République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département De Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

SILIMI Laid

Thème :

Stabilisation des équations des ondes avec un feedback interne non linéaire

Soutenu le : 19 / Juin / 2018 devant le jury composé de

Président :	N . BENAICHOUCHE	M.A.A	Université de Médéa
Directeur de Mémoire :	K . MAALOUM	M.A.A	Université de Médéa
Examinateur :	S . RAFA	M.A.A	Université de Médéa
Examinateur :	N . MEKDACHE	M.A.A	Université de Médéa

Remerciements

Au terme de cette étude, nous remercions avant tout Dieu qui nous a aidé à réaliser ce présent travail.

On tient à remercier vivement notre encadreur Monsieur Maaloum Khaled de son aide précieuse destinée à améliorer le contenu de ce travail.

Recevez ; Monsieur nos vifs remerciements et l'expression de notre profonde gratitude pour votre compréhension et votre disponibilité constante.

Pour nous, c'est un devoir et un plaisir de remercier nos enseignants du département de mathématique et informatique de l'université de Médéa pour leurs séminaire .

Nos remerciements vont également à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail de près ou de loin.

Résumé

Dans ce travail ,on va étudier la stabilisation de l'équation des ondes avec un feedback interne non linéaire localement distribué dissipatif .

Pour ce la nous avons divisé le travail en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons invoqué les concepts et les règles de la base, des théories et des corollaires et conclusions et d'autres, avec leurs références individuelle et tout ce dont nous aurons besoin plus tard.

Dans le deuxième chapitre, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution .

En utilisant le théorème de (Carathéodory) pour prouver l'existence de la solution et en utilisant la méthode de (Faedo-Galerkin) [trouver une solution approchée et on fait des estimations et passage à la limite pour montrer que la solution approchée converge vers la solution exacte et on fait une vérification des données frontière et initiale] pour obtenir une solution régulière et faible et on prouver l'unicité de chaque un de ces deux solutions.

Dans le troisième chapitre, nous prouvons aussi l'existence et l'unicité de la solution, mais en utilisant la méthode de semi-groupe.

Cette méthode dépend à démontrer que l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ est monotone et surjectif.

Pour ce la on écrivons notre problème sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U + \mathcal{A}U = 0. \\ \\ U_0 = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix}, \qquad \text{dans} \quad \mathcal{V} \times L^2(\Omega) \quad ou \quad H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \end{cases}$$

puis on utilisons le théorème de (Hille-Yozida) pour prouver l'existence et l'unicité de la solution régulière et faible.

Dans le dernier chapitre, nous démontrons le théorème qui prouve la stabilité uniforme de notre problème puis la stabilité exponentielle et la stabilité polynômiale des solutions .

Mots-clés : Stabilisation , Semi-groupe , Feedback interne , Multiplicateur .

ملخص

في هذَا العَمَل ، نَقوم بِدِرَاسَة إِستقرَار مُعَادلة الأَمواَج مَعَ ردّ فِعل دَاخلي غير خَطّي تَبَدُّدي مُوَزَع مَحَلّيًا

قُمنَا بتَقسيم العمَل إِلَى أَربَعَة فُصُولّ

في الفَصل الأَوَل قُمنَا بِإِستحضَار المَفَاهيم وَ القَوَاعِد الأَسَاسيَة من نَظَريَات وَ نَتَائج وَ خُلَاصَات وَ غَيرهَا، مَع المَرَاجع الخَاصّة وَ كُل مَانَحتَاج إِليه لَاحقًا.

في الفَصل الثَاني قُمنَا بِالبُرهَان عَلَى وُجُود وَ وحدَانية الحَل.

حَيث قُمنَا بِإِستخدَام نَظَريَة (Caratheodory) لِلبُرهَان عَلَى وُجُود الحل ثُمَّ إِستَخدَمنَا طَريقَة (Faedo-Galerkin) [إِيجَاد حَلّ مُقَرَّب وَ نَقُوم بِالتَّقديرَات المُنَاسبة ثُمَّ بَالمُرور إِلَى النِهَايَات نُبَرهِن عَلَى أَنَّ الحَل المُقَرَّب يَؤُول إِلَى الحل الدَّقيق ثُمَّ نَتَأَكَّد مِنَ الشّرُوط الإِبتِدَائِية وَ الحَدّية] لنَحصُلَ عَلَى الحَل الدَّقيق وَ الضَّعيف ثُمَّ نَقُوم بِالبُرهَان عَلَى وِحدَانيَة كِلَا الحَلّين.

في الفَصل الثَالِث نُبَرهِن أَيضًا عَلَى وُجُود وَ وِحدَانية الحَلّ حَيث نَستَخدِم طَريقَة نِصفِ ـ الزُّمرة ، هَذهِ الطَّريقَة تَعتَمِد عَلَى بَرهَنَة أَنَّ المُؤَثر الخَطّي $\mathcal{A}$ رَتيب وَ مُتَغَامِر.

لهذَا يَكُون الشكل العَام لِلمُعَادَلَة المَدرُوسَة كمَا يَلي

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U + \mathcal{A}U = 0. \\ \\ U_0 = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix}, \qquad \text{dans} \quad \mathcal{V} \times L^2(\Omega) \quad ou \quad H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \end{cases}$$

ثُمَّ نَستَخدِم نَظَرِيَة (Hille-Yosida) لِلبُرهَان عَلَى وُجُود وَ وِحدَانية الحَلّ الدَّقيق وَ الضَّعيف.

أَمَّا في الفَصل الأَخير نُبَرهِن عَلَى النَّظَرية الّتي تُثبِت الإِستِقرَار المُنتَظَم ثُمَّ الإِستِقرَار الأُسّى وَ الإِستِقرَار مُتَعَدِّد الحُدُود لِحَلّ المُعَادَلَة.

كَلِمَات مِفتَاحية إِستِقرَار ، نِصف زُمرة ، ردّ فِعل دَاخلي ، مُضَاعَف.

Notation

$\partial_i u$	Dérivée partielle de u par rapport à la variable x_i.
$\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_n u)$	Gradient de u.
$div(P) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i P_i$	Divergence de $P \in \mathbb{R}^n$.
$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii}^2 u$	Laplacien de u.
$\nabla_\Gamma u$	Gradient tangentiel de u sur Γ.
$div_T P$	Divergence tangentiel de P.
$\Delta_\Gamma u$	L'opérateur de Laplace-Beltrami appliqué à u (laplacienne tangentiel de u).
$\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n} u$	Pour $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
$n(x)$	La normale sortante au domaine Ω.
ν	Vecteur normale unitaire sortant de Γ.
$\partial_\nu u$	Dérivée de u dans la direction de ν.
$\|.\|_X$	Norme de l'espace de Banach X.
X'	L'espace dual de X.
$< ., . >_{X',X}$	Crochet de dualité entre l'espace de Banach X et son dual X'.
$(u, v)_X = u.v$	Le produit scalaire sur X.
$\mathbb{R}^n$	L'espace de dimension fini n.
$\mathbb{R}_+ =$	$[0, +\infty[$.
$D(\Omega)$	L'espace des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable et à support compact.
$D'(\Omega)$	L'espace dual de $D(\Omega)$ i.e : l'espace de distribution.
$L^1_{loc}(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions mesurables localement intégrables.
$\mathcal{E}(\Omega)$	L'espace des fonctions indéfiniment dérivables quelconques.
$\mathcal{E}'(\Omega)$	L'espace des distributions à support compact .
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	L'espace de Schwartz (l'espace des fonctions à décroissances rapides).
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	L'espace dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e : l'espace des distributions tempérées.
$L^p(0, T, X)$	L'ensemble des fonctions mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, T[$ et à valeur dans X.
$\overset{continue}{\hookrightarrow}$ ou $\hookrightarrow$	L'injection continue .
$\overset{compact}{\hookrightarrow}$	L'injection compact.
$\equiv$	Equivalente ou identique.
$H^m(\Omega)$	L'espace de Sobolev d'ordre entier.
$H^1_0(\Omega)$	L'espace des fonctions dans $H^1(\Omega)$ nulle sur les bord.
$H^{-1}(\Omega)$	Le dual de $H^1_0(\Omega)$.

$\sigma(E, E')$	La topologie faible.
$\sigma(E', E)$	La topologie faible * .
$Hess(u) = \nabla(\nabla(u))$	La matrice Hessienne de u.
$x_n \to x$	Signifiée que x_n converge vers x fortement.
$x_n \rightharpoonup x$	Signifiée que x_n converge vers x faiblement.
$x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$	Signifiée que x_n converge vers x faiblement étoile.
$\mathcal{H}$	L'espace de l'énergie.
$E(t)$	L'énergie associée à la solution u.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
$d\Gamma = d\sigma$	La mesure surfacique.

Table des matières

Notation **5**

Introduction générale **9**

1 Préliminaire **11**
1.1 Définition de la stabilisation de l'équation des ondes 11
1.2 L'espace des distributions 11
1.2.1 Espace des fonctions tests 12
1.2.2 Distribution 12
1.2.3 Dérivation des distributions 12
1.2.4 Topologie sur $D'(\Omega)$ 12
1.2.5 Distribution tempérée 13
1.3 Les espaces $L^p(\Omega)$ 13
1.3.1 Définition de l'espace $L^p(\Omega)$ 13
1.3.2 Inégalité de Hölder 13
1.3.3 L'inégalité de Young 13
1.3.4 Inégalité de Jensen 14
1.3.5 Espace des fonctions à valeurs vectorielles 14
1.3.6 Lemme de Aubin – Lions 15
1.4 Les espaces de Sobolev 16
1.4.1 Définitions 16
1.4.2 L'inégalité de Poincaré 16
1.5 Théories de trace 16
1.5.1 Formule de Green dans les espaces de Sobolev 18
1.6 Gradient tangentiel et laplacien tangentiel 18
1.7 La topologie faible et faible * 18
1.7.1 La topologie faible $\sigma(E, E')$ 18
1.7.2 La topologie faible * $\sigma(E', E)$ 19
1.8 Opérateurs maximaux monotones et opérateurs dissipatifs et théorème De Hille-Yosida 19
1.8.1 Opérateurs maximaux monotones et opérateurs dissipatifs 19
1.8.2 Théorème De Hille-Yosida 20
1.9 Théorème de Carathéodory 20

2 L'existence et l'unicité de la solution par la méthode de Faedo-Galerkin **22**
2.1 Position du problème 22
2.2 La régularité de la solution. 24
2.2.1 L'existence. 24
2.2.2 L'unicité 37
2.3 Solution faible 38
2.3.1 Vérifications 40

2.3.2 L'unicité 41

3 L'existence et l'unicité de la solution par la méthode des semi- groupes 42
3.1 Position du problème 42
3.2 Théorème d'existence et d'unicité 42
3.3 Démonstration du théorème (3.2.0.1) 46
3.3.1 La régularité de la solution 46
3.3.2 Solution faible 48

4 Stabilisation 49
4.1 Stabilité uniforme 51
4.1.1 Preuve du théorème (4.1.0.1) 51
4.1.2 Conclusion du théorème (4.1.0.1) 62
4.2 Stabilisation exponentielle et polynômiale 65

Conclusion 67

Bibliographie 68

Introduction générale

Note historique

Un ensemble riche de résultats est actuellement disponible sur l'équation d'onde en l'absence de terme de limite $\Delta_\Gamma u$; par exemple voir ([14]) et ses références.

La condition de Cauchy-Ventcel sur Γ_1 se pose lors de la modélisation de la vibration du corps avec une couche frontière fine de haute rigidité.

D'abord un tel système a été étudié par Lemrabet ([15]) et par la suite par Lemrabet et Teniou ([16]), dans ([16]) les auteurs prouvent l'existence et les résultats de la régularité pour le cas où le feedback g est linéaire.

Bey ([17]) et Hemmina ([18],[19]) ont étudié la stabilisation frontière pour les systèmes isotropes linéaires élasto-dynamiques et l'équation d'ondes avec conditions Ventcel.

Dans ([18]) l'auteur a montré dans les conditions aux limites dynamiques et sur les domaines en forme d'étoile que le système d'élasticité avec les conditions de Ventcel est exponentiellement stable.

([18]) fournit également un contre-exemple démontrant que si $a \equiv 0$ alors l'énergie de ce système ne se désintègre jamais exponentiellement même si le feedback dissipative est appliquée à l'ensemble du frontière tout entier.

Ensuite ,les conditions aux limites dynamiques de Ventcel ont été étudier par Khemmoudj et Medjden ([20]).

Ces résultats ont été récemment étendus par Cavalcanti, Khemmoudj et Medjden ([21]) aux opérateurs linéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_T$ avec des coefficients variables (mais toujours pour les domaines en forme d'étoile).

en employant les nouvelles estimations d'énergie combinées avec des méthodes géométriques riemanniennes dues à Lasiecka , Triggiani et Yao (e.g. voir [22]).

Un autre travail récent ([23]) établit des taux de décroissance exponentielle de solutions à une Équation d'onde semi-linéaire de Cauchy-Ventcel,sans restrictions sur la géométrie, mais avec un terme de feedback linéaire qui est efficace dans un voisinage de la frontière entière.

Ce travail est consacré à l'étude de taux de décroissance forte de l'énergie associe à la solutions de l'équation d'onde avec les conditions aux limites de Cauchy-Ventcel et notre problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[. \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[. \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[. \\ u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ayant une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$, tel que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec Γ_0 et Γ_1 étant fermé et disjoint.

Si $a(x) = 0$ alors la stabilité exponentielle uniforme ne tient jamais même si le feedback de friction linéaire est appliqué à la frontière entière du domaine .

On noté par ∇_T ou ∇_Γ le gradient tangentiel sur Γet par Δ_Γ l'opérateur de Laplace-Beltrami (laplacienne tangentiel) sur Γ et par ∂_ν le Dérivée normale où ν représente le champ normal sortant de Γ.

Dans ce travail nous avons adopté sur les articles suivants ([24],[25] et [26]).

L'objectif principal de ce travail est :

i) pour prouver que l'effet localisé du feedback dissipative non linéaire $a(x)g(u_t)$ est suffisamment forte pour garantir la stabilité exponentielle du système.

ii) affaiblir considérablement les hypothèses standard sur le support de feedback.

Effectivement, la majorité des résultats dans cette direction traiter avec domaines en forme d'étoile.

Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction régulier et strictement convexe dont la construction sera clarifiée en prochaine,on définir w_1 comme étant un voisinage de Γ_1 et subdiviser la frontière Γ_0 en deux parties :

$$\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0 \quad | \quad \partial_\nu f > 0\} \quad et \quad \Gamma_1^* = \{x \in \Gamma_0 \quad | \quad \partial_\nu f \leq 0\}.$$

Donc, soit w_0 un voisinage de $\overline{\Gamma_0^*}$.

Nous prouvons que si $a(x) \geq a_0 > 0$ sur le sous-ensemble ouvert $w = w_0 \cup w_1$ et si g est une fonction croissante monotone satisfaisant $k|s| \leq |g(s)| \leq K|s|$ pour tout $|s| \geq 1$, alors l'énergie du système décroit uniformément au taux quantifié par la solution à une certaine ODE non linéaire dépendante de l'amortissement.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Définition de la stabilisation de l'équation des ondes

Définition 1.1.0.1. *La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétroaction (feedback), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.*

Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note E(t) (c'est la norme des solutions dans l'espace de l'énergie), après on va étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier.

Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro , c'est ce que l'on appelle la stabilisation forte i.e :
$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0.$

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide c'est à dire , lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle i.e :
$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t > 0$ *,où C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.*

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :
$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \quad \forall t > 0.$

Où C et α sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

1.2 L'espace des distributions

En analyse mathématique, une distribution (également appelée fonction généralisée) est un objet qui généralise la notion de fonction et de mesure.

La théorie des distributions étend la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables et au-delà, et est utilisée pour formuler des solutions à certaines équations aux dérivées partielles.

Elles sont importantes en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires.

1.2.1 Espace des fonctions tests

Définition 1.2.1.1. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.*

$$D(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \quad \textit{telle que : supp } (f) \textit{ est compact}\}.$$

Avec :

$$\textit{supp } (f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, \quad \textit{tel que : } \quad f(x) \neq 0\}}.$$

1.2.2 Distribution

Définition 1.2.2.1. *(voir [3] p 24-25) Une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur l'espace $D(\Omega)$.*

Les distributions forment un espace vectoriel dit ***espace des distributions*** *noté $D'(\Omega)$.i.e :*

$$\begin{aligned} T: \quad D(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\to T(\varphi) =< T, \varphi > . \end{aligned}$$

est linéaire et continue.

Donc :$D'(\Omega)$ est un espace dual de l'espace $D(\Omega)$, et alors :

Une distribution T est donc une application de $D(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ faisant correspondre à une fonction test φ un nombre complexe noté $< T, \varphi >$.

— *Linéarité :$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{C} :< T, \lambda\varphi_1 + \varphi_2 >= \lambda < T, \varphi_1 > + < T, \varphi_2 >$.*

— *Continuité : Si $\varphi_k \to \varphi$ dans D alors $< T, \varphi_k > \to < T, \varphi >$ dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 1.2.2.1. *La condition de continuité peut être remplacée par une majoration :*
$\forall K$ (compact) et $\forall \varphi \in D(\Omega)$ de support dans K, Il existe une constants C_K et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|T(\varphi)| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{t \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi(t)|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

1.2.3 Dérivation des distributions

Définition 1.2.3.1. *La dérivée T' d'une distribution T de D' est la distribution définie par :*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad < T', \varphi >= - < T, \varphi' > . \tag{1.1}$$

De même on pourra définir les dérivées successives suivantes :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad < \partial^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi >, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{1.2}$$

Avec $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Et pour plus de précision (voir [3] p 33-37).

1.2.4 Topologie sur $D'(\Omega)$

Définition 1.2.4.1. *(Voir[3] p 71) Une suite de distribution $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $D'(\Omega)$ vers T lorsque la suite de nombres complexes $< T_n, \varphi >$ converge dans $\mathbb{C}$ vers $< T, \varphi >$ pour toute $\varphi \in D(\Omega)$ i.e :*

$$\lim T_n = T \quad \Leftrightarrow \quad \lim < T_n, \varphi >=< T, \varphi >, \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \tag{1.3}$$

1.2.5 Distribution tempérée

Définition 1.2.5.1. *On appelle l'espace de Schwartz l'espace des fonctions à décroissances rapides et on le note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^\infty \quad / \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty\}. \tag{1.4}$$

Définition 1.2.5.2. *On appelle distribution tempérée toutes formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on le note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,(i.e : le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).*
i) - Linéaire :(évident).
ii) - Continue : $\forall(\varphi_k)_k \subset \mathcal{S}$: $\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{S}$, alors : $T(\varphi_k) \to 0$ dans $\mathbb{C}$.

1.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de $d\mu$, la fonction f sera considérée de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $1 \leq p \leq +\infty$.

1.3.1 Définition de l'espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.3.1.1. *On appelle $L^p = L^p_\mu(\Omega, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\mu(|f|^p) < +\infty$,où μ est une mesure de Lebesgue sur Ω i.e :*

$$L^p(\Omega) = \begin{cases} f : \Omega \to \mathbb{C}, \text{mesurable telle que } \displaystyle\int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty \ \text{ si } p \in [1, +\infty[. \\ \\ f : \Omega \to \mathbb{C}, \text{mesurable telle que } \quad \sup ess|f(x)| < +\infty \text{ si } p = +\infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

On associée à L^p la norme suivantes :

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p < +\infty. \\ \\ \inf\{c > 0/ \quad |f| \leq c, \quad \mu.pp - \Omega\} & \text{si} \quad p = +\infty. \end{cases} \tag{1.6}$$

Notation 1.3.1.1. *On dit que p et p' sont deux exposants conjuguées pour tout p et $p' \in [1; +\infty]$ ssi :*
$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et on notera dans toute la suite p' le conjuguée de p.

