République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département Mathématiques et Informatiques



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

par

Mohamed Khadidja

Équation D'Euler-Lagrange En Calcul Des Variations

Soutenu publiquement le 19 juin 2018 devant le jury composé de :

Président :	Kh. Serier. Abdallah	Université de Médéa
Examinateur :	M. Benchaa	Université de Médéa
Examinateur :	K. Bouadjila	Université de Médéa
Directeur de mémoire :	M. L. Leghmizi	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2017-2018

Table des matières

1 Rappels et outils de base **10**

1.1 Fonction et ensemble convexe 10

1.2 Différentiabilité et sous-différentiel 10

1.3 Espaces de Lebesgue 12

1.4 Lemme fondamental en calcul des variations 14

1.5 Distributions 15

1.6 Espaces de Sobolev 16

1.7 Théorème d'existence en calcul des variations 17

2 Équation d'Euler-Lagrange **19**

2.1 Position du problème 19

2.2 Etude générale 21

2.2.1 La forme forte de l'équation d'Euler-Lagrange 24

2.2.2 La forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange 28

2.3 Résolution du probléme 32

3 Applications **37**

3.1 Résultats principal de l'équation d'Euler-Lagrange 37

3.1.1 Cas classique 37

3.1.2 Cas général 39

3.2 L'intégrale de Dirichlet 41

3.3 Au delà de l'équation classique d'Euler-Lagrange 43

Dédicace

Je dédie ce tra- vail à mes très
chers parents, dont le sacrifice, la tendresse,
l'amour, la patience, le soutien, l'aide et les encou-
ragements sont le secret de ma réussite. Sans eux,
je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui. Je dédie
ce travail également à mes frères et soeurs, et
particulier ma copine préférée FACI Imane
à tout mes enseignants, du pri-
maire au niveau supérieur.
à tout mes amis
♡

Mohamed Khadidja

Remerciements

♢

Louange
à Allah, le
miséricordieux,
sans Lui rien de tout cela
n'aurait pu être. Nous remercions
Allah qui nous a orienté au chemin
du savoir et les portes de la science. Mon
directeur de mémoire M.L Leghmizi, en premier pour
ses encouragements et la confiance qu'il m'a accorder et
d'avoir accepter de m'encadrer, ensuite pour ses conseils judicieux
qui m'ont été d'une trés grande utilité et son suivi pour terminer ce
travail. Je tiens à remercier également les membres de jury pour
avoir accepter de jurer ce mémoire. Mes remerciements les
plus sincéres sont adressés à mes enseignants, qui ont
contribué durant nos études à notre formation
et tous les enseignants de l'Université
YAHIA Fares de Médéa. En-
fin, merci à ma famille,
pour son amour et
son soutien
constant.

♢

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'équation d'Euler-Lagrange associée à certains problèmes de minimisation en calcul des variations. La condition nécessaire d'existence de solution en calcul des variations est donnée par les deux formes de l'équation d'Euler-Lagrange : forte et faible. Quelques applications dans la minimisation de fonctionnelles intégrales sont présentées dans ce mémoire.

Notations

$\mathbb{R}^N$	L'espace Euclidien de dimension N.
Ω	Un ouvert boré de frontière lipschitzenne de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.
E	Un espace vectoriel normé
E'	Le dual topologique de E
	(l'espace des formes linéares continues sur E).
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
$domf$	L'ensemble des elements dans E son image est finie
	$domf = \{x \in E : \ f(x) < +\infty\}$
$p.p.$	Presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue).
$(\cdot,\cdot)$	Produit scalaire.
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{E'\times E}$	Le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique E'.
∂_i	La i-ième dérivée partielle; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
∂^α	La dérivée d'ordre α; $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$.
∇u	Le gradient de u, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^t$.
Δu	Le laplacien de u, $\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right)$.
$\operatorname{div} v$	La divergence du vecteur $v = (v_1, ..., v_N)^t$, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_N}{\partial x_N}$.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\sup\text{-ess}_{\Omega}(u)$	Borne supérieure essentielle d'une fonction mesurable u sur Ω,
	$\sup\text{-ess}_{\Omega}(u) = \inf\{C > 0 \ ; \ \lvert u(x)\rvert \leq C \ \ p.p.\ x \in \Omega\}$.
$p' = \frac{p}{p-1}$	L'exposant conjugué de l'exposant p pour $1 \leq p \leq +\infty$.
$p^* = \frac{Np}{N-p}$	L'exposant critique de Sobolev. pour $1 \leq p < N$.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ L'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ L'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω et s'anulle sur $\partial\Omega$.

$\mathcal{C}_c(\Omega)$ L'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}(\Omega)$ L'espace des fonctions indéfiniments différentiables à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ L'espace des distributions sur Ω.

$\mathrm{L}^p(\Omega)$ L'espace de Lebesgue,

$$\mathrm{L}^p(\Omega) = \begin{cases} \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \ \int\limits_\Omega |u|^p < +\infty \right\}, & \text{si } \ 1 \leq p < +\infty, \\ \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \ \ \underset{\Omega}{\text{sup-ess}}(u) < \infty \right\}, & \text{si } \ p = +\infty. \end{cases}$$

$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ L'espace de Sobolev,

$$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \ ; \ \nabla u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \right\}.$$

$\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ La ferméture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.

$$\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \approx \left\{ u \in \mathrm{W}^{1,p} \ : \ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Introduction

Le calcul des variations a été créé comme un outil pour calculer les minimiseurs (ou maximiseurs) de certaines grandeurs mathématiques. C'est au 18 ème siècle que mathématiciens et physiciens, tels que Maupertuis, d'Alembert, Euler et Lagrange, postulent des principes variationnels pour calculer des grandeurs physiques et mécaniques : calcul de surfaces minimales, équilibre et stabilité de systèmes comportant des énergies de surface et de volume ... etc. La formulation mathématique de ces principes a conduit au calcul des variations.

Euler introduit que pour les extremums, la dérivée s'annule, et cette dérivée a été appelé la "première variation". Dans ce qu'on va présenter en calcul des variations, on s'intéressera à minimiser des fonctions "fonctionnelles" définies sur des espace de dimension infinie et non pas sur les espaces de dimension finis, et c'est la différence principale entre le calcul des variations et la théorie de l'optimisation. qui a le même objectif, à savoir trouver des extrémaux.

Il est bien connu que l'équation d'Euler-Lagrange joue un rôle important dans les problèmes de minimisation du calcul des variations de type

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf \left\{ F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx \quad : y \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ y(a) = \alpha \text{ et } y(b) = \beta \right\},$$

où plus géneralement

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf \left\{ F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \quad : \quad u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \right\},$$

et dans la théorie de la régularité pour les minimiseurs.

Ce mémoire, est composé de trois chapitres. Le premier chapitre est entièrement consacré à l'exposer des définitions et outils de bases nécessaires pour la suite de ce travail. On rappelle

tout d'abord quelques outils d'analyse convexe, ensuite des résultats de base sur les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Dans le deuxème chapitre on s'intéressera à l'équation d'Euler-Lagrange associe au problèmes $(\mathcal{P}), (\mathscr{P})$. On commence par la position de deux problèmes classiques en calcule des variations. Une étude générale de ces problèmes et l'existence de solutions ont été abordés.

L'objectif du troisième chapitre est de présenter les résultats principal de l'équation d'Euler-Lagrange eu calcul des variations et quelques applications.

Chapitre 1

Rappels et outils de base

1.1 Fonction et ensemble convexe

Définition 1.1 . $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *est convexe si* $\forall x, y \in \Omega,\ \forall \lambda \in [0,1]$, *alors* $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in \Omega$

Définition 1.2 . *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un convexe. Alors* $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *est dite convexe si*
$\forall x, y \in \Omega,\ \forall \lambda \in [0,1]$
On a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f est strictement convexe c'est à dire :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On dite que $f(x)$ *est une fonction concave si* $-f(x)$ *est convexe*

1.2 Différentiabilité et sous-différentiel

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé

$$f : E \to [-\infty, +\infty],\ \ x \in dom f,\ \ u \in E \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.3 ***(La dérivée directionnelle)***

On dit que f admet une dérivée dans une dérection u si :

$$f'(x,u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t},$$

existe (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).

