République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Application

par

SOUIHEL Benaissa

Titre : **Etude théorique de certains problèmes aux limites**

Soutenu publiquement le 22/06/2022.

Devant le jury composé de :

Président	: BENAICHOUCHE Noureddine	Université de. Yahia Farès
Examinateur	: MAALOUM Khaled	Université de. Yahia Farès
Encadreur	: HAMZA ABDELHALIM Younes	Université de. Yahia Farès

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021-2022.

REMERCIEMENT

La plus belle louange est due à Allah Dieu tout-puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

Le mérite d'un mémoire appartient certes à l'auteur, mais également à qui l'encadre donc j'offre premièrement de sincères et chaleureux remerciements à mon encadreur M. HAMZA ABDELHALIM Younes. Dans mon cas, mon encadreur a été d'un soutien et d'une attention exceptionnels. La confiance qu'il m'a accordée ainsi que le soutien moral qu'il a manifesté à mon égard m'ont permis d'accumuler des expériences professionnelles et personnelles marquantes qui font de moi une personne grandie.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à mes parents, mes frères, ma sœur et tous mes amis. leur confiance en soi et leur soutien constant me donnent une base solide me permettant de persévérer et de me dépasser.

Et bien sûr, je ne peux ignorer ma gratitude envers les membres du jury pour avoir bien voulu participer à l'évaluation de mon mémoire et tous ceux qui m'ont appris pendant toutes ces années. Enfin, je remercie tous ceux qui m'aident de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail. Merci beaucoup.

Table des matières

1 Rappel et Notions de base **8**

1.1 Définitions et Notions de base 8

1.1.1 Notions de base 8

1.1.2 Définition de l'équation différentielle 8

1.1.3 Les types des équations différentielles 9

1.1.4 Les équations différentielles linéaires 10

1.1.5 Ordre et degré de l'équation différentielle 11

1.2 Les équations différentielles linéaires d'ordre 2 12

1.2.1 Solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 12

2 Étude théorique de certains problèmes aux limites linéaires **22**

2.1 Exemples 22

2.2 Étude théorique de problème du seconde ordre 23

2.3 Étude d'un cas particulier 30

3 Problème de Sturm-Liouville et quelques applications **34**

3.1 Définition et Propriétés générales 34

3.2 Problème Sturm Liouville et applications 42

3.2.1 L'équation de la chaleur 42

3.2.2 L'équation des ondes 46

3.2.3 L'équation de Laplace 50
3.2.4 L'équation de Legendre 55
3.2.5 L'équation de Hermite 58
3.2.6 L'équation de Laguerre 59

Conclusion générale **62**

Bibliographie **63**

.1 Annexe 65

Notations

les ensembles

- $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+^*$ L'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
- $\mathbb{N}$ L'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^*$ L'ensemble des entiers naturels non nuls.

l'espaces

- $\mathbf{L^2_r}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ L'espace de Lebesgue (fonction de carré intégrable au sens de Lebesgue).

les Symboles

- $\langle .|. \rangle$ Le produit scalaire.
- $\frac{\partial u}{\partial y}$ La dérivée partielle par rapport à y d'une fonction $(x, y) \to u(x, y)$.
- λ Valeur propre.
- $\ell[y]$ Les conditions aux limites.

les polynômes et les fonctions

- $P_n(x)$ Les polynômes de Legendre d'ordre n.
- H_n Les polynômes de Hermite d'ordre n.
- L_n Les polynômes de Laguerre d'ordre n.
- $r(x)$ La fonction de poids.

Abstract

We introduce a theoretical study of some boundary problems, more precisely, some boundary problems related to second order differential equations and the Sturm – Liouville eigenvalue problem and we study the main properties of the differential operator, the eigenvalues and the eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem. We then verified the obtained properties in some equations of the mathematical physics.

Résumé

On introduit une étude théorique de certains problèmes aux limites, plus précisément, certains problèmes aux limites liées à des équations différentielle du second ordre et introduit le problème des valeurs propres de Sturm-Liouville et on étudie les propriétés principales de l'opérateur différentiel, les valeurs propres et les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville. On a ensuite vérifié les propriétés obtenues dans certaines équations de la physique mathématique.

Introduction

Ce mémoire est une étude théorique de certains problèmes aux limites, plus précisément, certains problèmes aux limites liées à des équations différentielle du second ordre et les problèmes de Strum-Liouville. Il est composé d'une introduction, de trois chapitres et d'une conclusion.

Dans le 1^{ier} chapitre nous avons cités les concepts fondamentaux liés aux équations différentielles, notamment le Wronskien et son lien à l'unicité des solutions.

Dans le 2^{ieme} chapitre nous avons décrits la classes des problèmes aux limites liés aux équations différentielles du second ordre, nous avons montrés sur des exemples leurs aspects centrifuge quand à l'existence et l'unicité des solutions. Nous avons montrés quelles sont les conditions de leur unicité, et nous avons étudiés un cas particulier en ajoutant une conditions sur les données de l'équation différentielle.

Dans le 3^{ieme} chapitre nous avons étudiés les différents aspects des équations de Sturm-Liouville du point de vue de l'existence de l'unicité et de la forme de la solution.

Chapitre 1

Rappel et Notions de base

1.1 Définitions et Notions de base

1.1.1 Notions de base

Équation différentielle : Une équation différentielle est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

1.1.2 Définition de l'équation différentielle

On appelle équation différentielle toute équation de la forme :

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.

$$(y')^5 + x = 1. \tag{1.2}$$

$$y^{(4)} + \sin(xy') = e^x y''. \tag{1.3}$$

$$y^2 + x^2 = 3x. \tag{1.4}$$

Les équations (1.2),(1.3) sont des équations différentielles(Vérifier la définition), et l'équation (1.4) est une équation mais non différentielle car ne contient pas les dérivées par rapport a la variable x.

1.1.3 Les types des équations différentielles

Les équations différentielles sont classées en deux types :

1)Équation différentielle ordinaire.

2)Équation différentielle partielle.

1) Équation différentielle ordinaire

Définition 1.1. *une équation différentielle ordinaire est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.*
Il est écrit sous la forme

$$y' = f(x, y).$$

$$y'' = f(x, y, y').$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Exemple 1.2. *L'équation (1.2) c'est une équation différentielle ordinaire, car y dépend de un seul variable x.*

2) Équation aux dérivées partielle

Définition 1.2. *Une équation aux dérivées partielles est une équation contenant en plus de la variable dépendante (u ci-dessous) et les variables indépendantes (x,y,... ci-dessous)*

une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme :

$$F\left(x, y, \ldots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\right) = 0.$$

Exemple 1.3. *L'équation de Laplace est une équation différentielle aux dérivées partielle de base très importante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

ou $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *désigne la fonction inconnue.*

1.1.4 Les équations différentielles linéaires

Définition 1.3. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $x \in I$*, on dit que l'équation (1.1) est linéaire si est seulement si elle soumise sous la forme*

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y'(x) + p_n(x)y = f(x). \tag{1.5}$$

Tel que f *et* $p_0, p_1, \ldots, p_n$ *sont des fonction connu définie sur l'intervalle* I*.*

Exemple 1.4.

$$(\ln(x))y' + y = 0. \tag{1.6}$$

$$yy' + y^2 + 2 = 0. \tag{1.7}$$

L'équation (1.6) est une équation différentielle linéaire, mais l'équation (1.7) une équation différentielle non linéaire.

1) Équation différentielle homogène

Définition 1.4. *On dit que l'équation (1.5) est homogène si* $f(x) = 0$

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{1.8}$$

2) Équation différentielle non homogène

Définition 1.5. *On dit que l'équation (1.5) est non homogène si* $f(x) \neq 0$

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{1.9}$$

D'après la définition(1.5) on remarque que l'équation (1.6) est une équation différentielle homogène et (1.2) est une équation différentielle non homogène.