1.3.2 Inégalité de Hölder

Théorème 1.3.2.1. *Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$,où $1 \leq p \leq +\infty$, alors :$f.g \in L^1$ et on a*

$$\int |fg| \, d\mu \leq \| f \|_p \, . \, \| g \|_{p'} \, . \tag{1.7}$$

Démonstration : (voir [1] p 56).

1.3.3 L'inégalité de Young

Théorème 1.3.3.1. *Soient $p, p' \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ alors :*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \qquad \forall a \geq 0, \qquad \forall b \geq 0. \tag{1.8}$$

Démonstration :(voir [1] p 56).

1.3.4 Inégalité de Jensen

Théorème 1.3.4.1 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit $(X;\tau;\mu)$ un espace mesuré et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction μ-mesurable positive sur X. Soit $\chi : I \to \mathbb{R}$ une fonction concave sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors*

$$\chi(\frac{1}{\mu}\int_X f\,d\mu) \leq \frac{1}{\mu}\int_X \chi(f)\,d\mu. \tag{1.9}$$

Démonstration (Voir [10]).

propriété 1.3.4.1. *:*
i) - La densité : $D(\Omega)$est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \neq +\infty$.
iv) - Dual :$(L^p)' = L^{p'}$ pour tout $p \in [1,+\infty[$ mais $L^1 \subset (L^\infty)'$.

Pour plus de précision (voir [1]).

Théorème 1.3.4.2. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne dénombrable.*

Démonstration (Voir[1] p 86).

1.3.5 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Définition 1.3.5.1. *:*

1. *Soit X un espace de Banach et $T > 0$.*
   On note $L^p(0,T,X)$, $\forall p \in [1,+\infty[$ l'ensemble des fonctions mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,T[$ et à valeur dans X ,telle que $x \to \|u\|_X^p$ est intégrable sur $]0,T[$.
   On associe à X la norme :

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left[\int_0^T \|u(x)\|_X^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} & si \quad p \in [1,+\infty[. \\ \\ \sup ess\|u(x)\|_X < +\infty & si \quad p = +\infty. \end{cases} \tag{1.10}$$

   On a $(X, \|.\|_{L^p(0,T,X)})$ est un espace de Banach.

2. *L'espace des distributions sur $]a;b[$ à valeurs dans X est noté $D'(a,b;X)$, et on a*

$$D'(a,b;X) = \mathcal{L}(D(a,b);X),$$

   où $\mathcal{L}(D(a,b);X)$ désigne l'ensemble de toutes les applications linéaires et continues de $D(a;b)$ dans X.

3. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(a,b;X)$ est constitué de toutes les (classes de) fonctions $u \in L^p(a,b;X)$ telles que u' existe au sens des distributions et $u' \in L^p(a,b;X)$, et on le munit de la norme suivante :*

$$\|u\|_{W^{1,p}(a,b;X)} = \begin{cases} \left[\int_\Omega \|u(x)\|_X^p + \|u'(x)\|_X^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} & si \quad p \in [1,+\infty[. \\ \sup ess(\|u(x)\|_X + \|u'(x)\|_X^p) < +\infty & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Proposition 1.3.5.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach sur le corps $\mathcal{K} = \mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$), alors*

1. *$C([a,b];X)$ est dense dans $L^p(a,b;X)$, et on a l'injection continue*

$$C([a,b];X) \hookrightarrow L^p(a,b;X), \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty.$$

2. *$L^p(a,b;X)$ est séparable, si X est séparable et $1 \leq p < +\infty$.*
3. *si $X \hookrightarrow Y$, alors $L^p(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$,pour $1 \leq q \leq p \leq +\infty$.*
4. *pour $1 \leq p \leq +\infty$,alors :*

$$L^p(a,b;X) \hookrightarrow D'(a,b;X).$$

1.3.6 Lemme de Aubin – Lions

Théorème 1.3.6.1. *Soient X_0, X etX_1 trois espaces de Banach avec $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$.*

On suppose que $\forall p, p' \in [1,+\infty]$, $X_0 \overset{compact}{\hookrightarrow} X$ et $X \overset{continue}{\hookrightarrow} X_1$.

Soit

$$W = \{u, v \in L^{p_0}([0,T];X_0)\ , v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}([0,T];X_1)\}.$$

avec $p_0, p_1 \in]1,+\infty[$ on considère W muni de la norme

$$\|v\|_{L^{p_0}([0,T];X_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}([0,T];X_1)}.$$

alors, W est de Banach et on a l'injection de $W \overset{compact}{\hookrightarrow} L^{p_0}([0,T];X_0)$ est compacte.

Démonstration (Voir [6]).

Lemme 1.3.6.1. *Soient H et V deux espaces de Banach tels que $H \hookrightarrow V$, si $u \in L^1(0,T;H)$et $u' \in L^1(0,T;V)$ alors*

$$u \in C^0([0,T];V).$$

Démonstration (Voir [11]).

Proposition 1.3.6.1. *Soit $u \in L^2(a,b;X)$ alors il existe $f \in H^{-1}(a,b;X)$ unique tel que*

$$< f, \theta\xi > = << u', \theta >, \xi >, \qquad \forall \theta \in D(a,b),\ \forall \xi \in X.$$

Démonstration (Voir [12]).

Corollaire 1.3.6.1. *L'application*

$$u \in L^2(a,b;X) \to u' \in H^{-1}(a,b;X)$$

est linéaire et continue.

Démonstration (Voir [12]).

1.4 Les espaces de Sobolev

1.4.1 Définitions

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty[$.

Définition 1.4.1.1. *(voir [2], p 44) L'espace de Sobolev est :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad telle\,que : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, au\,sens\,faible\}. \tag{1.11}$$

On associée à $W^{m,p}(\Omega)$ la norme suivante :

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha| \leq m} (\| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si} \qquad 1 \leq p < +\infty. \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si} \qquad p = +\infty. \end{cases} \tag{1.12}$$

Dans le cas de l'espace entier, on peut caractériser les espaces de Sobolev grâce à la transformation de Fourier .

Définition 1.4.1.2.

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \, telle\,que \qquad \xi \to (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \tag{1.13}$$

avec $\hat{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\, dx$ *est la transformer de Fourier de* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

1.4.2 L'inégalité de Poincaré

Théorème 1.4.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans une direction et $p \in [1, +\infty[$.*

Alors $\exists\, c = c_{(p,\Omega)} > 0$ telle que :

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq c \, \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}}. \tag{1.14}$$

1.5 Théories de trace

Soit Ω un ouvert borné de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec une frontière $\partial\Omega$ de classe $C^1(\Omega)$.

Si u est une fonction de classe C^1 (ou simplement continue) sur l'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω, sa restriction est bien définie et continue sur $\partial\Omega$.

Si de plus u est la solution d'une équation aux dérivées partielles donnée, elle est en général une formulation faible, qui appartient donc à un certain espace de Sobolev.

Les fonctions d'un tel espace ne sont généralement pas continues et ils sont définies seulement sur Ω (et même seulement à égalité près presque partout), donc leur restriction à $\partial\Omega$ n'a aucun sens.

Il vient que la restriction simple d'une fonction ne peut pas être utilisée pour définir clairement une solution générale d'une équation aux dérivées partielles avec des conditions aux limites de Ω données.

On peut contourner cette difficulté en considérant que tout élément u d'un espace de Sobolev peut être mal défini en tant que fonction, mais peut toutefois être approché par une suite (u_n) de fonctions de classe C^1 définies sur l'adhérence de Ω.

Alors, la restriction $u/_{\partial\Omega}$ de u sur $\partial\Omega$ est définie comme la limite de la suite des restrictions $u_n/_{\partial\Omega}$.

Munissons $D(\bar{\Omega})$ de la topologie induite par celle de $H^1(\Omega)$ donc il existe une constante positive C telle que

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\| u\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall u \in D(\bar{\Omega}).$$

Démonstration (Voir [8]).
donc l'application $\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est continue.
$D(\bar{\Omega})$ étant dense dans$H^1(\Omega)$, cette application se prolonge donc par continuité à une application linéaire et continue que l'on note encore γ_0 et on a :

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : H^1(\Omega) & \to & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \\ u & \to & u|_\Gamma. \end{array}$$

γ_0 est appelée fonction trace.

On considère

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\} \quad et \quad \mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Proposition 1.5.0.1. *L'application linéaire :*

$$\gamma_1 : D(\bar{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

définie par :

$$u \to \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma.$$

se prolonge par continuité à une unique application linéaire et continue :

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Démonstration (Voir [9]).

Proposition 1.5.0.2. *L'application linéaire :*

$$\gamma : D(\bar{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma).$$

définie par :

$$u \to \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u).$$

se prolonge par continuité à une unique application linéaire et continue qu'on continue à noter γ telle que :

$$\gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma).$$

$$u \to \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u).$$

Démonstration (Voir [9]).

1.5.1 Formule de Green dans les espaces de Sobolev

Théorème 1.5.1.1. *Soit Ω un ouvert bornée de classe C^1 et Γ son bord.*
Soit F une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (un champ de vecteurs).
Alors :

$$\int_\Omega div(F(x))\,dx = \int_\Gamma F(x).n(x)\,d\Gamma. \tag{1.15}$$

Théorème 1.5.1.2 (intégration par parties en dimension n)**.** *Soit Ω un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux.*
Alors si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} u)v\,dx = -\int_\Omega (\partial_{x_i} v)u\,dx + \int_{\partial\Omega} uvn_i\,d\sigma, \qquad i = 1, ..., n. \tag{1.16}$$

où n_i est la i ème composante de la normale sortante au domaine Ω.

Théorème 1.5.1.3 (Formule de Green dans H^2)**.** *Soient Ω un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe $C^1(\Omega)$ par morceaux, $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$.*
Alors :

$$\int_\Omega (\Delta u)v\,dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} (\partial_n u)v\,d\sigma. \tag{1.17}$$

Où $d\sigma$ est la mesure surfacique .

1.6 Gradient tangentiel et laplacien tangentiel

Définition 1.6.0.1. *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et de frontière Γ .*
Si $f \in C^1(\Gamma)$ nous définissons son gradient tangentiel (noté ∇_τ ou ∇_Γ) par

$$\nabla_\tau f = \nabla \tilde{f} - \partial_\nu \tilde{f}\nu. \tag{1.18}$$

Où $\tilde{f}$ est un prolongement de f dans un voisinage de Γ.
Si $P \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ et si $\tilde{P}$ est un prolongement de P dans un voisinage de Γ alors la divergence tangentiel de P est donnée par :

$$div_\tau(P) = div(\tilde{P}) - \tilde{P}'\nu.\nu. \tag{1.19}$$

avec $\tilde{P}' = (\partial_j \tilde{P}_i)$.
Lorsque Ω est de classe C^2 nous pouvons définir l'opérateur de Laplace-Beltrami , noté $\Delta\tau$, sur Γ par :

$$\Delta_\tau u = div_\tau(\nabla_\tau u), \quad u \in C^2(\Gamma). \tag{1.20}$$

Pour plus de précision (voir [4]).

1.7 La topologie faible et faible *

1.7.1 La topologie faible $\sigma(E, E')$

Soient X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $\varphi_i : X \to Y_i$ une famille d'applications.

Définition 1.7.1.1. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est la topologie moins fine sur E rendant continue toutes les application $(\varphi_f)_{f\in E'}$.*

Proposition 1.7.1.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes :*

(i) *$x_n \rightharpoonup x$ ssi $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$.*

(ii) *$x_n \to x \;\Rightarrow\; x_n \rightharpoonup x$.*

(iii) *Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E et $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.*

(iv) *$\varphi_n \to \varphi$ dans E' et $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.*

Démonstration (voir [1] p 36).

1.7.2 La topologie faible * $\sigma(E', E)$

Définition 1.7.2.1 (Topologie faible *)**.** *C'est la topologie moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.*

Théorème 1.7.2.1. *Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu de E dans F.*

*Alors T est continu sur E muni de la topologie faible et sur F muni de la topologie faible *.*

La réciproque est également vraie.

Proposition 1.7.2.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. On a les propriétés suivantes :*

(i) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible * ssi $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$.*

(ii) *$f_n \to f \;\Rightarrow\; f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible * .*

(iii) *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible * alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' et $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$.*

(iv) *$x_n \to x$ et $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible $* \Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$.*

Lemme 1.7.2.1. *Soit E un espace de Banach séparable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E'.*

Alors il existe une sous -suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (f_n) et $f \in E'$ telle que

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \qquad \text{dans } E'.$$

1.8 Opérateurs maximaux monotones et opérateurs dissipatifs et théorème De Hille-Yosida

1.8.1 Opérateurs maximaux monotones et opérateurs dissipatifs

Définition 1.8.1.1. *Soient H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné .*

On dit que :

A est monotone si :

$$(Av, v) \geq 0 \qquad \forall v \in D(A). \tag{1.21}$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = Im(I + A) = H$ i.e :

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(A)\,, \text{tel que} \quad u + Au = f. \tag{1.22}$$

Définition 1.8.1.2. *Soit H un espace de Hilbert réel.*
Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire.
On dit que A est dissipatif ssi

$$< Az, z >\leq 0 \qquad \forall z \in D(A). \tag{1.23}$$

Dans le cas où H est de Hilbert complexe alors :

$$A \text{ est dissipatif} \quad \Leftrightarrow \quad Re < Az, z >\leq 0 \qquad \forall z \in D(A). \tag{1.24}$$

Si A est maximal et dissipatif on dit alors que A est m-dissipatif.

Proposition 1.8.1.1. *Soit A un opérateur maximal monotone .*
Alors :

1. *$D(A)$ est dense dans H.*
2. *A est fermé .*
3. *pour tout $\lambda > 0$, $(I+\lambda A)$est bijectif de $D(A)$ sur H ,$(I+\lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} \leq 1$.*

Démonstration(Voir [1] p 101).

1.8.2 Théorème De Hille-Yosida

Théorème 1.8.2.1. *Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H.*
Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([o, +\infty[; H) \bigcap C([o, +\infty[; D(A)). \tag{1.25}$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, & sur \qquad [o, +\infty[. \\ u(0) = u_0 & (donnée\ initiale). \end{cases} \tag{1.26}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \qquad et \qquad |\frac{du}{dt}(t)| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0. \tag{1.27}$$

Démonstration (voir [1] p 105).

Théorème 1.8.2.2. *Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur non borné .*
On a l'équivalence :

1. *A est m-dissipatif à domaine dense dans X.*
2. *A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction.*

1.9 Théorème de Carathéodory

Soient Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction .
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \xi. \end{cases} .$$

Définition 1.9.0.1. *f est dite de Carathéodory sur Ω si :*

1. *Pour presque tout $t \in I$, la fonction $x \to f(t,x)$ est continue de Ω dans $R = \mathbb{R}^n$.*
2. *$\forall x \in \Omega$, la fonction $t \to f(t,x)$ est mesurable au sens de Lebesgue sur I.*
3. *$\forall (t_0, \xi) \in I \times \Omega$ il existe $r > 0$, $\delta > 0$ et une fonction $h : [t_0, t_0+\delta] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Lebesgue telle que : $B(\xi, r) \subset \Omega$, $[t_0, t_0 + \delta] \in I$ et*

$$\|f(t,x)\| \leq h(t),$$

$\forall x \in B(\xi, r)$ et pour presque tout $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

Définition 1.9.0.2. *On dit que la fonction $x : [t_0, t_0 + \delta] \to \Omega$ est une solution de Carathéodory pour le problème (P), si x est absolument continue sur $[t_0, t_0 + \delta]$, $x(t_0) = \xi$ et $x'(t) = f(t, x(t))$, $\forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$.*

Théorème 1.9.0.1 (De Caratheodory)**.** *Si f vérifie les conditions de Carathéodory alors, $\forall (t_0, \xi) \in I \times \Omega$, il existe $\delta > 0$ avec $[t_0, t_0 + \delta] \in I$ tel que le problème (P) admet au moins une solution de Carathéodory définie sur $[t_0, t_0 + \delta]$.*

Démonstration (Voir [7]).

Corollaire 1.9.0.1. *Soit $\Omega = [0, T[\times B$ avec $T > 0$ et*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| \leq b\} = B(0, b) \quad \textit{(la boule fermé de } \mathbb{R}^n\textit{)},$$

$b > 0$ et soit

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

vérifie les conditions de Carathéodory sur Ω.

Supposons que $x(t)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$ avec $|x_0| \leq b$ et quelque soit l'intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel $x(t)$ est définie, on a

$$|x(t)| \leq M, \qquad \forall t \in I.$$

M étant une constante indépendante de l'intervalle I et telle que $M < b$, alors $x(t)$ possède un prolongement à tout l'intervalle I.

Démonstration (Voir [7]).

Chapitre 2

L'existence et l'unicité de la solution par la méthode de Faedo-Galerkin

La méthode de Faedo-Galerkin consiste à réaliser les quatre étapes suivantes :
— Recherche de solution "approchée".
— On établit sur ces solutions approchées des estimations a priori.
— On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité (dans les termes non linéaires).
— Faire une vérification des conditions aux limites et initiales.

2.1 Position du problème

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et borné et $\partial\Omega = \Gamma$ sa frontière , elle se décompose en deux parties Γ_0 et Γ_1 non vides, fermées et disjointes
avec $mes(\Omega) < +\infty$.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[. \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[. \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[. \\ u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $\partial_\nu u$ est la dérivée normale de u et $\Delta_{\Gamma_1} u$ est laplacien tangentiel de u .

Avec les hypothèses suivantes :

(**H.1**) La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :

1. $g \in C^0(\mathbb{R})$ est monotone croissante.
2. $g(s)s > 0$ avec $s \neq 0$.
3. il existe h et k deux constantes positives telles que :

$$h.s \leq |g(s)| \leq k.s,\ |s| > 1.$$

4. $g \in C^1(\mathbb{R})$.
5. $\exists M > 0$ vérifie :

$$|g'(s)| \leq M(1 + |s|^{p-1}),\ |s| > 1.$$

avec

$$\begin{cases} 1 < p \leq \frac{n}{n-4} & \text{si} \quad n > 4. \\ p > 1 & \text{si} \quad n \leq 4. \end{cases}$$

(**H.2**) $a \in L^{+\infty}(\Omega)$ est une fonction non négative telle que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \qquad \text{p.p sur un sous-ensembles de } \Omega.$$

Soit $E(t)$ l'énergie associée au problème (2.1) qui est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega [|u_t|^2 + |\nabla u|^2]\, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\, d\Gamma \right\}. \tag{2.2}$$

On considère maintenant les espaces :

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \ : \ u/_{\Gamma_0} = 0\}.$$

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \quad \text{tel que : } v/_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}.$$

Munis respectivement des produits scalaires :

$$(u,v)_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx \quad et \quad (u,v)_{\mathcal{V}} = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u.\nabla_T v\, d\Gamma.$$

Et les normes :

$$\|v\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx.$$

Et

$$\|v\|^2_{\mathcal{V}} = \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\, d\Gamma = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}.$$

$H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces de Hilbert.

Notation 2.1.0.1. *supposons que :*

$$u' = u_t, \quad Q_T = \Omega\times]0,T[,$$

$$et \quad \|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |v(x)|^2\, dx \quad et \quad \|v\|^2_\Gamma = \int_\Gamma |v(x)|^2\, d\Gamma$$

$$et \quad (u,v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \quad et \quad (u,v)_\Gamma = \int_\Gamma u(x)v(x)\, d\Gamma.$$

Les normes $\|u\|_{H^1_0}$ et $\|\nabla u\|_{L^2}$ sont équivalentes.

Théorème 2.1.0.1. *Supposons que les hypothèses (**H.1**) et (**H.2**) sont vérifiées.*

1. *$\{u^0, u^1\} \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et satisfaisant la condition*

$$\partial_\nu u^0 - \Delta_{\Gamma_1} u^0 = 0 \quad p.p\, sur\, \Gamma_1.$$

Alors il existe une solution régulière unique du problème (2.1) telle que :

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

2. *$\{u^0, u^1\} \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$,alors il existe une solution faible unique du problème (2.1) telle que :*

$$u \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

2.2 La régularité de la solution.

2.2.1 L'existence.

Solution approchée.