Définition 1.4 ***(La dérivée au sens de Gâteaux)***

On suppose que $f'(x,.)$ existe

On dit que f est Gâteaux différentiable en x s'il existe $\varphi \in E'$

telle que

$$\forall u \in E \qquad \langle \varphi; u\rangle_{E',E} = f'(x,u)$$

qu'on notera $\varphi = \nabla f(x)$

Définition 1.5 ***(Sous-différentiel)***

Soit la fonction f est convexe

On dit que f est sous-différentiel en x, noté $\partial f(x)$ et donné par

$$\partial f(x) = \{\varphi \in E', \forall y \in E \qquad \langle \varphi; y-x\rangle + f(x) \leq f(y)\}$$

Proposition 1.1 *Si f est convexe et Gâteaux différentiable en x, alors f est sous-différentiel en x, et on a*

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

Preuve. Voir [7], Proposition 5.3, $p.23$ ■

Proposition 1.2 *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ alors f est convexe si et seulement si*

Corollaire 1

$$f(x) \geq f(y) + < \nabla f(y); x-y > \qquad\qquad \forall x, y \in E$$

Où $< .;. >$ est le produit scalaire.

Proposition 1.3 ***(La dérivation en chaîne)***

Soient $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ *deux fonctions différentiables.*

Écrivons $f = h \circ g$.

D'après la règle de dérivation des fonctions composées nous avons

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)).g'(x).$$

Donc

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$$

Tel que

$$\frac{dh}{dg} = \left(\frac{\partial h}{\partial g_1}, \frac{\partial h}{\partial g_2}, ..., \frac{\partial h}{\partial g_N}\right)$$

Et

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & . & . & . & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & . & . & . & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \frac{\partial g_N}{\partial x_1} & \frac{\partial g_N}{\partial x_2} & . & . & . & \frac{\partial g_N}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

1.3 Espaces de Lebesgue

Définition 1.6 *On définit l'espace de Lebesgue* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *par*

Pour $1 \leq p < +\infty$

$$\mathrm{L}^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \ mesurable : \ \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$||u||_{\mathrm{L}^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

Pour $p = +\infty$, *l'espace de Lebesgue* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *défini par*

$$\mathrm{L}^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \ mesurable; \quad \sup_\Omega\text{-ess}(u) < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$||u||_{\mathrm{L}^\infty} = \sup_\Omega\text{-ess}(u(x)).$$

$\mathrm{L}^p(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$ *et cas particulier de Hilbert pour* $p = 2$ *muni du produit scalaire*

$$< f, g >_{\mathrm{L}^2} = \int f(x)g(x)\,dx.$$

Lemme 1 (Inégalité de Hölder généralisée)

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ *et* $r \in [1, +\infty]$ *avec* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Si $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *et* $v \in \mathrm{L}^q(\Omega)$, *alors* $uv \in \mathrm{L}^r(\Omega)$, *et on a*

$$\| uv \|_{\mathrm{L}^r} \leq \| u \|_{\mathrm{L}^p} \cdot \| v \|_{\mathrm{L}^q}\ .$$

Définition 1.7 (Fonction de Carathéodory)

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est de Carathéodory si*

(1) $f(\cdot, s) : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable pour tout* $s \in \mathbb{R}$.

(2) $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue pour presque par tout* $x \in \Omega$.

Lemme 2 (Fatou)

Soit $\{f_n\}_n \subset \mathrm{L}^1(\Omega)$ *une suite de fonctions positives. Alors*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,dx$$

Proposition 1.4 (La formule de Green)

Soit $u, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, *tel que, pour* $1 \leq i \leq N$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{x_i}.v\,dx = -\int_\Omega u.\nabla\frac{\partial v}{x_i}\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\vartheta_i\ d\sigma$$

Où $\vartheta = (\vartheta_1, ..., \vartheta_N)^t$ *est vecteur, et* $d\sigma$ *la mesure euclidienne sur* $\partial\Omega$

Définition 1.8 (Convergence forte, convergence faible dans L^p**)**

Soient $p \in [1, +\infty[$, $\{f_n\}_n \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ *et* $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$.

- *On dit que* f_n *converge fortement vers* f *dans* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *et on note* $f_n \to f$ *dans* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *si* $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\mathrm{L}^p} = 0$.
- *On dit que* f_n *converge faiblement vers* f *dans* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *et on note* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *si* $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f)\cdot\varphi\ = 0, \qquad \forall\varphi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$.

- *On dit que f_n converge $*$ faible vers f dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f)\cdot\varphi \ = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{L}^1(\Omega).$$

Théorème 1.1 (La convergence dominée de Lebesgue)

Soit $p \in [1, +\infty[$, et soient $\{f_n\}_n \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ et $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, on suppose que $f_n \to f$ p.p. dans Ω et qu'il existe $g \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ ona : $|f_n| \leq g$ p.p. dans Ω. Alors $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

1.4 Lemme fondamental en calcul des variations

On donnera le lemme essentiel et trés important en calcul des variations

Lemme 3 *Soient $\overline{\Omega} = [a, b] \subset \mathbb{R}$, et f une fonction continue telle que :*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

Pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

f est identiquement nulle ($f = 0$) sur l'intervalle ouvert Ω

Preuve. Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

D'une part on suppos que :

$$g(x) = -x^2 + (a+b)x - ab$$

Il est cleair que la fonction g est continue, grâce à la continuité de polynôme (car g est un polynôme)

Alors on peut ecrire g sur la forme suivante

$$g(x) = (x-a)(b-x) > 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega =]a, b[.$$

Soit

$$h(x) = f(x)g(x) \ \in \mathcal{C}_0(\Omega)$$

Par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$, il existe $h_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tel que : $\{h_n\}$ converge uniforme vers h

Comme

$$\int_{\Omega} f(x)h_n(x)\,dx = 0$$

Alors

$$\lim_n \int_{\Omega} f(x)h_n(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)h(x)\,dx = 0$$

Où on a utilisé le théorème convergence dominé de Lebesge dans l'équation précedent. Par conséquent,

$$\int_{\Omega} f^2(x)g(x)\,dx = 0$$

D'où :

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Cette Resultant trés important en calcul des variations. ∎

On peut généralisé ce lemme dans l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

Lemme 4 *Soient Ω un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^N$, et la fonction $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$*

Telle que

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx = 0 \qquad \forall g \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega).$$

Alors

$$f = 0 \ \ \textit{presque partout} \ \ x \in \Omega$$

Preuve. Voire ([5]) ∎

1.5 Distributions

Définition 1.9 *On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ (par fois $\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^{∞} sur Ω à support compact, un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelé fonction test.*
Toute forme linéaire continue T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelée une distribution sur Ω et on note

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}. \end{array}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.10 (Dérivées au sens des distributions)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1...n\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle dérivé partielle de T par rapport à la k-ième variable et on la note $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$, la distribution définie par :

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par récurrence, on définit la dérivée partielle de T d'ordre α par :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.11 (Distribution régulière)

On dit que T est une distribution régulière sur Ω, s'il existe une fonction f localement intégrable telle que

soit la fonction test φ sur Ω on a :

$$\langle T; \varphi \rangle = \int_\Omega (f\varphi)(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \Omega$$

1.6 Espaces de Sobolev

Définition 1.12 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}$ par*

$$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^p \ ; \quad |\nabla u| \in (L^p)^N \right\},$$

muni de la norme

$$||u||_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} (||u||^p_{\mathrm{L}^p} + ||\nabla u||^p_{\mathrm{L}^p})^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \max\{||u||_{\mathrm{L}^\infty}, ||\nabla u||_{\mathrm{L}^\infty}\} & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

L'espace $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$. De plus pour $p = 2$ l'espace $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ noté $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$< u, v >_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = < u, v >_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + < \nabla u, \nabla v >_{\mathrm{L}^2(\Omega)} .$$

L'espace $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.