1.1.5 Ordre et degré de l'équation différentielle

1) L'ordre d'une équation différentielle

Définition 1.6. *Une équation différentielle est d'ordre k si elle contient les dérivées jusqu'à l'ordre k .*

par exemple l'équation (1.2) c'est une équations différentielles ordinaire d'ordre (1)

2) Le degré d'une équation différentielle

Définition 1.7. *Le degré de l'équation différentielle est déterminé par la puissance de la dérivée d'ordre supérieur, Par exemple :si l'équation différentielle est d'ordre(3) alors le degré de l'équation est déterminé par la puissance de cette différentielle.*

Exemple 1.5. *L'équation (1.2) c'est une équations différentielles ordinaire de degré 5.*

1.2 Les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition 1.8. *L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 d'un seule variable x est une équation de la forme :*

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x). \tag{1.10}$$

tel que a,b,c et f sont des fonctions continues sur l'intervalle I ($I \subset \mathbb{R}$).

Remarque 1.1. *Si les coefficients a,b et c sont constants dans l'équation (1.10), l'équation à coefficients constants.*

1.2.1 Solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

La représentation de la solution générale d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre comme une combinaison linéaire de deux solutions dont le Wronskien n'est pas zéro est intimement lié au concept d'indépendance linéaire de deux fonctions.

Nous référerons à la propriété fondamentale suivante des systèmes d'équations linéaires homogènes. Considérez le système suivent

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

soit $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ le déterminant correspondant des coefficients. Alors $x = 0$, $y = 0$ est la seule solution du système **(1)** si et seulement si $\Delta \neq 0$. De plus, la système **(1)** a des solutions non nulles si et seulement si $\Delta = 0$.

Deux fonctions f et g sont dites linéairement dépendantes d'un intervalle I s'il existe

deux constantes k_1 et k_2, non nulles, telles que

$$k_1 f(x) + k_2 g(x). \qquad \textbf{(2)}$$

pour tout x dans I.

Les fonctions f et g sont dites linéairement indépendantes sur un intervalle I s'ils ne sont pas linéairement dépendants c'est-à-dire l'équation **(2)** vaut pour tout x dans I seulement si $k_1 = k_2 = 0$

Définition 1.9. *Soient y_1 et y_2 deux solutions sur I de l'équation différentielle homogène de l'équation (1.10). Le Wronskien de la famille de (y_1, y_2) est la fonction W définie sur I par :*

$$\forall x \in I, W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \qquad \textbf{(3)}$$

Théorème 1.1. *Si f et g sont des fonctions différentiables sur un intervalle ouvert I et si $W(f, g)(x_0) \neq 0$ pour un point x_0 de I, alors f et g sont linéairement indépendants sur I. De plus, si f et g linéairement dépendent sur I, alors $W(f, g)(x) = 0$ pour tout x dans I.*

Démonstration. Voir [11] page 148. □

Théorème 1.2. ***(Théorème d'Abel))*** *Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation différentielle*

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

où p et q sont continus sur un intervalle ouvert I , alors le Wronskien $W(y_1, y_2)(x)$ est donné par

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp\left[- \int p(x)dx \right].$$

où c est une certaine constante qui dépend de y_1 et y_2, mais pas de x. Plus loin, $W(y_1, y_2)(x)$ est soit nul pour tout x dans I (si $c = 0$), soit n'est jamais nul dans I (si $c \neq 0$).

Démonstration. Voir [11] page 149. □

Théorème 1.3. *[9]*

*Pour le Wronskien défini en **(3)**, on définit l'identité d'Abel*

$$W(y_1, y_2)(x) = W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} p(t)dt \right] \quad x_0 \in J.$$

Ainsi, si le Wronskian est nul en un certain $x_0 \in J$, alors il est nul pour tout $x \in J$.

Théorème 1.4. *Si $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ sur l'intervalle I alors la solution général de l'équation (1.10) sous la forme :*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \tag{1.11}$$

Démonstration. Voir référence [1] page 62. □

Nous pouvons maintenant résumer les faits sur les ensembles fondamentaux de solutions, le Wronskians, et l'indépendance linéaire de la manière suivante. Soient deux y_1 et y_2 des solutions de l'équation

$$y'' + p(t)y'q(t)y = 0.$$

où p et q sont continues sur un intervalle ouvert I. Puis les quatre résultats suivantes sont équivalents

1. Les fonctions y_1 et y_2 sont un ensemble fondamental de solutions sur I.
2. Les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur I.
3. $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ pour un certain x_0 dans I.
4. $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour tout x dans I.

1) Équations différentielles à coefficients constants

Soient a, b et c des constantes dans l'équation (1.10), L'équation devient de la forme :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \tag{1.12}$$

L'équation homogène :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \tag{1.13}$$

Nous avons juste besoin de connaître deux solutions y_1 et y_2 linéairement indépendant de problème (1.13) pour calculer la solution général de le problème.

Définition 1.10. *Toute solution de l'équation (1.12) écrit sous la forme :*

$$y = y_p + y_h.$$

telle que : y_h solution de l'équation homogène (1.13) et y_p est une solution particulière de (1.12).

Théorème 1.5. *[9] Il existe exactement deux solutions y_1 et y_2 de (1.13) qui sont linéairement indépendants (essentiellement différents) dans J, c'est-à-dire qu'il y a n'existe pas de constante c telle que $y_1 = cy_2$ pour tout $x \in J$.*

La forme de la solution général :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Tel que c_1 et c_2 deux constantes. on choisit la fonction $y(x) = e^{rx}$ comme solution de l'équation (1.13). On remplace $y(x)$ dans l'équation (1.13) :

$$a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = (ar^2 + br + c)e^{rx}. \tag{1.14}$$

On dit que e^{rx} c'est une solution de l'équation (1.13) si

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{1.15}$$

Cette équation est appelée l'équation caractéristique associée à l'équation (1.13). On a trois cas :

- Le premier cas : $b^2 - 4ac > 0$

  Dans ce cas l'équation (1.15) admet deux racines réelles différentes r_1 et r_2 tel que

  $$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

  donc $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$ (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (1.13) sur I car

  $$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x}$$

  Donc la solution général dans ce car sous la forme :

  $$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

  Tel que c_1 et c_2 deux constantes réelles.

- Le Deuxième cas :$b^2 - 4ac = 0$

  Dans ce cas l'équation (1.15) admet un racine double

  $$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

donc on a un seul solution

$$y_1(x) = e^{\frac{-b}{2a}x}.$$

Par l'utilisation de la méthode de variation des constante on trouve $y_1 = e^{\frac{-b}{2a}x}$ et $y_2 = xe^{\frac{-b}{2a}x}$.

utilisons le Wronskien pour vérifier que y_1 et y_2 sont linéairement indépendant.

soit $x \in I$

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{\frac{-b}{2a}x} & xe^{\frac{-b}{2a}x} \\ \frac{-b}{2a}e^{\frac{-b}{2a}x} & e^{\frac{-b}{2a}x}(1 - \frac{b}{2a}x) \end{vmatrix} = e^{\frac{-b}{a}x} \neq 0 \ \ \forall x \in I.$$

Donc y_1 et y_2 sont linéairement indépendant.

Dans ce cas la solution général est :

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{\frac{-b}{2a}x}.$$

- Le troisième cas :$b^2 - 4ac < 0$ Dans ce cas l'équation (1.15) admet deux racines complexes différentes r_1 et r_2 tel que :

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}, r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}.$$

On suppose que la solution complexe sous la forme

$$y(x) = u(x) + iv(x).$$

donc on a le résultat suivante : $y(x)$ c'est une solution complexe pour l'équation (1.13), donc $u(x)$ et $v(x)$ sont aussi des solutions pour l'équation (1.13). D'après

le résultat Précédent on trouve

$$y_1(x) = e^{\frac{-b}{2a}x}\cos(\beta x), y_2(x) = e^{\frac{-b}{2a}x}\sin(\beta x).$$

Tel que :

$$\beta = \frac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}.$$

y_1 et y_2 sont deux solution réelles alors la solution général dans ce cas s'écrit sous la forme :

$$y(x) = e^{\frac{-b}{2a}x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)).$$

Tel que c_1, c_2 deux constantes réelles.