On multiplie l'équation (2.1) par $v \in C^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω et on applique la formule de green (1.17) et comme $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $u = 0$ sur $\Gamma_0 \times]0, +\infty, [$ on obtient : $\forall t \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u''(t,x)v(t,x)\,dx \quad &+ \int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(t,x)\,dx \\ &- \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x)v(t,x)\,d\Gamma + \int_\Omega a(x)g(u'(t,x))v(t,x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Comme on utilise la méthode de Galerkin , on considère l'espace

$$W = \{w, w \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}; \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 \quad \text{sur : } \Gamma_1\}.$$

c'est un espace de Hilbert séparable, car c'est un sous-espace d'un espace séparable et dense dans $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ et aussi dense dans $\mathcal{V}$.

D'après le théorème (1.3.4.2) et le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt il existe une suite orthonormée $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ c'est une base hilbertienne de W ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_i \in W, \quad \forall i; \\ \forall m, \quad w_1, w_2, ..., w_m : \quad \text{sont linéairements indépendants.} \\ V_m = vect\{w_1, w_2, ..., w_m\} \quad \text{est dense dans } W. \end{cases}$$

En particulier

$$\forall u_0 \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \Rightarrow \exists (u_m^0)_{m\in\mathbb{N}^*},\ u_m^0 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{km} w_k \to u^0 \text{ l'orsque } m \to +\infty.$$

$$\forall u_1 \in \mathcal{V} \Rightarrow \exists (u_m^1)_{m\in\mathbb{N}^*},\ u_m^1 = \sum_{k=1}^{m} \beta_{km} w_k \to u^1 \text{ l'orsque } m \to +\infty.$$

Et on considère le problème approché (**P.A**) suivant :

$$(\mathbf{P.A}) \begin{cases} u_m(t) \in V_m \quad \Leftrightarrow \quad u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) w_i. \\ (u_m''(t), v) + (\nabla u_m(t), \nabla v) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_m}{\partial \nu}(t) v(t,x)\,d\Gamma + \int_\Omega a(x) g(u_m'(t)) v(t,x)\,dx = 0. \\ u_m(0) = u_m^0 \to u^0 \qquad \text{dans } H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}. \\ u_m'(0) = u_m^1 \to u^1 \qquad \text{dans } \mathcal{V}. \end{cases}$$

La convergence des deux suites $u_m(0)$ et $u_m'(0)$ car W est dense dans $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ et aussi dense dans $\mathcal{V}$.

On a $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de la base donc :$(w_i, w_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad i \neq j. \\ 1 & \text{si} \qquad i = j. \end{cases}$

Si on prend $v = w_j,\ j = 1, 2, ..., m$ dans (**P.A**) on a alors

$$(u_m''(t), w_j) + (\nabla u_m(t), \nabla w_j) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_m}{\partial \nu}(t) w_j\,d\Gamma + \int_\Omega a(x) g(u_m'(t)) w_j\,dx = 0.$$

pour tout :$j = 1, 2, ..., m$.
Donc on a

$$(u_m''(t), w_j) = (\sum_{i=1}^{m} h_{im}''(t) w_i, w_j) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}''(t)(w_i, w_j) = h_{jm}''(t), \quad j = 1, 2, ..., m$$

donc on a le système suivant :

$$\underbrace{\left[h_{jm}''(t)\right]_{1\leq j\leq m}}_{Z''(t)} + \underbrace{\left[(\nabla w_i, \nabla w_j)\right]_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq m}}}_{A} \underbrace{\left[h_{jm}(t)\right]_{1\leq j\leq m}}_{Z(t)} - G(Z(t)) + H(Z'(t)) = 0.$$

avec : $Z(0) = Z^0 = \left[h_{jm}(0)\right]_{1\leq j\leq m}$ et $Z'(0) = Z^1 = \left[h_{jm}'(0)\right]_{1\leq j\leq m}$.
On pose : $B = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix}$ donc :
$H(Z'(t)) = \left[\int_\Omega a(x) g(B.Z'(t)) w_j \, dx\right]_{1\leq j\leq m}$ et $G(Z(t)) = \left[\int_{\Gamma_1} \partial_\nu (B.Z(t)) w_j \, d\Gamma\right]_{1\leq j\leq m}$.
Alors on obtient le système d'équation ordinaire suivant :

$$\begin{cases} Z''(t) + AZ(t) - G(Z(t)) + H(Z'(t)) = 0 \\ Z(0) = Z^0 \,; \quad Z'(0) = Z^1. \end{cases} \tag{2.3}$$

On fait un changement de variables suivant :
$Y_1(t) = Z(t), \quad Y_2(t) = Z'(t)$, alors : $Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}$ et $Y'(t) = \begin{bmatrix} Z'(t) \\ Z''(t) \end{bmatrix}$
et $Y^0 = \begin{bmatrix} Z^0 \\ Z^1 \end{bmatrix}$, donc le système (2.3) devait :

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ G(Y_1(t)) - H(Y_2(t)) \end{bmatrix}. \\ Y(0) = Y^0. \end{cases} \tag{2.4}$$

On utilise le théorème de Caratheodory (1.9.0.1) pour montrer que le problème (2.4) admet une solution locale.
Soit

$$\begin{aligned} h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} &\to \mathbb{R}^{2m}. \\ (t, y) &\to h(t, y) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ G(y_1) - H(y_2) \end{bmatrix}}_{M(y)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} y}_{N(y)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec $y = (y_1; y_2) = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m; \xi_{m+1}, ..., \xi_{2m}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.
Vérification des conditions (1.9.0.1) de Caratheodory :

1. La fonction h est mesurable par rapport à $t \in [0, T]$ pour $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixé car elle ne dépend pas de t donc elle est constante ceci implique qu'elle est continue , alors elle est mesurable.
2. $\forall t \in [0, T]$ la fonction h en fonction de y est continue car elle est somme de deux fonctions continues .
   En effet :
   La fonction $N : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ est linéaire car $N(\lambda y) = \lambda N(y)$ et

$N(\lambda y + \gamma z) = \lambda N(y) + \gamma N(z)$ comme on a dans un espace de dimension fini(" $2m$") ceci équivalent qu'elle est continue donc :

$$N \qquad \text{est continue.} \tag{2.6}$$

Donc on pose $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\xi_{1k}, \xi_{2k}, ..., \xi_{mk}; \xi_{(m+1)k}, ..., \xi_{(2m)k})$ une suite de $\mathbb{R}^{2m}$ telle que :

$$y_k = (y_{1k}; y_{2k}) \to y = (y_1; y_2) \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}^{2m}.$$

et on montre que

$$M(y_k) \to M(y) \quad \text{i.e : } H(y_{2k}) \to H(y_2) \quad et \quad G(y_{1k}) \to G(y_1) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^m.$$

On a $B.y_{2k} \to B.y_2$ donc :pour presque tout $x \in \Omega$ on a :

$$f_n(x) = a(x)g(B.y_{2k})w_j \to f(x) = a(x)g(B.y_2)w_j \qquad \text{dans } \mathbb{R},$$

car g est continue et a bornée.
On a $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente donc elle est bornée alors

$$\exists M > 0 \qquad \text{telle que : } \|y_k\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M.$$

donc $\|y_{2k}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|y_k\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M$.
Si $x \in \Omega$ telle que $|B(x).y_{2k}| \leq 1$ d'après la continuité de g :

$$\exists c > 0 \qquad \text{telle que} \quad |g(B(x).y_{2k})| \leq c.$$

Si $|B(x).y_{2k}| > 1$ de l'hypothèse (**H.1**) on a :

$$\begin{aligned} g(B(x).y_{2k})| \leq |B(x).y_{2k}| &= K|\sum_{j=1}^{m} w_j(x).\xi_{(j+m)k}| \leq K\sum_{j=1}^{m} |w_j(x)||\xi_{(j+m)k}|. \\ &\leq MK\sum_{j=1}^{m} |w_j(x)|. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |a(x)g(B(x).y_{2k})w_j(x)| &\leq |a(x)g(B(x).y_{2k})w_j(x)||a(x)||g(B(x).y_{2k})||w_j(x)| \\ &\leq \|a\|_{L^\infty}\left(c + MK\sum_{j=1}^{m} |w_j(x)|\right)|w_j(x)|. \end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée on obtient :

$$\int_\Omega a(x)g(B.y_{2k})w_j\, dx \to \int_\Omega a(x)g(B.y_2)w_j\, dx.$$

C'est à dire :

$$H(y_{2k}) \to H(y_2) \quad \text{dans : } \mathbb{R}^m. \tag{2.7}$$

De plus $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset W \subset H^2(\Omega)$ tel espace est complet donc :

$$By_{1k} = \sum_{j=1}^{m} \xi_{jk}w_j \in H^2(\Omega) \to By_1 = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j \quad \text{dans} \quad H^2(\Omega).$$

Grâce à la continuité de l'application trace γ_1 alors :

$$\gamma_1(By_{1k}) \to \gamma_1(By_1) \qquad \text{dans} \quad H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

$(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^2(\Omega)$ donc $(\gamma_0 w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et on a :

$$\begin{array}{ll} & H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma). \\ \text{et comme} & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma) \qquad\qquad \text{alors :} \\ & \gamma_1(By_{1k})\gamma_0 w_j \to \gamma_1(By_1)\gamma_0 w_j \quad \text{dans} \quad L^1(\Gamma), \quad \forall j = 1, 2, ..., m. \end{array}$$

donc

$$\int_{\Gamma_1} \gamma_1(By_{1k})\gamma_0 w_j \, d\Gamma \to \int_{\Gamma_1} \gamma_1(By_1)\gamma_0 w_j \, d\Gamma \qquad \forall j = 1, 2, ..., m.$$

C'est à dire :

$$G(y_{1k}) \to G(y_1) \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^m. \tag{2.8}$$

Donc d'après (2.6),(2.7) et(2.8) on a pour tout $t \in [0, T]$ l'application h est continue.

3. Soit $K \subset [0; T] \times \mathbb{R}^{2m}$ un ensemble compact, il existe une fonction réelle $m_K(t)$, intégrable telle que

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t), \quad \forall (t, y) \in K.$$

En effet

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|G(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|H(y_2)\|_{\mathbb{R}^m} + \|N(y)\|_{\mathbb{R}^{2m}}.$$

Comme G,H sont continues sur $\mathbb{R}^m$ et N continue sur $\mathbb{R}^{2m}$ donc elles sont continues sur tout compact $K^* = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{2m}$ et donc grâce au théorème de Hahn-Banach, $\exists M_K > 0$ tel que :

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|G(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|H(y_2)\|_{\mathbb{R}^m} + \|N(y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_k.$$

Pour tout $(t, y) \in [0, T] \times K^*$ on prend $m_K(t) = M_k$.

De 1,2 et 3 on a l'existence de la solution locale dans $[0, t_m[$ avec $0 < t_m < T$,donc la fonction $Y(t)$ est absolument continue et dérivable presque partout sur $[0; t_m[$, alors $Z(t)$ et $Z'(t)$ sont absolument continues sur $[0; t_m[$ et $Z''(t)$ existe presque partout sur $[0; t_m[$.

Maintenant pour montrer que :
1-Premièrement que pour tout $m \in \mathbb{N}, \quad t_m = T$.
2-Deuxièmement, que ces approximations convergent vers la solution du problème (2.1).
Pour ce la, nous avons besoin de deux estimations à priori et passage à la limite, La première estimation à priori pour démonter le premier point, et la deuxième estimation à priori et le passage à la limite pour démontrer le second point.

Estimation à priori

Première estimation :
La première estimation à priori nous permettra d'étendre la solution obtenue à tout l'intervalle $[0; T] = \mathbb{R}_+$,i.e : $T = +\infty$.

Le théorème de Carathéodory nous donne : $u_m(t)$ et $u'_m(t)$ sont absolument continues et par conséquent $u''_m(t)$ existent presque partout.
On multiple le problème (**P.A**) par $u'_m(t)$ on obtient :

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) - (\partial_\nu u_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} + (a(x)g(u'_m(t), u'_m(t)) = 0. \tag{2.9}$$

Et comme $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base de W lequel dense dans $L^2(\Omega)$ donc c'est une base de $L^2(\Omega)$, d'après (**P.A**) on a :

$$\begin{aligned}(u''_m(t), w_i) &= (\sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t)w_j, w_i) = \sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t)(w_j, w_i) = h''_{im}(t)\\ &= -(\nabla u_m(t), \nabla w_j) + (\partial_\nu u_m(t), w_j)_{\Gamma_1} - (a(x)g(u'_m(t), w_j).\end{aligned}$$

D'où $h''_{im}(t) \in L^2(0, t_m)$ alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{t_m} \|u''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt &= \int_0^{t_m} \left\| \sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t)w_j \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt.\\ &\leq \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^{m} \|h''_{jm}(t)w_j\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt.\\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \|w_j\|^2_{L^2(\Omega)} \int_0^{t_m} |h''_{jm}(t)|^2\, dt < +\infty.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$u''_m \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega)). \tag{2.10}$$

On conclure

$$\int_\Omega u''_m(t, x)u'_m(t, x)\, dx \in L^1(0, t_m) \subset D'(0, t_m). \tag{2.11}$$

Car $u'_m(t)$ est absolument continue sur $[0, t_m[$.

Soit $\theta \in D(0, t_m)$,on utilise (2.10) et théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned}< (u''_m(t), u'_m(t)), \theta >_{D',D} &= < \int_\Omega u''_m(t, x)u'_m(t, x)\, dx, \theta >_{D',D} .\\ &= \int_0^{t_m} \int_\Omega u''_m(t, x)u'_m(t, x)\theta(t)\, dx\, dt.\\ &= \int_\Omega \int_0^{t_m} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u'_m(t, x))^2\theta(t)\, dt\, dx.\\ \text{(par partie on a)} &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \underbrace{\left[(u'_m(t, x))^2\theta(t)\right]_{t=0}^{t=t_m}}_{=0} - \int_0^{t_m} (u'_m(t, x))^2\theta'(t)\, dt \right\} dx,\\ &\quad \text{car } \theta \in D(0, t_m).\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{t_m} \int_\Omega (u'_m(t, x))^2\, dx\ \theta'(t)\, dt.\\ &= -\frac{1}{2} < \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \theta' >.\\ &\quad \text{d'après la définition de dérivée d'une distribution on a :}\\ &= < \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \theta >_{D',D} .\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(u_m''(t), u_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \text{dans } D'(0,t_m). \tag{2.12}$$

De la même procédure on a :

$$(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \text{dans } D'(0,t_m). \tag{2.13}$$

Comme $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \in W$ donc elle vérifier :

$$\partial_\nu w_j = \Delta_{\Gamma_1} w_j, \qquad \text{sur } \Gamma_1.$$

On multiple par h_{jm} et en sommant sur j on trouve :

$$\partial_\nu u_m = \Delta_{\Gamma_1} u_m, \qquad \text{sur } \Gamma_1.$$

Donc

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(t,x) u_m'(t,x)\, d\Gamma &= -\int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u_m(t,x) u_m'(t,x)\, d\Gamma. \\ &= -\int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma_1} u_m(t,x) \nabla_{\Gamma_1} u_m'(t,x)\, d\Gamma. \\ &\quad \text{d'après les arguments de (2.13) et (2.12) on a :} \\ -\int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(t,x) u_m'(t,x)\, d\Gamma &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1} u_m(t)\|^2_{\Gamma_1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

En remplaçant, par (2.12), (2.13) et (2.14) dans (2.9), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1} u_m(t)\|^2_{\Gamma_1} + \int_\Omega a(x) g(u_m'(t,x)) u_m'(t,x)\, dx = 0. \tag{2.15}$$

D'après l'hypothèse (**H.1**) on a $\displaystyle\int_\Omega a(x) g(u_m'(t,x)) u_m'(t,x)\, dx \geq 0$ et alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1} u_m(t)\|^2_{\Gamma_1} \leq 0 \tag{2.16}$$

En utilisant le corollaire (1.9.0.1), on peut étendre la solution u_m à tout $\mathbb{R}_+$, $\forall m \in \mathbb{N}$, de plus :
De (2.16) on a $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$ ce qui donne $\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ est décroissante et alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_m'(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Alors

$$(u_m')_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \tag{2.17}$$

De la même façon on trouve que

$$(\nabla u_m)_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+; [L^2(\Omega)]^n). \tag{2.18}$$

Et

$$(\nabla_{\Gamma_1} u_m)_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+; [L^2(\Gamma_1)]^n). \tag{2.19}$$

De (2.18) et (2.19) on a

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{V}). \tag{2.20}$$

Seconde estimation à priori :
Dans le problème (**P.A**)on va dériver l'équation au sens faible mais Comme u_m et u'_m sont continue sur $[0,T]$ alors la dérivée au sens faible est la même que la dérivée au sens classique donc on remplace v par w_j on trouve :

$$(u'''_m(t),w_j)+(\nabla u'_m(t),\nabla w_j)-(\partial_\nu u'_m(t),w_j)+(a(x)g'(u'_m(t))u''_m(t),w_j)=0. \tag{2.21}$$

On multiplie (2.21) par $h'''_{jm}(t)$ et on fait la somme sur j on obtient :

$$(u'''_m(t),u''_m(t))+(\nabla u'_m(t),\nabla u''_m(t))-(\partial_\nu u'_m(t),u''_m(t))+(a(x)g'(u'_m(t))u''_m(t),u''_m(t))=0.$$

On fait la même procédure de (2.12) on trouve :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1}u'_m(t)\|^2_{\Gamma_1}+\int_\Omega a(x)g'(u'_m(t,x))|u''_m(t,x)|^2\,dx=0. \tag{2.22}$$

D'après l'inégalité de Young les hypothèses (**H.1**) et (**H.2**) on a $a(x)g'(u'_m(t,x))|u''_m(t,x)|^2\geq 0$ et pour p.p $t>0$ on décompose Ω en deux telle que $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1$ sachant que :

$$\Omega_0=\{x\in\Omega;\quad |u'_m(t,x)|\leq 1\} \qquad et \qquad \Omega_1=\{x\in\Omega;\quad |u'_m(t,x)|>1\}. \tag{2.23}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |a(x)g'(u'_m(t,x))|u''_m(t,x)|^2|\,dx &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega_0}|g'(u'_m(t,x))||u''_m(t,x)|^2\,dx\\
&\leq (M+M_1)\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|u''_m(t,x)\|^2_\Omega\\
&\quad +\|a\|_{L^\infty(\Omega)}M\|u'_m(t,x)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|u''_m(t,x)\|^2_{L^{2p}(\Omega)}\\
&\quad \text{comme}\quad H^2(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)\quad et\quad H^2(\Omega)\hookrightarrow L^{2p}(\Omega)\text{on a :}\\
&\leq (M+M_1)\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|u''_m(t,x)\|^2_\Omega\\
&+ \|a\|_{L^\infty(\Omega)}MM_2M_3\|u'_m(t,x)\|^{p-1}_{H^2(\Omega)}\|u''_m(t,x)\|^2_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_\Omega |a(x)g'(u'_m(t,x))|u''_m(t,x)|^2|\,dx\leq c<\infty$ donc on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1}u'_m(t)\|^2_{\Gamma_1}\leq 0.$$

Donc $\|u''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$,$\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ et $\|\nabla_{\Gamma_1}u'_m(t)\|^2_{\Gamma_1}$ sont décroissantes et alors $\forall t>0$,

$$\|u''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_{\Gamma_1}u'_m(t)\|^2_{\Gamma_1}\leq \|u''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_{\Gamma_1}u'_m(0)\|^2_{\Gamma_1}. \tag{2.24}$$

Maintenant on va estimer $\|u''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$ et pour ce la dans (2.1) on pose $t=0$ et on multiple par $u''_m(0)$ on obtient :

$$\|u''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}-(\Delta u_m(0),u''_m(0))+\int_\Omega a(x)g(u'_m(0,x))u''_m(0,x)\,dx=0.$$

Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}\|u_m''(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|\Delta u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega a(x)g(u_m'(0,x))u_m''(0,x)\,dx \\ &\leq \|u_m(0)\|_{H^2(\Omega)}\|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |g(u_m'(0,x))||u_m''(0,x)|\,dx.\end{aligned}$$

Comme $u_m'(0) \to u^1$ dans $\mathcal{V}$ donc $u_m'(0)$ bornée dans $\mathcal{V}$ et comme $u_m(0) \to u^0$ dans $H^2(\Omega)$ donc $u_m(0)$ bornée dans $H^2(\Omega)$ donc d'après l'hypothèse (**H.1**)

$$|g(u_m'(0,x))| \leq K|u_m'(0,x)|, \quad \forall x \in \Omega_1,$$

Alors :

$$\begin{aligned}\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega_1} |g(u_m'(0,x))||u_m''(0,x)|\,dx &\leq K\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u_m'(0,x)||u_m''(0,x)|\,dx \\ &\leq K\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_m'(0,x)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m''(0,x)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq K_1\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_m'(0,x)\|_{\mathcal{V}}\|u_m''(0,x)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Et comme g est continue alors $\exists c_2 > 0$ telle que :$|g(u_m'(0,x))| \leq c_2 \quad \forall x \in \Omega_0$ donc

$$\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega_0} |g(u_m'(0,x))||u_m''(0,x)|\,dx \leq c_2\|a\|_{L^\infty(\Omega)}[\int_\Omega |u_m''(0,x)|^2\,dx]^{\frac{1}{2}}.$$

Alors

$$\|u_m''(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq [c + (c_1+c_2)\|a\|_{L^\infty(\Omega)}]\|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

On divise sur$\|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)}$ on a

$$\|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq c + (c_1+c_2)\|a\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty. \tag{2.25}$$

D'où $(u_m''(0))_{m\in\mathbb{N}}$ bornée dans $L^2(\Omega)$.