Définition 1.13 *Soit $1 < p < +\infty$. On note $\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$ la ferméture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$. De plus, si Ω est Lipschitzien, alors*

$$\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{W}^{1,p} \ ; \quad u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega \right\}.$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Poincaré)

Soient Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ borné au moins dans une direction et $p \in [1, +\infty[$. Alors il existe une constante positive $C = C(\Omega, p)$, tel que :

$$||u||_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C \cdot ||\nabla u||_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \ , \qquad \forall\ u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Définition 1.14 (Convergence faible, convergence forte dans $\mathrm{w}^{1,p}(\Omega)$)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $\{f_n\}_n \subset \mathrm{w}^{1,p}(\Omega)$ et $f \in \mathrm{w}^{1,p}(\Omega)$.

- *On dit que f_n converge fortement vers f dans $\mathrm{w}^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $\mathrm{w}^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \to f \quad dans \quad \mathrm{L}^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \quad dans \quad (\mathrm{L}^p(\Omega))^N.$$

- *On dit que f_n converge faiblement vers f dans $\mathrm{w}^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $\mathrm{w}^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \rightharpoonup f \quad dans \quad \mathrm{L}^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \quad dans \quad (\mathrm{L}^p(\Omega))^N.$$

Théorème 1.3 (Injections de Sobolev)

Soient Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Alors

- *Si $1 \leq p < N$ alors l'injection $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1, p^*)$, et continue pour $q = p^*$. En particulier l'injection $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(\Omega)$ est compacte pour tout $p \in [1, +\infty)$.*
- *Si $p = N$ alors l'injection $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega)$ est compacte et continue pour $q \in [1, +\infty)$.*
- *Si $p > N$ alors l'injection $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte et continue.*

Exemple 1 *Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$.*

1. *Si $N = 3$, les injections $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^6(\Omega)$ sont compactes et continues respectivement.*
2. *Si $N = 2$, l'injection $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte et continue.*
3. *Si $N = 1$, l'injection $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte et continue.*

1.7 Théorème d'existence en calcul des variations

Soit la fonction

$$F : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to]-\infty, +\infty], \ p \in]1, +\infty[$$

Définition 1.15 *On dit que F est semi-continue inférieurement (séquentiellement), en abrégé s.c.i., pour la topologie faible de $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ si*

$$\liminf_n F(u_n) \geq F(u)$$

pour tout $u_n \rightharpoonup u$.

Proposition 1.5 *Soit F est s.c.i. (séquentiellement), et vérifiant la condition de coercivité*

$$F(u) \geq \alpha \parallel u \parallel_{\mathrm{W}^{1,p}},$$

pour $\alpha > 0$ et pour tout $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$

Alors $\inf\limits_{u\in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)} F(u)$ admet un minimum.

Preuve.

Soit $\{u_n\}$ une suite minimisante telle que

$$\lim_n F(u_n) = \inf_u F(u) < +\infty$$

Alors

$$\alpha \parallel u_n \parallel_{\mathrm{W}^{1,p}} \leq F(u_n) \leq C \qquad \text{pour } C > 0$$

Donc on peut trouver une sous-suite prés $\{u_{n_k}\}$ tel que

$$u_{n_k} \rightharpoonup \overline{u} \qquad dans \mathrm{W}^{1,p}$$

Donc

$$\lim_n F(u_{n_k}) = \inf_u F(u) \geq F(\overline{u})$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 2

Équation d'Euler-Lagrange

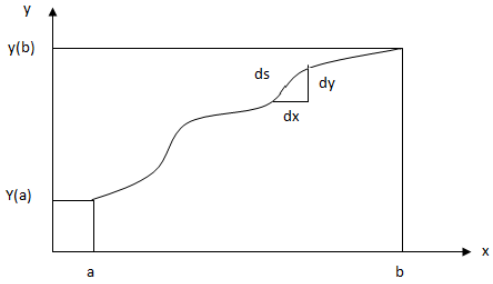
2.1 Position du problème

On exprere deux problème classiques de l'équation d'Euler-Lagrange (voir [10][11])

Problème 1 *Considérons deux point* $A(a, y(a))$ *et* $B(b, y(b))$,

Question :

Montrer que la courbe la plus courte reliant A *et* B *est une ligne droite.*



La distance ds entre deux point trés proches sur cette courbe est donné par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Alors

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \end{aligned}$$

La longueur totale de la courbe enter A et B est égale à

$$L = \int_A^B ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Il nous faut donc trouver une relation entre y et x dans l'intégrale de telle sorte que la longueur L de la courbe considérée soit minimale

Alors on peut écrire

$$L = \int_a^b f(y')\, dx, \tag{2.1}$$

où

$$f(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$$

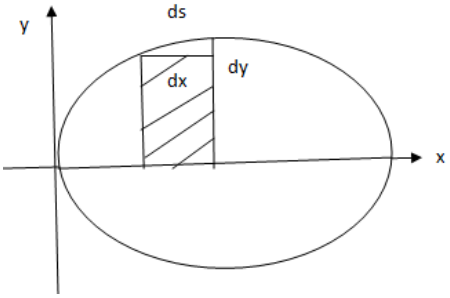
Autrement, il suffit de resoudre le problème minimisent suivant :

$$\inf_{y \in \mathcal{C}^1} \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Problème 2 *(**Surface minimale**)*

Question :

Trouver la courbe convexe fermée de longueur l qui entoure la plus grande surface hachureé possible.



Sans perte de généralité on suppose que la courbe passe par l'origine et qu'elle est symétrique par rapporte à l'axe des x avec les condition aux limite $y(0) = y(\frac{l}{2}) = 0$

L'élèment de la surface hachurée est égale à

$$dA = y\, dx$$

On a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Alors

$$dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$$

Donc

$$A = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} y \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds, \tag{2.2}$$

où

$$f(y, y') = y \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

Dans ce problème, il fait donc encore une fois trouver une relation entre y et s, dans l'intégrale de telle sorte que la surface A fermée par la courbe de longueur l soit minimale.

Alors on peut écrire le problème minimisent suivant

$$\inf_{y\in \mathrm{C}^1} 2\int_0^{\frac{l}{2}} f(y,y')\,ds,$$

2.2 Etude générale

Dans les deux problèmes considérés, une question de minimiser une grandeur physique (géométrique) mise sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction $y(x)$ et sa dérivée par rapporte à x selon une fonction $f(x,y,y')$. Cette minimisation passe par un choix convenable de la fonction $y(x)$.

De façon générale le calcul des variations vise à minimiser des fonctionnelles du type :

$$F(y)=\int_a^b f(x,y,y')\,dx,$$

avec $F(y)$ est une fonctionnelle qui dépend du problème de minimisation physique ou géométrique définie par :

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf\left\{F(y)=\int_a^b f(x,y,y')\,dx \ :\ y\in\mathcal{C}^1([a,b]), y(a)=\alpha \text{ et } y(b)=\beta\right\}.$$

Où plus géneralement

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf\left\{F(u)=\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx \ \text{ tq } \ u\in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)\right\},$$

Pour $p\in]1,+\infty[$, où

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,\zeta,\xi) & \longmapsto & f(x,\zeta,\xi) \end{array}$$

Un théorème d'existence de ce type de problème est donnée par

Théorème 2.1 *([4]) Soit $f\in\mathcal{C}^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ vérifiant*

(H1) $f(x,.,.)$ *est convexe pour tout* $x\in\Omega$

(H2) $f(x,\zeta,\xi)\geq\alpha\mid\xi\mid^p,\ \forall(x,\zeta,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\ \alpha>0,\ p>1$

(H3) $\exists \beta > 0$ *telle que*

$$\mid f_\zeta(x,\zeta,\xi) \mid, \mid f_\xi(x,\zeta,\xi) \mid \leq \beta \mid \xi \mid^{p-1} \ \ \forall (x,\zeta,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

où $f_\zeta = \frac{\partial f}{\partial \zeta}$ *et* $f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}$

Alors le problème $(\mathscr{P})$ *admet un minimum dans* $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$

Démonstration.