Pour trouver une solution générale de l'équation (1.13) en utilisant la méthode de variation des constantes.

Méthode de variation des constantes :

L'équation homogène :

si une solution $y_1(x)$ de (1.13) est connue alors nous pouvons utiliser la variation des constantes pour trouver la deuxième solution de (1.13).
Voir [9] page 9.

L'équation non homogène :

Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogène (1.13), on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, mais cette fois $c_1(x)$ et

$c_2(x)$ sont deux fonctions vérifiant :

$$(S)\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer pour résoudre le système (S).

$$c_1(x) = -\frac{1}{a}\int_I \frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2(x))}dx + K \quad , \quad c_2(x) = -\frac{1}{a}\int_I \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2(x))}dx + L.$$

tel que K, L deux constantes réelles.

Exemple 1.6. *Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ *sont* $y_h(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$ *où* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme :

$$y_p(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x).$$

où cette fois $c_1(x), c_2(x)$ *sont des fonctions à trouver et qui vérifient* (S) *:*

$$(S)\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases} \quad donc \begin{cases} c_1'\cos x + c_2'\sin x = 0 \\ -c_1'\sin x + c_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ *et la seconde par* $\cos x$*, on obtient*

$$\begin{cases} c_1' \cos x \sin x + c_2' (\sin x)^2 = 0 \\ -c_1' \cos x \sin x + c_2' (\cos x)^2 = 1 \end{cases} \quad \textit{donc par somme} \quad c_2' = 1$$

Ainsi $c_2(x) = x$ *et la première ligne des équations devient* $c_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$ *donc* $c_1(x) = \ln(\cos x)$.

On vérifie pour se rassurer que $y_p(x) = \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$ *est une solution de l'équation. Ainsi les fonctions solutions sont de la forme :*

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x \sin x.$$

quels que soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) Équations différentielles à coefficients non constants

L'équation (1.10) est une équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, à coefficients variables(non constants) avec second membre.

où $a(x)$,$b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions continues de la variables x sur $I \in \mathbb{R}$ et $f(x)$ le second membre.

$\forall x \in I$ tel que $a(x) \neq 0$ en multipliant l'équation (1.10) par $\dfrac{1}{a(x)}$:

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = F(x). \tag{1.16}$$

Tel que :

$$A(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \ ; \ B(x) = \frac{c(x)}{a(x)} \ ; \ F(x) = \frac{f(x)}{a(x)}.$$

Remarque 1.2. *Les solutions de l'équation (1.10) sont équivalentes aux solutions de l'équation (1.16)*

L'existence et l'unicité des solutions

Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 1.6. *Soient A, B et F trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $K = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.Soit (E) l'équation différentielle $y'' + A(x)y' + B(x)y = F(x)$.*
Pour tout $x_0 \in I$,il existe une solution y et une seule de (E) sur I vérifiant de plus $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Chapitre 2

Étude théorique de certains problèmes aux limites linéaires

2.1 Exemples

La théorie de l'existence et de l'unicité de solutions des problèmes aux limites est beaucoup plus difficile que celle des problèmes aux limites initiale.

Le moindre changement dans les valeur aux limites d'un problèmes aux limites peut extraire des changements très signification dans le comportement des solutions.

Contrairement aux problèmes initiaux ou l'existence et l'unicité de la solution sont assurées par le théorème de Cauchy, l'existence et l'unicité des solutions des problèmes aux limites peuvent changer pour une même équation différentielle :
Si on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\beta) = \varepsilon \quad (0 < \beta < \pi) \end{cases}$$

ce problème possède une et une seule solution

$$y(x) = \frac{\varepsilon \sin x}{\sin \beta}.$$

mais si on change les conditions aux limites et on prend comme conditions

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = \varepsilon \quad (\varepsilon \neq 0) \end{cases}$$

alors le problème n'a aucune solution

et si on prend comme conditions aux limites

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

alors le problème possède une infinité de solution $y(x) = c \sin x$ où c est une constant arbitraire.

Ceci montre la différence flagrante entre problème initial et problème aux limites.

2.2 Étude théorique de problème du seconde ordre

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f(x) \;\; x \in J = [\alpha, \beta]. \qquad \textbf{(1)}$$

où $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ et $f(x)$ sont continues sur J.

On suppose aussi qu'on a les condition aux limits de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \ell_1[y] &= a_0y(\alpha) + a_1y'(\alpha) + b_0y(\beta) + b_1y'(\beta) &= A \\ \ell_2[y] &= c_0y(\alpha) + c_1y'(\alpha) + d_0y(\beta) + d_1y'(\beta) &= B \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

où $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 0, 1$ ou A, B sont des constants données.

Par la suit on va supposes que ces deux condition sont indépendants c'est à dire $\forall c \in \mathbb{R}\ (a_0, a_1, b_0, b_1) \neq c(c_0, c_1, d_0, d_1)$.

Le Problème aux limites **(1)(2)** est dit Problème linéaire non homogène à deux point alors que le Problème homogène

$$\begin{cases} p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \ \ x \in J \\ \ell_1[y] = \ell_2[y] = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

est dit Problème aux limites homogène à deux point.

Les condition **(2)** sont assez générales et incluent en particulier :

i) Les 1^{er} condition aux limites

$$y(\alpha) = A, y(\beta) = B. \qquad \textbf{(4)}$$

i) Les 2^{eme} condition aux limites

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= A \quad y'(\beta) &= B \\ y'(\alpha) &= A \quad y(\beta) &= B \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

iii) Les condition aux limites séparée connu sous le nom de condition Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) &= A \\ d_0 y(\beta) + d_1 y'(\beta) &= B \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

ou $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$ et $d_0^2 + d_1^2 \neq 0$.

iv) Les condition aux limites périodique

$$y(\alpha) = y(\beta), y'(\alpha) = y'(\beta). \qquad \textbf{(7)}$$

Le Problème **(1)(2)** est dit régulier si α et β sont finis et la fonction $p_0 \neq 0$ pour tout $x \in J$.

Si $\alpha = -\infty$ et/ou $\beta = \infty$ et/ou $p_0 = 0$ pour au moins un $x \in J$ alors le Problème **(1)(2)** est dit singulier.

On ne considère ici que les Problèmes aux limites régulier.

Il est claire que la solution triviale est solution aux problème **(3)**, mais il apparait à partir des exemples précédent que ce problème aux limits homogène peut avoir d'autre solutions non triviale.

Théorème 2.1. *soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes aux problème **(3)** alors le problème **(3)** ne possède que la solution triviale si et seulement si*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ell_1[y_1] & \ell_1[y_2] \\ \ell_2[y_1] & \ell_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0$$

Démonstration. Tout solution à l'équation **(3)**peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

$y(x)$ est solution du problème **(3)** si et seulement si

$$\begin{aligned} \ell_1[c_1y_1 + c_2y_2] &= c_1\ell_1[y_1] + c_2\ell_1[y_2] &= 0 \\ \ell_2[c_1y_1 + c_2y_2] &= c_1\ell_2[y_1] + c_2\ell_2[y_2] &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

se system **(8)** ne possède que la solution triviale si et seulement si $\Delta \neq 0$.

