République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

N° d'ordre :…….
Série :……..

THESE

Présenté pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences

En Génie des procédés

Thème :

MODELISATION DE LA CONVECTION NATURELLE EN PRESENCE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE DES PLAQUES DE DIMENSIONS FINIES

OPTION
Génie des procédés

Présentée par

Mr. Mohamed BOUKSANI

Soutenu le 15 / 03 / 2018

Devant le jury composé par :

Mr. S. HANINI	Professeur, U. Y. F. MEDEA	Président
Mr. L. LOUKARFI	Professeur, U. H. B. B. CHLEF	Examinateur
Mr. A. KHELIL	M C A, U. H. B. B. CHLEF	Examinateur
Mr. M. N. BOUAZIZ	Professeur, U. Y. F. MEDEA	Directeur de thèse

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Aux prunelles de mes yeux : mes parents, pour leurs amours et leurs sacrifices et que je pris à dieu le tout puissant, de leur accorder bonne santé et longue vie.

A ma femme et mes anges Lina & Yacine

A mes frères et sœurs, pour leurs soutient et leur encouragement à l'ambiance fraternelle dont ils sont les précurseurs, et que je pris à dieu le tout miséricordieux de les protégé.

A toute ma famille

A tous mes amis

A tous ce qui m'aime de loin ou de prés.

Le fidèle Mohamed

Remerciements

Tout d'abord, je dis : louange à Allah, Seigneur de l'univers, qui m'a donné la force, le courage, de l'endurance et la volonté ainsi que la conscience et pour avoir guidé mes pas pour bien mener cette thèse.

Ce modeste travail, n'aurait pu être mené à bien sans l'aide des personnes à qui je voudrais adresser toutes mes reconnaissances et remerciements.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de thèse Mr. Bouaziz Mohamed Nadjib, professeur et directeur de projet de recherche de laboratoire de Biomatériaux & Phénomènes de Transport à l'université de Médéa. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses précieux conseils, l'enthousiasme et les innombrables heures qu'il m'a consacrées. La qualité de son encadrement, sa perspicacité et lucidité scientifiques, et son esprit de rigueur ont été primordiaux tout au long de la thèse. Qu'il trouve ici le témoignage de ma plus profonde gratitude.

Je remercie vivement Monsieur Hanini Salah Professeur à L'université Dr Yahia Fares de Médéa pour L'honneur qu'il ma fait d'avoir accepté d'examiner ma Thèse et de présider le jury. Je remercie également Messieurs, le professeur Larbi Loukarfi et le maître de conférences Ali Khelil, à L'université Hassiba Ben Bouali de Chlef, qui ont accepté d'examiner cette thèse.

Mes plus profonds remerciements vont à :

Mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude. Ô mon seigneur, fais-leur, à tous deux, miséricorde comme il nous on élevé tout petit.

Ma femme et mes enfants pour leur apport moral, leurs conseils et leurs soutiens, qui m'ont toujours réanimé l'envie et le courage de continuer.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à tout les membres de ma famille

Je tiens également à remercier mes amis, pour leurs aides, disponibilités, suggestions et conseils, ainsi qu'à la discussion entourant les travaux de ce mémoire.

Je vous saurais gré d'accepter le renouvellement de mes remerciements et mon profond respect.

نـمـذجـة التدفق النابع من الحمل الطبيعي الحراري في وجود الهيدروديناميكا المغناطيسية على الصفائح ذات الأبعاد المحدودة

ملخص:

تقدم هذه الأطروحـة تحقيقا على انتقال الحرارة بالحمل الطبيعي الرقائقي من على صفيحة أفقية ، عمودية أو مائلة ذات أبعاد حقيقية بالموازاة مع مجال مغناطيسي وتبديد "أوم"، كما تم دراسة تأثير العديد من العوامل الهامة كعدد غراتشوف ، براندت و درجة الميلان على توزيع السرعة ودرجة الحرارة داخل الطبقة الحدية. تمت الدراسة على شطرين:

بالنظر إلى أوجه التفاوت المتباينة، بين نتائج النظرية التي تأخذ بعين الاعتبار نموذج اللوحة العمودية الكلاسيكي لـ "شميدت و بيكمان" والنتائج المتحصل عليها من الأبحاث التجريبية، والتي عموما يمكن أن تصل إلى ± 50٪ أو أكثر، تبدي الدراسة الأولى فشل هذا النموذج في قدرته على وصف الظواهر الفيزيائية في حالة صفائح أفقية ومائلة، الأمر الذي جعل إعادة النظر في النموذج الجديد المستوحى من تقنية الإظهار لـ"لواندوفسكي" لمعالجة المعادلات الحاكمة مصدر إلهام لنا و خاصة باستعمال الطريقة المقترحة من طرف " تشن" و التي تـــجعلها أكثر دقة.

الدراسة الثانية هي مهمة الإسهام في معرفة الظواهر الفيزيائية المتعلقة بالتدفق النابع من الحمل الطبيعي الحراري في وجود الهيدروديناميكا المغناطيسية باستعمال النموذج الذي تم التحقق منه سابقا على الصفائح المائلة ذات الأبعاد المحدودة. كما تم عرض تأثير شدة المجال المغناطيسي العمودي المنتظم وتأثير جول على الحمل الحراري الطبيعي في شكل مخططي درجة الحرارة والسرعة وكذا عدد نسلت.

كلمات مفتاحية: نـمـذجـة ، الحمل الحراري الطبيعي، الهيدروديناميكا المغناطيسية، صفائح ذات أبعاد محدودة ، ميلان، إظهار، عدد نسلت.

MODELISATION DE LA CONVECTION NATURELLE EN PRESENCE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE DES PLAQUES DE DIMENSIONS FINIES

RESUME :

Ce travail présente une investigation sur la convection naturelle laminaire conjuguée à l'effet du champ magnétique et la dissipation Ohmique sur une plaque réelle verticale, horizontale ou inclinée. L'effet des nombres de Grashof et de Prandtl et de l'angle d'inclinaison sur la distribution de la température et de la vitesse dans les couches limites est également étudié. Deux problèmes ont été étudies :

Devant les disparités mises en évidence, entre les résultats des considérations théoriques suivant le modèle classique de « Schmidt & Beckmann » de la plaque verticale et les investigations expérimentales, qui dans l'ensemble peuvent atteindre ± 50%, ou plus, le premier problème montre que l'incapacité de ce modèle à pouvoir décrire les phénomènes physiques pour le cas des plaques horizontales et inclinées nous a inspirer à réétudier la nouvelle approche de « Lewandowski », inspirer de la technique de visualisation, afin de résoudre plus précisément les équations gouvernantes avec la méthodes proposées par Chen.

Le deuxième problème a la tâche de contribuer à la connaissance des phénomènes physiques ayant pour objet la MHD des écoulements convectifs avec le modèle validé précédemment pour les plaques inclinées de dimensions finis. L'effet de l'intensité d'un champ magnétique transversal uniforme et de l'effet de Joule sur la convection naturelle sont présentés sous forme de profils de température, de vitesse et sur le nombre de Nusselt.

MOTS CLES : Modélisation, convection naturelle, MHD, inclinaison, visualisation, nombre de Nusselt.