Pour démontrer l'existence on procède par deux étapes :

1^{re} étape : (semi-continuité)

Pour cela, il reste à démontrer que

$$\Big(u_n \rightharpoonup \overline{u} \ \text{ dans } \ \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)\Big) \Longrightarrow \Big(\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(\overline{u})\Big)$$

On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, comme f est convexe pour tout $x \in \Omega$, alors :

$$\begin{aligned} f(x,u_n,\nabla u_n) &\geq f(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) + \big\langle \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), u_n - \overline{u}\big\rangle \\ &\geq f(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) + f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_n-\overline{u}) + \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle \end{aligned} \tag{2.3}$$

D'aprés l'hypothèse $(H3)$ et comme $\overline{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$

On obtient :

$$f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) \in \mathrm{L}^q \ \text{ tq } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Maintenant on va montrons que :

$$f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_n-\overline{u}) \text{ et } \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle \ \text{ dans } \mathrm{L}^1(\Omega),$$

alors

$$\int_\Omega \mid f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_n-\overline{u}) \mid \ dx \leq \int_\Omega \mid f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) \mid\mid u_n - \overline{u} \mid \ dx.$$

On applique l'ingalité de Hölder, on trouve :

$$\int_\Omega \mid f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_n-\overline{u}) \mid \ dx \leq \left(\int_\Omega \mid f_u \mid^q \ dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \mid u_n - \overline{u} \mid^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Comme

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \ \text{ dans } \ \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$$

Alors

$$\int_\Omega \mid f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_n-\overline{u}) \mid \ dx < \infty$$

Donc

$$f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_n-\overline{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$$

De même manière, nous prouvons que :

$$\langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u},\nabla u_n-\nabla\overline{u}\rangle \in \mathrm{L}^1(\Omega)$$

Par conséquent, on peut intégrer (2.3) on obtient :

$$F(u_n) \geq F(\overline{u}) + \int_\Omega \left[f_u(u_n-\overline{u}) + \langle f_\xi; \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle\right]\ dx$$

Alors

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(\overline{u}) + \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[f_u(u_n-\overline{u}) + \langle f_\xi; \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle\right]\ dx$$

D'aprés lemme de Fatou on trouve :

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[f_u(u_n-\overline{u}) + \langle f_\xi; \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle\right]\ dx \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \left[f_u(u_n-\overline{u}) + \langle f_\xi; \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle\right]\ dx$$

Donc

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(\overline{u})$$

2^{me} étape : (La compacité)

Soit $\{u_n\}$ une suite minimisante, c'est-à-dire :

$$F(u_n) \longrightarrow m \quad \text{tq} \quad m = \inf\left\{F(u) : u \in \mathrm{W}_0^{1,p}\right\}$$

On a : $m < \infty$ car pour tout les cas $m \leq F(u) < \infty$

D'autre part :

En utilisant (*H2*) et l'ingalité de poincaré on obtient :

$$\| u_n \|_{\mathrm{W}^{1,p}} \leq C \qquad \text{avec} \qquad C = C(\Omega,p)$$

où C est une constante indépendante de n,

alors la suite $\{u_n\}$ est borné.

Donc, on peut extraire une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ qui converge faiblement vers $\overline{u}$

Alors

$$\liminf_{k\to\infty} F(u_{n_k}) \geq F(\overline{u}) \geq m$$

Donc

$$m = \liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(\overline{u}) \geq m$$

D'où le probème $(\mathscr{P})$ admet une solution. ♦

Remarque 2.1 *Le théorème d'existence rest vrai pour le problème* $(\mathcal{P})$

2.2.1 La forme forte de l'équation d'Euler-Lagrange

Théorème 2.2 *Soient* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *et*

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf \left\{ F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx \quad : \quad y \in \mathcal{C}^1([a,b]), y(a) = \alpha \ \text{ et } \ y(b) = \beta \right\} = m,$$

Si $\overline{y} \in \mathcal{C}^2([a,b])$*, est solution du problème* $(\mathcal{P})$

Alors $\overline{y}$ *est un solution de l'équation différentielle suivant*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{2.4}$$

Définition 2.1 *L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle linéaire de la formule suivant :*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Démonstration.

On suppose que $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

On pose $y_\epsilon(x) = y(x) + \epsilon\eta(x)$ tel que $\eta(x) \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$

On considère la fonction G définie par :

$$G(\epsilon) = F[y_\epsilon(x)]$$

Remarque. Si 0 minimise $G(\epsilon)$. Alors y minimise $F(y)$ c-á-d :

$$G(0) = F(y) \leq F(y_\epsilon) = G(\epsilon)$$

Comme 0 est un minimum absolu de G, alors $G'(0) = 0$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}(G(\epsilon)) &= \frac{d}{d\epsilon}\int_a^b f(x, y_\epsilon, y'_\epsilon)\, dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial\epsilon} f(x, y_\epsilon, y'_\epsilon)\, dx\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{d}{d\epsilon}\,|_{\epsilon=0}\left(\int_a^b f(x, y_\epsilon, y'_\epsilon)\, dx\right) = 0$$

Comme f est une fonction continue, alors on peut écrire la dernière équation sous la forme suivant :

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial\epsilon} f(x, y_\epsilon, y'_\epsilon)\,|_{\epsilon=0}\ dx = 0$$

D'aprés la dérivée en chaîne on obtient :

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y_\epsilon}\frac{dy_\epsilon}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\frac{dy'_\epsilon}{d\epsilon}\right]\ dx = 0$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_\epsilon}\frac{dy_\epsilon}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\frac{dy'_\epsilon}{d\epsilon}\right]\ dx = 0 \tag{2.5}$$

On à $\quad y_\epsilon(x) = y(x) + \epsilon\eta(x) \quad$ et $\quad y'_\epsilon(x) = y'(x) + \epsilon\eta'(x)$

Alors

$$\frac{dy_\epsilon}{d\epsilon} = \eta(x) \quad \text{et} \quad \frac{dy'_\epsilon}{d\epsilon} = \eta'(x)$$

On romplace dans (2.5) on obtient :

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_\epsilon}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\eta'\right]\,|_{\epsilon=0}\ dx = 0 \tag{2.6}$$

D'aprés l'intégration par partie on à :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\eta'\, dx &= \frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\int_a^b \eta'(x)\, dx - \int_a^b \left(\int_a^b \eta'(x)\right)\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\right]\, dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\,[\eta]_a^b - \int_a^b \eta\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\right]\, dx\end{aligned}$$

Comme $\eta(a) = \eta(b) = 0$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\left[\eta(x)\right]_a^b = 0$$

Donc l'équation précédent s'écris sous la forme suivant :

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\eta' \quad dx = -\int_a^b \eta \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\right] \; dx$$

Donc l'équation (2.6) devient :

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y_\epsilon} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'_\epsilon}\right]\right)\eta(x)\,|_{\epsilon=0} \; dx = 0$$

Pour $\epsilon = 0$ on à $y_\epsilon = y$ et $y'_\epsilon = y'$

D'où

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\right]\right)\eta(x)\; dx = 0$$

D'aprés le lemme fondamental du calcul des variation (lemme 3), on peut simplifier l'écriture en écrivant simplement l'équation sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

♦

Exemple 2.1 *On considère le problème suivant*

$$\inf\left\{\int_0^1 [y'^2 + 1]\; dx \;:\; y \in \mathcal{C}^1(0,1), y(0) = y(1) = 0\right\}.$$

D'une part, on a

$$\forall y \in \mathcal{C}^1(0,1) \qquad\qquad F(y) \geq 1.$$

Et comme $F(0) = 1$, *alors* 0 *est une solution.*

Donc le problème

$$\inf\left\{\int_0^1 [y'^2 + 1]\; dx \;:\; y \in \mathcal{C}_0^1(0,1)\right\},$$

admet un minimum.

