$. Donc, $N^-(y) \cap B_x \neq \emptyset$ ce qui implique que $N^-(y) \cap \overline{N^+[x]} \neq \emptyset$ pour chaque sommet y dans $N^+(x)$. Contradiction avec le Lemme 3.0.4. Par conséquent $\Delta^+ \leq 2$. ■

Théorème 3.3.1 *Soit D un graphe orienté Δ^+-out-régulier. Alors $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$ si et seulement si $D = \overrightarrow{C}_n$ ou $D = T_5$.*

Preuve. ($\Longleftarrow$)Si $D = \overrightarrow{C}_n$ ou $D = T_5$, alors il est facile de vérifier l'égalité $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$.

($\Longrightarrow$)Inversement, soit D un graphe orienté Δ^+-out-régulier tel que $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$. D'après le Lemme 3.3.4, $\Delta^+ \leq 2$. Pour le cas $\Delta^+ = 1$, on a $\gamma_{r2}(D) = n$ et d'après la Proposition 2.2.2, $D = \overrightarrow{C}_n$. Ainsi, pour la suite, on suppose que $\Delta^+ = 2$. Soit x un sommet de maximum out-degré $\Delta^+ = 2$ et $N^+(x) = \{y_1, y_2\}$. D'après le Lemme 3.0.4, $|B_x| \leq 3$. Supposons

que $|B_x| = 3$, soit $B_x = \{z_1, z_2, z_3\}$. Comme $d^+(y_1) = d^+(y_2) = 2$, sans petre de généralité supposons que $N^+(y_1) = \{z_1, z_2\} \subset B_x$. Si $N^+(z_3) \in \{\{x, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \{y_1, z_1\}, \{y_1, z_2\}\}$ on aura une contradiction avec les Lemmes 3.0.1 et 3.0.5, donc $y_1 \notin N^+(z_3)$, et on peut vérifier facilment qu'il existe toujours une contradiction avec au moins l'une des 5 premiers lemmes. Donc, $D = T_5$. ■

Le corollaire suivant découle de le Théoréme 3.3.1 et les Lemmes 3.3.1 et 3.3.4.

Corollaire 3.3.1 *Soit T_n un tournoi Δ^+-out-régulier d'ordre $n \geq 3$ et $\Delta^+ \geq 1$. Alors $\gamma_{r2}(T_n) = n - \Delta^+ + 1$ si et seulement si $n \in \{3, 5\}$ (voir Figure 3.3.1).*

Preuve. Soit T_n un tournoi Δ^+-out-régulier d'ordre $n \geq 3$ et $\Delta^+ \geq 1$. Si $\gamma_{r2}(T_n) = n - \Delta^+ + 1$ alors par le Lemme 3.3.1 $\Delta^+ \leq 3$ et par le Lemme 3.3.4, $\Delta^+ \leq 2$. Comme T_n est un tournoi Δ^+-out-régulier et d'après le Théoréme 3.3.1, $n = 2k + 1 \in \{3, 5\}$. L'inverse est évident. ■

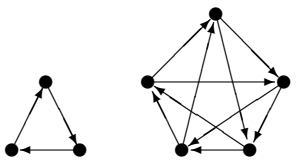


Figure 3.3.1 : Des tournnois T_3 et T_5.

3.4 NP-Complétude avec $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$

Dans cette section, nous considérons la complexité du problème de décider si un graphe orienté D a $\gamma_{r2}(G) = n - \Delta^+ + 1$. Rappelons que le problème 3-SAT est un problème $\mathcal{NP}$-complet bien connu,[8].

FONCTION MINIMUM DE DOMINATION RAINBOW (FMDR)

INSTANCE: Un graphe orienté $D = (V, A)$.

QUESTION: Est-ce que D a une FMDR f avec $f(V) = n - \Delta^+ + 1$?

Nous montrons que ce problème est $CO-\mathcal{NP}$-complet en réduisant le problème de 3-satisfiabilité (3-SAT) au problème de décider si $\gamma_{r2}(D) \leq n - \Delta^+$ est $\mathcal{NP}$-complet.