Il est claire que le théorème précédant ne dépend pas du choix des solution y_1 et y_2 donc on peut toujours choisir y_1 et y_2 solution du problème **(3)** satisfaisant aux condition initiales

$$\begin{aligned} y_1(\alpha) &= 1 \quad y_1'(\alpha) &= 0 \\ y_2(\alpha) &= 0 \quad y_2'(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1. *Le Problème **(3)** possède une infinité de solutions si et seulement si $\Delta = 0$.*

Exemple 2.1. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'' - y' - 4x^3y = 0 \\ y(1) = 0, y(2) = 0 \end{cases}$$

L'équation précédent admet deux solutions y_1 et y_2 tel que :

$$y_1(x) = \cosh(x^2 - 1), y_2(x) = \frac{1}{2}\sinh(x^2 - 1).$$

on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh(3) & \frac{1}{2}\sinh(3) \end{vmatrix} \neq 0$$

donc le Problème précédent admet un seule solution $y(x) = 0$.

Exemple 2.2. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

L'équation précédent admet deux solutions y_1 et y_2 tel que :

$$y_1(x) = e^{-x}\cos(2x), y_2(x) = e^{-x}\sin(2x)$$

et les deux solutions sont linéairement indépendantes

Donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\frac{\pi}{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Le Problème précédent admet une infinité de solutions sous la forme :

$$y(x) = ce^{-x}\sin(2x)$$

Théorème 2.2. *Le Problème aux limites non homogène **(1)(2)** possède une unique solution si et seulement si le Problème aux limites homogène **(3)** ne possède que la solution triviale.*

Démonstration. soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes du l'équation différentielle **(3)** et $z(x)$ solution particulier de **(1)**, alors la solution générale de **(1)** s'écrit

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + z(x).$$

$y(x)$ est solution du problème **(1)**, **(2)** si et seulement si

$$\begin{aligned} \ell_1[c_1y_1 + c_2y_2 + z] &= c_1\ell_1[y_1] + c_2\ell_1[y_2] + \ell_1[z] &= A \\ \ell_2[c_1y_1 + c_2y_2 + z] &= c_1\ell_2[y_1] + c_2\ell_2[y_2] + \ell_2[z] &= B \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

le system non homogène **(9)** possède une unique solution si et seulement si $\Delta \neq 0$ c'est à dire si et seulement si le system homogène **(8)** ne possède que la solution trivial. A partir du théorème 2.1, $\Delta \neq 0$ équivaut au problème aux limites **(3)** ne possèdent que la solution trivial. □

Exemple 2.3. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \\ y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

L'équation homogène admet deux solutions

$$y_1(x) = e^{-x}\cos(2x), y_2(x) = e^{-x}\sin(2x).$$

Et la solution particulière

$$y_p = e^{-x}.$$

Donc la solution général sous la forme :

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x) + e^{-x}.$$

Alors d'après les conditions de ce Problème on a

$$\begin{cases} c_1 + 1 = 0 \\ -c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

Nous avons trouvé une contradiction

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

Donc le Problème n'admet pas une solution.

Exemple 2.4. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} xy'' - y' - 4x^3 y = 1 + 4x^4 \\ y(1) = 0, y(2) = 1 \end{cases}$$

L'équation homogène admet deux solutions linéairement indépendantes

$$y_1(x) = \cosh(x^2 - 1), y_2(x) = \frac{1}{2}\sinh(x^2 - 1).$$

Et la solution particulière

$$z(x) = -x.$$

Alors d'après les conditions de ce Problème on a

$$\begin{cases} c_1 - 1 = 0 \\ c_1 \cosh(3) + \frac{1}{2} c_2 \sinh(3) - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh(3) & \frac{1}{2}\sinh(3) \end{vmatrix} \neq 0$$

Donc le système admet une seule solution tel que

$$(c_1, c_2) = (1, \frac{2(3 - \cosh(3))}{\sinh(3)})$$

la solution unique sous la forme :

$$y(x) = \cosh(x^2 - 1) + \frac{(3 - \cosh(3))}{\sinh(3)} \sinh(x^2 - 1) - x.$$

2.3 Étude d'un cas particulier

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} y'' = a(x)y' + b(x)y + f(x) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = c_1 \\ \gamma_1 y'(l) + \delta_1 y(l) = d_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Tel que $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, c_1, d_1$ et l sont des nombres réel, $a(x), b(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues.

On écrit le problème sous une forme équivalent :

1)En multipliant la première ligne de le Problème par $e^{-A(x)}$ tel que $A(x) = \int_0^x a(s)ds$

2)On pose $(e^{-A(x)}y')' = e^{-A(x)}(y'' - a(x)y')$

Dans ce cas on suppose que $\alpha_1 > 0, \gamma_1 > 0$

Donc

$$(e^{-A(x)}y')' - e^{-A(x)}b(x)y = e^{-A(x)}f(x).$$

maintenant on pose :

$$g(x) = -e^{-A(x)}f(x) \quad q(x) = e^{-A(x)}b(x) \quad p(x) = e^{-A(x)}$$

Le problème précédent a une nouvelle écriture :

$$\begin{cases} (-p(x)y')' + q(x)y = g(x) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = c_1 \\ \dfrac{\gamma_1}{p(l)}p(l)y'(l) + \delta_1 y(l) = d_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

On pose que :

$$c = \frac{c_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} \;;\; \beta = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} \;;\; \alpha = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} \;;\; \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0.$$

De la même manière pour la deuxième condition

$$\frac{\frac{\gamma_1}{p(l)}}{\sqrt{\frac{\gamma_1}{p(l)}^2 + \delta_1^2}}p(l)y'(l) + \frac{\delta_1}{\sqrt{\frac{\gamma_1}{p(l)}^2 + \delta_1^2}}y(l) = \frac{d_1}{\sqrt{\frac{\gamma_1}{p(l)}^2 + \delta_1^2}}.$$

Donc

$$\gamma p(l)y'(l) + \delta y(l) = d.$$

Avec

$$\gamma = \frac{\frac{\gamma_1}{p(l)}}{\sqrt{\frac{\gamma_1}{p(l)}^2 + \delta_1^2}} \;\;;\;\; \delta = \frac{\delta_1}{\sqrt{\frac{\gamma_1}{p(l)}^2 + \delta_1^2}} \;\;;\;\; d = \frac{d_1}{\sqrt{\frac{\gamma_1}{p(l)}^2 + \delta_1^2}} \;\;;\;\; \gamma^2 + \delta^2 = 1 \;\text{ et }\; \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

On a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ et $\gamma^2 + \delta^2 = 1$ donc il existe $\theta_0 \in [0; \pi[$ et $\theta_l \in [0; \pi[$ tel que :

$$\begin{cases} \alpha = \sin\theta_0, \beta = -\cos\theta_0 \\ \gamma = \sin\theta_l, \delta = -\cos\theta_l \end{cases}$$

Le problème (2.1) a une nouvelle écriture :

$$\begin{cases} (-p(x)y')' + q(x)y = g(x) \\ y'(0)\sin\theta_0 - y(0)\cos\theta_0 = c \\ p(l)y'(l)\sin\theta_l - y(l)\cos\theta_l = d \end{cases} \tag{2.3}$$

L'étude de l'existence et de l'unicité pour (2.1) équivaut à l'existence et l'unicité pour (2.3).

Théorème 2.3. *On a l'équivalence suivante :*

1. *Le problème (2.3) possède une unique solution pour tout couple* $(c, d) \in \mathbb{R}$ *et* $g \in C^0([0, l])$.
2. *Le problème*

$$\begin{cases} (-p(x)y')' + q(x)y = 0 \\ y'(0)\sin\theta_0 - y(0)\cos\theta_0 = 0 \\ p(l)y'(l)\sin\theta_l - y(l)\cos\theta_l = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

ne possède que la solution triviale.

Théorème 2.4. *Si* $q(x) > 0$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *et* $\theta_0 = \theta_l = 0$ *alors le problème (2.4) admet la solution triviale comme solution unique.*

Démonstration. En utilisant les conditions du théorème précédentes :

$$\begin{cases} (-p(x)y')' + q(x)y = 0 \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

On démonter que la solution triviale est la solution unique du problème (2.5).