MODELING OF NATURAL CONVECTION WITH MAGNETOHYDRODYNAMIC PRESENCE FROM PLATES OF FINITE DIMENSIONS

ABSTRACT :

This work presents an investigation on laminar natural convection coupled with the effect of the magnetic field and Ohmic dissipation from a vertical, horizontal or inclined plate. The effect of a wide range of Grashof and Prandtl numbers and angle inclination on temperature and velocity distribution in boundary layer is analyzed too. Two problems have been studied :

From the disparities between the results of the theoretical considerations following the classical model of “Schmidt & Beckmann” of vertical plate and the experimental investigations, which on the whole can reach ± 50% or more, the first problem shows that the inability of this model to be able to describe the physical phenomena for the case of horizontal and inclined plates inspired us to re-examine the new approach of “Lewandowski” , inspired from visualization technical, in order to more precisely solve the governing equations with the methods proposed by Chen.

The second problem has the task of contributing to the knowledge of the physical phenomena having the object of the MHD convective flows with the model validated previously for the inclined plates of finite dimensions. The effect of the intensity uniform transversal intensity of magnetic field and of the Joule effect on the natural convection are presented as profiles of temperature and velocity and profile of the Nusselt number.

KEY WORDS: Modeling, natural convection, MHD, inclination, visualization, Nusselt number.

TABLE DES MATIERES

Page

Dédicaces i

Remerciements ii

Résumé en arabe iii

Résumé iv

Abstract v

TABLE DES MATIERES vi

NOMENCLATURES ix

LISTE DES FIGURES xii

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE I. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction 8

I. 2. Travaux bibliographiques relatifs à la convection naturelle 9

I. 2. 1. Etat de l'art 9

I. 2. 2. Plaque verticale 12

I. 2. 3. Plaque horizontale 14

I. 2. 3. 1. Études expérimentales 14

I. 2. 3. 2. Études théoriques 16

I. 2. 4. Plaque inclinée 18

I. 3. Travaux antérieurs relatifs à la MHD 25

I. 3. 1. Plaque horizontale 26

I. 3. 2. Plaque inclinée 27

I. 3. 3. Plaque verticale 28

I. 3. 3. 1. Effets MHD sur un milieu poreux 28

I. 3. 3. 2. Effets MHD sur les propriétés de fluide 29

I. 3. 3. 3. Dissipation visqueuse 30

I. 3. 3. 4. Effets MHD en électrochimie 32

I. 3. 3. 5. Effets MHD sur la réaction chimique 34

I. 3. 3. 6. Effets de la diffusion croisée (transfert de masse) 34

I. 3. 3. 7. Effets rayonnement sur la MHD 35

I. 3. 3. 8. Ecoulement de fluide sur une feuille étirée 36

I. 4. Remarque importante 38

I. 5. Conclusion 38

CHAPITRE II LA CONVECTION NATURELLE EXTERNE & LA M.H.D

II. 1. Introduction 41

II. 2. Eléments fondamentaux de la convection 42

II. 2. 1. Processus de transfert 42

II. 2. 2. Types de convection et régimes 43

II. 2. 3. Aspects dynamiques de la convection naturelle 44

II. 3. Position générale du problème de la convection libre 45

II. 3. 1. Formulation mathématique 48

II. 3. 2. Équations gouvernantes de base et hypothèses simplificatrice 48

II. 3. 3. Méthodes de résolution des équations de couche limite 52

II. 3. 3. 1. Recherche de solutions affines 53

II. 3. 3. 2. Equations de Blasius en convection naturelle 53

II. 3. 3. 3. Méthodes intégrales 56

II. 4. Cas de la convection naturelle conjuguée sous l'effet magnétique 57

II. 4. 1. Présentation générale 57

II. 4. 2. Position du problème 58

II. 4. 3. Mise en équations du problème physique 60

II. 4 .3. 1. Hypothèses simplificatrices 60

II. 4. 3. 2. Formulation des équations de transport 61

II. 4. 3. 3. Equations du problème sous forme adimensionnelle 63

II. 4. 3. 4. Conditions aux limites 64

II. 5. Conclusion 65

CHAPITRE III. VISUALISATION & MODELE PROPOSE

III. 1. Introduction 66

III. 2. Modèle classique du transfert thermique par convection libre 67

III. 3. Nécessité d'un nouveau modèle 69

III. 4. Physique du modèle proposé 70

III. 4. 1. Modèle original proposé par Lewandowski 71
III.4.2. Résultats de visualisation de convection libre sur des plaques Inclinées 71
III. 4. 3. Comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux 74
III. 5. Conclusion 77

CHAPITRE IV. MODELISATION

IV.1. Introduction 79
IV.2. But de travail 79
IV.3. Mise en évidence de toutes régions 81
IV. 4. Analyse mathématique 82
IV. 5. Conclusion 87

CHAPITRE V. RESULTATS & DISCUSSION

V.1. Introduction 88
V.2. Description des objectifs de l'étude 88
V. 2. 1. Solution numérique 90
V. 2. 2. L'algorithme BVP4c 90
V. 3. Résultats et Discussion 92
V. 3. 1. Validation du code de calcul et du modèle physique 92
V. 3. 2. Influence de l'intensité du champ magnétique 101
V. 3. 3. Influence de la dissipation thermique 103
V. 4. Conclusion 105
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES 107
REFERENCES 112
ANNEXE 127

NOMENCLATURE

Symbole	*Désignation*	*Unité*
a, C, m, n	Coefficients	-
B	Champ magnétique (induction magnétique)	Tesla
B_0	Résultante du champ magnétique	Tesla
C_p	Chaleur spécifique à pression constante	kJ/kg K
E	Champ électrique	V
$\vec{e}$	Vecteur unitaire de la direction de $\vec{B}$	
f	Fonction de courant réduite $f(\xi,\eta) = \frac{\psi(x,y)}{5\nu\,(Gr_x \times cos\varphi/5)^{\frac{1}{5}}}$	-
$\vec{F}_{EM}$	Vecteur de la force électromagnétique de Lorenz	N/m^3
g	Accélération gravitationnelle	m/s^2
$\bar{h}$	Coefficient d'échange thermique convectif	W/m^2K
$\vec{J}$	Vecteur densité du courant électrique	A/m^2
L	Longueur de la plaque	m
P	Pression adimensionnelle	-
p	Pression statique à l'intérieur de la couche limite	Pa
Q	Flux thermique	W/m^2
$\dot{q}$	production de chaleur interne ou génération de chaleur	W/m^2
T	Température	K ou °C
T_r	Température de référence	K ou °C
t	Temps	s
U, V	Composantes adimensionnelles de vitesse	-
u, v	Composante de vitesse	m/s
U_r	Vitesse caractéristique de référence	m/s
X, Y	Coordonnées adimensionnelle	-
x, y	Coordonnée cartésienne	m
x_{ch}	dimension caractéristique linéaire	m
x_{cr}	distance de point de séparation	m

Symboles grecs

α	Diffusivité thermique, $\lambda/C_p \cdot \rho$	m^2/s
β	Coefficient d'expansion thermique	1/K
δ	Epaisseur de la couche limite	M
ΔT	Différence de température entre la surface et le fluide $T_p - T_\infty$	K
η	Variable de pseudo-similarité $\eta = \frac{y}{\xi(x)}$	-
θ	Température adimensionnelle $\frac{T - T_\infty}{T_P - T_\infty}$	-
λ	Conductivité thermique du fluide	W/m.K
μ	Viscosité dynamique	Pa.s
μ_0	Perméabilité magnétique du vide : $4\pi.10^{-7}\ H/m$	H/m
ν	Viscosité cinématique $\nu = \mu / \rho$	m^2/s
ξ	Paramètre de la non-similarité définie	-
ρ	Masse volumique	kg/m^3
σ	Conductivité électrique de fluide	(A/V m)
ϕ	Potentiel électrique dans l'équation (2.33)	V
$-\nabla\phi$	le champ électrique associé	V
φ	Angle d'inclinaison de la plaque	°
ψ	Fonction de courant	-
Λ	Fonction de dissipation visqueuse	W/m^2

Indices

I, II	Région I ou région II.
b, m, n	une puissance qui dépend du régime d'écoulement
Cr	Point de séparation des couches limites.
m	Mécanique ou dynamique
m	Motrice (équation 2.42)
P	Paroi
d	Dimension de la plaque chauffée
Th	Thermique
g	Global.
x	Selon l'ordonnée x ou aux propriétés fluide à l'intérieur de la couche limite.
y	Selon l'ordonnée y ou aux propriétés fluide à l'intérieur de la couche limite.
∞	Condition de fluide ambiant.