On suivre les mêmes étapes on trouve $(\nabla u_m'(0))_{m\in\mathbb{N}}$ bornée dans $(L^2(\Omega))^n$ et $(\nabla_{\Gamma_1} u_m'(0))_{m\in\mathbb{N}}$ bornée dans $(L^2(\Gamma_1))^n$ alors il existe $L > 0$,

$$\|u_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\Gamma_1} u_m'(t)\|^2_{\Gamma_1} \leq \|u_m''(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_m'(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\Gamma_1} u_m'(0)\|^2_{\Gamma_1} < L.$$

On utilise les mêmes arguments que la première estimation on obtient

$$(u_m'')_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \tag{2.26}$$

De la même façon on trouve que

$$(\nabla u_m')_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+; [L^2(\Omega)]^n). \tag{2.27}$$

Et

$$(\nabla_{\Gamma_1} u_m')_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+; [L^2(\Gamma_1)]^n). \tag{2.28}$$

De (2.27) et (2.28) on a

$$(u_m')_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}). \tag{2.29}$$

Passage à la limite

On multiplie le problème approché (**P.A**) par $\theta \in D(0,T)$, on pose $v = w_j$ et on intègre sur $[0;T]$, il en résulte :

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_k''(t), w_j)\theta(t)\, dt \;&+ \int_0^T (\nabla u_k(t), w_j)\theta(t)\, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial u_k(t,x) w_j \, d\Gamma\, \theta(t)\, dt \\ &+ \int_0^T (a(x) g(u_k'(t)) w_j)\theta(t)\, dt = 0.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Initialement, on identifie $L^2(\Omega)$ à son dual, on aura

$$L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \equiv [L^1(0,T;\mathcal{V}']' \quad et \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \equiv [L^1(0,T;L^2(\Omega)]'.$$

Et on a les injections suivantes :

$$D(0;T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv [L^2(0,T;L^2(\Omega))]' \hookrightarrow D'(0;T;L^2(\Omega)).$$

De plus, $L^1(0,T;\mathcal{V}')$ et $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ sont séparables.
On applique le lemme (1.7.2.1) sur (2.20) et (2.29) on obtient

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad dans \qquad L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \quad et \quad u_k' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \qquad dans \qquad L^\infty(0,T;\mathcal{V}). \tag{2.31}$$

De (2.31) et on a $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+;\mathcal{V})$ et de (2.26) on a

$$(u_m'')_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{est bornée et elle appartient à} \qquad L^1(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)).$$

Donc on applique le lemme (1.7.2.1) on obtient

$$u_k'' \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \qquad dans \qquad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.32}$$

On a $\mathcal{V} \hookrightarrow H^1(\Omega) \overset{compact}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$.
De (2.31) et en vertu du théorème de Aubin- Lions, on peut extraire une sous-suite de (u_k') qu'on continu toujours à noter (u_k'), à fin que

$$u_k' \to u' \quad dans\ L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T).$$

Et alors

$$u_k' \to u' \qquad p.p\ sur\ Q_T.$$

De la continuité de la fonction g et (**H.2**) , il s'ensuit que

$$a(x)g(u_k') \to a(x)g(u') \qquad p.p\ sur\ Q_T. \tag{2.33}$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$ on pose $\Omega = \Omega_{k1} \cup \Omega_{k_2}$ sachant que :

$$\Omega_{k1} = \{x \in \Omega; \quad |u_k'(t,x)| \le 1\} \qquad et \qquad \Omega_{k2} = \{x \in \Omega; \quad |u_k'(t,x)| > 1\}.$$

$$\begin{aligned}\|a(x)g(u_k')\|^2_{L^2(Q_t)} &\le \int_0^T \left[\|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_{k1}} |g(u_k'(t,x))|^2\, dx\right] dt \\ &\quad + \left[\|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_{k2}} |g(u_k'(t,x))|^2\, dx\right] dt \\ &\le \int_0^T \left[\|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)} C^2 \int_{\Omega_{k1}} |u_k'(t,x)|^2\, dx + \|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)} M^2\, mes(\Omega)\right] dt \\ &\le \|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)} C^2 \int_0^T \|u_k'(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)} M^2\, mes(\Omega)\, T \\ &\le \|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)} C^2 M_1 + \|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)} M^2\, mes(\Omega)\, T = C_1.\end{aligned}$$

Donc :

$$\|a(x)g(u_k')\|^2_{L^2(Q_t)} \leq C_1. \tag{2.34}$$

De (2.33), (2.34) et du lemme de Lions on a

$$a(x)g(u_k') \rightharpoonup a(x)g(u') \qquad sur \quad L^2(Q_T).$$

Comme $w_j \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$, pour $\theta \in D(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T)$ alors

$$\int_0^T (a(x)g(u_k'(t))w_j)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (a(x)g(u'(t))w_j)\theta(t)\ dt. \tag{2.35}$$

Grâce à

$$u_k'' \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \qquad dans \qquad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Alors

$$< u_k'', \varphi > \to < u'', \varphi >, \qquad \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Ce qui donne

$$\int_0^T (u_k''(t), \varphi(t))\ dt \to \int_0^T (u''(t), \varphi(t))\ dt.$$

Comme $w_j\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ pour $\varphi = w_j\theta$ on a

$$\int_0^T (u_k''(t), w_j)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)\ dt. \tag{2.36}$$

De (2.31) on a

$$\nabla u_k \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \qquad dans \qquad L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n).$$

Alors

$$< \nabla u_k, \varphi > \to < \nabla u, \varphi >, \qquad \forall \varphi \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n).$$

Comme $\nabla w_j\theta \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$ pour $\varphi = \nabla w_j\theta$ on a

$$\int_0^T (\nabla u_k(t), w_j)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (\nabla u(t), w_j)\theta(t)\ dt. \tag{2.37}$$

Comme $\partial u_k = \Delta_{\Gamma_1} u_k$ sur p.p Γ_1 il s'ensuit que

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial u_k(t,x) w_j\ d\Gamma\ \theta(t)\ dt &= -\int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u_k(t,x) w_j\ d\Gamma\ \theta(t)\ dt. \\ &= -\int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma_1} u_k(t,x).\nabla_{\Gamma_1} w_j\ d\Gamma\ \theta(t)\ dt. \end{aligned} \tag{2.38}$$

De (2.31) on a

$$\nabla_{\Gamma_1} u_k \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla_{\Gamma_1} u \qquad dans \qquad L^\infty(0,T;[L^2(\Gamma_1)]^n).$$

En particulier

$$\int_0^T (\nabla_{\Gamma_1} u_k(t), \nabla_{\Gamma_1} w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt \to \int_0^T (\nabla_{\Gamma_1} u(t), \nabla_{\Gamma_1} w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt \quad \forall j = 1,2,...,m. \tag{2.39}$$

Tenant en compte les convergences (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) et (2.39) on peut passer à la limite dans l'équation (2.30) quand $k \to +\infty$ et on obtient

$$\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)\ dt \ + \int_0^T (\nabla u(t), w_j)\theta(t)\ dt - \int_0^T (\nabla_{\Gamma_1} u(t), \nabla_{\Gamma_1} w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt + \int_0^T (a(x)g(u'(t))w_j)\theta(t)\ dt = 0.$$

Pour tout les $w_j \in W = \{w \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \quad | \ \partial w = \Delta_{\Gamma_1} w \quad dans\ \Gamma_1\}$, on a $\forall \theta \in D(0,T)$ et $\forall v \in W$

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)\ dt \ + \int_0^T (\nabla u(t), v)\theta(t)\ dt - \int_0^T (\nabla_{\Gamma_1} u(t), \nabla_{\Gamma_1} v)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt + \int_0^T (a(x)g(u'(t))v)\theta(t)\ dt = 0.$$

En particulier, pour $v = \varphi \in D(\Omega)$ on a

$$< u'', \varphi\theta >_{D'\times D} + < -\Delta u, \varphi\theta >_{D'(Q_t)\times D(Q_t)} + < a(x)g(u'), \varphi\theta >= 0.$$

Donc

$$< u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \varphi\theta >_{D'\times D}= 0, \quad \forall (\theta, \varphi) \in D(0,T) \times D(\Omega).$$

Et comme l'espace $\{\varphi\theta, \quad \varphi \in D(0,T),\ \theta \in D(\Omega)\}$ est dense dans $D(Q_T)$, alors

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0, \qquad dans\ D'(Q_T). \tag{2.40}$$

Maintenant, comme u'', $a(x)g(u') \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ on a

$$\Delta u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Alors

$$\Delta u(t) \in L^2(\Omega), \qquad p.p\ t \in]0,T[.$$

Donc

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0, \qquad dans\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

De plus $p.p\ t \in]0,T[$ on a

$$\Delta u(t) = u''(t) + a(x)g(u'(t)), \qquad dans\ L^2(\Omega).$$

Il s'ensuit de la régularité des problèmes elliptiques que p.p $t \geq 0$,

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C^* \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc on a

$$\|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|u''(t) + a(x)g(u'(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u''(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|a(x)g(u'(t))\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ce qui prouve que

$$u(t) \in H^2(\Omega), \qquad p.p\ t \geq 0$$

Comme $\|u\|_{H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}} = \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{V}}$ et $u \in H^2(\Omega)$ de plus comme $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{V})$ alors $\|u\|_{\mathcal{V}} < \infty$ donc $\|u\|_{H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}} \leq c < \infty$ alors

$$\sup_{t\geq 0} ess \|u\|_{H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}} < \infty$$

Donc $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V})$.
De ce qui précède, on aura

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+;\mathcal{V}).$$

Vérifications des conditions aux limites et conditions initiales

Par passage à la limite, on a l'équation

$$\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)\ dt \ + \int_0^T (\nabla u(t), w_j)\theta(t)\ dt - \int_0^T (\nabla_{\Gamma_1} u(t), \nabla_{\Gamma_1} w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt + \int_0^T (a(x)g(u'(t))w_j)\theta(t)\ dt = 0.$$

Et on a

$$u'' = \Delta u(t,x) - a(x)g(u'(t,x)), \qquad p.p\ (x,t) \in \Omega\times]0,T[.$$

On remplace u'' dans l'équation ci-dessus, il s'ensuit que

$$\int_0^T ((\Delta u(t,x) \ -a(x)g(u'(t,x))), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u(t), w_j)\theta(t)\ dt - \int_0^T (\nabla_{\Gamma_1} u(t), \nabla_{\Gamma_1} w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt + \int_0^T (a(x)g(u'(t))w_j)\theta(t)\ dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^T (\Delta u(t,x), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u(t), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla_{\Gamma_1} u(t), \nabla_{\Gamma_1} w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt = 0.$$

On applique le théorème de Green, on a

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(t,x)\gamma_0 w_j\ \theta(t)\ d\Gamma\ dt + \int_0^T (\nabla_{\Gamma_1} u(t), \nabla_{\Gamma_1} w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt = 0.$$

Avec

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(t,x)\gamma_0 w_j\ \theta(t)\ d\Gamma\ dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u(t,x)\gamma_0 w_j\ \theta(t)\ d\Gamma\ dt = 0.$$

C'est à dire $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in D(0,T)$,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} [\partial_\nu u(t,x)\gamma_0 w_j - \Delta_{\Gamma_1} u(t,x)\gamma_0 w_j]\ \theta(t)\ d\Gamma\ dt = 0. \tag{2.41}$$

On remarque que $(\gamma_0 w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est dense dans $L^2(\Gamma_1)$.

En fait, l'application

$$\gamma_0 : H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Avec

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = \{u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma); \quad u|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

est surjective.
Maintenant, si $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ alors $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, grâce à la surjectivité de l'application

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

il existe $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ tel que $\gamma_0 v = u \quad p.p\ sur\ \Gamma$.
Comme $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ alors

$$u = 0 \quad p.p\ sur\ \Gamma_0\ , pour\ tout\ v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Puisque la base $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est dense dans $H^1_{\Gamma_0}$, grâce à la continuité et la surjectivité de l'application

$$\gamma_0 : H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Il s'ensuit que $(\gamma_0 w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est dense dans $L^2(\Gamma_1)$.
Donc de (2.41) on obtient

$$\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 \quad sur\ D'(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Donc de la régularité de la fonction u

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_0} u \quad sur\ L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Et du problème approché on a aussi

$$u_m(0) \to u^0 \qquad \text{dans } H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}, \quad et \quad u'_m(0) \to u^1 \qquad \text{dans } \mathcal{V}.$$

Dans cette section, on montre que $u^0 = u(0), \quad et : \quad u^1 = u'(0)$.
Premièrement on a $u, u' \in L^1(0,T;\mathcal{V})$ et $u'' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, alors du lemme (1.3.6.1) on a

$$u \in C^0([0,T];\mathcal{V}), \quad et : \quad u' \in C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

Par conséquent , on peut parler de $u(0); u(T); u'(0)$ *et* $u'(T)$
Soit $\theta \in C^1([0,T])$ avec $\theta(0) = 1$ et $\theta(T) = 0$ comme :

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad dans \qquad L^\infty(0,T;\mathcal{V}).$$

Et grâce à l'injection : $L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.
On aura

$$< u'_k, \varphi > \to < u', \varphi >, \qquad \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Ce qui donne

$$\int_0^T (u'_k(t), \varphi(t))\ dt \to \int_0^T (u'(t), \varphi(t))\ dt, \qquad \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Comme $w_j\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ et en particulier pour $\varphi = w_j\theta$ on a

$$\int_0^T (u'_k(t), w_j)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t)\ dt, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Par intégration par parties et de la convergence (2.31) on a

$$[\theta(t)(u_k(t), w_j)]_0^T - \int_0^T (u_k(t), w_j)\theta'(t)\ dt \to [\theta(t)(u(t), w_j)]_0^T - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\ dt.$$

Alors

$$-(u_k(0), w_j) - \int_0^T (u_k(t), w_j)\theta'(t)\ dt \to -(u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\ dt.$$

Ce qui donne $-(u_k(0), w_j) \to -(u(0), w_j), \qquad \forall j \in \mathbb{N}$.
De la densité de $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$u_k(0) \to u(0), \qquad dans\ L^2(\Omega).$$

De plus, du problème approché on a

$$u_k(0) \to u(0), \qquad dans\ H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}.$$

Ce qui implique que

$$u_k(0) \rightharpoonup u(0), \qquad dans\ L^2(\Omega).$$

De l'unicité de la limite faible, on obtient que $\qquad u(0) = u^0$.
De manière analogue, on montre que

$$u'(0) = u^1.$$

2.2.2 L'unicité

Pour démontrer que la solution u est unique on pose $w = u - v$ et on montre que $w = 0$ i.e : $u = v$.
On a w solution de problème (2.1) donc

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + a(x)g(u_t) - a(x)g(v_t) = 0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[. \\ \partial_\nu w - \Delta_{\Gamma_1} w = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[. \\ w = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[. \\ w(x,0) = u^0 - u^0 = w_t(x,0) = u^1 - u^1 = 0 & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.42}$$

En multipliant l'équation de (2.42) par $w'(t)$ et on applique le théorème de Green, on aura

$$(w''(t), w'(t)) + (\nabla w(t), \nabla w'(t)) - \int_{\Gamma_1} \partial_\nu w(t), w'(t)\, d\Gamma + (a(x)g(u'(t)) - a(x)g(v'(t)), w'(t)) = 0.$$

On fait la même procédure que (2.12),(2.13) et (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1} w(t)\|^2_{\Gamma_1} \\ &+ \int_\Omega [a(x)g(u'(t)) - a(x)g(v'(t))][u'(t,x) - v'(t,x)]\, dx = 0. \end{aligned} \tag{2.43}$$

D'après les hypothèses (**H.1**) et (**H.2**) on a

$$\int_\Omega [a(x)g(u'(t)) - a(x)g(v'(t))][u'(t,x) - v'(t,x)]\, dx \geq 0.$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1} w(t)\|^2_{\Gamma_1} \leq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad &+ \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1} w(t)\|^2_{\Gamma_1} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|w'(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\nabla w(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1} w(0)\|^2_{\Gamma_1} = 0, \quad \forall t \in]0,T]. \end{aligned}$$

Car

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0.$$

Ceci implique que :

$$w(t) = 0, \quad sur \quad \mathcal{V} \quad p.p\ t \in [0,T].$$

La démonstration est achevée.

2.3 Solution faible

D'après la densité de $H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ dans $L^2(\Omega)$ on a

$$(u_k^0,u_k^1)\to(u^0,u^1)\qquad dans\quad \mathcal{V}\times L^2(\Omega).$$

Et pour chaque $k\in\mathbb{N}$ il existe une solution régulière u_k du problème :

$$\begin{cases} u_k''-\Delta u_k+a(x)g(u_k')=0 & \text{sur}\quad \Omega\times]0,+\infty[.\\ \partial_\nu u_k-\Delta_{\Gamma_1}u_k=0 & \text{sur}\quad \Gamma_1\times]0,+\infty[.\\ u_k=0 & \text{sur}\quad \Gamma_0\times]0,+\infty[.\\ u_k(x,0)=u^0(x)\quad et\quad u_k'(x,0)=u^1(x) & x\in\Omega. \end{cases}\tag{2.44}$$

Soit $s\in\mathbb{N}$.

On considère $z_{ks}=u_k-u_s$.

En utilisant les mêmes arguments employés pour montrer l'unicité de la solution régulière, on obtient

$$\begin{aligned}\|z_{ks}'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\quad &+\|\nabla z_{ks}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_{\Gamma_1}z_{ks}(t)\|^2_{\Gamma_1}\\ &\le \|z_{ks}'(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla z_{ks}(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_{\Gamma_1}z_{ks}(0)\|^2_{\Gamma_1},\quad \forall t\in]0,T].\end{aligned}\tag{2.45}$$

Comme le membre à droite converge vers 0, car (u_k^0) converge dans $\mathcal{V}$ et (u_k^1) converge dans $L^2(\Omega)$, on aura (u_k) une suite de Cauchy dans $C^0(\mathbb{R}_+;\mathcal{V})$ et (u_k') une suite de Cauchy dans $C^0(\mathbb{R}+;L^2(\Omega))$.