On suppose que :

1. y est une solution
2. y a valeur positive au point c.($c \in [0, l]$ car $y(0) = y(l) = 0$)
3. y admet un maximum en c tel que $y(c) = M$.

donc

$$\exists c \in]0, l[: y(c) = M \text{ et } y'(c) = 0 \text{ et } y''(c) \leq 0.$$

d'après les hypothèses précédentes on a :

$$-p(c)y''(c) - p'(c)y'(c) + q(c)y(c) = 0.$$

C'est une contradiction,donc $y \leq 0$ sur $[0, l]$. On suppose que y a valeur négatif au point c de même manière nous prouvons que $y \geq 0$ donc $y = 0$. □

Chapitre 3

Problème de Sturm-Liouville et quelques applications

3.1 Définition et Propriétés générales

Définition 3.1. *La théorie de Sturm-Liouville linéaire s'intéresse au cas particulier des équations différentielles ordinaires du second ordre linéaires de la forme :*

$$(r(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda p(x))y(x) = 0 \quad x \in [a, b]. \tag{3.1}$$

Tel que $r(x), p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a, b]$, et λ une constante réel.

Beaucoup d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre sont équivalentes à l'équation de Sturm Liouville.
En particulier :
$\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ et $\alpha_3(x)$ sont des fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$ tel que $\alpha_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, et $\dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}$ une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$,

et si nous pouvons définir :

$$q(x) = \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} r(x), p(x) = \frac{r(x)}{\alpha_1(x)}, r(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} dt \right).$$

Donc l'équation différentielle ordinaire :

$$\alpha_1(x)y''(x) + \alpha_2(x)y'(x) + (\alpha_3(x) + \lambda)y(x) = 0 \quad x \in [a, b]. \tag{3.2}$$

Remarque 3.1. *L'équation (3.2) est équivalente à l'équation de Sturm Liouville (3.1).*

Les étapes pour trouver l'équation équivalente :

$$\begin{cases} (r(x)y'(x))' & = r'(x)y'(x) + r(x)y''(x) \\ & = \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} r(x)y'(x) + r(x)y''(x) \end{cases}$$

On injecte $r(x)$ et $p(x)$ dans l'équation de Sturm Liouville (3.1) on a :

$$r(x)y''(x) + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} r(x)y'(x) + (\frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} r(x) + \lambda \frac{r(x)}{\alpha_1(x)})y(x) = 0.$$

En multipliant l'équation précédente par $\frac{\alpha_1(x)}{r(x)}$ on obtient donc l'équation suivante :

$$\alpha_1(x)y''(x) + \alpha_2(x)y'(x) + (\alpha_3(x) + \lambda)y(x) = 0.$$

Donc y une solution pour l'équation (3.2)

Remarque 3.2. *Si y est une solution de l'équation (3.2) alors c'est une solution de l'équation de Sturm Liouville (3.1).*

Définition 3.2. *Le problème de Sturm Liouville est l'équation Sturm Liouville avec l'ajout de conditions aux limites sur l'intervalle $[a, b]$.*

Donc on a le problème suivant :

$$(SLH)\begin{cases}(r(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda p(x))y(x) = 0 & x \in [a,b] \\ k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 & (k_1,k_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 & (l_1,l_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 \end{cases} \tag{3.3}$$

où k_1, k_2, l_1 et l_2 sont des constantes satisfaisant

$$k_1^2 + k_2^2 > 0 \ ; \ l_1^2 + l_2^2 > 0.$$

Les solutions non nulles du problème (SLH) (si elles existent) sont appelées fonctions propres,et dans ce cas la valeur λ pour laquelle une telle solution existe est la valeur propre correspondante à cette solution.

Remarque 3.3. *La fonction nulle $y \equiv 0$ est clairement une solution de tout problème de Sturm-Liouville homogène.*

Notons que les solutions de ce problème apparaissent comme valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur linéaire :

$$y \longrightarrow Ly = \frac{1}{p(x)}[(r(x)y')' + q(x)y] \ \text{ où } \ p(x) \neq 0 \ \text{ sur } \ [a,b].$$

L'un des résultats principaux de cette théorie est de trouver une base orthonormée de l'espace vectoriel $\mathbf{L^2}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle $[a,b]$,muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Une base composée de vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes formant une suite strictement croissante.

Propriétés de valeurs propres et de fonctions propres

Nous commençons par illustrer les notions de valeurs propres et de fonctions propres par le problèmes de Sturm-Liouville.

Exemple 3.1. *Considérons le problème aux limites de type Dirichlet :*

$$(P_1)\begin{cases}(1)\ \ y''(x)+\lambda y(x)=0,\ \ 0<x<\pi\\ (2)\ \ y(0)=y(\pi)=0\end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs et les fonctions propres du problème (P_1) *on procède comme suit :*

Le premier cas : $\lambda=0$ *:*

la solution générale de l'équation (1) est donnée par :

$$y(x)=c_1x+c_2,\ \ c_2\in\mathbb{R}.$$

En tenant compte des conditions aux bords on trouve $y\equiv 0$*.*

Comme la seule solution du problème (P_1) *est la solution nulle alors* $y\equiv 0$*. n'est pas valeur propre de ce problème.*

Le Deuxième cas : $\lambda<0$ *:*

la solution générale de l'équation (1) est donnée par :

$$y(x)=c_1\exp(\sqrt{-\lambda}x)+c_2\exp(-\sqrt{-\lambda}x)\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Ensuite, les conditions aux bords (2), donnent :

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_2\Big(\exp(-\sqrt{-\lambda}\pi) - \exp(\sqrt{-\lambda}\pi) \Big) = 0 \end{cases}$$

Par suite, le problème (P_1) *admet uniquement la solution nulle* $y \equiv 0$.

Par conséquent, $\lambda < 0$ *n'est pas une valeur propre de ce problème.*

Le troisième cas : $\lambda > 0$ *:*

la solution générale de l'équation (1) est donnée par :

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

D'après les conditions aux bords (2), on aura $c_1 = 0$ *et* $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$.

Donc le problème (P_1) *admet des solutions non nulles si, et seulement si* $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ *ce qui est vraie si :*

$$\lambda = n^2, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où, les valeurs propres du problème (P_1) *sont* $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et les fonctions propres correspondantes sont définies par :*

$$y_n(x) = k \sin(nx), \;\; k \in \mathbb{R}$$

Définition 3.3. λ *est appelé valeur propre du problème de Sturm Liouville si l'équation :*

$$(r(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda p(x))y(x) = 0.$$

admet une solution $y \neq 0$ *(autrement dit : admet une solution non triviale qui satisfait les conditions aux limites).*

La solution $y = y(x)$ est ainsi appelé fonction propre correspondante à la valeur propre λ.

Définition 3.4. *Supposons que $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $r(t) \geq 0$,mais pas identiquement nul,sur $[a, b]$. Nous définissons le produit interne en respectant à la fonction de poids r des fonctions continues f et g sur $[a, b]$ par :*

$$\langle f, g\rangle_r = \int_a^b r(t)f(t)g(t)dt.$$

On dit que f et g sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids r sur l'intervalle $[a, b]$ si est seulement si :

$$\langle f, g\rangle_r = \int_a^b r(t)f(t)g(t)dt = 0.$$

Théorème 3.1. *Considérons le problème de Sturm Liouville suivant :*

$$(SLH)\begin{cases}(r(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda p(x))y(x) = 0 & x \in [a, b]\\ k_1y(a) + k_2y'(a) = 0 & (k_1, k_2) \in (\mathbb{R}^*)^2\\ l_1y(b) + l_2y'(b) = 0 & (l_1, l_2) \in (\mathbb{R}^*)^2\end{cases}$$

Tel que $r(x), p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et $r(x) > 0$, $p(x) > 0$ et $p(a) = p(b)$ donc les valeurs propres correspondante au problème sont toutes réelles et toute paire de fonctions propres associée à des valeurs propres distinctes sont orthogonales dans $\mathbf{L^2_r}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$.