Nombres adimensionnelles

E_c	Nombre Eckert	$E_c = \dfrac{g\ \beta\ q''\ x^4}{\lambda\ \nu\ a}$
Gr_L	Nombres de Grashof global	$g\beta\ \Delta T\ L^3 / \nu^2$
Gr_x	Nombres de Grashof local	$g\beta\ \Delta T\ x^3 / \nu^2$
Ha	Nombre de Hartmann	$Ha = BL\left(\sigma/\rho\nu\right)^{\frac{1}{2}}$
M	Paramètre magnétique	$M = \dfrac{\sigma B_0^2\ L^2}{\rho\ \nu} = Ha^2$
Nu_L , $\overline{Nu_x}$	Nombres de Nusselt global ou moyen	$\bar{h}.L \,/\, \lambda$
Nu_x	Nombres de Nusselt local	$h.x \,/\, \lambda$
Pr	Nombres Prandtl	$\dfrac{\nu}{\alpha}$
Ra_L	Nombres de Rayleigh global	$g\beta\Delta T\, d^3/\nu\, a$
Ra_x	Nombres de Rayleigh local	$g\beta\Delta T\, x^3/\nu\, a$

LISTE DES FIGURES

		Page
Fig. I.1	Développement de couches limites le long d'une plaque verticale isotherme: (a) plaque chaude, (b) plaque froide.	10
Fig. I.2	Couches limites de la convection naturelle sur des surfaces inclinées	21
Fig. I.3	Modèle classique de la convection libre proposé par Schmidt & Beckmann.	26
Fig. II.1	Convection naturelle le long d'une plaque verticale, et le moteur chaleur responsable de commandement de l'écoulement.	42
Fig. II.2	Représentation schématique du modèle physique en convection libre pour une paroi verticale.	48
Fig. I1.3	Solutions semblables pour la plaque verticale plane à température constante pour les vitesses et les températures	55
Fig. II.4	Modèle physique du problème MHD	62
Fig. III.1	Modèles théoriques de la convection libre pour une surface plane.	68
Fig. III.2	Champ d'écoulement d'une plaque : a) horizontale, b) & c) inclinée	68
Fig. III.3	Modèle proposé du transfert thermique par convection libre en présence magnétohydrodynamique à partir des plaques a) verticale; b) inclinée; c) horizontale	70
Fig. III.4.1	Visualisation type des couches limites sur des plaques horizontales	72
Fig. III.4.2	Visualisation type des couches limites sur des plaques inclinées	72
Fig. III.5	Visualisation de champ d'écoulement sur des plaques horizontale et inclinées (d = 50mm, q" = 1000W/m^2 , Ra* = 6*10^7)	73
Fig. III.6	Comparaison entre la visualisation expérimentale de Fujii et Imura (1972) et la simulation numérique de la convection libre sur une plaque horizontale chauffée (à gauche) et légèrement inclinée (φ= 5 °, à droite), Ra = 6 * 10^7, Pr = 7).	73
Fig. III.7	Vérification de résultats de modélisation du modèle proposé par Lewandowski	75
Fig. III.8	Résultats des investigations expérimentales pour des plaques verticale et horizontale élaborées conformément à la théorie proposée par Lewandowski	76
Fig. III.9	Résultats des investigations expérimentales de Kierkus pour une	76

inclinaison φ = 45°, 60°, 75°, 90° comparés au modèle suggéré par Lewandowski

Fig. VI.1 Modèle bidimensionnel du phénomène physique proposé 82

Fig. V.1 Organigramme du code de calcul selon l'algorithme de BVP4c de Matlab 91

Fig. V.2 Variation de vitesse en fonction de η pour une plaque horizontale (φ = 0°) Pour : Pr = 0.72, Gr = $0.5*10^3$, M = 0 et E_c=0. 94

Fig. V.3 Variation de température en fonction de η pour une plaque horizontale (φ = 0°) Pour : Pr = 0.72, Gr = $0.5*10^3$, M = 0 et E_c=0. 94

Fig. V.4 Variation de vitesse en fonction de η pour plusieurs valeur d'inclinaison (φ = 0°, 30°, 45°, 60° et 75°) pour Pr = 0.72, Gr = $0.5*10^3$, M = 0 et E_c=0. 95

Fig. V.5 Variation de température en fonction de η pour plusieurs valeur d'inclinaison (φ = 0°, 30°, 45°, 60° et 75°) pour Pr = 0.72, Gr = $0.5*10^3$, M = 0 et E_c=0. 95

Fig. V.6 Variation de vitesse en fonction de η pour une inclinaison proche à la verticale (φ = 76.86°) pour Pr = 0.72, Gr = $0.5*10^3$, M = 0 et E_c=0. 96

Fig. V.7 Variation de température en fonction de η pour une inclinaison proche à la verticale (φ = 76.86°) pour Pr = 0.72, Gr = $0.5*10^3$, M =0 et E_c=0. 96

Fig. V.8 Pour plusieurs valeurs de *Gr*, le profil de vitesse en fonction de η pour une inclinaison de la plaque (φ = 60°) et pour Pr =0.72, M =0 et E_c=0. 97

Fig. V.9 Pour plusieurs valeurs de *Gr*, le profil de température en fonction de η pour une inclinaison de la plaque (φ =60°) et pour Pr =0.72, M =0 et E_c=0. 98

Fig. V.10 Pour plusieurs valeurs de *Pr*, le profil de vitesse en fonction de η pour une inclinaison de la plaque (φ = 60°) et pour Gr = $0.5*10^3$, M = 0 et E_c=0. 99

Fig. V.11 Pour plusieurs valeurs de *Pr*, le profil de température en fonction de η pour une inclinaison de la plaque (φ = 60°) et pour Gr = $0.5*10^3$, M = 0 et E_c=0. 100

Fig. V.12 Variation de nombre de Nusselt local avec le nombre de Rayleigh local pour une plaque inclinée *(φ = 60°)* sans champ magnétique et sans effet de Joule (M=0 et E_c=0). 102

Fig. V.13 Profil de vitesse en fonction de η pour plusieurs valeurs du champ magnétique M, pour une inclinaison (φ = 60°) et pour Gr = $0.5*10^3$, Pr = 0.72 et E_c=0. 102

Fig. V.14 Profil de température en fonction de η pour plusieurs valeurs du champ magnétique M, pour une inclinaison (φ = 60°) et pour Gr = $0.5*10^3$, Pr = 0.72 et E_c=0. 102

Fig. V.15 Profil de vitesse en fonction de η Pour plusieurs valeurs du nombre d'Eckert E_c , pour une inclinaison (φ = 60°) et pour Gr = $0.5*10^3$, Pr = 0.72 et M=5. 103

Fig. V.16 Profil de température en fonction de η Pour plusieurs valeurs du nombre d'Eckert E_c , pour une inclinaison (φ = 60°) et pour Gr = $0.5*10^3$, Pr = 0.72 et M=5. 104

Fig. V.17 Variation de nombre de Nusselt global avec le nombre de Rayleigh global pour plusieurs valeurs du champ magnétique M, pour une inclinaison (φ = 60°) et E_c=0. 105

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

L'étude de problème de l'écoulement entrainé par l'interaction de plusieurs phénomènes, a été rencontrée dans plusieurs différentes applications de fluide dans la science et de la technologie. Parmi ces études on cite celle relie l'effet de la magnétohydrodynamique (MHD dans la suite du manuscrit) avec l'écoulement dû au transfert de chaleur par la convection naturelle, qui joue un rôle très important dans les domaines d'engineering, agronomie, industrie pétrolière et même médicale.