D'où, il existe $u\in C^0(\mathbb{R}_+;\mathcal{V})$ et $u'\in C^0(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))$ tel que

$$u_k\to u\qquad dans\quad C^0(\mathbb{R}_+;\mathcal{V}).\tag{2.46}$$

$$u_k'\to u'\qquad dans\quad C^0(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)).\tag{2.47}$$

Supposant que $\Omega=\Omega_{k1}\cup\Omega_{k_2}$ sachant que :

$$\Omega_{k1}=\{x\in\Omega;\quad |u_k'(t,x)|\le 1\}\qquad et\qquad \Omega_{k2}=\{x\in\Omega;\quad |u_k'(t,x)|>1\}.$$

$$\begin{aligned}\|a(x)g(u_k')\|^2_{L^2(Q_t)} &= \int_0^T\int_\Omega |a(x)g(u_k'(t,x))|^2\,dx\,dt\\ &= \int_0^T\left[\int_{\Omega_{k1}}|a(x)g(u_k'(t,x))|^2\,dx+\int_{\Omega_{k2}}|a(x)g(u_k'(t,x))|^2\,dx\right]dt\\ &\le \|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)}C^2\int_0^T\|u_k'(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)}M^2\,mes(\Omega)\,T\\ &\le \|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)}C^2M_1+\|a(x)\|^2_{L^\infty(\Omega)}M^2\,mes(\Omega)\,T=M_1.\end{aligned}$$

Donc

$$(a(x)g(u_k'))\quad \text{est bornée dans}\quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).\tag{2.48}$$

Et on a également

$$u_k'\to u'\qquad dans\quad L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De la continuité de g on a

$$a(x)g(u_k')\to a(x)g(u_k')\qquad p.p\ sur\ \Omega\times[0,T].\tag{2.49}$$

De (2.48), (2.49) et du lemme de Lions, il existe une sous-suite de $(a(x)g(u'_k))_k$ qu'on continue à noter de la même façon telle que :

$$a(x)g(u'_k) \to a(x)g(u'_k) \qquad dans \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.50}$$

On considère $\theta \in D(0,T)$ et $\varphi \in D(\Omega)$

$$< u''_k - \Delta u_k + a(x)g(u'_k), \theta\varphi >_{D'(Q_T),D(Q_T)} = 0, \quad \forall\theta \in D(0,T),\ \forall\varphi \in D(\Omega). \tag{2.51}$$

On sait que

$$< u'', \theta\varphi > = - < u', \theta'\varphi >, \quad \forall\theta \in D(0,T),\ \forall\varphi \in D(\Omega).$$

De (2.48) on obtient

$$- < u'_k, \theta'\varphi > = - < u', \theta'\varphi > = < u'', \theta\varphi > .$$

Et on a

$$< u''_k, \theta\varphi >_{D'(Q_T),D(Q_T)} \to \quad < u'', \theta\varphi >_{D'(Q_T),D(Q_T)}, \quad \forall\theta \in D(0,T),\ \forall\varphi \in D(\Omega). \tag{2.52}$$

D'où

$$< -\Delta u_k, \theta\varphi >_{D'(Q_T),D(Q_T)} \to \quad < -\Delta u, \theta\varphi >_{D'(Q_T),D(Q_T)}, \quad \forall\theta \in D(0,T),\ \forall\varphi \in D(\Omega). \tag{2.53}$$

De ce qui précède dans (2.50), (2.52) et de (2.53) , après passage à la limite dans (2.51), on obtient

$$< u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \theta\varphi >_{D'(Q_T),D(Q_T)} = 0, \quad \forall\theta \in D(0,T),\ \forall\varphi \in D(\Omega).$$

Cependant $D(\Omega) \otimes D(0,T)$ est dense dans $D(\Omega\times]0,T[\,)$ donc

$$< u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \psi >_{D'(Q_T),D(Q_T)} = 0, \quad \forall\psi \in D(Q_T)).$$

Alors

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0, \quad dans \quad D'(Q_T). \tag{2.54}$$

On a $u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V})$ donc $-\Delta u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}')$ et comme

$$a(x)g(u') \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad donc \quad u'' \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}').$$

Donc

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0, \quad dans \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}').$$

Et de (2.46) et (2.47) on a

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+;\mathcal{V}) \quad et \quad u' \in C^0(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)).$$

Alors

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+;\mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)).$$

2.3.1 Vérifications

De (2.44) on a : $\partial_\nu u_k - \Delta_{\Gamma_1} u_k = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times]0, +\infty[$.
Soit

$$\Delta_{\Gamma_1} : H^1(\Gamma_1) \to H^{-1}(\Gamma_1).$$

définit par

$$< -\Delta_{\Gamma_1} f, h >_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma_1} f . \nabla_{\Gamma_1} h \, d\Gamma, \quad \forall f, h \in H^1(\Gamma_1).$$

Donc d'après (2.46) on a

$$\nabla_{\Gamma_1} u_k \to \nabla_{\Gamma_1} u \qquad dans \qquad C^0(\mathbb{R}_+; [L^2(\Gamma_1)]^n).$$

Si $h \in L^1(0, T; H^1(\Gamma_1))$ on a

$$\int_0^T < -\Delta_{\Gamma_1} u_k(t), h(t) >_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \; dt \to \int_0^T < -\Delta_{\Gamma_1} u(t), h(t) >_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \; dt.$$

Donc

$$\Delta_{\Gamma_1} u_k \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta_{\Gamma_1} u \qquad dans \; L^\infty(0, T; H^1(\Gamma_1)).$$

En outre, d'après ce qui précède on a

$$\partial_\nu u_k = \Delta_{\Gamma_1} u_k \qquad \text{dans} \quad L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)).$$

D'où

$$< \partial_\nu u_k, \varphi > \to < \Delta_{\Gamma_1} u, \varphi > \qquad dans \; L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)).$$

De plus , comme

$$u_k' \to u \qquad dans \; C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

De la proposition (1.3.6.1) et du corollaire (1.3.6.1), on a

$$u_k'' \to u'', \qquad dans \; H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.55}$$

Comme u_k satisfait l'équation :

$$\Delta u_k = u_k'' + a(x) g(u_k'), \qquad dans \; L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

De (2.49), (2.54) et (2.55), on aura

$$\Delta u_k = u_k'' + a(x) g(u_k') \to u_k'' + a(x) g(u') = \Delta u.$$

On a

$$\Delta u_k \rightharpoonup \Delta u, \qquad dans \; H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Et du fait que

$$u_k \to u, \qquad dans \; C^0([0, T]; \mathcal{V}) \hookrightarrow H^{-1}(0, T; H^1(\Omega)).$$

On obtient : $u_k \rightharpoonup u \qquad dans \; H^{-1}(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega))$ où

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \; \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

De la continuité de l'application trace

$$\gamma_1 : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Et du théorème (1.7.2.1), on a

$$\gamma_1(u_k) \rightharpoonup \gamma_1(u) \qquad dans\ H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)).$$

Donc

$$\partial_\nu u_k \rightharpoonup \partial_\nu u \qquad dans\ H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{2.56}$$

Ainsi, de (2.55), (2.56) et de l'unicité de la limite faible *, on obtient

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \qquad dans\ H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)).$$

Comme

$$\Delta_{\Gamma_1} u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)).$$

Donc

$$\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 \qquad p.p\ sur\ \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+^*.$$

De (2.44),(2.47) et (2.48) on a

$$\begin{array}{rcll} u_k(0) & \to & u^0 = u(0) & dans \quad \mathcal{V}. \\ u_k'(0) & \to & u^1 = u'(0) & dans \quad L^2(\Omega). \end{array}$$

D'où

$$u^0 = u(0) \qquad et \quad u^1 = u'(0).$$

2.3.2 L'unicité

On considère le problème (2.42) avec $w = u - v$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_{tt} - \Delta w + a(x)g(u_t) - a(x)g(v_t) = 0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[. \\ \partial_\nu w - \Delta_{\Gamma_1} w = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[. \\ w = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[. \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0 & x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{2.57}$$

On prend

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad & + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\Gamma_1} w(t)\|^2_{\Gamma_1} \\ & + \int_\Omega [a(x)g(u'(t)) - a(x)g(v'(t))][u'(t,x) - v'(t,x)]\,dx = 0. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Et on intègre sur t de 0 à s on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|w'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \quad & \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\Gamma_1} w(s)\|^2_{\Gamma_1}) \\ & \leq -\int_0^s \int_\Omega a(x)[g(u'(t)) - g(v'(t))][u'(t,x) - v'(t,x)]\,dx\,dt \leq 0. \end{aligned}$$

alors $w = 0$ d'où l'unicité.

Chapitre 3

L'existence et l'unicité de la solution par la méthode des semi- groupes

3.1 Position du problème

On considère le problème (2.1) et les hypothèses (**H.1**) et (**H.2**) et les mêmes notations et normes que (chapitre 2).

3.2 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 3.2.0.1. *Supposons que les hypothèses (***H.1***)et(***H.2***) sont vérifiées.*

1. *Pour tout condition initial* $\{u^0, u^1\} \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$*,et satisfaisant la condition*

$$\partial_\nu u^0 - \Delta_{\Gamma_1} u^0 = 0 \quad p.p\, sur\, \Gamma_1.$$

Alors il existe une solution régulière unique du problème (2.1) telle que :

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

2. *Si* $\{u^0, u^1\} \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$.
Alors il existe une solution faible unique du problème (2.1) telle que :

$$u \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

Pour démontrer ce théorème
tout d'abord on a

$$\begin{aligned} Siot\ v \in \mathcal{V}, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq (\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_1(\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\Gamma_1} v\|^2_{\Gamma_1})^{\frac{1}{2}} \leq c_2\|v\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Donc on a l'injections continues et les densités suivants :

$$\mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \hookrightarrow \mathcal{V}'.$$

On définit l'espace de L'énergie comme suite

$$\mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega),$$

est un espace de Hilbert et de Banach menu de la norme suivante

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = \|u_1\|_{\mathcal{V}} + \|u_2\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall U = (u_1; u_2) \in \mathcal{H}.$$

Et le produit scalaire suivant

$$\begin{aligned}(U,\tilde{U})_{\mathcal{H}} &= (u_1,\tilde{u_1})_{\mathcal{V}} + (u_2,\tilde{u_2})_{L^2(\Omega)}.\\ &= \int_\Omega \nabla u_1.\nabla\tilde{u_1}\,dx + \int_{\Gamma_1}\nabla_{\Gamma_1}u_1\nabla_{\Gamma_1}\tilde{u_1}\,d\Gamma + \int_\Omega u_2\tilde{u_2}\,dx.\end{aligned}$$

On définit l'opérateur linéaire $A:\mathcal{V}\to\mathcal{V}'$ tel que l'élément de dual $Af\in\mathcal{V}'$ donné par

$$< Af, v >_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = (Af)(v) = \int_\Omega \nabla f.\nabla v\,dx + \int_{\Gamma_1}\nabla_{\Gamma_1}f\nabla_{\Gamma_1}v\,d\Gamma,\quad \forall v\in\mathcal{V}.$$

A est continu .
En effet :
Soit $A_1:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ telle que $\quad A_1(f,v) = \int_\Omega \nabla f.\nabla v\,dx + \int_{\Gamma_1}\nabla_{\Gamma_1}f\nabla_{\Gamma_1}v\,d\Gamma.$

$$\begin{aligned}|A_1(f,v)| &= |\int_\Omega \nabla f.\nabla v\,dx + \int_{\Gamma_1}\nabla_{\Gamma_1}f\nabla_{\Gamma_1}v\,d\Gamma|\\ &\le |\int_\Omega \nabla f.\nabla v\,dx| + |\int_{\Gamma_1}\nabla_{\Gamma_1}f\nabla_{\Gamma_1}v\,d\Gamma|\\ &\quad \text{on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz}\\ &\le \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\Gamma_1}f\|_{\Gamma_1}\|\nabla_{\Gamma_1}v\|_{\Gamma_1}\\ &\le [\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\Gamma_1}f\|_{\Gamma_1}]\|v\|_{\mathcal{V}}\\ &\le 2^{\frac{1}{2}}[\ \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\Gamma_1}f\|^2_{\Gamma_1}\ ]^{\frac{1}{2}}\|v\|_{\mathcal{V}}\\ &\le C\|f\|_{\mathcal{V}}\|v\|_{\mathcal{V}}.\end{aligned}$$

On considère le problème :

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dt^2} + Au + B\dfrac{du}{dt} = 0.\\ \\ u(0) = u^0; \qquad \dfrac{du}{dt}(0) = u^1.\end{cases}\tag{3.1}$$

Où $B:\mathcal{V}\to\mathcal{V}'$ est un opérateur définie par

$$< Bu, v >_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = (Bu)(v) = \int_\Omega a(x)g(u(x))v(x)\,dx, \qquad \text{pour prèsque partout } x\in\Omega.$$

On a B est continu .
En effet :
Soit $B_1:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ telle que $\quad B_1(f,v) = \int_\Omega a(x)g(u(x))v(x)\,dx.$
On pose

$$\Omega = \Omega_0\cup\Omega_1 \quad \text{telle que} \quad \Omega_0 = \{x\in\Omega;\ |v(x)|\le 1\} \quad et \quad \Omega_1 = \{x\in\Omega;\ |v(x)|>1\}.\tag{3.2}$$

Donc d'après l'hypothèse (**H.1**) et (**H.2**) on a

Soient $v, w \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}
|B_1(v,w)| &\leq \int_\Omega |a(x)||g(v(x))||w(x)|\,dx \\
&\leq \int_{\Omega_0} c|a(x)||w(x)|\,dx + \int_{\Omega_1} |a(x)|c_1|v(x)||w(x)|\,dx \\
&\leq c\|a\|_{L^\infty}\int_\Omega |w(x)|\,dx + c_1\|a\|_{L^\infty}\int_\Omega |v(x)||w(x)|\,dx. \\
&\quad \text{comme } L^2 \hookrightarrow L^1 \text{ et Hölder on a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|B_1(v,w)| &\leq c_2\|a\|_{L^\infty}\|w\|_{L^2(\Omega)} + c_3\|a\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \text{comme } \mathcal{V} \text{ s'injecte et dense dans } L^2 \text{ donc } v \in L^2 \text{ alors} \\
&\leq c_2\|a\|_{L^\infty}\|w\|_{L^2(\Omega)}\frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} + c_3\|a\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c_4\|a\|_{L^\infty}\|w\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + c_5\|a\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \text{comme } \mathcal{V} \text{ s'injecte dans } L^2 \text{ alors} \\
&\leq k_1\|a\|_{L^\infty}\|w\|_{\mathcal{V}}\|v\|_{\mathcal{V}} + k_2\|a\|_{L^\infty}\|v\|_{\mathcal{V}}\|w\|_{\mathcal{V}} \\
&\leq K\|v\|_{\mathcal{V}}\|w\|_{\mathcal{V}}.
\end{aligned}$$

Donc soit le problème :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}}\begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{dans} \quad \begin{matrix} \mathcal{V} \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{matrix} \quad .$$

Avec $D(\mathcal{A}) = \{(v,h) \in \mathcal{H} \quad : \quad h \in \mathcal{V} \quad et \quad Av + Bh \in L^2(\Omega)\}$.

Pour montrer que $\mathcal{A}$ génère un semi groupe sur $\mathcal{H}$ il faut montrer que $\mathcal{A}$ est maximal monotone.

$\mathcal{A}$ est monotone

En effet :

Soit $U = (v,h) \in D(\mathcal{A})$ alors :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{bmatrix} -h \\ Av + Bh \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\
&= (-h, v)_{\mathcal{V}} + (Av + Bh, h)_{L^2(\Omega)}. \\
&= (-h, v)_{\mathcal{V}} + (Av, h)_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + (Bh, h)_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}. \\
&= (-h, v)_{\mathcal{V}} + \int_\Omega \nabla v.\nabla h\,dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma_1} v \nabla_{\Gamma_1} h\,d\Gamma + (Bh, h)_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}. \\
&= (-h, v)_{\mathcal{V}} + (h, v)_{\mathcal{V}} + (Bh, h)_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}. \\
&= \int_\Omega a(x)g(h(x))h(x)\,dx \geq 0.
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ est maximal monotone i.e : de plus qu'il est monotone on a : $R(I + \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ i.e : $I + \mathcal{A}$ est surjectif.

En effet :

On va montrer que $(I + \mathcal{A})$ est bijectif i.e : $(I + \mathcal{A})$ est inversible.

D'abord on a A et B ne sont pas nuls.
On pose $(I+\mathcal{A})V=0$ et on montre que $V=0$.
Soit V un vecteur alors

$$(I+\mathcal{A})V = V+\mathcal{A}V \Rightarrow -\mathcal{A}.V = V.$$

Comme $-\mathcal{A} \neq I$ ceci implique que $V=0$.
Alors $(I+\mathcal{A})$ est inversible et alors elle est surjectif donc $\mathcal{A}$ est maximal monotone.

On va montrer que $H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}\times\mathcal{V}\subset D(\mathcal{A})$ donc :
Soit $(u,v)\in H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ donc $u\in\mathcal{V}$ et $\Delta u\in L^2(\Omega)$ car $u\in H^2(\Omega)$ donc pour tout $\theta\in D(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ on a

$$< \Delta u,\theta >_{D',D} = -\int_\Omega \nabla u.\nabla\theta\, dx =< -Au,\theta >_{D',D}\ .$$

Donc

$$\Delta u = -Au \qquad dans\ D'(\Omega).$$

Puisque $\Delta u\in L^2(\Omega)$ alors

$$\Delta u = -Au \qquad dans\ L^2(\Omega).$$

Alors $-Au\in L^2(\Omega)$ donc $Au\in L^2(\Omega)$.
Soit $v\in\mathcal{V}\subset L^2(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Bv(x)|^2\,dx &= \int_\Omega |a(x)g(v(x))|^2\,dx\\ &\leq \int_\Omega |a(x)|^2|g(v(x))|^2\,dx\\ &\leq \|a(x)\|_{L^\infty}\int_\Omega |g(v(x))|^2\,dx.\end{aligned}$$

Donc d'après l'hypothèse (**H.1**) et (3.2) on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Bv(x)|^2\,dx &\leq \|a(x)\|_{L^\infty}\left(\int_{\Omega_0}|g(v(x))|^2\,dx+\int_{\Omega_1}|g(v(x))|^2\,dx\right)\\ &\leq \|a(x)\|_{L^\infty}\left(Mmes(\Omega)+K\int_\Omega |v(x)|^2\,dx\right)<\infty.\end{aligned}$$

D'où $Bv\in L^2(\Omega)\quad et\quad v\in\mathcal{V}$ donc $Au+Bv\in L^2(\Omega)$ alors $(u,v)\in D(\mathcal{A})$ implique

$$H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}\times\mathcal{V}\subset D(\mathcal{A}).$$

3.3 Démonstration du théorème (3.2.0.1)

On a le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \\ \begin{bmatrix} u(0) \\ u_t(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix} \qquad \text{dans} \quad \mathcal{V} \times L^2(\Omega) \quad \text{ou} \quad H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \end{cases}$$

comme $\mathcal{A}$ est maximal monotone alors on applique le théorème de Hille-Yosida :

3.3.1 La régularité de la solution

1)- Soit $U^0 = (u^0, u^1) \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V} \subset D(\mathcal{A})$ alors il existe une solution régulière unique $U = (u, u_t) \in D(\mathcal{A})$ telle que

$$U = (u, u_t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \bigcap C(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{A})).$$

Satisfait

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|U^0\|_{\mathcal{H}} \quad et \quad \|\frac{dU}{dt}\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{A}U^0\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t > 0. \tag{3.3}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} &\leq \left\| \begin{bmatrix} -u^1 \\ Au^0 + Bu^1 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|u^1\|_{\mathcal{V}} + \|An^0 + Bu^1\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|u_t\|_{\mathcal{V}} + \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^1\|_{\mathcal{V}} + \|Au^0 + Bu^1\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V} \subset D(\mathcal{A})$ alors $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{A})$
D'après (3.3) et comme $(u^0, u^1) \in D(\mathcal{A})$ on a

$$\|u\|_{\mathcal{V}} + \|u_t\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^0\|_{\mathcal{V}} + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \quad , \forall t \geq 0.$$