FONCTION DE DOMINATION RAINBOW (FDR)

INSTANCE: Un graphe orienté $D = (V, E)$.

QUESTION: Est-ce que D a une FDR f avec $f(V) \leq n - \Delta^+$?

Nous dénotons par H_i le graphe orienté décrit dans la Figure 1.

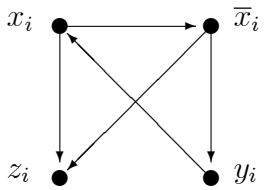


Figure 3.4.1 : Le graphe orienté H_i.

Théorème 3.4.1 *Le problème FDR est $\mathcal{NP}$-complet.*

Preuve. Soit D un graphe orienté d'ordre n. Premièrement, nous devons montrer que FDR$\in NP$. C'est facile à faire, car il est facile de vérifier une instance 'oui' de FDR en temps polynomial, c'est-à-dire, pour un graphe orienté $D = (V, A)$, un entier positif k et une fonction arbitraire f avec $|f(V)| \leq k$, il est facile de vérifier en temps polynomial si f est un FDR. Deuxièmement, nous devons construire une réduction du problème NP-complet, 3-SAT bien connu au problème de FDR.

Soit $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ un ensemble de variables et $C = \{C_1, C_2, ..., C_q\}$ un ensemble de sous-ensembles de 3-éléments, appelés clauses, où chaque clause C_i contient trois occurrences distinctes d'une variable x_i ou $\overline{x}_i$ (la négation de x_i). Étant donné une instance I de 3-SAT, pour l'ensemble des clauses C, nous construirons une instance $D(I)$ (c'est-à-dire un graphe orienté D correspondant à une instance I) telle que D a une RDF, f avec $|f(V)| \leq k$ si et seulement si I est satisfaisable (i.e., j'ai une affectation de vérité satisfaisante).

Pour chaque clause C_j, de C, nous créons un sommet de clause étiqueté c_j, et pour chaque variable x_i dans X, nous construisons un graphe orienté étiqueté H_i décrit dans la

figure 1. De plus, pour chaque clause C_j, on ajoute trois arcs de trois littéraux dans la clause C_j au sommet c_j correspondant et nous ajoutons un autre sommet, disons w, et le relie par des arcs de w à chaque sommet de x_i ou bien $\overline{x}_i$ et c_j (Voir la Figure 1). Clairement $D(I)$ peut être construit à partir d'une instance de 3-SAT en temps polynomial. Nous devons montrer que I a une affectation de vérité satisfaisante si et seulement si le graphe orienté $D(I)$ a un FDR, f avec $|f(V)| \leq k$, dans ce cas $k = 3p + 1$.

Nécessité($\Rightarrow$). Supposons d'abord que j'ai une affectation de vérité satisfaisante. Il existe deux possibilités pour créer une fonction rainbow $f = (V_0, V_1, V_2, V_{1,2})$, les deux sont comme suit :

1)- Soient w et $y_i \in V_1$. Si $I(x_i)$ =Vrai, alors $x_i \in V_2$ et $\overline{x}_i \in V_1$. Sinon, $x_i \in V_1$ et $\overline{x}_i \in V_2$, et tous les sommets restants sont dans V_0.

2)- Soit $f(w) = \{1\}$. Si $I(x_i)$ =Vrai, alors $x_i \in V_{1,2}$ et $f(y_i) = \{1\}$. Sinon $\overline{x}_i \in V_{1,2}$ et $f(x_i) = \{1\}$, et tous les sommets restants sont dans V_0.

Il est facile de voir que la fonction f est une FDR sur $D(I)$ du poids $|f(V)| = 3p + 1$.