D'autre part

L'équation d'Euler-Lagrange associe à ce problème est :

$$y'' = 0$$

On va résoudre cette équation, on obtient :

$$y' = C,$$

alors

$$y(x) = Cx + k \qquad\qquad C, k \in \mathbb{R}.$$

En utilisant les condition aux limites, on trouve :

$$C = 0.$$

Donc 0 *est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange*

L'exemple suivant nous donne que l'équation d'Euler-Lagrange est une condition nécessaire d'existence de solution de problème $(\mathcal{P})$

Exemple 2.2 *Le problème considéré est*

$$\inf \left\{ \int_0^1 e^{-y'^2(x)} \qquad y \in \mathcal{C}^1([0,1]) \;\; et \;\; y(1) = y(0) = 0 \right\}.$$

L'équation d'Euler-Lagrange associeé à ce problème est :

$$\begin{cases} 2y'^2 - y'' = 0 \\ y(1) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Par contre le problème $(\mathcal{P})$ *n'admet pas de solution, en effet :*

Soit $y_n = n(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{n}{4}$

On a

$$y_n' = 2nx - n,$$

alors

$$F(y_n) = \int_0^1 e^{-n^2(2x-1)^2}\, dx.$$

Comme

$$e^{-n^2(2x-1)^2} \leq e^{-(2x-1)^2}$$

En utilisant le théorème de Lebesgue on trouve

$$\lim_n F(y_n) = 0$$

Il vient alors que

$$0 \leq \inf F(y) \leq F(y_n),$$

et en passant à la limite, on obtient

$$\inf F(y) = 0.$$

Supposons qu'il existe $\overline{y}$ est solution, c'est-à-dire

$$\forall y \qquad F(\overline{y}) = \min F(y) = 0$$

alors

$$\int_0^1 e^{-\overline{y}'^2(x)}\, dx = 0,$$

donc

$$e^{-\overline{y}'^2(x)} = 0$$

contradiction.

D'où le problème considéré n'admet pas un minimum

2.2.2 La forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange

On considère le probléme $\mathscr{P}$:

$$\inf \left\{ F(u) \ : u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \right\}$$

où

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Avec

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, \zeta, \xi) & \longmapsto & f(x, \zeta, \xi) \end{array}$$

est une fonction de Carathéodory vérifiant pour presque tout $x \in \Omega$,

$\forall (u, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

$$| f(x, \zeta, \xi) | \leq \beta | \xi |^{p-1}$$

pour $\beta > 0$ $p > 1$

On pose :

$$L(u, \varphi) = \int_\Omega \{ f_u(x, u(x), \nabla u(x))\varphi(x) + \langle f_\xi(x, u(x), \nabla u(x)); \nabla\varphi(x) \rangle \} \, dx \qquad (2.7)$$

Où

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^N \qquad \text{mesurable } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Avec

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

La condition nécessaire d'existence de minimum de $(\mathscr{P})$, est donée par :

Théorème 2.3 *Soit $\overline{u}$ est solution de $\mathscr{P}$*

Si

$$| f_u(x, u, \nabla u) | \leq \alpha_1(x) + \beta(| u |^{p-1} + | \xi |^{p-1})$$

$$| f_\xi(x, u, \nabla u) | \leq \alpha_2(x) + \beta(| u |^{p-1} + | \xi |^{p-1})$$

Avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{L}^q(\Omega)$, *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors $\overline{u}$ est une solution de

$$(E_f) \qquad L(\overline{u}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

Démonstration.

Notez d'abord qu'en raison de la condition de croissance sur f

Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\forall \varphi \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$

$F(\overline{u} + \epsilon\varphi)$ est bien définie

Puis que $\overline{u}$ est un minimum de $(\mathscr{P})$, alors :

$$F(\overline{u} + \epsilon\varphi) \geq F(\overline{u})$$

Pour tout $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$

Nous avons donc, si la limite existe, on obtient :

$$L(\overline{u},\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(\overline{u}+\epsilon\varphi) - F(\overline{u})}{\epsilon} = 0$$

En effet, montrons que

$$L(\overline{u},\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(\overline{u}+\epsilon\varphi) - F(\overline{u})}{\epsilon} \tag{2.8}$$

Nous trouvons que :

$$\begin{aligned} \frac{F(\overline{u}+\epsilon\varphi) - F(\overline{u})}{\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega [f(x,\overline{u}+\epsilon\varphi,\nabla\overline{u}+\epsilon\nabla\varphi) - f(x,\overline{u},\nabla\overline{u})]\,dx \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega B\,dx \end{aligned}$$

On remarque que :

$$B = \int_0^1 f_t(x,\overline{u}+t\epsilon\varphi,\nabla\overline{u}+t\epsilon\nabla\varphi)\,dt$$

Telle que :

$$f_t = \frac{d}{dt} f(x,\overline{u},\nabla\overline{u})$$

Alors :

$$\frac{F(\overline{u}+\epsilon\varphi) - F(\overline{u})}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\int_0^1 f_t(x,\overline{u}+t\epsilon\varphi,\nabla\overline{u}+t\epsilon\nabla\varphi)\,dtdx$$

On pose :

$$f_1 = \overline{u}+t\epsilon\varphi, f_2 = \nabla\overline{u}+t\epsilon\nabla\varphi$$

Nous calculons maintenant f_t tel que

$$f_t(x,f_1,f_2) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial f_1}\frac{df_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial f_2}\frac{df_2}{dt}$$

Alors

$$f_t(x,f_1,f_2) = f_u(x,f_1,f_2)\epsilon\varphi + \langle f_\xi(x,f_1,f_2);\epsilon\nabla\varphi\rangle$$

Nous mettons :

$$g(x,\epsilon) = \epsilon\int_0^1 [f_u(x,f_1,f_2)\epsilon\varphi + \langle f_\xi(x,f_1,f_2);\epsilon\nabla\varphi\rangle]\,dt$$

Donc

$$\frac{F(\overline{u}+\epsilon\varphi)-F(\overline{u})}{\epsilon}=\int\limits_{\Omega} g(x,\epsilon)\,dx$$

Si nous pouvons montrer qu'il existe $\gamma\in \mathrm{L}^1$ tel que :

pour tout ϵ suffisament petit

$$\mid g(x,\epsilon)\mid\leq \gamma(x)\qquad p.p.x\in\Omega \tag{2.9}$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned}\mid\langle f_u(x,f_1,f_2);\varphi\rangle\mid &\leq \mid f_u(x,f_1,f_2)\mid\mid\varphi\mid\\ &\leq [\alpha_1(x)+\beta(\mid f_1\mid^{p-1}+\mid f_2\mid^{p-1})]\mid\varphi\mid\\ &\leq \alpha_1(x)\mid\varphi\mid+\beta(\mid\overline{u}+\varphi\mid^{p-1}+\mid\nabla\overline{u}+\nabla\varphi\mid^{p-1})\mid\varphi\mid\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mid\langle f_\xi(x,f_1,f_2);\nabla\varphi\rangle\mid &\leq \mid f_\xi(x,f_1,f_2)\mid\mid\nabla\varphi\mid\\ &\leq [\alpha_2(x)+\beta(\mid f_1\mid^{p-1}+\mid f_2\mid^{p-1})]\mid\nabla\varphi\mid\\ &\leq \alpha_2(x)\mid\nabla\varphi\mid+\beta(\mid\overline{u}+\varphi\mid^{p-1}+\mid\nabla\overline{u}+\nabla\varphi\mid^{p-1})\mid\nabla\varphi\mid\end{aligned}$$

Comme $\overline{u},\varphi\in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$, alors :

$$\alpha_1\mid\varphi\mid,\mid\overline{u}+\varphi\mid^{p-1}\mid\varphi\mid,\mid\nabla\overline{u}+\nabla\varphi\mid^{p-1}\mid\varphi\mid\in \mathrm{L}^1(\Omega)$$

$$\alpha_2\mid\nabla\varphi\mid,\mid\overline{u}+\varphi\mid^{p}\mid\nabla\varphi\mid,\mid\nabla\overline{u}+\nabla\varphi\mid^{p}\mid\nabla\varphi\mid\in \mathrm{L}^1(\Omega)$$