Démonstration.

A) On démontre que les valeurs propres sont toutes réelles.

Soit $Ly = (ry')' + qy$ l'opérateur de dérivation de Sturm-Liouville.

On pose $\lambda = \alpha + i\beta$,$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ une valeur propre complexe et $y = u(x) + iv(x)$ la

fonction propre correspondante au problème (SLH).

$$(r(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda p(x))y(x) = 0 \Leftrightarrow (r(x)(u(x) + iv(x))')' + (q(x) + (\alpha + i\beta)p(x))(u(x) + iv(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow Lu + p(x)(\alpha u(x) - \beta v(x)) + i\Big[Lv + p(x)(\alpha v(x) + \beta u(x))\Big] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Lu + p(x)(\alpha u(x) - \beta v(x)) = 0 & \textbf{(1)} \\ Lv + p(x)(\alpha v(x) + \beta u(x)) = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

En multipliant l'équation **(1)** par $v(x)$ et l'équation **(2)** par $(-u(x))$.

Donc d'une part, on a :

$$\int_a^b v(x)Lu - u(x)Lvdx = \int_a^b \Big[- p(x)v(x)(\alpha u(x) - \beta v(x)) + p(x)u(x)(\alpha v(x) + \beta u(x))\Big]$$
$$= \beta \int_a^b p(x)(u^2(x) + v^2(x))$$

D'autre part, en intégrant par parties, on aura :

$$\int_a^b v(x)Lu - u(x)Lvdx = r(x)(v(x)u'(x) - u(x)v'(x)) \mid_a^b$$
$$= 0$$

Par suite, comme l'intégrale $\int_a^b p(x)(u^2(x) + v^2(x))$ ne peut pas s'annuler alors $\beta = 0$.

On conclut donc que λ est réelle.

B) On démontre que les fonctions propres associée à des valeurs propres distinctes sont orthogonales dans $\mathbf{L^2_r(a, b)}$.

Soient y_n et y_m deux fonctions propres associées aux valeurs propres λ_n et λ_m respecti-

vement, avec $\lambda_n \neq \lambda_m$.Par conséquent.

$$\begin{cases} -Ly_n = \lambda_n q(x) y_n & \textbf{(1.1)} \\ -Ly_m = \lambda_m q(x) y_m & \textbf{(1.2)} \end{cases}$$

En multipliant **(1.1)** par y_m, et **(1.2)** par y_n, en intégrant sur $[a, b]$, puis en prenant la différence entre les deux équations ainsi obtenues, on trouve :

$$-\int_a^b (\langle Ly_n, y_m\rangle - \langle Ly_n, y_m\rangle)dx = (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b y_n y_m q(x)\, dx.$$

Puisque y_n et y_m satisfont les conditions aux limites, on déduire que :

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b y_n y_m q(x)\, dx = 0.$$

Mais $\lambda_n \neq \lambda_m$ Alors $\langle y_n, y_m\rangle = 0$. □

Proposition 3.1. *L'ensemble de toutes les valeurs propres d'un problème de Sturm Liouville régulier forme une famille d'éléments strictement monotone non bornée. Nous désignons cette série par :*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots.$$

En particulier, il existe une infinité de valeurs propres, et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n = +\infty$.

Démonstration. Voir [12] page 210.
Pour voir des exemples qui montrent que les propriétés ci-dessus ne sont pas toujours valables pour des problèmes de Sturm Liouville singuliers voir [9] page 151. □

3.2 Problème Sturm Liouville et applications

Nous sommes intéressés à étudier certaines des applications physiques de l'équation Sturm Liouville dans un espace de dimension 1.

3.2.1 L'équation de la chaleur

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \;\; 0 < x < l \quad t > 0 & \textbf{(1)} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad\qquad\qquad\quad t > 0 & \textbf{(2)} \\ u(x,0) = f(x), \qquad\qquad 0 < x < l & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Tel que $u(x,t)$ est la température sur le point x et le tempe t,et k est une constante physique positive.
Utilisons la méthode de séparation des variables, on cherche toute les solutions non triviales sous la forme :

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Injectons $u(x,t)$ dans l'équation **(1)** on a :

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

divisons par $T(t)X(x)$ on a :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Tel que $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette écriture est équivalent à :

$$\begin{cases} T'(t) - k\lambda T(t) = 0 & \textbf{(4)} \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0 & \textbf{(5)} \end{cases}$$

Utilisons les condition aux limits :

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Remarquons que :

$$X(0) = X(l) = 0$$

car $T(t) \neq 0$.

D'après **(4)** et **(5)** on a :

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

C'est un cas particulier de problème de Sturm Liouville,on trouve trois cas selon le signe de λ.

Le premier cas : $\lambda > 0$:

Dans ce cas, $T(t)$ en croissance de façon exponentielle au voisinage de l'infini ce qui rend $u(x,t)$ en croissance de façon exponentielle, Ce n'est pas acceptable en physique.

Le Deuxième cas : $\lambda = 0$:

On a :

$$X''(x) = 0.$$

Donc

$$X(x) = c_1 + c_2 x.$$

Utilisons les conditions aux limits pour déterminer c_1, c_2.

$$\begin{cases} X(0) = c_1 \Rightarrow X(x) = c_2 x \\ X(l) = c_2 l = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

Donc pour $\lambda = 0$ il n'y a pas de solutions sauf la solution triviale.

Le troisième cas : $\lambda < 0$:

On pose $\lambda = -\gamma^2$ donc on a l'équation suivante :

$$X''(x) + \gamma X(x) = 0.$$

Sa solution est :

$$X(x) = A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x).$$

Utilisons les condition aux limits

$$\begin{cases} A = 0 \\ A\cos(\gamma l) + B\sin(\gamma l) = 0 \end{cases}$$

donc

$$B\sin(\gamma l) = 0$$

$$\sin(\gamma l) = 0$$

$$\gamma l = n\pi$$

$$\gamma = \frac{n\pi}{l} \quad \text{tel que } n \in \mathbb{Z}$$

Donc la forme de $X(x)$ est :

$$X_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

De ce qui précède, nous avons

$$T'(t) + \gamma^2 T(t) = 0.$$

Sa solution est :

$$T(t) = Ce^{-k\gamma^2 t}.$$

Remplaçons la valeur de γ on a :

$$T_n(t) = C_n e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) C_n e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t} \\ &= K_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t}. \end{aligned}$$

Tel que K_n représente toutes les constantes.

On sait que la somme des solutions est aussi une solution donc la solution de l'équation **(1)** s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t}.$$

D'après la condition **(3)** on a :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) = f(x) \quad 0 < x < 1$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier impaire de la donnée initiale $f(x)$ sur l'intervalle $[0, l]$. Les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$K_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx \;\; n \geq 1.$$

Remarque 3.4. *Les étapes détaillées dans [9] page 241.*

3.2.2 L'équation des ondes

L'équation de d'Alembert (parfois appelée équation d'onde ou équation des ondes) est l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde, qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle.
Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \;\; 0 < x < l \quad t > 0 & \textbf{(6)} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad t > 0 & \textbf{(7)} \\ u(x,0) = f(x), \qquad\qquad 0 < x < l & \textbf{(8)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad\qquad 0 < x < l & \textbf{(9)} \end{cases}$$

Avec c le carré de la vitesse de propagation de la déformation et $l \in \mathbb{R}_+^*$.
Utilisons la méthode de séparation des variables, on cherche toute les solutions non triviales sous la forme :

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Injectons $u(x,t)$ dans l'équation **(1)** on a :

$$c^2X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

divisons par $T(t)X(x)$ on a :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \mu. \qquad \textbf{(10)}$$

On pose $\mu = -\lambda^2$.