D'abord, la MHD est une branche de la physique qui s'intéresse à l'interaction entre un champ électromagnétique et un fluide conducteur de l'électricité. Elle permette d'étudier les propriétés dynamiques en présence d'un champ magnétique. Cependant, la convection naturelle est un mode de transfert de chaleur qui intervient le plus souvent dans les échanges thermiques entre une paroi et un fluide, elle est due à l'action simultanée des différences de température qui existent dans le milieu et d'un champ de gravité.

La convection naturelle est un phénomène physique d'intérêt considérable qui se produit dans des systèmes naturels tel que la thermiques des atmosphères et des océans, mais aussi d'ingénierie comme la conception du domaine des bâtiments (chauffage et climatisation des locaux et isolation thermique des parois), dans les systèmes de refroidissement des composants électroniques et dans les systèmes de collection de l'énergie solaire etc., et ce de manière intentionnelle ou non.

Par ailleurs, en ce qui concerne la mécanique des écoulements de la convection libre on observe un couplage structurel entre le bilan de quantité de mouvement et le bilan d'énergie, ce qui rend la tâche plus ardue. De plus le nombre de paramètres qui interviennent dans ce genre de problème est important.

Alors, la maîtrise de ces phénomènes devient un enjeu industriel dans le contexte actuel de réduction de consommation d'énergie ou encore du recours plus fréquent à des matériaux mécaniquement sensibles à la chaleur. La majorité des situations d'intérêt pratique concerne aux écoulements en régime transitionnel et turbulent, et notamment des couches limites. En raison de la multiplicité d'échelles dues à la vitesse et à la température, la modélisation de ces écoulements requiert des développements théoriques adaptés.

Ces dernières années, de nombreux chercheurs dans des disciplines diverses (notamment les mécaniciens des fluides, les numériciens et les thermiciens) se sont penchés sur le problème de la convection naturelle. Ce mode de transfert thermique a été à l'origine de nombreux développements de recherche fondamentale. Ceci a permis en particulier d'approfondir les études de stabilité de certains écoulements et la compréhension de leur mécanisme pour n'importe quelles configurations géométriques du système et quelques soit le type des conditions aux limites.

En plus, certaines fluides utilisés dans la pratique sont conducteurs d'électricité et peuvent être affectés par l'effet d'un champ magnétique. Les études dans le domaine de la MHD ont montré que les quantités de tout type de transport (quantité de mouvement, transfert de chaleur et de masse) peuvent êtres contrôlées en imposant un champ magnétique d'intensité constante ou variable. L'application d'un champ magnétique sur la convection naturelle représente un sujet adéquat de recherche scientifique et elle a un intérêt immense dans plusieurs processus industriels, tels que la géophysique, les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires, les collecteurs de l'énergie solaire et spécialement lors du processus de croissance cristalline.

Un champ magnétique entraîne des changements importants sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur. En effet, il engendre une stabilité d'écoulement oscillatoire dans le transfert de chaleur, ralentit considérablement les vitesses et rendre les phénomènes de transport négligeable, tels que la convection thermique et l'inertie, par conséquence, un régime d'écoulement vertical et établi peut exister.

De plus, avec l'application d'un champ magnétique externe, il est possible d'agir sur les écoulements sans aucun contact physique et ainsi supprimer les fluctuations, contrôler les transferts thermique et massique, et donc améliorer la qualité des produits obtenus.

A cet effet, le ralentissement magnétique pour contrôler l'écoulement induit par un gradient de température est devenu un moyen privilégié et a fait l'objet de plusieurs applications industrielles.

Vu ces applications, le nombre de travaux sur l'écoulement convectif sous l'action du champ magnétique ne cesse d'augmenter comme il a attiré l'attention de plusieurs chercheurs.

Dans ce contexte, la convection est étudiée avec la motivation de l'éviter ou de la réduire, à cause de son rôle important dans la formation des défauts tels que l'hétérogénéité de la composition dans le cristal. La maîtrise et la compréhension des phénomènes liés à la convection naturelle avec ou sans l'effet combiné du champ magnétique sont ainsi des enjeux majeurs dans la conception et le dimensionnement de ces systèmes.

Néanmoins, un des facteurs les plus importants de l'étude de l'écoulement de fluide est la géométrie et l'orientation de la surface. Lors de la modélisation de l'écoulement du fluide, la géométrie sur laquelle circule le fluide affecte la façon dont le fluide s'écoule et d'autres propriétés. D'après la littérature, les géométries les plus fréquentes sont les surfaces verticales, horizontales, inclinées, parallèles, circulaires, coniques et sphériques.

Cependant, il est intéressant de noter que la majorité des recherches extensives développées sur la convection naturelle quelle soit avec ou sans champ magnétique, que ce soit expérimentales ou numériques, concernent des parois de dimensions infinies malgré que dans plusieurs situations et applications industrielles, par exemple, dans les mécanismes de collection de l'énergie solaire et ceux de l'isolation thermique, chaque paroi dans le système peut être partiellement active et peut avoir aussi une épaisseur et une conductivité thermique bien déterminées.

En revanche, la connaissance des mécanismes concernant les écoulements en convection naturelle le long des surfaces horizontales et inclinées est limitée d'une part à quelques résultats expérimentaux et ces observations mènent à des conclusions controversées d'autre part. Par ailleurs, les données disponibles sur le transfert de chaleur par convection naturelle sur les plaques horizontales et inclinées sont limitées et nécessitent donc un effort soutenu pour de plus grandes précisions

Ainsi, la détermination du coefficient d'échange de chaleur convectif est complexe. Il est fonction de l'écoulement du fluide, des propriétés thermiques du milieu fluide et de la géométrie du système. Sa valeur numérique n'est généralement pas uniforme sur une surface et elle dépend également du lieu où l'on mesure la température. Sa détermination est donc l'objectif principal de l'interaction thermique solide-fluide.

Une différence considérable entre les résultats des considérations théoriques suivant le modèle classique et les investigations expérimentales apparaît dans le transfert thermique par convection naturelle à partir des surfaces isothermes planes.

Les investigations ont prouvé que les méthodes de mesure et les équipements utilisés peuvent causer des erreurs malgré que leur grandeur soit constante et indépendante de l'angle d'inclinaison de la plaque. La seule exception est la méthode de gradient, dans laquelle l'exactitude peut être influencée par l'angle d'inclinaison de la surface, spécialement dans le cas de l'emplacement incorrect ou accidentel des points expérimentaux (thermocouples) sur la surface de mesure. Cette méthode, cependant, est utilisée principalement comme une méthode qualitative plutôt qu'une méthode quantitative, donc ne peut être la raison principale pour la discordance des valeurs mentionnées ci-après.

Certains chercheurs pensent que la raison fondamentale est que le modèle physique, sur lequel les diverses modélisations s'articulent, n'est pas conforme suivant les mécanismes réels déterminants.