En intégrant sur t on obtient

$$\gamma(x)=\alpha_1(x)\mid\varphi\mid+\alpha_2(x)\mid\nabla\varphi\mid+\beta(\mid\overline{u}+\varphi\mid^{p-1}+\mid\nabla\overline{u}+\nabla\varphi\mid^{p-1})(\mid\nabla\varphi\mid+\mid\varphi\mid)$$

Avec $\gamma\in \mathrm{L}^1(\Omega)$

Car :

$$\alpha_1\mid\varphi\mid,\mid\overline{u}+\varphi\mid^{p-1}\mid\varphi\mid,\mid\nabla\overline{u}+\nabla\varphi\mid^{p-1}\mid\varphi\mid\in \mathrm{L}^1(\Omega)$$

$$\alpha_2\mid\nabla\varphi\mid,\mid\overline{u}+\varphi\mid^{p-1}\mid\nabla\varphi\mid,\mid\nabla\overline{u}+\nabla\varphi\mid^{p-1}\mid\nabla\varphi\mid\in \mathrm{L}^1(\Omega)$$

Nous appliquant le théorème de convergence domine de Lebesgue, trouvons :

$$(E_f)\qquad L(\overline{u},\varphi)=0\quad\forall\varphi\in \mathrm{W}^{1,p}$$

♦

La condition suffisante de minimum donné par :

Théorème 2.4 *Si $\overline{u}$ vérifier (E_f) et $(u,\xi) \to f(x,.,.)$ est convexe pour $x \in \Omega$ p.p*

Alors $\overline{u}$ est un minimiseur de

$$\inf_{u \in W_0^{1,p}} \int_\Omega f_u(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

Preuve.

D'aprés les hypothèses sur f, nous déduisons que, pour presque tout $x \in \Omega$

$$f(x,u,\nabla u) \geq f(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) + \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}); \nabla(u-\overline{u})\rangle + f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u-\overline{u})$$

Donc

$\forall u \in W_0^{1,p}$, nous avons d'aprés l'intégration et attrayant à (E_f) on a :

$$\int_\Omega f(x,u,\nabla u)\, dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\, dx$$

D'où la resultant. ■

Définition 2.2 *On dit que $\overline{u} \in W_0^{1,p}$, est une solution faible de l'équation d'Euler-Lagrange si*

$$\int_\Omega \{\langle f_{u'}(x,\overline{u}(x),\nabla\overline{u}(x)), \nabla v(x)\rangle + f_u(x,\overline{u}(x),\nabla\overline{u}(x))v(x)\}\, dx = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.10)$$

2.3 Résolution du probléme

Dans cette section, on va résoudre les deux problèmes classiques

Solution 1 *(Problème 1) L'équation d'Euler-Lagrange forte représentant la condition pour que la fonctionnelle L est extrémale est donné par (2.4)*

On remarque que f ne dépend pas de y, alors

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

L'équation ci-dessus devient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

ce qui veut dire que $\frac{\partial f}{\partial y'}$ *est un constant par rapport à* x,

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = k,$$

alors

$$|y'| = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

D'aprés l'integration on trouve

$$|y(x)| = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}x + C$$

C'est un résultat trés important, puisqu'il indique que la courbe qui minimise $L[y(x)]$ *entre* $AetB$ *est effectivement une ligne droite.*

Remarque :

l'équation d'Euler-Lagrange ci-dessus est le condition pour que la fonctionnelle ait une valeur extrémale. Dans notre cas cela donne une valeur minimale de la distance, puisque la distance maximale entre deux points est une valeur infinie.

La valeur de k *est définie par les condition aux limites de problème*

$$|y(a)| = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}a + C$$

$$|y(b)| = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}b + C$$

alors

$$(y(b)-y(a))^2 = \frac{k^2}{1-k^2}(b-a)^2$$

Donc

$$|k| = \frac{y(b)-y(a)}{\sqrt{(y(b)-y(a))^2+(b-a)^2}},$$

le signe de k *depend de* $y(x)$. *D'où*

$$|y(x)| = \frac{y(b)-y(a)}{b-a}x + y(0) \tag{2.11}$$

En remplaçant dans l'expression de $L[y(x)]$ *on obtient*

$$L = \sqrt{(b-a)^2+(y(b)-y(a))^2}$$

Solution 2 *(Problème 2) On remarque que $F(y, y')$ ne dépend pas de s.*

Dans ce cas, on multiplie l'équation (2.4) par y' on obtient

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - y'\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0. \tag{2.12}$$

On a

$$\frac{d}{ds}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{dy'}{ds}\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right),$$

alors

$$y'\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{ds}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - y''\frac{\partial F}{\partial y'},$$

en remplaçant dans (2.12)

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{ds}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + y''\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Ou encore

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{ds}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right). \tag{2.13}$$

La différentielle totale de F s'écrit

$$dF(s, y, y') = \frac{\partial F}{\partial s}ds + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}dy',$$

comme F ne dépend pas de s

Alors

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'',$$

d'après (2.13)

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

Par identification

$$F = y'\frac{\partial F}{\partial y'} + k$$

alors

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = k. \tag{2.14}$$

Ona

$$F(y, y') = y\sqrt{1 - y'^2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = -yy'(1 - y'^2)^{-\frac{1}{2}},$$

en remplaçant dans (2.14) on obtient

$$y\sqrt{1-y'^2}+yy'^2(1-y'^2)^{-\frac{1}{2}}=k,$$

alors

$$y=k(1-y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

en élevant les deux mombres au carré et ce que donne

$$|y'|=\left[1-\left(\frac{y}{k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

Ou encore

$$ds=\frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{k}\right)^2}}$$

Donc

$$|s|=k\arcsin(\frac{y}{k})$$

alors

$$y(s)=k\sin(\frac{s}{k})$$

comme $y(\frac{l}{2})=0$ *alors* $\sin\left(\frac{l}{2k}\right)=0$

alors

$$\frac{l}{2k}=\pi \quad \Longrightarrow \quad k=\frac{l}{2\pi},$$

donc

$$y(s)=\frac{l}{2\pi}\sin(\frac{2\pi s}{l}), \tag{2.15}$$

En dérivant (2.15) on obtient :

$$dy=\cos(\frac{2\pi s}{l})ds.$$

Comme

$$(ds)^2=(dy)^2+(dx)^2,$$

alors

$$|dx|=\sin(\frac{2\pi s}{l})ds,$$

d'aprés l'intégral on trouve :

$$x(s)-\frac{l}{2\pi}=-\frac{l}{2\pi}\cos(\frac{2\pi s}{l}). \tag{2.16}$$

En élevant au carré les équation (2.15),(2.16) puis en les additionnant, on obtient

$$(x - \frac{l}{2\pi})^2 + y^2 = \frac{l^2}{4\pi^2}, \tag{2.17}$$

ceci est effectivement est l'équation d'un cercle de rayon $\frac{l}{2\pi}$ *et de centre* $(\frac{l}{2\pi}, 0)$.

Cette équation représente la courbe qui maximise

$$A = 2\int_0^{\frac{l}{2}} f(y, y')\, ds,$$

donc $A = \frac{l^2}{4\pi}$

On va vérifie que la surface A est maximale,

si la surface était minimale ne devrait pas trouver une valeur plus petit que A,

Il suffit de trouver un seul cas où on pourrait avoir une surface délimité par une courbe de longueur l,

et qui soit de valeur inférieure à la surface d'un cercle de périmétre l.