Donc

$$\|u\|_{\mathcal{V}} \leq \|u^0\|_{\mathcal{V}} + \|u^1\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0.$$

Alors

$$\sup_{t \geq 0} ess \|u\|_{\mathcal{V}} \leq \sup_{t \geq 0} ess(\|u^0\|_{\mathcal{V}} + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}) < +\infty.$$

On obtient

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

De même , on a

$$\|u_t\|_{\mathcal{V}} + \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^1\|_{\mathcal{V}} + \|Au^0 + Bu^1\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0.$$

Donc

$$\|u_t\|_{\mathcal{V}} \leq \|u_t\|_{\mathcal{V}} + \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^1\|_{\mathcal{V}} + \|Au^0 + Bu^1\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0.$$

Alors

$$\sup_{t\geq 0} ess\|u_t\|_{\mathcal{V}} \leq \sup_{t\geq 0} ess(\|u^1\|_{\mathcal{V}} + \|Au^0 + Bu^1\|_{L^2(\Omega)}) < +\infty.$$

On obtient $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$.
D'où

$$u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}). \tag{3.4}$$

Comme

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u''\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après (3.3) on a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(\Omega)} &= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u''\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c_1\|u\|_{\mathcal{V}} + \|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u''\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{V}} \\
&\leq (c_1+1)\|u\|_{\mathcal{V}} + (c_1+1)\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u''\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{V}} \\
&\leq c_2(\|u^0\|_{\mathcal{V}} + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}) + \|u^1\|_{\mathcal{V}} + \|Au^0 + Bu^1\|_{L^2(\Omega)} < \infty.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{t\geq 0} ess\|u\|_{H^2(\Omega)} < \infty.$$

D'après ce qui précède on a $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega))$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$.
Et comme

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}) \Leftrightarrow \sup_{t\geq 0} ess\|u\|_{H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}} = \sup_{t\geq 0} ess\big(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{V}}\big) < \infty.$$

Alors

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}). \tag{3.5}$$

De (3.4) et (3.5) on a

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}) \bigcap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

La solution régulière satisfait les conditions frontière car :
Soit $u \in \mathcal{V}$ t.q : $Au = f \in L^2(\Omega)$.
Pour $v \in \mathcal{V}$ on a :

$$\begin{aligned}
< Au, v >_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} &= \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma_1} u.\nabla_{\Gamma_1} v\, d\Gamma. \\
&= -\int_\Omega \Delta uv\, dx + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu uv\, d\Gamma - \int_\Omega \Delta_{\Gamma_1} uv\, d\Gamma. \\
&= \int_\Omega fv\, dx.
\end{aligned}$$

Comme

$$-\Delta u = f \qquad dans\ L^2(\Omega).$$

Alors

$$\int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u)v\, d\Gamma = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Et on a

$$v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1).$$

Alors

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u, \qquad dans\ L^2(\Gamma_1).$$

Donc

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u, \qquad p.p\ sur\ \ \Gamma_1.$$

3.3.2 Solution faible

En montrant que $D(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.
Pour cela on va montrer que $D(\mathcal{A})$ est fermé, donc on pose $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathcal{A})$ une suite telle que $u_n \to u$ et $v_n \to v$ et on montre que $(u, v) \in D(\mathcal{A})$.
Soit $(u_n, v_n) \in D(\mathcal{A})$ alors $u_n \in \mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ lors $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ donc $u \in L^2(\Omega)$ et grâce à la complétude de $\mathcal{V}$ alors $u \in \mathcal{V}$.
Et comme $v_n \in L^2(\Omega)$ alors $v \in L^2(\Omega)$ donc $(u, v) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$.
$Au_n + Bv_n \in L^2(\Omega)$ et comme A et B sont continus alors

$$(Au_n + Bv_n) \to (Au + Bv).$$

Donc $(Au + Bv) \in L^2(\Omega)$ car
comme A et B sont continus donc

$$Au_n \to Au \qquad et \qquad Bv_n \to Bv.$$

Alors

$$(Au_n + Bv_n) \to (Au + Bv).$$

Et comme $L^2(\Omega)$ est complet alors $(Au + Bv) \in L^2(\Omega)$.
Et comme $Bv \in L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{V}'$ donc d'après la définition de B on a $v \in \mathcal{V}$ alors $(u, v) \in D(\mathcal{A})$ donc il s'ensuit que $D(\mathcal{A})$ est un fermé i.e : $D(\mathcal{A}) = \overline{D(\mathcal{A})}$.
Et comme $\mathcal{A}$ est maximal monotone on utilise la proposition (1.8.1.1) on obtient

$$D(\mathcal{A}) = \overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}.$$

On applique le théorème de Hille-Yosida .

2)- Soit $U^0 = (u^0, u^1) \in \mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega) = D(\mathcal{A})$ alors il existe une solution unique $U = (u, u_t)$ telle que

$$U = (u, u_t) \in C^1([0, +\infty[; \mathcal{H}) \bigcap C([0, +\infty[; D(\mathcal{A})).$$

Alors

$$U = (u, u_t) \in C^1([0, +\infty[; \mathcal{H}) \quad et \quad U = (u, u_t) \in C([0, +\infty[; D(\mathcal{A})).$$

Donc

$$U = (u, u_t) \in C([0, +\infty[; D(\mathcal{A})).$$
$$U = (u, u_t) \in C^0([0, +\infty[; \mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega)).$$

Donc

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \quad et \quad u_t \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

Alors

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

Et pour $1 \le q \le p \le +\infty$

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

Car $\mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$.
Alors

$$L^q(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

Donc

$$u \in D'(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

La démonstration est achevée.

Chapitre 4

Stabilisation

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier la stabilisation de l'équation des ondes avec un feedback interne localement distribué et des conditions de type Cauchy-Ventcel, lesquelles servent à modéliser des phénomènes physiques comme les processus de diffusion et la propagation d'ondes mais aussi des problèmes de mécanique comme l'élasticité imposent des conditions au bord qui se caractérisent par la présence d'opérateurs tangentiels de même ordre que l'opérateur principal et qu'on justifie par des méthodes asymptotiques à partir de problèmes de transmission, pour modéliser les processus de diffusion on introduit la condition au bord :

$$\partial_\nu u - \Delta_T u = 0, \quad \text{sur} : \Gamma = \partial\Omega.$$

La stabilisation interne consiste à trouver un contrôle $g : \mathbb{R} \to K$ où
$K = \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$ tel que l'énergie $E(t)$ associée à la solution du problème (4.1) ci-dessous décroisse vers zéro quand t tend vers à $(+\infty)$ et sa pour tous u_0, u_1 pris dans des espaces convenables , où $E(t) = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix}\right\|^2_{\mathcal{H}} \qquad \forall t \geq 0.$

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et borné et $\partial\Omega = \Gamma$ sa frontière ,elle se décompose en deux parties Γ_0 et Γ_1 non vides, fermées et disjointes avec
$mes(\Omega)$ et $mes(Q_T) < +\infty$ et soit

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

une fonction régulière qui sera construite ultérieurement.

Soit w_1 un voisinage de Γ_1 contenu dans $\overline{\Omega}$ et on subdivise la frontière Γ_0 en deux parties :

$$\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0 \quad | \quad \partial_\nu f > 0\} \quad et \quad \Gamma_1^* = \{x \in \Gamma_0 \quad | \quad \partial_\nu f \leq 0\}.$$

Maintenant, soit w_0 un voisinage de $\overline{\Gamma_0^*}$ contenu dans $\overline{\Omega}$ tel que $w_0 \cap w_1 = \emptyset$ et on pose $w = w_0 \cup w_1$.

Nous étudier les propriétés de stabilité de la fonction $u(x,t)$ qui résout les problèmes de Cauchy-Ventcel amorti, On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[\\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[\\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[\\ u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Avec les hypothèses suivantes :
(**H.1**) La fonction de feedback $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :

1. $g \in C^0(\mathbb{R})$ est monotone croissante.
2. $g(s)s > 0$ avec $s \neq 0$.
3. Il existe k et K deux constantes positives telles que :

$$k.s \leq |g(s)| \leq K.s, \ |s| > 1.$$

(**H.2**) $a \in L^{+\infty}(\Omega)$ est une fonction non négative telle que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \qquad \text{p.p sur } w = w_0 \cup w_1. \tag{4.2}$$

Si u est une solution faible unique de (4.1) alors soit $E(t)$ l'énergie associée au problème (4.1) qui est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega [|u_t|^2 + |\nabla u|^2]\, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\, d\Gamma \right\}. \tag{4.3}$$

pour chaque solution de (4.1), l'identité suivante est vérifiée.

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t\, dx\, dt, \quad \forall t_1 > t_2 \geq 0. \tag{4.4}$$

Avant de donner le résultat principal de ce chapitre, on définit les fonctions auxiliaires suivantes :

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction concave strictement croissante, avec $h(0) = 0$ et telle que

$$h(g(s)s) \geq s^2 + g^2(s), \qquad |s| \leq 1. \tag{4.5}$$

La fonction h peut être construite étant donné que g est continue et que la condition (4.5) est vérifiée.

Ensuite, on définit

$$r(s) = h\left(\frac{s}{mes(Q_T)}\right). \tag{4.6}$$

pour chaque $T > 0$; comme r est monotone croissante alors $cI + r$ est inversible pour toute constante $c \geq 0$.
Soit L une constante positive. On pose

$$p(s) = (cI + r)^{-1}(Ls). \tag{4.7}$$

p est positive, continue et strictement croissante, avec $p(0) = 0$.

Finalement, on définit

$$q(s) = s - (I + p)^{-1}(s). \tag{4.8}$$

4.1 Stabilité uniforme

On va énoncer maintenant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.1.0.1. *On suppose que les hypothèses (***H.1***) et (***H.2***) sont satisfaites et que (4.5) est vérifiée. Soit u la solution faible du problème (4.1), alors il existe $T_0 > 0$ suffisamment grand tel que pour chaque $T > T_0$ l'énergie $E(t)$ définie dans (4.3) satisfait la relation suivante :*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad \forall t > T. \tag{4.9}$$

et $S(t)$ est solution de l'équation de l'équation différentielle ordinaire donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = E(0). \end{cases} \tag{4.10}$$

avec q définie par (4.8).
De plus, $S(t)$ est monotone décroissante et $\lim_{t\to+\infty} S(t) = 0$.
et Les constantes L et c données dans (4.7) dépendent respectivement de $E(0)$; $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$; $mes(\Omega)$;T et de $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$; K ; k ; $mes(Q_T)$.

4.1.1 Preuve du théorème (4.1.0.1)

Les identités du multiplicateur

On départ avec l'identité suivante :

Lemme 4.1.1.1. *soit q un champ de vecteur régulière sur Ω de classe $[C^1(\overline{\Omega})]^n$.*
Alors pour tout solution régulière u de (4.1) on a l'identité suivante :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(q.\nabla_T u)\, d\Gamma\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0} (q.\nu)|\partial_\nu u|^2\, d\Gamma\, dt \\ &+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} (q.\nu)\left[|u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 + |\partial_\nu u|^2\right] d\Gamma\, dt \\ &= \left[\int_\Omega u_t q.\nabla u\, dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \nabla u.\nabla q.\nabla u\, dx\, dt \\ &+\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div\ q)(u_t^2 - |\nabla u|^2)\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)(q.\nabla u)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Démonstration

On multiplie la première equation dans (4.1) par $(q.\nabla u)$ dans $L^2(Q_T)$ et on utilise les formules de Green et divergence et les identités suivantes :

$$\nabla u = \partial_\nu u\nu + \nabla_T u \quad et \quad q.\nabla u = (q.\nu)\partial_\nu u + q.\nabla_T u \quad et \quad |\nabla u|^2 = (\partial\nu u)^2|\nabla_T u|^2.$$

Pour obtenir le résultat souhaité, ce qui est fait mot à mot comme dans Lions (voir [5],Lemme 3.7 (p 40) et Lemme 1.3 (p 139)).

Lemme 4.1.1.2. *Soit u une solution fiable du problème (4.1) et $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$.*
Alors :

$$0 = \left[\int_\Omega u_t \xi u \, dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \xi \left[|\nabla u|^2 - |u_t|^2\right] \, dx \, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega u(\nabla u.\nabla \xi) \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \xi u \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) \xi u \, dx \, dt. \quad (4.12)$$

Démonstration
On multiplie l'équation de (4.1) par $\xi(x)\ u(x,t)$ dans $L^2(Q_T)$ et on intègre par partie.

Substitution $q = \nabla f$ dans (4.11) où $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière et $\xi = \alpha > 0$ dans (4.12) et en combinant les résultats obtenus, nous en déduisons

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(\nabla f.\nabla_T u) \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\nabla f.\nu) |\partial_\nu u|^2 \, d\Gamma \, dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\nabla f.\nu) \left[|u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 + |\partial_\nu u|^2\right] \, d\Gamma \, dt + \alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \, u \, d\Gamma \, dt$$

$$= \left[\int_\Omega u_t (\nabla f.\nabla u) \, dx\right]_0^T + \alpha \left[\int_\Omega u_t \, u \, dx\right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \nabla u.Hess(f).\nabla u \, dx \, dt + \alpha \int_0^T \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - |u_t|^2\right] \, dx \, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) (\nabla f.\nabla u) \, dx \, dt + \alpha \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) \, u \, dx \, dt. \quad (4.13)$$

Invoquer la condition aux limites et la formule de Green pour obtenir

$$\alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \, u \, d\Gamma \, dt = -\alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \, dt. \quad (4.14)$$

Substitution (4.14) dans (4.13) nous en déduisons

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla u.Hess(f).\nabla u \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\Delta f}{2} \left[|u_t^2| - |\nabla u|^2\right] \, dx \, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \alpha \left[|\nabla u|^2 - u_t^2\right] \, dx \, dt + \alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \, dt + \left[\int_\Omega u_t (\nabla f.\nabla u) \, dx\right]_0^T$$

$$+ \alpha \left[\int_\Omega u_t \, u \, dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) (\nabla f.\nabla u) \, dx \, dt + \alpha \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) \, u \, dx \, dt$$

$$= \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (\nabla_T f.\nabla_T u) \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \partial_\nu f (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma \, dt$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu f \left[|u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 + |\partial_\nu u|^2\right] \, d\Gamma \, dt. \quad (4.15)$$

Analyse des termes aux limites

On rappelle que $w = w_0 \cup w_1$ est un voisinage ouvert de $\Gamma_1 \cup \Gamma_0^*$,maintenant on va définir deux "Sous-colliers" w_ϵ et $w_{\frac{\epsilon}{2}}$ sachant que

$$w_{\frac{\epsilon}{2}} \subset w_\epsilon \subset w.$$

Donc : soit $\epsilon > 0$ est inférieur à "l'épaisseur" de w plus précisément : choisissez-le pour que

$$\epsilon < \inf dist\left((\Omega \setminus w)\ ,\quad (\Gamma_1 \cup \Gamma_0^*)\right).$$

Maintenant on définie w_ϵ pour être un voisinage régulière dans Ω de $\Gamma_1 \cup \Gamma_0^*$ avec "l'épaisseur" plus que $\frac{\epsilon}{2}$ mais moins que ϵ :

$$\frac{\epsilon}{2} < \inf dist((\Omega \setminus w_\epsilon)\ ,\ (\Gamma_1 \cup \Gamma_0^*)) \quad et \quad \sup_{x \in w_\epsilon} dist(x,\ \Gamma_1 \cup \Gamma_0^*) < \epsilon.$$

Et par la suite définir $w_{\frac{\epsilon}{2}} \subset w_\epsilon$ comme n'importe quel autre voisinage régulière de $\Gamma_1 \cup \Gamma_0^*$ avec

$$\sup_{x \in w_{\frac{\epsilon}{2}}} dist(x,\ \Gamma_1 \cup \Gamma_0^*) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Laissez-nous également présenter $\quad V := \Omega \setminus w_\epsilon$.
Maintenant construit une coupure $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ sachant que

$$\begin{cases} \psi = 0 \quad \text{dans } V. \\ \psi = 1 \quad \text{dans } \Gamma_1 \quad et \quad \psi = 1 \quad \text{dans } \Gamma_0 \cap w_{\frac{\epsilon}{2}}. \\ 0 \leq \psi \leq 1. \end{cases} \tag{4.16}$$

On peut écrire les conditions aux limites comme

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(\nabla_T f.\nabla_T u)\ d\Gamma\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu f(\partial_\nu u)^2\ d\Gamma\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu f\left[|u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 + |\partial_\nu u|^2\right]\ d\Gamma\ dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(\nabla_T f.\nabla_T u)\ d\Gamma\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0 \cap w_{\frac{\epsilon}{2}}} \partial_\nu f(\partial_\nu u)^2\ d\Gamma\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0 \setminus w_{\frac{\epsilon}{2}}} \partial_\nu f(\partial_\nu u)^2\ d\Gamma\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu f\left[|u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 + |\partial_\nu u|^2\right]\ d\Gamma\ dt. \tag{4.17}$$

Ajuster $q = \psi \nabla f$ dans l'identité (4.11) on obtient

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(\nabla f.\nabla_T u)\ d\Gamma\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0 \cap w_{\frac{\epsilon}{2}}} (\nabla f.\nu)|\partial_\nu u|^2\ d\Gamma\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0 \setminus w_{\frac{\epsilon}{2}}} \psi(\nabla f.\nu)|\partial_\nu u|^2\ d\Gamma\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} (\nabla f.\nu)\left[|u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 + |\partial_\nu u|^2\right]\ d\Gamma\ dt$$

$$= \left[\int_{w_\epsilon} u_t\, \psi\, \nabla f.\nabla u\ dx\right]_0^T + \int_0^T \int_{w_\epsilon} \psi \nabla u.Hess(f).\nabla u\ dx\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{w_\epsilon} \psi \Delta f(u_t^2 - |\nabla u|^2)\ dx\ dt + \int_0^T \int_{w_\epsilon} (\nabla \psi.\nabla u)(\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt$$

$$+\int_0^T\int_{w_\epsilon} a(x)g(u_t)\ \psi\ (\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla f)(u_t^2-|\nabla u|^2)\ dx\ dt. \tag{4.18}$$

Substitution (4.18) dans (4.17) devient

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu u(\nabla_T f.\nabla_T u)\ d\Gamma\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\partial_\nu f(\partial_\nu u)^2\ d\Gamma\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu f\left[|u_t|^2-|\nabla_T u|^2+|\partial_\nu u|^2\right]\ d\Gamma\ dt=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0\setminus w_{\frac{\epsilon}{2}}}(1-\psi)\partial_\nu f(\partial_\nu u)^2\ d\Gamma\ dt$$

$$+\left[\int_{w_\epsilon}\psi\ u_t\ \nabla f.\nabla u\ dx\right]_0^T+\int_0^T\int_{w_\epsilon}\psi\ \nabla u.Hess(f).\nabla u\ dx\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}\psi\ \Delta f(u_t^2-|\nabla u|^2)\ dx\ dt+\int_0^T\int_{w_\epsilon}a(x)g(u_t)\psi\ (\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt$$

$$\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla u)(\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla f)(u_t^2-|\nabla u|^2)\ dx\ dt. \tag{4.19}$$

Comme

$$\partial_\nu f\le 0\quad dans\quad \Gamma_0\setminus w_{\frac{\epsilon}{2}}\qquad (\text{où } 0\le\psi\le 1). \tag{4.20}$$