Les tentations pour remédier aux écarts constatés amènent à des approches théoriques reposant sur une modélisation physique inadéquate avec les phénomènes observés et de ce fait aucun résultat obtenu ne sera acceptable en vue des connaissances expérimentales correspondantes.

Lewandowski en 1991**[1]**, a inspiré de la visualisation de transfert thermique convectif à partir des plaques inclinées un nouveau modèle. Cette approche a permet à l'auteur a succède à un écart de 20%, sur le coefficient de transfert de chaleur, entre ces résultats avec ceux de l'expérimental malgré qu'il utilise une méthode semi-analytique et qu'il suppose que les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique sont identiques et qu'il néglige le terme des forces d'inertie devant les forces visqueuses ainsi

que la vitesse transversale devant la longitudinale. Ce dernier a étudié l'écoulement hydrodynamique de la convection naturelle à partir d'une plaque inclinée de dimensions finies, comme il a montré que l'inclinaison de la plaque représente un critère décisif et important pour les régions des couches limites (région I et région II) en ce qui concerne l'hypothèse du profil de température. Ce nouveau modèle n'attire pas beaucoup l'attention des investigateurs a part quelques un tel que **Bouksani** **[2]** qui a élaboré ce modèle physique pour une variété de profil de température avec la méthode semi-analytique, pour plusieurs angles d'inclinaison et en absence d'un champ magnétique.

Cependant, à notre connaissance, d'après la recherche exclusive de **Ghosh & Pop** **[3]** en 2005, le problème traitant la MHD de la convection naturelle le long d'une plaque de dimensions finies n'a reçoit aucune attention dans la littérature. Tous les travaux qu'ont été publié et qui intéressent à l'écoulement de la MHD de la convection naturelle externe sont basé sur le modèle de « Schmidt & Beckmann » qui repose sur la monocouche limite sur une plaque semi-infinie appelé « classique ».

C'est dans ce contexte que s'inscrit notre travail. Il a pour tâche de l'élaboration d'un nouveau modèle qui décrit plus correctement les phénomènes physiques ayant pour objet le transfert thermique par convection naturelle sur des plaques inclinées ou horizontales réelles en présence magnétohydrodynamique. Le contenu de cette thèse s'articule sur trois parties :

La première est consacrée à l'étude de la convection naturelle dans les deux cas coopérant et opposant avec et sans champ magnétique. Elle contient deux chapitres :

Le premier est réservé à la revue des travaux déjà réalisés dans ce domaine suivant l'angle d'inclinaison de la plaque, on s'intéresse à savoir de tout ce qui a trait à la théorie du transfert de chaleur par convection naturelle, de cerner les contours des modèles classiques et de saisir le sens des paramètres décrivant les phénomènes.

La comparaison des résultats expérimentaux et théoriques est un procédé usité par les chercheurs pour trouver les raisons d'un tel comportement en vérifiant la description d'un modèle mathématique du phénomène physique. Néanmoins, ce chapitre montrera en évidence que malgré les différentes tentatives complémentaires pour réduire les écarts qui atteignent des niveaux de 50% dans l'écoulement convectif pour les plaques horizontal et

inclinée, les résultats obtenus en recourant à des précisions tant analytiques que numériques n'ont pas eu l'effet escompté.

En fait, les recherches menées lors de ce chapitre portent un aperçu sur le travail des autres chercheurs concernant le transfert de chaleur par convection naturelle à partir des plaques planes verticale, horizontale et inclinée avec ou sans présence d'un champ magnétique. Cette partie établit une base pour la présente thèse et fournit une comparaison pour les résultats de cette investigation.

Pour enrichir le mémoire, le deuxième chapitre concerne la compréhension de mécanisme des transferts convectifs avec ou sans champ magnétique, à la définition du problème, à sa modélisation mathématique et à la méthode de résolution employée. Pour cela, on a présenté une étude détaillée sur un modèle classique de transfert de chaleur par convection, sur lequel les chercheurs basent leurs investigations. Ce modèle, proposé par « Schmidt & Beckmann », a été obtenu sur la base des résultats expérimentaux de la visualisation des couches limites thermiques d'une plaque verticale isotherme, il est basé sur une augmentation homogène de la couche limite sur la surface plane semi-infinie. Ainsi, le même modèle à été également adopté pour la description des résultats obtenus avec les plaques inclinées et pour les plaques horizontales.

Pour compléter le parcours, on rappelle des deux méthodes de résolution des équations des couches limites laminaires en convection libre avec et sans présence magnétohydrodynamique à savoir l'analyse intégrale et les solutions de similarités et qui constituent souvent une alternative au recours de la méthode totalement numérique.

Dans la deuxième partie, le troisième chapitre montre la nécessité d'un nouveau modèle physique, dans l'étude de la convection naturelle pour les plaques horizontales et inclinée, selon la revue des travaux déjà réalisés dans ce domaine ainsi par la technique de la visualisation. Devant ces disparités mises en évidence; montrées abondamment dans la recherche bibliographique, une approche semi-expérimentale et à finalité qualitative sera entreprise dans ce chapitre qui met en relief la visualisation élaborée pour ce phénomène physique. Il s'agit de s'assurer de l'invalidité de l'unicité de la couche limite et sur laquelle repose le modèle initial décrit.

Dans cette optique, l'analyse des observations visuelles et à l'aide d'une caméra numérique, aura pour objectif la démonstration que le développement des couches limites de la convection libre pour les plaques isotherme de dimension finie, horizontales ou inclinées, s'effectue des deux côtés pour finir en panache thermique. Ce résultat est prévisible compte tenu par d'autres visualisations menées par des expérimentateurs, et pour lesquelles nous voudrions mener nos propres vérifications d'une manière globale et grossière.

La dernière partie est consacrée d'une part, à l'étude de la nouvelle approche de la convection naturelle en présence magnétohydrodynamique et dissipation Ohmique au-dessus des plaques inclinées de dimensions finies et d'autre part à observer et de déterminer l'influence de la variation d'un paramètre caractéristique, à savoir l'angle d'inclinaison et les nombres de Grashof et de Prandtl sur les profils de vitesse et de température dans les deux régions I & II. Elle se compose de deux chapitres.

Le quatrième chapitre est réservé à la définition du problème, à sa formulation mathématique des équations différentielles partielles et de présenter la méthodologie utilisée dans la résolution afin de décrire le phénomène ayant lieu dans le modèle présenté.

Dans cette modélisation du modèle proposé à partir des résultats des expériences de visualisation du quatrième chapitre, une solution de similitude des équations gouvernantes simplifiée sera présentée. La résolution simultanée de ces équations avait été effectuée numériquement en utilisant le code BVP4 du Matlab. Ce programme constitue la base des résultats obtenus ultérieurement. Ce modèle nous permet de distinguer la différence dans la distribution de la vitesse et de la température entre les deux couches limites opposées.

Dans le cinquième et dernier chapitre, on a analysé d'abord la satisfaction du modèle proposé et de la validité du code de calcul utilisé par rapport aux résultats de **Lewandowski [1]** et de vérifier si la visualisation a confirmé le bien fondé de l'usage de ce nouveau modèle. Ensuite, l'effet d'un champ magnétique et l'effet de Joule sur l'écoulement et le transfert de chaleur a été aussi discuté.

Enfin l'étude est finalisée par une conclusion générale récapitulant les principaux apports de cette thèse. Les limites de cette étude y sont présentées.