Alors la surface hauchuré est égale à

$$A_{carré} = \left(\frac{l}{4}\right)^2 < \frac{l}{4\pi}$$

Donc la surface A du cercle de périmétre l est la surface maximale qu'on puisse façonner a l'aide d'une courbe de longueur l

Chapitre 3

Applications

On va baser dans cette chapitre sur [3] [4] [5] [8] [6]

3.1 Résultats principal de l'équation d'Euler-Lagrange

3.1.1 Cas classique

Théorème 3.1 . *Soient* $f \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *et* $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$

On consider le probléme $(\mathcal{P})$ *suivante :*

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{y\in\mathcal{C}^1([a,b])} \left\{ F(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,dx \quad tq \quad y(a)=\alpha \ \text{ et } \ y(b)=\beta \right\} = m$$

i⌋ Si $\overline{y} \in \mathcal{C}^2([a,b])$ *un minimum absolu de* $(\mathcal{P})$ *alors*

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left[f_{y'}(x,\overline{y},\overline{y'})\right] = f_y(x,\overline{y},\overline{y'}), & x\in[a,b] \\ \overline{y}(a)=\alpha, \quad \overline{y}(b)=\beta \end{cases}$$

On notée $f = f(x,y,y'), \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_{y'} = \frac{\partial f}{\partial y'}.$

ii⌋ Si $\overline{y}$ *vérifier* (E) *et* f *une fonction convexe pour tout* $x\in[a,b]$*, alors* $\overline{y}$ *est un minimum de* $(\mathcal{P})$*.*

iii⌋ (la fonction f *et strictement convexe)* $\Longrightarrow$ *(alors le minimume* $\overline{y}$ *est unique).*

Démonstration.

1^{er} **etape :** Comme $\overline{y}$ est un minimum absolu de $(\mathcal{P})$. Alors pour tout $v \in \mathcal{C}_0^1$ et $\forall h \in \mathbb{R}$, on à :

$$F(\overline{y}) \leq F(\overline{y} + hv)$$

Comme $\overline{y} \in \mathcal{C}^2([a,b])$ et la fonctionnelle F ne depende pas de h alors :

$$\frac{d}{dh} F(\overline{y} + hv) \mid_{h=0} = 0$$

Donc

$$\int_a^b [f_{y'}(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))v'(x) + f_y(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))v(x)] \; dx = 0$$

On integre par partie est on obtient :

$$\int_a^b \left\{ f_y(x, \overline{y}, \overline{y}') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \overline{y}, \overline{y}') \right\} v(x) \; dx = 0$$

Utilisons alors le lemme fondamentale du calcul des variation pour obtenir :

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, \overline{y}, \overline{y}') = f_y(x, \overline{y}, \overline{y}') \qquad \forall x \in [a,b] \tag{3.1}$$

Donc $\overline{y}$ minimise l'équation d'Euler-Lagraange

2^{eme} **etape :** Soit $\overline{y}$ est une solution de (3.1), avec $\overline{y}(a) = \alpha$ et $\overline{y}(b) = \beta$

Et comme $f(x, ., .)$ est convexe, continu.

Alors pour tout $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tq $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, et d'aprés le theoreme (1.1) on trouve :

$$\begin{aligned} f(x, y, y') &\geq f(x, \overline{y}, \overline{y}') + (f'(x, \overline{y}, \overline{y}'), (0, y - \overline{y}, y' - \overline{y}')) \\ &\geq f(x, \overline{y}, \overline{y}') + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'} \right), (0, y - \overline{y}, y' - \overline{y}') \right) \\ &\geq f(x, \overline{y}, \overline{y}') + f_y(x, \overline{y}, \overline{y}')(y - \overline{y}) + f_{y'}(y' - \overline{y}') \end{aligned}$$

En intégrant,

$$F(y) \geq F(\overline{y}) + \int_a^b \left\{ f_y(x, \overline{y}, \overline{y}') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \overline{y}, \overline{y}') \right\} (y - \overline{y}) \; dx$$

En combinant (3.1) avec l'inégalité ci-dessus, on a :

$$F(y) \geq F(\overline{y})$$

Donc $\overline{y}$ est un minimum de $(\mathcal{P})$

3^{eme} **etape :** Soient y_1, y_2 deux solution de $(\mathcal{P})$ et m la valeur du minimum.

On pose $y_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$ telle que $y_3 \in \mathcal{C}^1([a,b])$, avec $y_3(a) = \alpha, \quad y_3(b) = \beta$

De plus, par convexité de f on a :

$$f(y_3) \leq \frac{1}{2}f(y_1) + \frac{1}{2}f(y_2)$$

Par conséquent

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2}f(x, y_1, y_1') + \frac{1}{2}f(x, y_2, y_2') - f(x, \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, y_1' + y_2')\right] dx = 0 \tag{3.2}$$

La fonction f est strictement convexe, déduit que $y_1 = y_2$

D'où l'unicité de solution.

Donc

($\overline{y}$ minimise $(\mathcal{P})$) $\Leftrightarrow$ ($\overline{y}$ est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange) ♦

Remarque 3.1 *La condition ii est une condition suffisante d'existence de solution de* $(\mathcal{P})$.

3.1.2 Cas général

Théorème 3.2 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné Lipschitzien,* $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ *satisfaisant pour* $p > 1$.

On a :

$$f_u(x, y, \nabla u), \mid f_{u'}(x, u, \nabla u) \mid \leq \beta(1 + \mid u \mid^{p-1} + \mid \nabla u \mid^{p-1}) \qquad \beta > 0 \tag{3.3}$$

Si $\overline{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ *minimise* $(\mathscr{P})$ *tel que :*

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf\left\{F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \quad tq \quad u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)\right\}$$

alors $\overline{u}$ *satisfait l'équation d'Euler-Lagrange faible.*

Si $f \in \mathcal{C}^2$ *et* $\overline{u} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *alors* $\overline{u}$ *vérifier l'équation suivant :*

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{u_i'}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\right] = f_u(x, \overline{u}, \nabla\overline{u}), \qquad x \in \Omega$$

Démonstration.

Nous allons maintenant démontrée ce théorème pour $p = 2$

Soit $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a alors que $\gamma = \overline{u} + \alpha\varphi \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ et $\gamma - u_0 \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$

Par conséquent, comme $\overline{u}$ réalise le minimum de $\mathscr{P}$

Alors on a :

$$F(\overline{u} + \alpha\varphi) \geq F(\overline{u})$$

Et donc

$$\frac{d}{d\alpha}F(\gamma) \mid_{\alpha=0} = 0 \qquad \forall\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}F(\gamma) \mid_{\alpha=0} &= 0 \\ &= \int_\Omega \{f_u(x, \overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x))\varphi(x) + \langle f_{u'}(x, \overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x)); \nabla\varphi(x)\rangle\}\ dx \end{aligned}$$

Donc $\overline{u}$ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange faible. D'aprés le lemme fondamentalle on obtient :

$$\langle f_{u'}(x, \overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x)); \nabla\varphi(x)\rangle + f_u(x, \overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x))\varphi(x) = 0$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle f_{u'}(x, \overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x)); \nabla\varphi(x)\rangle &= -\langle \nabla f_{u'}(x, \overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x)); \varphi(x)\rangle \\ &= -\nabla f_{u'}(x, \overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x))\varphi(x) \end{aligned}$$

Comme $\Omega \in \mathbb{R}^N$ alors le variable x est un vecteur

Soit

$$u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \ \text{ et } \ \nabla u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N \ \text{ avec } \ N \geq 1$$

Alors on a un système d'équation associe.

Plus précisément, l'équation d'Euler-Lagrange donnée par :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{u_i'}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\right] = f_u(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{u_i'}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\right] \equiv div\left[f_u(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\right]$$

Ce la forme forte de l'équation d'Euler-Lagrange. ♦

Corollaire 2 *Soit*

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$

est un fonction de $\mathcal{C}^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

Si $\overline{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *est un minimum de*

$$(\mathfrak{F}) \qquad \inf \left\{ F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \ tq\ u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Alors $\overline{u}$ *vérifie*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f_{\xi_i}(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \right] = f_u(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \tag{3.4}$$

Preuve.

Soit $\overline{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est un solution de $(\mathscr{P})$, alors

$$F(\overline{u}) \leq F(u) \qquad \forall u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

Comme $\mathcal{C}^2(\Omega) \subset \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\inf_{\mathrm{W}_0^{1,p}} (\Omega) F(u) \leq \inf_{\mathcal{C}^2} (\Omega) F(u),$$

alors

$$F(\overline{u}) \leq \inf_{\mathcal{C}^2} (\Omega) F(u)$$

Donc $\overline{u}$ satisfait l'équation (3.4) ∎

3.2 L'intégrale de Dirichlet

On va étudier la fonctionnelle de Dirichlet.