Puis en combinant (4.19) et (4.20) nous en déduisons

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu u(\nabla_T f.\nabla_T u)\ d\Gamma\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\partial_\nu f(\partial_\nu u)^2\ d\Gamma\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu f\left[|u_t|^2-|\nabla_T u|^2+|\partial_\nu u|^2\right]\ d\Gamma\ dt$$

$$\le\left[\int_{w_\epsilon}\psi\ u_t\ \nabla f.\nabla u\ dx\right]_0^T+\int_0^T\int_{w_\epsilon}\psi\ \nabla u.Hess(f).\nabla u\ dx\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}\psi\ \Delta f(u_t^2-|\nabla u|^2)\ dx\ dt+\int_0^T\int_{w_\epsilon}a(x)g(u_t)\psi\ (\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt$$

$$\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla u)(\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla f)(u_t^2-|\nabla u|^2)\ dx\ dt. \tag{4.21}$$

Substitution (4.21) dans (4.15) on obtient

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla u.Hess(f).\nabla u\ dx\ dt+\int_0^T\int_\Omega\frac{\Delta f}{2}\left[u_t^2-|\nabla u|^2\right]\ dx\ dt+\int_0^T\int_\Omega\alpha\left[|\nabla u|^2-u_t^2\right]\ dx\ dt$$

$$+\alpha\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\ d\Gamma\ dt\le\left[\int_\Omega u_t\ (\nabla f.\nabla u)\ dx\right]_0^T-\alpha\left[\int_\Omega u_t\ u\ dx\right]_0^T$$

$$-\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)\ (\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt-\alpha\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)\ u\ dx\ dt$$

$$+\left[\int_{w_\epsilon}\psi\ u_t\ (\nabla f.\nabla u)\ dx\right]_0^T+\int_0^T\int_{w_\epsilon}\psi\ \nabla u.Hess(f).\nabla u\ dx\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}\psi\ \Delta f\ (u_t^2-|\nabla u|^2)\ dx\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}a(x)g(u_t)\ \psi\ (\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt$$

$$+\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla u)(\nabla f.\nabla u)\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla u)(u_t^2-|\nabla u|^2)\,dx\,dt. \quad (4.22)$$

Rappeler que $V=\Omega\setminus w_\epsilon$ En supposant, pour un moment, qu'il existe $C>0$ et $\alpha>0$ convenablement choisi tel que

$$C\left[\int_0^T\int_V\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)\,dx\,dt\right]\leq\int_0^T\int_V\left(\frac{\Delta f}{2}-\alpha\right)u_t^2\,dx\,dt$$

$$+\int_0^T\int_V\left[\nabla u.Hess(f).\nabla u+\left(\alpha-\frac{\Delta f}{2}\right)|\nabla u|^2\right]\,dx\,dt. \quad (4.23)$$

Posons $\bar{C}=\min\{C,\alpha\}$ on déduit

$$\bar{C}\left[\int_0^T\int_V(u_t^2+|\nabla u|^2)\,dx\,dt+\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma\,dt\right]$$

$$\leq\tilde{C}\int_0^T\int_{w_\epsilon}(u_t^2+|\nabla u|^2)\,dx\,dt-\left[\int_\Omega u_t\,(\nabla f.\nabla u)\,dx\right]_0^T-\alpha\left[\int_\Omega u_t\,u\,dx\right]_0^T$$

$$-\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)(\nabla f.\nabla u)\,dx\,dt-\alpha\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)u\,dx\,dt+\left[\int_\Omega\psi\,u_t\,\nabla f.\nabla u\,dx\right]_0^T$$

$$+\int_0^T\int_{w_\epsilon}\psi\,\nabla u.Hess(f).\nabla u\,dx\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}\psi\,\Delta f(u_t^2-|\nabla u|^2)\,dx\,dt+\int_0^T\int_{w_\epsilon}a(x)g(u_t)\,\psi(\nabla f.\nabla u)\,dx\,dt$$

$$\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla u)(\nabla f.\nabla u)\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{w_\epsilon}(\nabla\psi.\nabla f)(u_t^2-|\nabla u|^2)\,dx\,dt. \quad (4.24)$$

Où $\tilde{C}=\tilde{C}(f)$.

De (4.24) on déduit

$$\int_0^T E(t)\,dt\leq C\left[\int_0^T\int_{w_\epsilon}(u_t^2-|\nabla u|^2)\,dx\,dt\right]-C\left[\int_\Omega u_t(\nabla f.\nabla u)\,dx\right]_0^T-C\left[\int_\Omega u_t\,u\,dx\right]_0^T$$

$$-C[\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)(\nabla f.\nabla u)\,dx\,dt-C\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)\,u\,dx\,dt$$

$$+C\left[\int_{w_\epsilon}\psi\,u_t(\nabla f.\nabla u)\,dx\right]_0^T+C\int_0^T\int_{w_\epsilon}a(x)g(u_t)\,\psi(\nabla f.\nabla u)\,dx\,dt.$$

L'inégalité (4.25) sera contrôlée via une procédure standard, nous le répéterons plus tard. L'idée principale est d'écrire $\displaystyle\int_0^T\int_{w_\epsilon}|\nabla u|^2\,dx\,dt$ en termes d'amortissement

$$\int_0^T\int_\Omega a(x)(u_t^2+g(u_t)^2)\,dx\,dt.$$

Dans ce but, nous allons construire une autre coupure. Notez que

$$\int_0^T\int_{w_\epsilon}u_t^2\,dx\,dt\leq a_0^{-1}\int_0^T\int_{w_\epsilon}a(x)u_t^2\,dx\,dt.$$

Puisque w_ϵ est contenu à l'intérieur de la zone dissipative.

Preuve de l'inégalité(4.23)

On considère la fonction $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sachant que :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{(x_1 - x_{1,0})^2 + ... + (x_n - x_{n,0})^2\} & dans \quad \Omega \setminus w_\epsilon. \\ f \quad \text{est régulière dans} \quad \overline{\Omega}. \\ \partial_\nu f > 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_0^*. \\ \partial_\nu f \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*. \end{cases} \tag{4.25}$$

Où $(x_{1,0}, x_{2,0}, ..., x_{n,0})$ est un point fixe dans $\mathbb{R}^n$,de (4.23) et (4.25) on déduire que

$$\left[1 - \frac{n}{2} + \alpha\right] > 0, \quad [n - \alpha] > 0.$$

On choisit $\alpha \in (\frac{n-2}{2},\ n)$ on conclure l'assertion (4.23).
L'exemple exceptionnel d'une telle fonction est

$$f(x) = \frac{1}{2}|x - x_0|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans ce cas ,notons que

$$\nabla f(x) = (x_1 - x_{1,0}, ..., x_n - x_{n,0}) = x - x_0.$$

Donc

$$\partial_\nu f(x) =< \nabla f(x), \nu(x) > > 0, \quad \forall x \in \Gamma_0^*.$$
$$\partial_\nu f(x) =< \nabla f(x), \nu(x) > \leq 0, \quad \forall x \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*.$$

Et on note

$$\mathcal{X} = C\left[\int_\Omega u_t \nabla f.\nabla u \, dx\right]_0^T + C\left[\int_\Omega u_t \, u \, dx\right]_0^T + C\left[\int_{w_\epsilon} \psi \, u_t \nabla f.\nabla u \, dx\right]_0^T. \tag{4.26}$$

Nous allons ensuite estimer quelques termes de (4.25).

Pour plus de commodité définir :

$$R := \max_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla f(x)|. \tag{4.27}$$

Estimation de $I_1 := \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t)(\nabla f.\nabla u) \, dx \, dt.$
On prend (4.27) et on utilise $ab \leq \frac{a^2}{4\delta} + \delta b^2$ où $\delta > 0$,on obtient

$$|I_1| \leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} R^2}{\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2 \, dx \, dt + 2\delta \int_0^T E(t) \, dt. \tag{4.28}$$

Estimation de $I_2 := \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) \, u \, dx \, dt.$
De même, nous déduisons

$$|I_2| \leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \lambda_1^{-1}}{16\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2 \, dx \, dt + 2\delta \int_0^T E(t) \, dt. \tag{4.29}$$

Avec λ une constante positive qui provient du fait que les deux norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\nabla.\|_{L^2(\Omega)}$ sont équivalentes dans $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Estimation de $I_3 := \int_0^T \int_{w_\epsilon} a(x)g(u_t)\ \psi\,(\nabla f.\nabla u)\ dx\ dt$

Analogique

$$|I_1| \leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1^{-1}}{16\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\ dx\ dt + 2\delta \int_0^T E(t)\ dt. \tag{4.30}$$

On choisit δ suffisamment petit et on injecte (4.26), (4.28) et (4.29) dans (4.25) on déduit

$$\int_0^T E(t)\ dt \leq |\mathcal{X}| + C_1 \int_0^T \int_\Omega a(x)(g(u_t))^2\ dx\ dt + C_1 \int_0^T \int_{w_\epsilon} [|\nabla u|^2 + a(x)u_t^2]\ dx\ dt. \tag{4.31}$$

Où $C_1 := C_1\{C, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}, \lambda_1^{-1}, R, a_0^{-1}, n\}$.

Il reste à estimer la quantité $\int_0^T \int_{w_\epsilon} |\nabla u|^2\ dx\ dt$ en termes d'amortissement

$$\int_0^T \int_\Omega [a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2)]\ dx\ dt.$$

Dans ce but,en construisant une autre fonction de coupure régulière.
D'abord, soit $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par

$$\tilde{\eta}(s) = \begin{cases} 1 \quad si \quad s \leq 0. \\ (s-1)^2 \quad \text{si} \quad s \in [\frac{1}{2},\ 1]. \\ 0 \quad \text{si} \quad s > 1. \end{cases} \tag{4.32}$$

et elle est définir en $]0,\ \frac{1}{2}[$ de tel façon $\tilde{\eta}$ est une fonction décroissante de classe C^1
Pour $\epsilon > 0$ on pose $\tilde{\eta}_\epsilon(s) := \tilde{\eta}(s/\epsilon)$.
Donc : on définie $\eta_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ comme suite

$$\eta_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x \in w_\epsilon. \\ \tilde{\eta}_\epsilon(d(x,\ \Omega \setminus V)) \quad \text{si} \quad x \in w \setminus w_\epsilon. \\ 0 \quad \text{sinon}\ . \end{cases} \tag{4.33}$$

Il est facile de vérifier qu'il y a une constante $M > 0$ telle que

$$\frac{|\nabla \eta_\epsilon(x)|^2}{\eta_\epsilon(x)} = \frac{|\tilde{\eta}'_\epsilon(d(x,\ \Omega \setminus V))|^2}{\tilde{\eta}_\epsilon(d(x,\ \Omega \setminus V))} \leq \frac{M}{\epsilon^2}. \tag{4.34}$$

Remarque 4.1.1.1. *On peut remplacer η_ϵ par une autre fonction régulière d'ensemble d'arrivée $[0,1]$,telle que elle égale à 1 dans w_ϵ et 0 sinon*

Comme η_ϵ égale à 1 dans w_ϵ et est supporté sur w ,alors on prend $\xi = \eta_\epsilon$ dans l'identité (4.12) on déduire

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{w_\epsilon} \eta_\epsilon |\nabla u|^2\ dx\ dt &= -\Big[\int_w u_t\, u\, \eta_\epsilon\, dx\Big]_0^T + \int_0^T \int_w \eta_\epsilon |u_t|^2\ dx\ dt \\ &- \int_0^T \int_w u(\nabla u.\nabla \eta_\epsilon)\ dx\ dt - \int_0^T \int_w a(x)g(u_t)u\,\eta_\epsilon\ dx\ dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \underbrace{\eta_\epsilon}_{=1}\ u\ d\Gamma\ dt. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Maintenant on va estimer les termes de (4.35)

Estimation de $K_1 := \int_0^T \int_w \eta_\epsilon |u_t|^2 \, dx \, dt$.

De (4.2), comme $\eta_\epsilon \leq 1$ et $w_\epsilon \subset w$,en déduire

$$K_1 \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_\Omega a(x) u_t^2 \, dx \, dt. \tag{4.36}$$

Estimation de $K_2 := -\int_0^T \int_w a(x) g(u_t) \, u \, \eta_\epsilon \, dx \, dt$.

L'estimation $ab \leq \frac{1}{4\beta} a^2 + \beta b^2$ et l'inégalité de Poincaré on trouve :

$$|K_2| \leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \lambda_1^{-1}}{4\beta} \int_0^T \int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2 \, dx \, dt + 2\beta \int_0^T E(t) \, dt. \tag{4.37}$$

Où la constante $\beta > 0$.

Estimation de $K_3 := \int_0^T \int_w u \, (\nabla u . \nabla \eta_\epsilon) \, dx \, dt$.

On considère (4.34) nous donne

$$\begin{aligned} |K_3| &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[\int_w \eta_\epsilon |\nabla u|^2 \, dx \, dt + \int_w \frac{|\nabla \eta_\epsilon|^2}{\eta_\epsilon} |u|^2 \, dx \right] dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[\int_w \eta_\epsilon |\nabla u|^2 \, dx \, dt + \frac{M}{\epsilon^2} \int_w |u|^2 \, dx \right] dt. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Estimation de $K_4 := \int_0^T \int_w \partial_\nu u \, u \, d\Gamma \, dt$.

D'après les conditions aux limites sur Γ_1 on a

$$|K_4| \leq -\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \, dt \leq 0. \tag{4.39}$$

On va combiner (4.35)– (4.39) on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{w_\epsilon} \eta_\epsilon |\nabla u|^2 \, dx \, dt &\leq |\mathcal{Y}| + \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \lambda_1^{-1}}{4\beta} \int_0^T \int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2 \, dx \, dt \\ &+ 2\beta \int_0^T E(t) \, dt + \frac{M}{2\epsilon^2} \int_w |u|^2 \, dx \, dt \\ &+ a_0^{-1} \int_0^T \int_\Omega a(x) u_t^2 \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Où

$$\mathcal{Y} := -\left[\int_w u_t \, u \, \eta_\epsilon \, dx \right]_0^T. \tag{4.41}$$

On va combiner (4.31)et (4.40) on trouve d'une part que

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{w_\epsilon} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_w \eta_\epsilon |\nabla u|^2 \, dx \, dt.$$

On choisie β assez petit ,en déduire

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) \, dt &\leq |\mathcal{X}| + C_1 |\mathcal{Y}| \\ &+ C_2 \int_0^T \int_\Omega [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] \, dx \, dt \\ &+ \frac{M C_2}{\epsilon^2} \int_0^T \int_w |u|^2 \, dx \, dt \end{aligned} \tag{4.42}$$

Où $C_2 := C_2\{C_1, \lambda_1^{-1}, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}, a_0^{-1}\}$
D'autre part ,de (4.26) , (4.41) et (4.4) on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{X}| + 2C_2|\mathcal{Y}| &\leq C(E(0) + E(T)) \\ &= C\left[2E(T) + \int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)\, u_t\, dx\, dt\right]. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Où la constante C dépend de$R$ (de(4.27)) et $C > 0$, alors de (4.42) et (4.43) on déduit

$$\begin{aligned} TE(T) &\leq \int_0^T E(t)\, dt \\ &\leq CE(T) + C\left[\int_0^T \int_\Omega [a(x)|g(u_t)|^2 + a(x)\, |u_t|^2]\, dx\, dt\right] \\ &+ C\int_0^T \int_w |u|^2\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{4.44}$$

avec $C := C\{a_0, \lambda_1, R, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}, n, \frac{M}{\epsilon^2}\} > 0$.

Lemme 4.1.1.3. *Sous l'hypothèse du Théorème (4.1.0.1) et pour tout $T > T_0$, avec T_0 suffisamment grand, il existe une constante positive $C(T_0, E(0))$ telle que si (u, u_t) est un solution faible de (4.1) nous avons :*

$$\int_0^T \int_\Omega |u|^2\, dx\, dt \leq C(T_0, E(0)) \left(\int_0^T \int_\Omega a(x)(g^2(u_t) + u_t^2)\, dx\, dt\right). \tag{4.45}$$

Preuve

Nous discutons par l'argument standard de unicité-compacité (Lemme de Aubin-Lions et théorème de Holmgren).

Pour la simplicité dénote $u' := u_t$.

Supposons que (4.45) est faux et que $\{u_k(0), u_k'(0)\}$ être une suite de données initiales où les solutions correspondantes $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de (4.1), avec $E_k(0)$ supposé uniformément borné en k vérifie :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^T \int_\Omega a(x)(g^2(u_k') + u_k'^2)\, dx\, dt}{\displaystyle\int_0^T \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt}. \tag{4.46}$$

Depuis $E_k(t) \leq E_k(0) \leq L$, où L est une constante positive, on obtient sur une sous-suite ré-indexé à nouveau par $\{u_k\}$

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{faible dans} \quad H^1(Q_T). \tag{4.47}$$

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{faible * dans} \quad L^\infty(0, T; \mathcal{V}). \tag{4.48}$$

$$u_k' \rightharpoonup u' \quad \text{faible * dans} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.49}$$

En utilisant les résultats standard de la compacité , nous déduisons également que

$$u_k \to u' \quad \text{fort dans} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.50}$$

À ce point, nous allons diviser notre preuve en deux cas, à savoir, $u \neq 0$ et $u = 0$.

Première cas $u \neq 0$.

On observe que de(4.46) et (4.50) on a

$$\lim_{k\to+\infty}\left\{\int_0^T\int_\Omega a(x)(g^2(u_k')+u_k'^2)\,dx\,dt\right\}=0. \tag{4.51}$$

En passant à la limite de l'équation, quand $k\to+\infty$, on obtient :

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[.\\ \partial_\nu u-\Delta_{\Gamma_1}u=0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[.\\ u=0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[.\\ u_t=0 & \text{sur} \quad w\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.52}$$

Et on dérive l'équation de (4.52) au sens de distribution par rapport à t et posons $u_t=v$ on obtient

$$\begin{cases} v_{tt}-\Delta v=0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[.\\ v=0 & \text{sur} \quad w\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.53}$$

Ensuite , à partir des résultats standard d'unicité , nous déduisons $v=u_t\equiv 0$ on Ω.

Par conséquent revenant à (4.52) nous obtenons le problème elliptique suivant

$$\begin{cases} \Delta u=0 & \text{sur} \quad \Omega.\\ \partial_\nu u-\Delta_{\Gamma_1}u=0 & \text{sur} \quad \Gamma_1.\\ u=0 & \text{sur} \quad \Gamma_0. \end{cases} \tag{4.54}$$

Ce qui implique que $\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma=0$ et alors $u\equiv 0$ donc contradiction.