Tel que $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

L'écriture **(10)** est équivalente à :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 & \textbf{(11)} \\ T'(t) + c^2\lambda^2 T(t) = 0 & \textbf{(12)} \end{cases}$$

Utilisons les condition aux limits :

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Remarquons que :

$$X(0) = X(l) = 0.$$

car $T(t) > 0$.

D'après **(11)** et **(12)** on a :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

C'est un cas particulier de problème de Sturm Liouville. et sa solution est de la forme :

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x).$$

Utilisons les condition aux limits

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(\gamma l) + c_2 \sin(\gamma l) = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} & c_2 \sin(\lambda l) = 0 \\ & \sin(\lambda l) = 0 \\ & \lambda l = n\pi \\ & \lambda = \frac{n\pi}{l} \quad \text{tel que } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc la forme de $X(x)$ est :

$$X_n(x) = c_n \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

De ce qui précède, nous avons

$$T'(t) + c^2\lambda^2 T(t) = 0.$$

Sa solution est :

$$T(t) = a'_1 \cos(\lambda t) + b'_2 \sin(\lambda t).$$

Remplaçons la valeur de γ on a :

$$T_n(t) = a'_n \cos(\frac{n\pi}{l}t) + b'_n \sin(\frac{n\pi}{l}t).$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= c_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)[a'_n \cos(\frac{n\pi}{l}t) + b'_n \sin(\frac{n\pi}{l}t)] \\ &= \sin(\frac{n\pi}{l}x)[a_n \cos(\frac{n\pi}{l}t) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l}t)]. \end{aligned}$$

Tel que K_n représente toutes les constantes.

On sait que la somme des solutions est aussi une solution donc la solution de l'équation **(6)** s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{n\pi}{l}x)[a_n \cos(\frac{n\pi}{l}t) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l}t)].$$

D'après les conditions **(8)** et **(9)** on a :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) = f(x) \quad 0 < x < l.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\frac{n\pi}{l}) \sin(\frac{n\pi}{l}x) = 0 \quad 0 < x < l.$$

Donc en que déduire que :

$$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La solution sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{l}t) \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier de la donnée initiale $f(x)$ sur l'intervalle $[0, l]$. Les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx.$$

Remarque 3.5. *Les étapes détaillées dans [9] page 249.*

3.2.3 L'équation de Laplace

L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon de Laplace.

Introduite pour les besoins de la mécanique newtonienne, l'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses autres branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -k^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \;\; 0 < x < l \quad t > 0 & \textbf{(13)} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad t > 0 & \textbf{(14)} \\ u(x,0) = f(x), \qquad\qquad 0 < x < l & \textbf{(15)} \end{cases}$$

Tel que $l \in \mathbb{R}_+^*$ et k une constante physique.
Utilisons la méthode de séparation des variables, on cherche toute les solutions non triviales sous la forme :

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Injectons $u(x,t)$ dans l'équation **(13)** on a :

$$X(x)T''(t) = -k^2X''(x)T(t).$$

divisons par $T(t)X(x)$ on a :

$$\frac{T''(t)}{k^2T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu.$$

Tel que $\mu \in \mathbb{R}$. Cette écriture est équivalent à :

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 & \textbf{(16)} \\ T''(t) - \mu k^2 T(t) = 0 & \textbf{(17)} \end{cases}$$

Utilisons les condition aux limits :

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Remarquons que :

$$X(0) = X(l) = 0.$$

car $T(t) > 0$

D'après **(16)** et **(17)** on a :

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 & \textbf{(18)} \\ X(0) = X(l) = 0 & \textbf{(19)} \end{cases}$$

C'est un cas particulier de problème de Sturm Liouville, on trouve trois cas selon le signe de μ.

Le premier cas : $\mu < 0$:

On pose $\mu = -\lambda^2$ Donc la forme de l'équation est :

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

La solution de cette équation est :

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

D'après la condition **(19)** on a :

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2.$$

$$X(l) = c_1(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Donc pour $\mu < 0$ il n'y a pas de solutions sauf la solution triviale

Le Deuxième cas : $\lambda = 0$:

On a :

$$X''(x) = 0.$$

Donc

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

Utilisons la condition aux limits **(19)** pour déterminer c_1, c_2.

$$\begin{cases} X(0) = c_1 \Rightarrow X(x) = c_2 x \\ X(l) = c_2 l = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

Donc pour $\mu = 0$ il n'y a pas de solutions sauf la solution triviale.

Le troisième cas : $\mu > 0$:

On pose $\mu = \lambda^2$ donc on a l'équation suivante :

$$X''(x) + \gamma X(x) = 0$$

Sa solution est :

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

Utilisons les condition aux limits

$$\begin{cases} A = 0 \\ A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} & B\sin(\lambda l) = 0 \\ & \sin(\lambda l) = 0 \\ & \lambda l = n\pi \\ & \lambda = \frac{n\pi}{l} \quad \text{tel que } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc la forme de $X(x)$ est :

$$X_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

De ce qui précède, nous avons

$$T''(t) - \lambda^2 k^2 T(t) = 0.$$

Sa solution est :

$$T(t) = c_1 e^{k\lambda t} + d_1 e^{-k\lambda t}.$$

Remplaçons la valeur de λ on a :

$$T_n(t) = c_n e^{k\frac{n\pi}{l}t} + d_n e^{-k\frac{n\pi}{l}t}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)[c_n e^{k(\frac{n\pi}{l})t} + d_n e^{-k(\frac{n\pi}{l})t}] \\ &= \sin(\frac{n\pi}{l}x)[a_n e^{k(\frac{n\pi}{l})t} + b_n e^{-k(\frac{n\pi}{l})t}] \end{aligned}$$

Tel que a_n et a_n sont des constantes.

On sait que la somme des solutions est aussi une solution donc la solution de l'équation **(13)** s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{n\pi}{l}x)[a_n e^{k(\frac{n\pi}{l})t} + b_n e^{-k(\frac{n\pi}{l})t}].$$

D'après la condition **(15)** on a :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) \sin(\frac{n\pi}{l}x) = f(x) \quad 0 < x < l.$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier de la donnée initiale $f(x)$ sur l'intervalle $[0, l]$. Les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_n + b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\frac{n\pi}{l}x) dx \ .$$

Remarque 3.6. *Les étapes détaillées dans [9] page 265.*

3.2.4 L'équation de Legendre

On rappelle l'équation de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1 \tag{3.4}$$

Avec λ un entier naturel.

On pose $r(x) = 1 - x^2$ et $p(x) = 1$ donc l'équation s'écrit sous la forme :

$$r(x)y'' - r'(x)y' + \lambda y = 0.$$

Donc l'équation de Legendre c'est un cas particulier de problème de Sturm Liouville.

On remarque que les coefficients sont analytiques sur l'intervalle $]-1,1[$, on pose que la solution de l'équation (3.4) de la forme :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k.$$

Injectons $u(x)$ dans l'équation (3.4) on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big[(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\lambda - k^2 - k)c_k\Big] x^k = 0.$$

Donc

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} c_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on pose $\lambda = n(n+1)$ on obtient :

$$\begin{aligned} c_{k+2} &= \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} c_k \\ &= \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)} c_k \end{aligned}$$

Donc pour c_0 et c_1 des constant on obtient :

$$c_2 = \frac{-n(n+1)}{2!}c_0 \qquad c_3 = \frac{-n(n-1)(n+1)}{3!}c_1$$
$$c_4 = \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}c_0 \qquad c_5 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$$

Donc la solution de l'équation de Legendre sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x) &= c_0\left[1 - \frac{-n(n+1)}{2!}x^2 + \dots\right] + c_1\left[x - \frac{n(n-1)(n+1)}{3!}x^3 + \dots\right] \\ &= c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) \end{aligned}$$

De sorte que $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes et convergents pour $-1 < x < 1$

$$n = 0 \quad u_0(x) = 1 \qquad u_1(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$$
$$n = 1 \quad u_0(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots \qquad u_1(x) = x$$

Une des solutions sous forme de polynôme

$$a_n x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + \dots \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Il s'agit d'une solution pour toute valeur de a_n, si nous choisissons $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ on obtient la solution que l'on note $P_n(x)$ sont appelés les polynômes de Legendre d'ordre n.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \quad \textbf{(20)}$$

C'est donc la solution de l'équation de Legendre qui est finie pour $-1 < x < 1$.