Théorème 3.3 *Soit* Ω *un ouvert borné de lipschitzien, on conidere le problème de Dirichlet,*

$$(\mathscr{P}_D) \qquad \inf \left\{ F(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - g(x) u(x) \right] dx \ : \quad u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \right\}$$

Si $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, *alors* $(\mathscr{P}_D)$ *admet une solution unique* $\overline{u} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *qui vérifier l'équation suivant :*

$$\int_\Omega \langle \nabla \overline{u}(x); \nabla v(x) \rangle\, dx = \int_\Omega g(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

Démonstration.

On procédent de la même maniere que le théorème (2.1) de chapitre 2 pour démontre que le problème $(\mathscr{P}_D)$ admet un solution.

Nous montrons maintenant que, $\overline{u}$ satisfait $(\mathscr{P}_D)$ alors $\forall \epsilon \in \mathbb{R},\ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$,

ona $\overline{u} + \epsilon v \in \mathrm{H}_0^1$

Comme $\overline{u}$ est le minimum de $(\mathscr{P}_D)$, on doit avoir

$$F(\overline{u} + \epsilon v) \geq F(\overline{u}),$$

alors

$$\frac{d}{d\epsilon} F(\overline{u} + \epsilon v)|_{\epsilon=0} = 0$$

On va calculer maintenant

$$\begin{aligned} F(\overline{u} + \epsilon v) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla \overline{u} + \epsilon \nabla v|^2 - f(\overline{u} + \epsilon v)\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(|\nabla \overline{u}|^2 + \epsilon |\nabla v|^2 + 2\epsilon |\nabla \overline{u}||\nabla v|) - f\overline{u} + \epsilon f v\right] dx \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} F(\overline{u} + \epsilon v) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left[\frac{1}{2}(|\nabla \overline{u}|^2 + \epsilon |\nabla v|^2 + 2\epsilon |\nabla \overline{u}||\nabla v|) - f\overline{u} + \epsilon f v\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[\epsilon |\nabla v| + |\nabla \overline{u}||\nabla v| - f v\right] dx \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{d}{d\epsilon} F(\overline{u} + \epsilon v)|_{\epsilon=0} = 0$$

Donc

$$\int_\Omega \langle \nabla \overline{u}(x); \nabla v(x) \rangle \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \tag{3.5}$$

D'où

Toute solution de $(\mathscr{P}_D)$ est un solution de (3.5)

Il reste à montrer que $(\mathscr{P}_D)$ admet une solution unique.

Unicité

Soit $\overline{u}, \overline{v} \in \mathrm{H}_0^1$, deux solution de $(\mathscr{P}_D)$ Alrs ona

$$F(\overline{u}) = F(\overline{v}) = m$$

On pose $\overline{w} = \frac{1}{2}\overline{u} + \frac{1}{2}\overline{v}$ est un minimum de $(\mathscr{P}_D)$

par la convexité de F , nous trouvuns :

$$m \leq F(\overline{w}) \leq \frac{1}{2}F(\overline{u}) + \frac{1}{2}F(\overline{v}) = m$$

Comme F est strictement convexe, on a

$$F(\overline{u}) - F(\overline{v}) = 0$$

Alors

$$F(\overline{u}) = F(\overline{v})$$

Donc $\overline{u} = \overline{v}$

D'où la solution est unique. ♦

3.3 Au delà de l'équation classique d'Euler-Lagrange

Dans cette partie on presentera un résultat axiliaire obtenu récement par G. Bonfanti et M. Mazzola (voir [8]).Ce travail est basée sur les deux résultats de M. Degiovanni, M. Marzocchi (voir [6]) et A. Cellina (voir [3]) obtenus dans le cas de fonctionnelle ne vérifions pas les conditions de croissances polynomiales classiques.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

On considère le problème

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf \left\{ F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \ : \ u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

tel que

$$f(x, u(x), \nabla u(x)) = L(\nabla u(x)) + g(x, u(x)),$$

où

$u \to g(x, u)$ est une fonction concave $p.p.x \in \Omega$,

$L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est convexe, differentiable

Hypothèse :

Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Carathéodory

De plus

- Si $p < N$, alors $\exists \alpha_1 \in (\mathrm{L}^{p^*})'(\Omega) \text{et} \beta_1 \in (\mathrm{L}^{\infty})(\Omega)$ tq

$$|g(x,u)| \leq \alpha_1(x) + \beta_1(x)|u|^{p^*} \qquad p.p.x \in \Omega \ \forall u \in \mathbb{R}$$

- Si $p = N$, alors $\exists r > 1, \exists \alpha_2 \in \mathrm{L}^{r'}(\Omega) \text{et} \beta_2 \in (\mathrm{L}^{\infty})(\Omega)$ tq

$$|g(x,u)| \leq \alpha_2(x) + \beta_2(x)|u|^{r} \qquad p.p.x \in \Omega \ \forall u \in \mathbb{R}$$

- Si $p > N$, alors $\exists \alpha_3 \in \mathrm{L}^1(\Omega) \text{et} \beta_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

$$|g(x,u)| \leq \alpha_3(x) + \beta_3(u) \qquad p.p.x \in \Omega \ \forall u \in \mathbb{R}$$

Théorème 3.4 *Si $L \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ et si g satisfait l'hypothèse A, alors l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème $(\mathscr{P})$ vérifier.*

c'est-à-dire si u est un minimiseur pour $(\mathscr{P})$, alors il existe une sélection $\sigma(x)$ tq :

$$\int_{\Omega} \langle L(\nabla \overline{u}(x)); \nabla \eta(x) \rangle \, dx = -\int_{\Omega} \sigma(x)\eta(x) \, dx \qquad \forall \eta \in \mathrm{C}_c^{\infty}(\Omega),$$

avec $\sigma(x) \in \partial g(x,u)$

Où

$$\partial g(x,\xi) = \{y \in \mathbb{R} : g(x,u) \leq g(x,\xi) + \langle y; u - \xi \rangle\}$$

Remarque 3.2 *Nous observons que l'hypothèse A est suffisante pour prouver notre résultat principal, mais elle ne garantit pas existence d'un minimum pour le problème $(\mathscr{P})$ dans le cas $p > N$*

Bibliographie

[1] J. Ball et V.J. Mizel, *One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation*, Arch. Rational. Mech. Anal. **90**, (1985), 325-388.

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, (1999).

[3] A. Cellina, *On the validity of the Euler-Lagrange equation,* J. Differential Equations, 171, (2001), 430-442.

[4] B. Dacorogna, *Introduction au Calcul des Variations*, Première édition, Presses polytechniques et universitaires romandes, (1992).

[5] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations,* volume 78 of Applied Mathematical Sciences. Springer, 2nd edition, Second edition, (2008).

[6] M. Degiovanni et M. Marzocchi, *On the Euler-Lagrange equation for functionals of the calculus of variations without upper growth conditions,* SIAM J. Control Optim, 48, (2009), 2857-2870.

[7] I. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problème variationnels,* Dunard-Gauthiers-Villars,Paris (1974).

[8] Marco Mazzola. Giovanni Bonfanti. (2010) *On the validity of the Euler-Lagrange equation in a nonlinear case, Nonlinear Analysis, Theory Methods and application, 73, 266-269, (2010).*

[9] F. Palesi, *Cours de Calcul variationnel, (2010-2011), disponible à l'adresse :*`https://old.i2m.univ-amu.fr/ fpalesi/enseignement.html`.

[10] K.F. Riley, M.P. Hobson et S. J. Bence. *(1997). Mathematical Methods for Physics and Engineering, Third edition, Cambridge, (1997).*

[11] F. Roger, *Position du problème équation d'Euler, Séminaire de mathématiques(1938-1939), Exposé 6-A, p. 1 à 11.*