Suffisance($\Leftarrow$). Supposons que $D(I)$ a une FDR $f = (V_0, V_1, V_2, V_{1,2})$ du poids $|f(V)| \leq 3p + 1$. Nous devons montrer que j'ai une affectation de vérité satisfaisante. Comme $N^-(w) = \emptyset$ alors $|f(w)| \geq 1$, et il est facile de voir que pour chaque H_i, nous devons avoir $|f(V(H_i))| \geq 3$, et donc $|f(V)| \geq 3p + 1$, ce qui signifie que $|f(V(H_i))| = 3$ pour chaque i, $f(w) = \{1\}$, et $f(c_j) = \emptyset$ pour tout j. Donc, nous avons deux possibilités d'assignement:

1)- Ou bien $(x_i, \overline{x}_i) \in V_2 \times V_1$ ou $(x_i, \overline{x}_i) \in V_1 \times V_2$ et $(f(y_i), f(z_i)) = (\{1\}, \emptyset)$.

2)- Ou bien $(x_i, \overline{x}_i) \in V_{1,2} \times V_0$ et $(f(y_i), f(z_i)) = (\{1\}, \emptyset)$, ou $(x_i, \overline{x}_i) \in V_1 \times V_{1,2}$, et $(f(y_i), f(z_i)) = (\emptyset, \emptyset)$.

Puisque chaque sommet de clause doit être dominé par au moins un sommet de $V_{1,2}$ ou par deux sommets, un sommet de V_1 et l'autre sommet de V_2. Nous pouvons donc et sans perte de généralité de supposer que $w \in V_1$ et nous avons deux possibilités pour créer une affectation de vérité satisfaisante et elles sont comme suit:

1)- Pour chaque variable x_i, assigner x_i la valeur Vraie si $x_i \in V_2$, sinon assigner la valeur Fausse.

2)- Pour chaque variable x_i, assigner x_i la valeur Vraie si $x_i \in V_{1,2}$, sinon assigner la valeur Fausse.

Dans les deux cas, il est facile de vérifiér que c'est une affectation de vérité satisfaisante pour I, i.e. l'instance $I = 1$ si et seulement si $D(I)$ a un FDR, f avec $|f(V)| \leq k$. ■

Corollaire 3.4.1 *Le problème FMDR est* CO-$\mathcal{NP}$*-complet.*

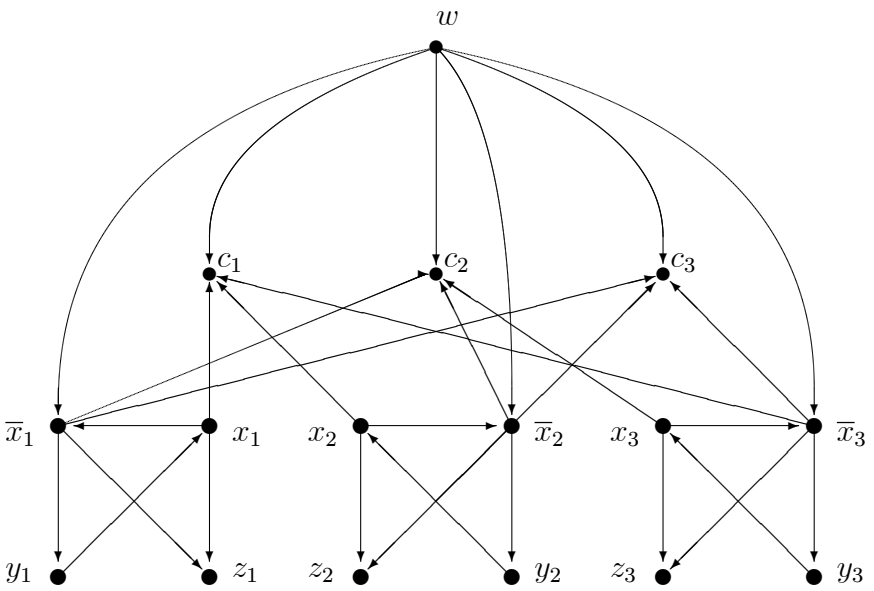


Figure 3.4.2 : l'instance $I = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$.

Dans cet exemple pour $k = 10$, on peut voir dans cette table de vérité pour l'instance $I = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$ que toute affectation de vérité satisfaisante $(I = 1)$ si et seulement si le graphe orienté $D(I)$ a un FDR, f avec $|f(V)| \leq k$, où $k = 3p+1$.

$I = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$ $\quad$ $D(I)$, f avec $|f(V)| \leq k$?