Chapitre I :

Recherche Bibliographique

CHAPITRE I
RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction

L'étude de problème de l'écoulement entrainé par l'interaction de plusieurs phénomènes, a été rencontrée dans plusieurs différentes applications de fluide dans la science et la technologie. Parmi ces études on cite celle relie l'effet de la magnétohydrodynamique avec l'écoulement dû au transfert de chaleur par la convection naturelle, qui joue un rôle très important dans les domaines de l'engineering, l'agronomie et l'industrie pétrolière. En fait, c'est une branche de la physique permettant d'étudier les propriétés aussi bien des conducteurs fluides, tel que les plasmas, lorsqu'ils sont sujets à un champ magnétique. A ses débuts, cette théorie décrivait les propriétés dynamiques des métaux liquides comme le mercure ou les alliages sodium-potassium en présence de champ magnétique.

Le nombre de travaux sur l'écoulement convectif sous l'action du champ magnétique ne cesse d'augmenter comme il a attiré l'attention de plusieurs chercheurs compte tenu ces applications dans la géophysique, astrophysique, formation géologique, récupération thermique des huiles et dans l'estimation des aquifères, réservoirs géothermique et stockage souterrains des rejets nucléaires, etc.

En fait, les recherches menées lors de ce chapitre portent un aperçu sur le travail des autres chercheurs concernant le transfert de chaleur par convection naturelle à partir des plaques planes verticale, horizontale et inclinée avec ou sans présence d'un champ magnétique. Cette partie établit une base pour la présente thèse et fournit une comparaison pour les résultats de cette investigation.

Cette étude bibliographique est composée de deux parties. La première, une revue des investigations replaçant l'étude de la convection naturelle dans son contexte scientifique et

qui sont abordés dans la seconde partie. La deuxième, une revue des recherches, travaux et réalisations portant l'effet de la MHD sur les différents procédés scientifiques et industriels que sont basés sur le transfert de chaleur par convection naturelle

I. 2. Travaux bibliographiques relatifs à la convection naturelle

La convection naturelle induite par le gradient de température dans le fluide est régit par des équations générales de conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie, bien qu'elles soient traitées de façon détaillée dans de nombreux ouvrages de base de mécanique des fluides et de transfert de chaleur tel que les références **[4-12].** Nous nous rappelons brièvement leurs formes générales avec la signification physique des différents termes dans le chapitre ultérieur

Ces dernières années, de nombreux chercheurs dans des disciplines diverses (notamment les mécaniciens des fluides, les numériciens et les thermiciens) se sont penchés sur le problème de la convection naturelle. Ce mode de transfert thermique a été à l'origine de nombreux développements de recherche fondamentale. Ceci a permis en particulier d'approfondir les études de stabilité de certains écoulements et la compréhension de leur mécanisme pour n'importe quelles formes et quelques soit le type des conditions aux limites.

En plusieurs applications techniques, les conditions à la surface ne sont pas uniformes et l'écoulement induit est laminaire, transitoire ou turbulent. Ces considérations expliquent pourquoi la convection libre en régime laminaire et même turbulent, avec les surfaces non uniformes, de point de vue thermique, a également suscité l'attention considérable dans le passé. Dans ce qui suit, nous relèverons les travaux réalisés tout en axant sur les particularités.

Pour mener correctement cette recherche, une classification selon l'angle d'inclinaison a été adoptée afin de mettre en relief les apports des intervenants.

I. 2. 1. Etat de l'art

La convection naturelle sur une plaque plane a fait l'objet de plusieurs études théoriques et expérimentales. Parmi lesquelles nous présentons quelques unes que nous avons jugées proches de notre cas.

De tous les problèmes, c'est celui de la convection le long d'une plaque plane soumise soit à une densité de flux constante soit à une température constante qui a fait l'objet des travaux les plus importants, aussi bien théoriques qu'expérimentaux **[13-15].**

De ces études, il ressort que la plupart des auteurs, dans cette forme d'écoulement, évaluent l'échange convectif sur tout le long de la plaque au nombre de Nusselt (Nu) par une relation de la forme:

$$Nu_x = f(Pr\ ,\ Gr_x) \qquad (1.1)$$

ou $$Nu_x = a \times Ra_x{}^b \qquad (1.2)$$

Où a est un facteur qui dépend de Pr dont la valeur varie suivant les auteurs **[13]**, et b est une puissance qui dépend du régime d'écoulement et de la configuration du système. En régime laminaire, les filets de fluide restent parallèles entre eux et l'écoulement est caractérisé par sa grande stabilité **,** on a en général $b = 1/4$, pour ce cas simple, le transfert évalué théoriquement par méthodes numériques ou analytiques, puis vérifié expérimentalement **[16].** En régime turbulent, on a en général $b = 1/3$.

Sous la formulation **(1.2)**, des auteurs comme **Ostrach** en 1953**[17] , Sparrow et Gregg** en 1956 **[18]** et **Eckert** en 1959 **[16]** ont, dans leurs travaux, traduit l'influence du fluide (à travers le nombre de Prandtl) sur les échanges thermiques paroi-gaz. L'équation **(1.1)** a par contre été souvent utilisée pour évaluer les transferts locaux en fonction des régimes et zones d'écoulement classés suivant les valeurs du nombre de Rayleigh.

Cette classification délimite trois zones d'écoulement en fonction de Ra_x **(Fig. I.1)**. En outre, l'on peut remarquer que si la limite entre régime laminaire et régime transitoire est assez bien définie, celle entre le transitoire et le turbulent est encore mal connue **[19]**.

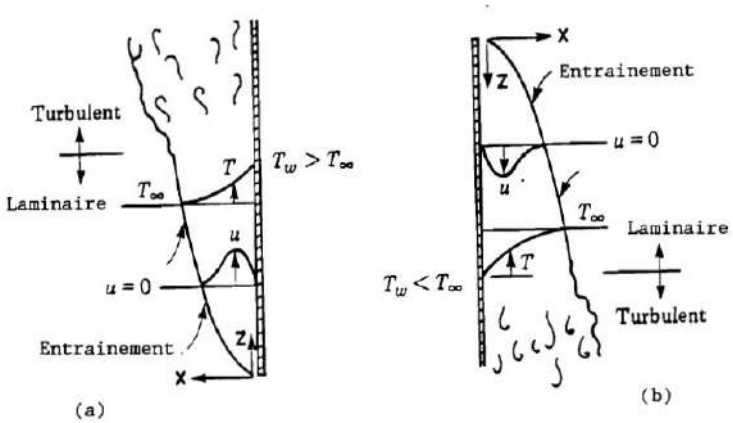


Fig. I.1: Développement de couches limites le long d'une plaque verticale isotherme: (a) plaque chaude, (b) plaque froide.

Les conditions pour lesquelles ces équations sont valides ont été considérées comme fondamentales, **Ostrach** [17] et **Kuiken** [20], en particulier, ont considéré leur fiabilité. Ce dernier auteur a évalué la validité des conditions pour des valeurs élevées et des valeurs faibles de nombre de Prandtl.

En effet, de 1881 à nos jours, les chercheurs se sont intéressés à la convection naturelle à partir de plaques planes. Les premiers travaux ont été effectués avec de l'air et de l'eau ($Pr \sim 1$), mais ces dernières années, on a accordé de plus en plus d'attention aux écarts existant près de la basse gamme des nombres de Prandtl (tel que les métaux liquides).