Et on remarque que toutes les fonctions propres sont réelles et les valeurs propres

$\lambda_n = n(n+1)$ sont toutes réelles.

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & si\ \ n\ \ pairs \\ \\ \frac{n-1}{2} & si\ \ n\ \ impairs \end{cases}$$

Remarque 3.7. *Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on peut trouvée une formule équivalente pour P_n*

$$\begin{aligned}(x^2-1)^n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k} + \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}\end{aligned} \qquad \textbf{(21)}$$

Et car

$$2n-2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right) = \begin{cases} n-2 & si\ \ n\ \ pairs \\ \\ n-1 & si\ \ n\ \ impairs \end{cases}$$

On a les puissances de x dans la deuxième somme de l'équation ***(21)*** *sont inférieures à n.*

En dérivant les deux côtés de l'équation ***(21)****, nous trouvons*

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n &= \frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k} \\ &= n!\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\end{aligned}$$

Et par comparaison avec ***(20)****, nous obtenons l'expression de polynômes de Legendre.*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

Remarque 3.8. *Les étapes détaillées dans [9] page 47.*

3.2.5 L'équation de Hermite

On rappelle l'équation de Hermite

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

L'équation de Hermite (3.5) peut se représenter par un problème de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}] + 2ne^{-x^2}y = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tel que :

$$r(x) = e^{-x^2} \quad p(x) = e^{-x^2} \quad \lambda = 2n.$$

Les solution de l'équation (3.5) s'appelle les polynômes de Hermite H_n.

$$H_n = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]$$

Théorème 3.2. *la famille de des polynômes de Hermite est orthogonal dans* $\mathbf{L^2_{e^{-x^2}}}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour tout prouver, il suffit de prouver que pour $m < n$ $\langle H_m, H_n\rangle_{e^{-x^2}} = 0$:
Soit $m < n$, On a :

$$\begin{aligned}\langle H_m, H_n\rangle_{e^{-x^2}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}dx\end{aligned}$$

Utilisant l'intégration par partie n fois

$$\langle H_m, H_n \rangle_{e^{-x^2}} = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^n}{dx^n} H_m(x) \right] e^{-x^2} dx.$$

Et remarquant que pour tout polynôme p on a :

$$\lim_{|x| \to \infty} p(x) e^{-x^2} = 0.$$

on obtient

$$\langle H_m, H_n \rangle_{e^{-x^2}} = 0$$

Par conséquent,nous concluons l'orthogonalité $H_m \perp H_n$ pour tout $m \neq n$. □

Remarque 3.9. *Les étapes détaillées dans [9] page 60.*

3.2.6 L'équation de Laguerre

On rappelle l'équation de Laguerre

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - (1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad 0 < x < +\infty \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

L'équation de Laguerre (3.6) peut se représenter par un problème de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dx}[xe^{-x} \frac{dy}{dx}] + ne^{-x} y = 0.$$

Pour tout x dans $]0, +\infty[$.

Tel que :

$$r(x) = xe^{-x} \quad p(x) = e^{-x} \quad \lambda = n.$$

Les solution de l'équation (3.6) s'appelle les polynômes de Laguerre L_n.

$$L_n = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}].$$

Théorème 3.3. *la famille de des polynômes de Laguerre est orthonormée dans* $\mathbf{L^2_{e^{-x}}}(\mathbf{0},\infty)$ *c'est-à-dire :*

$$\langle L_m, L_n\rangle_{e^{-x}} = \int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; m \neq n \\ \\ 1 \;\; si \;\; m = n \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout prouver on définit la fonction génératrice de $L_n(x)$ et $L_m(x)$ par :

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n.$$

et

$$\frac{\exp(\frac{-xs}{1-s})}{1-s} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)s^m.$$

Ainsi

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)t^n s^m = e^{-x}\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t}.\frac{\exp(\frac{-xs}{1-s})}{1-s}.$$

Ainsi $\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx$ est le coefficient de $t^n s^m$ dans le développement en série de

$$I = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t}.\frac{\exp(\frac{-xs}{1-s})}{1-s}dx.$$

Mais

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^{\infty} \exp\Big(-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})\Big)dx \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \Big[-\frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})} \exp\Big(-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})\Big)\Big]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}} \\
&= \frac{1}{1-st} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n
\end{aligned}
$$

Ainsi le coefficient de $s^n t^n$ est 1 si $n = m$ et 0 si $n \neq m$. □

Remarque 3.10. *Les étapes détaillées dans [9] page 61.*

Conclusion générale

Nous avons étudié quelques propriétés et définitions principales du problème de Sturm-Liouville.

Nous avons clôturé ce mémoire avec quelques équations tirées de la physique qui expriment certains phénomènes naturels.

Certaines questions dans ce domaine restent sans réponse. Par exemple, la théorie de Sturm-Liouville est-elle extensible pour les équations différentielles d'ordre supérieur ou même généralisée à n'importe quel ordre, et pourrait-elle être utile en mécanique quantique(équation de Schrödinger).

Bibliographie

[1] Earl A. Coddington, An Introduction to Ordinary Differential Equations, Dover Publications 1989.

[2] J. P Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, 2006.

[3] L. E. Ting, Sturm-Liouville theory, Theses Digitization Project. 1206, 1996.

[4] L. Pauling, The nature of thechemical bond,3rd edition, Cornell University Press, 1960.

[5] M. A. Al-Gwaiz, Sturm-Liouville Theory and its Applications, Springer, 2007.

[6] M. E. H.Ismail, Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, Cambridge University Press, 2005.

[7] R. B. Guenther, J.W.Lee,Sturm-Liouville Problems, Theory and Numerical Implementation, CRC Press, 2018.

[8] R. Bedard, Equations aux dérivée partielles, l'Université du Québec à Montréal, 2007.

[9] R. P. Agarwal, D. O'Regan, Ordinary and Partial Differential Equations, With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems, Springer, 2009.

[10] W. AIPING, S.JIONG, H. XIAOLING, Y. SIQIN, Completeness of eigenfunctions of Sturm-Liouville problems with trasmission conditions, International Press, Vol. 16, No 3, 2009.

[11] W. Boyce, R. DiPrima, Elementary Differential and Boundary Value Problems, John Wiley Sons lnc, Seventh edition.

[12] W.G.Kelley,A.C.Peterson,The Theory of Differential Equations,Classical and Qualitative, 2nd edition, Springer, 2010.

.1 Annexe



(a) Charles François Sturm (1803-1855)



(b) Joseph Liouville (1809-1882)



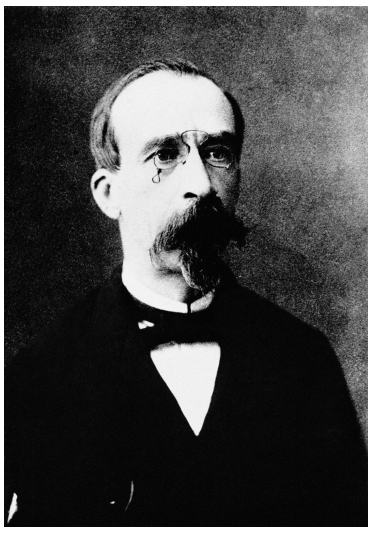
(c) Pierre-Simon Laplace (1749-1827)



(d) Adrien Marie Legendre (1752-1833)



(e) Charles Hermite (1822-1901)



(f) Edmond Laguerre (1834-1886)