$I = (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (0 \vee 1 \vee 1) \wedge (0 \vee 1 \vee 0) = 1$	Oui
$I = (1 \vee 0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1 \vee 1) = 1$	Oui
$I = (1 \vee 1 \vee 0) \wedge (0 \vee 0 \vee 1) \wedge (0 \vee 0 \vee 0) = 0$	Non
$I = (1 \vee 1 \vee 1) \wedge (0 \vee 0 \vee 0) \wedge (0 \vee 0 \vee 1) = 0$	Non
$I = (0 \vee 1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 0 \vee 1) = 1$	Oui
$I = (0 \vee 0 \vee 1) \wedge (1 \vee 1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1 \vee 1) = 1$	Oui
$I = (0 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1 \vee 0) = 0$	Non
$I = (0 \vee 1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0 \vee 0) = 1$	Oui.

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude de la notion de la 2-domination rainbow dans les digraphes simples. Généralement, la détermination de $\gamma_{r2}(D)$ est un problème difficile pour un digraphe quelconque.

En premier lieu nous avons caractérisé des classes spéciales de digraphes, à savoir les chaînes et les cycles orientés sans arcs symétriques, des arbres orientés, des graphes orientés out-réguliers et des tournois satisfaisants, $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+ + 1$. Ainsi, nous avons montré que le problème de décider si un graphe orienté D satisfait $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ est CO-NP-complet.

Les travaux réalisés durant ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. Nous proposons des questions qui peuvent faire l'objet de travaux et de recherches ulterieures.

1. Caractérisation des digraphes tels que $\gamma_{r2}(D) = n - \Delta^+(D) + 1$, pour $\Delta^+ \geq 2$.
2. Caractérisation des arbres orienté $T \notin \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ tels que $\gamma_{r2}(T) = n - \Delta^+(T) + 1$.
3. Caractérisation des digraphes tels que $\gamma_{r2}(D)+\gamma_{r2}(\overline{D}) = n+3$, où $\overline{D}$ est le complément d'un digraphe D.

Bibliographie

[1] J. Amjadi, A. Bahremndpour S. M. Sheikholeslami and L. Volkmann, "*The Rainbow Domination Number of a digraph*", Acta Universitatis Apulenisis, 37 (2013) 255.

[2] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs.* (*North Holland, Amsterdam,* 1973).

[3] Changwoo Lee, " On the domination number of a digraph.", Ph.D. Dissertation, Michigan State University (1994).

[4] X. Chen, G. Hao and Z. Xie, "*A note on Roman domination of Digraphs*" Accepted for publication in. Discussiones Mathematicae Graph Theory.

[5] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domation in graphs*, Networks 7 (1977) 247-261.

[6] S. Cook, "The complexity of theorem proving procedures" Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, 22 (1) (1971) 151-158.

[7] J. Edmonds, *Paths trees and flowers*, Canad. J. Math. 17 (1965) 449-467.

[8] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability*: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman, 1979.

[9] J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone, "Topics on dominationin directed graphs "," $InDominationinGraphs$ ". Haynes, T.W., Hedetniemi. S. T. Slater and P.J., editors. Marcel Dekker, Inc. New York, (1998), pp $401 - 437$.

[10] .G. Hao, D. Ali Mojdeh, and S. Wei,Z. Xie, "Rainbow domination in the Cartesian product of directed paths." AUSTRALASIAN JOURNAL OF COMBINATORICS Volume 70(3) (2018), Pages 349–361.

[11] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater (eds),"Domination in Graphs: Advanced Topics ", Marcel Dekker, New York, (1998).

[12] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater," Fundamentals of Domination in Graphs ", Marcel Dekker, New York, (1998).

[13] M. Kamaraj, P. Jakkammal, "*Roman domination in Digraphs*," submitted.

[14] R. E. Ladner, "On the structure of polynomial time reducibility" Journal of the ACM, 22 (1) (1975) 151-171.

[15] O.Ore," Theory of graphs ", Amer. Soc. Colloq. Pub38, Providence, R.I.(1962).