La première solution analytique pour une plaque isotherme verticale plane est généralement attribuée par Lorenz en 1881 qui a développé une relation qui dépende de les variables significative de la convection libre [21]. Sa solution peut être exprimée comme

$$Nu_L = 0{,}548\,(Gr_L \cdot Pr)^4 \qquad (1.3)$$

Pohlhausen [22] en 1911 a résolu ces équations d'abord, tandis que **Schmidt et Beckmann** [23] ont les résolues en 1930. Une amélioration majeure a été faite, ils ont déterminé expérimentalement les profils de vitesse et de température dans l'air ($Pr \sim 0.7$). Les profils de température ont été obtenus par des thermocouples et les profils de vitesse avec une fibre de quartz vue au microscope et calibrée de sorte que la vitesse était une fonction de la dérivée. Ainsi, ils ont formulé le problème analytiquement et avec l'aide de **Pohlausen** ont trouvé une solution de similarité [24, 25]. Leurs résultats peuvent être exprimés tel que :

$$Nu_X = 0{,}359\,(Gr_X)^4 \qquad (1.4)$$

Généralement, cette solution a été jugée adéquate pour l'air et l'eau ($Pr \sim 1$), bien qu'elle subsiste suffisamment de contradictions fondamentales pour susciter l'intérêt supplémentaire des investigations.

Ostrach [17], résolu les mêmes équations gouvernantes le long d'une plaque verticale chauffée et ils ont obtenu La distribution de la vitesse et de la température dans la couche limite laminaire pour une gamme de nombre de Prandtl allant de 0,01 à 1000.

Dans le but de présenter la littérature caractérisant la dynamique et la thermique des écoulements de convection naturelle sur une plaque plane, on a tenté d'inclure les travaux significatifs les plus cités dans la littérature, mais il est probable que certaines contributions dignes ont été négligées. **Julian [26]** en 1968, a publié une revue extensive de ce problème complété avec des classifications croisées. En outre, **Chang et al. [27]** en 1964, ont une revue de bonne chronologie de cette littérature. Pour une liste générale des rapports les plus récents des années soixante, les Revues annuelles de *« Industrial and Engineering Chemistry »* de 1969 et 1970 **[28, 29]**, et la revue de transfert de chaleur dans *« International Journal of Heat and Mass Transfer »* de 1970 **[30].**

I. 2. 2. Plaque verticale

Dans la littérature, le cas de l'écoulement le long d'une plaque plane verticale est l'une des configurations de base dans le cadre des études sur la convection naturelle. Il existe donc de très nombreuses études analytiques, numériques et expérimentales concernant cette configuration.

Une brève description du développement du flux adjacent à une plaque verticale sera donnée. Il existe plusieurs excellents articles de revue traitant de cette situation par **Ede** en 1956 et 1967 **[31, 32], Ostrach** en 1964 **[33], Gebhart** en 1973**[34, 35].**

La plupart des études existantes sur le transfert de chaleur par convection naturelle à partir de plaques planes ont considéré la configuration où la plaque est large par rapport à la hauteur. Cela signifie que l'écoulement peut être supposé être bidimensionnel, c'est-à-dire que les effets de bord peuvent être ignorés.

En 1915, Nusselt établit mathématiquement les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement, et de l'énergie pour le cas de transfert de chaleur par convection naturelle. Il a assumé la première investigation dans laquelle les données de transfert de chaleur ont été exprimées en termes de paramètres adimensionnel, c'est-à-dire en termes de ce qu'on appelle maintenant les nombres de Nusselt, ***Nu***, Grashof, ***Gr*** et Prandtl, ***Pr***. Il a montré que l'équation **(1.1)** de la convection libre, qu'elles soient locales ou moyennes, pourraient être exprimées.

Des expériences précoces sur le transfert naturel de chaleur par convection à partir de plaques plates verticales larges dans l'air ont été entrepris par **Schmidt et Beckmann [23].** Les résultats ont été obtenus pour des plaques planes ayant des hauteurs de 12,5 cm et 50 cm qui ont été maintenues à une température de 65°C dans l'air à 15°C. Ils ont également obtenu une solution analytique en utilisant une forme simplifiée des équations gouvernantes obtenues en négligeant certains termes, notamment en supposant que la composante de vitesse normale à la plaque comme négligeable.

Dans le même temps, **Pohlhausen (** selon **Squire [36])** a réduit les équations différentielles partielles simplifiées aux équations différentielles ordinaires en appliquant des transformations de similarité. **Ses distributions de température prédites étaient d'accord avec les mesures expérimentales, mais il y avait des différences significatives entre les distributions de vitesse prédites et mesurées.** Une méthode générale de solution a été décrite par **Squire [36].** Dans son travail, une expression polynomiale de troisième ordre appropriée a été utilisée pour la distribution de la vitesse et l'expression du polynôme de second ordre a été utilisée pour la répartition de la température pour intégrer les équations de quantité de mouvement et de l'énergie. Comme discuté dans **[36]**, (**Saunders** en 1939**)** et **(Schuh** en 1948) ont obtenu des solutions pour différents nombres de Prandtl en utilisant des méthodes approximatives. Les équations différentielles ordinaires simplifiées de **Schmidt et Beckman [23]** ont été résolues pour différents nombres de Prandtl par **Ostrach [17]** en utilisant un système informatique avancé. Il semble avoir été le premier à présenter les solutions exactes de similarité numérique pour l'écoulement des couches limites par convection libres sur une plaque isotherme plane.

Une solution exacte des équations de la couche limite laminaire pour la convection naturelle sur une plaque verticale ayant un flux de chaleur pariétale uniforme a été obtenue par **Sparrow et Gregg** en 1956 **[18]** . Les résultats de leurs expériences pour cette situation se sont avérés être en accord avec les résultats théoriques.

Une large utilisation des équations de corrélation empirique basée sur les résultats expérimentaux pour estimer le nombre du Nusselt moyen pour une plaque isotherme pour large gamme de nombre de Rayleigh globale pour les régions de flux laminaire, transitoire et turbulent et pour différentes valeurs du nombre de Prandtl a été construit par **Churchill** en 1973 **[37] et Churchill et Chu** en1975 **[38].**

Un revue général de ces études est présenté dans de nombreux livres de transfert de chaleur tels que ceux cités dans les références **[39-53].** La plupart de ces livres traitent également des méthodes couramment utilisées basées sur la solution de similarité ou sur la méthode de l'équation intégrale qui a été utilisée pour calculer le transfert de chaleur convectif pour les conditions sous lesquelles les équations de la couche limite s'appliquent.

I. 2. 3. Plaque horizontale

La majorité des études disponibles dans la littérature sur le transfert de chaleur par convection naturelle à partir de plaques rectangulaires horizontales orientées vers le haut ont été réalisées expérimentalement en utilisant de l'air ou de l'eau comme fluide de travail. En effet, l'approche analytique du problème, typiquement basée sur la théorie de la couche limite, n'a pas pu tenir compte des effets de la largeur finie de la plaque sur la performance de transfert de chaleur, ainsi que des effets de la séparation la surface de la plaque ou d'autres instabilités de flux. Par contre, au moment de l'exécution de la plupart des investigations, les méthodes numériques de résolution des équations de masse, de quantité de mouvement et de transfert d'énergie n'étaient pas encore complètement développées et validées.

I. 2. 3. 1. Études expérimentales

La première étude expérimentale sur le transfert de chaleur par convection libre à partir de surfaces planes horizontales a été réalisée dans l'air par **Schmidt** **[54]** en 1932, dont les images de Schlieren ont montré qu'un écoulement de couche limite peut être attendu près des bords d'attaque. En 1935, **Weise** **[55]** a mesuré la distribution de la température sur des plaques carrées horizontales chauffées sur leurs côtés, tandis que **Kraus** **[56]**, cinq ans plus tard, a déterminé également les champs de vitesse correspondants.