Deuxième cas $u=0$ **.**

On suppose

$$c_k:=\left[\int_0^T\int_\Omega|u_k|^2\,dx\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \quad et \quad \bar{u}_k:=\frac{1}{c_k}u_k.$$

On obtient

$$\int_0^T\int_\Omega|\bar{u}_k|^2\,dx\,dt=\int_0^T\int_\Omega\frac{|u_k|^2}{c_k^2}\,dx\,dt=\int_0^T\int_\Omega|u_k|^2\,dx\,dt=1. \tag{4.55}$$

Posons

$$\bar{E}_k(t)=\frac{E_k(t)}{c_k^2}. \tag{4.56}$$

Rappelant (4.44) pour T assez grand , nous obtenons,

$$E(T)\leq\bar{C}\left[\int_0^T\int_\Omega[a(x)g(u_t)^2+a(x)\,u_t^2]\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega|u|^2\,dx\,dt\right].$$

Puisque l'énergie est décroissante, il s'ensuit

$$\bar{E}_k(t)\leq\tilde{C}\left[\frac{\displaystyle\int_0^T\int_\Omega a(x)(g^2(u_k')+u_k'^2)\,dx\,dt}{\displaystyle\int_0^T\int_\Omega|u_k(t)|^2\,dt}+1\right]. \tag{4.57}$$

De (4.46) et (4.57), nous concluons qu'il existe une constante positive $\hat{M}$ telle que

$$\bar{E}_k(t) \leq \hat{M}, \qquad \forall t \in [0,T] \quad et \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, pour une sous-suite $\{u_k\}$, nous obtenons

$$\bar{u}_k \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{faible * dans} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}). \tag{4.58}$$
$$\bar{u}'_k \rightharpoonup \bar{u}' \quad \text{faible * dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.59}$$
$$\bar{u}_k \to \bar{u} \quad \text{fort dans} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.60}$$

De puis, à partir de (4.46), il s'ensuit également

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega \frac{a(x)g^2(u'_k)}{c_k^2}\, dx\, dt = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)|\bar{u}'_k|^2\, dx\, dt = 0. \tag{4.61}$$

De plus, u_k satisfait l'équation

$$\bar{u}''_k - \Delta \bar{u}_k + a(x)\frac{g(\bar{u}'_k)}{c_k} = 0 \qquad dans\ \Omega\times]0,\ T[.$$

Passage à la limite lorsque $k \to +\infty$ et d'après les convergences ci-dessus, on obtient

$$\begin{cases} \bar{u}'' - \Delta \bar{u} = 0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[. \\ \partial_\nu \bar{u} - \Delta_{\Gamma_1}\bar{u} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[. \\ \bar{u} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[. \\ \bar{u}' = 0 & \text{sur} \quad w\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.62}$$

Et on dérive l'équation de (4.62) au sens de distribution par rapport à t et posons $\bar{u}' = v$ on obtient

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 & \text{sur} \quad \Omega\times]0,+\infty[. \\ v = 0 & \text{sur} \quad w\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.63}$$

En appliquant, encore, les résultats d'unicité concluent $v = \bar{u}_t = 0$. Retour à (4.62) on obtenir le problème elliptique $]0,T[$ suivant

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} = 0 & \text{sur} \quad \Omega. \\ \partial_\nu \bar{u} - \Delta_{\Gamma_1}\bar{u} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1. \\ \bar{u} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0. \end{cases} \tag{4.64}$$

Nous en déduisant que $\bar{u} = 0$, ce qu'est une contradiction en vue de (4.55) et (4.60). Ce étape conclut la preuve de Lemme.
Les inégalités (4.44) et (4.45) conduisent au résultat suivant.

Proposition 4.1.1.1. *Pour $T > 0$ suffisamment grand la solution u du problème (4.1) satisfait*

$$E(T) \leq C\left[\int_0^T \int_\Omega a(x)(g^2(u_t) + u_t^2)\, dx\, dt\right]. \tag{4.65}$$

avec C une constante positive qui dépend de T_0, $E(0)$, f, λ_1,R,n, $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\frac{M}{\epsilon^2}$.

4.1.2 Conclusion du théorème (4.1.0.1)

Pour terminer la preuve du théorème (4.1.0.1), nous invoquons le résultat suivant dû à Lasiecka et Tataru (voir[13]).

Lemme 4.1.2.1. *(Voir [13]) Soit p une fonction positive, croissante telle que* $p(0) = 0$.

Comme p est croissante, on peut définir la fonction croissante $q(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$.

On considère la suite $\{s_m\}$ *positive qui satisfait :*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m. \tag{4.66}$$

Alors $s_m \leq S(m)$ *avec* $S(t)$ *solution de l'équation (4.10) avec* $S(0) = s_0$.
De plus $S(t)$ *est monotone et décroissante avec* $\lim_{t\to+\infty} S(t) = 0$.

Démonstration
Faisant la preuve par récurrence sur m.
Pour $m = 0$, de (4.66) on obtient que

$$(I + p)(s_1) \leq s_0. \tag{4.67}$$

Comme $(I + p)^{-1}$ est croissante, on a

$$s_1 \leq (I + p)^{-1}(s_0) = s_0 - s_0 + (I + p)^{-1}(s_0) = s_0 - q(s_0). \tag{4.68}$$

D'un autre côté, comme q est une fonction positive , la solution $S(t)$ de l'équation (4.10) est monotone décroissante, c'est-à-dire

$$S(t) \leq S(\tau), \qquad \forall t \geq \tau \geq 0. \tag{4.69}$$

Intégrant (4.10) de 0 à 1, on obtient $\quad S(1) - S(0) + \int_0^1 q(S(\tau))\, d\tau = 0.$
Comme q est croissante, de (4.69) et de l'hypothèse $S(0) = s_0$, on aura

$$\begin{aligned} S(1) &= S(0) - \int_0^1 q(S(\tau))\, d\tau = S(0) - \int_0^1 q(S(0))\, d\tau \\ &= S(0) - q(S(0)) = (I - q)(S(0)) = (I + p)^{-1}(S(0)) = (I + p)^{-1}(s_0) \\ &= s_0 - q(s_0) \geq s_1. \end{aligned}$$

Donc $S(1) \geq s_1$.
Supposant que ce résultat soit vrais pour m, c'est-à-dire $S(m) \geq s_m$, pour $m + 1$ de (4.66), on a

$$(I + p)(s_{m+1}) \leq s_m. \tag{4.70}$$

Comme $(I + p)^{-1}$ est croissante, on aura

$$s_{m+1} \leq s_m - p(s_m). \tag{4.71}$$

Maintenant, intégrant (4.10) de m à $m + 1$, on obtient

$$S(m + 1) - S(m) + \int_m^{m+1} q(S(\tau))\, d\tau = 0.$$

Comme q est croissante, de (4.69) et de l'hypothèse on aura

$$\begin{aligned} S(m+1) &= S(m) - \int_m^{m+1} q(S(\tau))\, d\tau = S(m) - q(S(m)) = (I-q)(S(m)) \\ &= (I+p)^{-1}(S(m)) \geq s_m = s_m - q(s_m) \geq s_1. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Des relations (4.71) et (4.72), on déduit que

$$S(m+1) \geq s_{m+1}.$$

Ce qui prouve l'inégalité.
Pour terminer la preuve du lemme, il reste à prouver qui si $p(x) > 0$ pour $x > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} S(t) = 0$.

Donc, de (4.10), pour chaque $\bar{T} > 0$, on a $\quad S(\bar{T}) - S(0) + \int_0^{\bar{T}} q(S(\tau))\, d\tau = 0.$

Et grâce à (4.69), on a $\quad S(\bar{T}) \leq S(0) - \int_0^{\bar{T}} q(S(\bar{T}))\, d\tau.$

Donc

$$S(\bar{T}) \leq S(0) - \bar{T} q(S(\bar{T})). \tag{4.73}$$

Grâce à (4.69) on a que $S(t)$ est une fonction monotone décroissante et bornée inférieurement par 0, puis $S(m) \geq s_m$, pour $m \in \mathbb{N}$ et les nombres s_m sont positifs. Soit $C = inf\{S(t); t \geq 0\}$. On remarque que $C = \lim\limits_{t\to+\infty} S(t)$. On va montrer que $C = 0$.
En faisant un raisonnement par l'absurde, supposons que $C > 0$.

De (4.73) on obtient

$$S(\bar{T}) \leq S(0) - \bar{T} q(C), \qquad \forall \bar{T} > 0. \tag{4.74}$$

Comme $p(x) > 0$ pour $x > 0$, on obtient que $q(C) > 0$.
Maintenant, s'il existe x_0 telle que $q(x_0) \leq 0$, on aura

$$x_0 - (I+p)^{-1}(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow x_0 \leq (I+p)^{-1}(x_0) \Leftrightarrow (I+p)(x_0) \leq x_0.$$

Donc $p(x_0) \leq 0$, ce qui est absurde.
Soit $\bar{T} \in \mathbb{N}$ telle que $S(0) < \bar{T} q(C)$, de (4.74) on a $S(\bar{T}) < 0$ ce qui est absurde, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 0$.
Dans ce qui suit nous procéderons exactement comme dans l'ouvrage de Lasiecka et Tataru [Voir le lemme (3.2) et le lemme (3.3) de ([13])].

Rappeler que : $Q_T = \Omega\times]0,T[$.

Définissez maintenant :

$$Q_T^0 = \{(t,x) \in Q_T \quad | \quad |u_t| \leq 1 \ p.p \ sur \ \Omega\} \quad et \quad Q_T^1 = Q_T - Q_T^0.$$

En utilisant le point 3) de l'hypothèse (**H.1**), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{Q_T^1} a(x)(g^2(u_t) + u_t^2)\, dQ &\leq \int_{Q_T^1} a(x)(k^{-1} g(u_t)u_t + K g(u_t)u_t)\, dQ \\ &= (k^{-1} + K) \int_{Q_T^1} a(x)(g(u_t)u_t)\, dQ. \end{aligned} \tag{4.75}$$

D'un autre côté, de (4.5) et du fait que h est concave et strictement croissante avec $h(0) = 0$, on remarque que

$$h\left(\frac{a(x)}{1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}g(u_t)u_t\right) \leq h(a(x)g(u_t)u_t).$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_{Q_T^0} a(x)(g^2(u_t)+u_t^2)\,dQ &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_{Q_T^0}\frac{a(x)}{1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}g(u_t)u_t)\,dQ \\ &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_{Q_T^0} h\left(\frac{a(x)}{1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}g(u_t)u_t\right)\,dQ \\ &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_{Q_T^0} h(a(x)g(u_t)u_t)\,dQ. \qquad (4.76)\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&(1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_{Q_T^0} h(a(x)g(u_t)u_t)\,dQ \\ \leq\ & (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})mes(Q_T)h\left(\frac{1}{mes(Q_T)}\int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t\,dQ\right) \\ \leq\ & (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})mes(Q_T)r\left(\int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t\,dQ\right). \qquad (4.77)\end{aligned}$$

De (4.75), (4.76) et (4.77), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} a(x) \qquad (g^2(u_t)+u_t^2)\,dQ &\leq (k^{-1}+K)\int_{Q_T} a(x)(g(u_t)u_t)\,dQ \\ &+(1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})mes(Q_T)r\left(\int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t\,dQ\right). \qquad (4.78)\end{aligned}$$

De (4.78) et de la proposition (4.1.1.1) on obtient

$$\begin{aligned}E(T) &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})C\frac{k^{-1}+K}{1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}\int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t\,dQ \\ &+(1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})mes(Q_T)Cr\left(\int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t\,dQ\right). \qquad (4.79)\end{aligned}$$

Posons

$$L = (C(1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})mes(Q_T))^{-1} \quad et \quad c = \frac{k^{-1}+K}{1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)}mes(Q_T)}.$$

En appliquant p à chaque terme de (4.79), on obtient :

$$\begin{aligned}p(E(T)) &\leq p\left(\frac{1}{L}(cI+r)\int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t\,dQ\right) \\ &= (cI+p)^{-1}L\left(\frac{1}{L}(cI+r)\right)\int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t\,dQ \\ &= \int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t\,dQ \\ &= E(0)-E(T). \qquad (4.80)\end{aligned}$$

Maintenant, on remplace T par $m(T+1)$ et 0 par mT dans (4.80) on obtient

$$E(m(T+1)) + p(E(m(T+1))) \leq E(mT), \qquad pour \quad m = 0, 1, ..., +\infty.$$

En appliquant le lemme (4.1.2.1) avec $s_m = E(mT)$, on obtient

$$E(m(T)) \leq S(m), \qquad pour \quad m = 0, 1, ..., +\infty.$$

Finalement, on utilise la dissipation de $E(T)$, donnée par la relation (4.4) et le fait que $S(T)$ est monotone décroissante, posons $t = mT + \tau \quad avec \quad 0 \leq \tau \leq T$, on obtient

$$E(T) \leq E(mT) \leq S(m) = S(\frac{t-\tau}{T}) \leq S(\frac{t}{T} - 1), \qquad pour\ t \geq T.$$

Ainsi, la preuve du théorème (4.1.0.1) est complète.

4.2 Stabilisation exponentielle et polynômiale

D'après ce qui précède, on a une stabilité uniforme du problème (4.1). Dans ce qui suit, on va mettre des conditions sur g pour avoir d'autres types de stabilisation.

Théorème 4.2.0.1. *On suppose que g satisfait l'hypothèse (***H.1***), si de plus g satisfait la condition suivante :*

$$k|s| \leq |g(s)| \leq K|s|, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Alors $\exists M = M(k, K, L, mes(Q_T), c) > 0 telle\ que$

$$E(t) \leq E(0)exp(-Mt). \tag{4.81}$$

Démonstration :

Pour

$$h(s) = \frac{2}{\min\{k, \frac{1}{K}\}}s, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

h vérifie bien la condition (4.5).

D'après (4.6) on aura

$$r(s) = \frac{2}{\min\{k, \frac{1}{K}\}mes(Q_T)}s, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

D'après(4.7)

$$p(s) = (cI + r)^{-1}(Ls) = \frac{L\min\{k, \frac{1}{K}\}mes(Q_T)}{2 + c\min\{k, \frac{1}{K}\}mes(Q_T)}s, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, d'après (4.8), on a

$$q(s) = s - (I + p)^{-1}(s) = \frac{L\min\{k, \frac{1}{K}\}mes(Q_T)}{2 + (c + L)\min\{k, \frac{1}{K}\}mes(Q_T)}s, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

On remplace dans le problème (4.10) q par l'expression si-dessus, et on pose

$$M = \frac{L\min\{k, \frac{1}{K}\}mes(Q_T)}{2 + (c + L)\min\{k, \frac{1}{K}\}mes(Q_T)}.$$

On trouve :

$$S(t) = E(0)e^{-Mt}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.2.0.2. *On suppose que g satisfait l'hypothèse (***H.1***), si de plus il existe* $k, K > 0$ *tels que*

$$|g(s)| \leq K|s|, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

$$|g(s)| \geq K|s|^p, \qquad pour\ |s| \leq 1, \qquad et\ p \geq 1.$$

Alors

$$E(t) \leq Ce^{-\alpha t}, \qquad pour\ p = 1.$$

$$E(t) \leq Ct^{\frac{2}{1-p}}, \qquad pour\ p > 1.$$

Où les deux constante $C > 0$ *et* $\alpha > 0$ *dépendent en générale de* $E(0)$.

Démonstration :

Pour

$$h(s) = k^{-\frac{2}{1+p}}(1 + K^2)s^m, \qquad \forall s \in \mathbb{R} \quad avec\ m = \frac{2}{1+p} \leq 1.$$

De (4.6) on a

$$r(s) = (mes(Q_T))^{-m}k^{-\frac{2}{1+p}}(1 + K^2)s^m, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

De (4.7) on a

$$p(s) = (cI + r)^{-1}(s), \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$cp + Ms^m = Ks, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Où $M = (mes(Q_T))^{-m}k^{-\frac{2}{1+p}}(1 + K^2)$ Maintenant, de (4.8), on a

$$q(s) = s - (I + p)^{-1}(s), \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Pour s suffisamment petit, on a

$$p(s) \sim \alpha s^{\frac{1}{m}} \quad donc \quad q(s) \sim \alpha s^{\frac{1}{m}}.$$

On remplace dans (4.10) et on résout, alors

$$S(t) = \begin{cases} \left(\frac{p-1}{2}\alpha t + (E(0))^{\frac{1-p}{2}}\right)^{\frac{2}{1-p}} & pour\ p > 1. \\ E(0)e^{-\alpha t} & pour\ p = 1. \end{cases}$$

Conclusion

Après l'étude de la décroissance de l'énergie qui associe à la solution de l'équation des ondes on a prouvé la stabilité uniforme qu'elle nous donne une stabilité forte puis grâce à les hypothèses faites sur le feedback et certains changements ont été démontré la stabilité polynomiale et la stabilité exponentielle.

La stabilisation exponentielle implique la stabilité forte dans le cas où on ne peut pas montrer la stabilité forte car pour montrons la stabilité forte il faut que $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$ et comme $E(t)$ est expo-stable alors $E(t) \leq Ce^{-\alpha t}$ et on passe à la limite lorsque t tend vers à $(+\infty)$ on trouve le résultat , mais la réciproque de sa n'est pas vrai

i.e : la stabilité forte n'implique pas la stabilité exponentielle.

Ce sont les types de la stabilité de la solution d'équation des ondes les plus courantes .

Bibliographie

[1] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle " Théorie et applications"* , Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo ,1987.

[2] R.A.Adams ,*Sobolev Spaces*,Academic Press , New York San Francisco London ,1975.

[3] L.Schwartz ,*Théories Des Distributions*,Hermann,Paris ,1978.

[4] M.Choulli,*Une Introduction Aux Problèmes Inverses elliptiques et paraboliques*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg , 2009.

[5] J. L.Lions, *Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation des Systèmes Distribues.* Tome 1, Masson, 1988.

[6] J. L.Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires.* Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[7] E.Coddington,N.Levinson,*Theory of Ordinary Differential Equation*,New York :Mac Graw-Hill,1955.

[8] L. A.Medeiros, M.Milla Miranda ,*Espacos de Sobolev (iniciacao aos problemas elipticos nao homogèneos).*Rio de Janeiro : IM-UFRJ,2000.

[9] M. M. Cavalcanti,V. N. Domingos Cavalcanti , *Introduçao à teoria das distribuiçoes e aos espaços de Sobolev*, Maringa : Eduem, 2009.

[10] J.E. M.Rivera, *Teoria das Distribuiçoes e Equaçoes Diferenciais Parciais.* Textos Avançados, Petròpolis - RJ : LNCC, 1999.

[11] P.A.Raviart, J.M.Thomas, *Introduction à L'analyse Numérique des Équations Aux Dérivées Partielles.* Masson, Paris, 1983.

[12] M.Milla , *Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev.* Seminario Brasileiro de Analise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminario Brasileiro de Analise, p. 171- 191, 1988.

[13] I. Lasiecka et D. Tataru, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping*, Differential and integral Equations, 6 (1993), 507—533.

[14] M. Assila, M. M. Cavalcanti , V. N. Domingos Cavalcanti,*Existence and uniform decay of the wave equation with nonlinear boundary damping and boundary memory source term.* Calc. Var. Partial Differential Equations 15 (2002), no. 2, 155–180.

[15] K. Lemrabet, *Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier*, CRAS Paris, t.300, Série I, n0 15, 1985, 531–534.

[16] K. Lembaret , D. E. Teniou, *Un problème d'évolution de type Ventcel.* (an evolution problem of Ventcel type), Rev. Maghréb. Math. 1(1), (1992), 15–29.

[17] R. Bey, A. Heminna , J. P. Lohéac, *Boundary stabilization of the linear elastodinamic system by a Lyapunov-type method*, Revista Matemática Complutense 16(2), (2003), 417–441.

[18] A. Hemmina, *Stabilization frontière de problèmes de Ventcel, (Boundary stabilization of Ventcel problems)*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var. 5, (2000), 591–622.

[19] A. Hemmina, *Exact controllability of the linear elasticity system with evolutive Ventcel conditions*, Port. Math. 58(3), (2001), 271–315.

[20] M. M. Cavalcanti, A. Khemmoudj , M. Medjden, *Uniform stabilization of the damped Cauchy– Ventcel Problem with variable coefficients and dynamic boundary condition*, J. Math. Anal. Appl, Volume 328, Issue 2, p. p. 900–930., 2007

[21] A. Khemmoudj and M. Medjden, *Exponential Decay for the Semilinear Damped Cauchy–Ventcel Problem*, Bol. Soc. Paran. Mat., 22(2)(2004), 97–116.

[22] I. Lasiecka, R. Triggiani, P. F. Yao, *Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term Nonlinear Analysis Theory*, Methods and Application 30 (1) (1997), 111–122. Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysts.

[23] A. Kanoune , N. Mehidi, *Stabilization and control of subcritical semilinear wave equation in bounded domain with Cauchy–Ventcel boundary conditions*, Appl. Math. Mech. -Engl. Ed. 29 (2008), pp. 787–800.

[24] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti,R. Fukuoka et D. Toundykov, *Stabilization of the damped wave equation with Cauchy–Ventcel boundary conditions*, J. Evol. Equ, 2009.

[25] A. L. Ferreira, *Estabilização uniforme da equação da onda sobre uma superfície compacta com dissipação localmente distribuída*, Maringá - PR ,2009.

[26] D. Barbieri, *Estabilização da Equação da Onda com Dissipação e com Condições de Fronteira do Tipo Cauchy-Ventcel* , Maringá - PR ,2010.