Des résultats expérimentaux ont été publiés en 1950 par **Fishenden et Saunders** **[57]** qui ont utilisé des plaques carrées ou presque carrées situées dans l'air, en 1952 par **Bosworth** **[58]** qui a intéressé à la forme de la plaque et le fluide de travail, et en 1968 par **Mikheyev** **[59]** qui a apparemment utilisé des plaques rectangulaires, a conclu que le taux de transfert de chaleur d'une plaque horizontale orientée vers le haut était de 30% supérieur à celui d'une plaque verticale de même taille dans les mêmes conditions.

En 1968, **Husar et Sparrow [60]** ont utilisé une technique électrochimique pour visualiser le champ d'écoulement sur des surfaces horizontales chauffées. Ils ont observé que le fluide se déplace le long des chemins parallèles, perpendiculaires aux bords de la plaque jusqu'à atteindre la région centrale de la plaque, mais les raisons de ces modèles d'écoulement n'ont pas été discutées en détail.

Rotem et Claassen [61], en 1969, ont réalisé des visualisations avec un appareil de Schlieren de couleur semi-focalisée. Ils ont signalé que les couches limites existent fine aux bords de la plaque et se décomposent ensuite en instabilité de grande-tourbillons à une certaine distance des bords. Cependant, on ne sait pas si les écoulements de bord ont été empêchés sur certains côtés de la surface chauffée, c'est-à-dire si les couches limites formées à partir des quatre bords de la plaque simultanément.

Hassan et Mohamed [62] et Fujii et Imura [93], respectivement en 1970 et 1972, ont considéré la surface horizontale orientée vers le haut dans le cadre d'études plus vastes de la convection libre à partir de plaques inclinées.

En 1973, **Pera et Gebhart [63, 64]**ont mesuré la distribution de température et les coefficients locaux de transfert de chaleur dans l'air en utilisant un interféromètre de Mach-Zender, avec visualisation supplémentaire des lignes de courant par la fumée. Ils ont révélé que de graves mécanismes d'instabilité perturbent le flux de la couche limite à une certaine distance du bord d'attaque de la plaque, signalant l'existence d'effets tridimensionnels.

En 1976, **Al-Arabi et El-Riedy [65]** ont obtenu des données de transfert de chaleur locales et moyennes pour des plaques horizontales de différentes formes sur la base de la quantité de condensat de vapeur collectée dans les compartiments sous les plaques. Ils ont constaté que la le transfert de chaleur moyen à partir d'une plaque circulaire était pratiquement le même que celui d'une plaque carrée de longueur de côté égale au diamètre de la plaque circulaire qui a conduit les auteurs à conclure que les effets des coins de la plaque sur le taux de transfert de chaleur sont négligeables.

Ishiguro et al. [66], en 1978, ont mené une étude interférométrique, indiquant que le champ de température sur une plaque horizontale devenait tridimensionnel lorsque le nombre de Rayleigh basé sur la largeur de la plaque dépasse 10^5. La même méthode expérimentale a été utilisée par **Yousef et al. [67]** en 1982 pour dériver les coefficients de

transfert de chaleur locaux et moyens des plaques carrées immergées dans un collier environnant, utilisées pour minimiser les effets de bord.

En 2000, **Lewandowski et al. [68]** ont effectué des mesures de transfert de chaleur et visualisé les structures d'écoulement convectif dans l'eau au-dessus des plaques rectangulaires en injectant un traceur de colorant bleu foncé à travers de petits trous répartis le long du périmètre de chaque plaque. La même année, **Pretot et al. [69]** ont effectué des expériences en utilisant une plaque rectangulaire chauffée avec un flux de chaleur uniforme. Leurs résultats montrent que, à partir des bords de la plaque, le transfert de chaleur est caractérisé par une couche limite thermique qui se détache de la surface près du centre de la plaque chauffée, donnant une montée à un panache thermique flottant.

Plus récemment, des mesures de transfert de chaleur à partir de plaques rectangulaires ont été réalisées dans l'air par **Martorell et al. [70]** en 2003, et pour des plaques de différentes valeurs de rapport d'aspect a été étudiée par **Kitamura et al [71]** en 2015 et dans l'eau par **Kozanoglu et Lopez [72]**, en 2007.

I. 2. 3. 2. Études théoriques

La première étude théorique sur le transfert de chaleur convective naturelle à partir de surfaces horizontales a été réalisée en 1952 par **Stewartson [73]**, qui a démontré l'existence de solutions de similarité pour une surface plane isotherme semi-infinie dans l'air. Toutefois l'analyse a été affectée par une erreur de signe qui a conduit l'auteur à une conclusion erronée concernant les conditions d'existence d'un écoulement de couche limite sur une telle plaque. Ceci a été corrigé en 1965 par **Gill et al. [74]**, qui ont montré que le seul flux pour lequel des solutions de couche limite pouvaient être obtenues était celui généré par une plaque chauffée orientée vers le haut, ou une plaque refroidie vers le bas.

En 1969, **Rotem et Claasem [61]** ont intégré les équations de la couche limite pour les écoulements convectifs libres au-dessus d'une plaque semi-infinie isotherme. Les résultats obtenus ont été présentés pour certaines valeurs spécifiques du nombre de Prandtl, y compris les cas asymptotiques de nombres de Prandtl nuls et infinis. En 1973, **Pera et Gebhart [64]** ont également présenté des solutions de similarité.

Les premières solutions numériques de l'équation complète de Navier-Stokes, de continuité et de transfert d'énergie de la convection libre à partir de plaques horizontales orientées vers le haut ont été publiées en 1983 par **Goldstein et Lau [75]**. En 1986, **Chen et al. [76]** ont considéré la plaque semi-infinie horizontale avec une température de paroi uniforme ou un flux thermique uniforme comme cas particulier à partir de plaques inclinées à température de surface ou flux thermique variable.

En 1991, **Lewandowski [1]** a présenté une solution quasi-analytique d'un modèle théorique, dans lequel les couches limites croissent de chaque bord de plaque jusqu'à se transformer en un panache au point de séparation.

Lewandowski et al. [68], en 2000, ont proposé deux modèles différents pour décrire les structures d'écoulement convectif qui proviennent d'une plaque rectangulaire. Le premier modèle était fondé sur les hypothèses selon lesquelles les lignes de courant dans les couches limites sont parallèles entre elles et le flux de fluide qui est normal aux bords de la plaque est dirigé vers l'axe de la plaque; ici les couches limites se transforment en un flux convectif primaire linéaire, qui, étant instable, se divise en panaches secondaires. Le deuxième modèle reposait sur l'hypothèse que les lignes de courant des couches limites sont radiales et que le flux de fluide est dirigé vers un ou plusieurs points situés au centre de la plaque où les couches limites se transforment directement en une ou plusieurs couches distinctes panaches flottants. En raison de leurs visualisations, les auteurs ont conclu que le modèle d'écoulement radial devrait être préféré aux faibles valeurs du nombre de Rayleigh, en particulier pour les plaques carrées ou aux extrémités des plaques rectangulaires, alors que le modèle parallèle est meilleur pour l'écoulement à nombre de Rayleigh élevé.

Des solutions numériques des équations gouvernantes ont été obtenues en 2003 par **Wei et al. [77]**, dans le cadre d'une étude 2D plus large sur la convection libre à partir de plaques isothermes chauffées des deux côtés, et par **Martorell et al. [70]**, qui ont dérivé des solutions 2D et 3D pour des plaques minces, concluant que bien que l'écoulement près des extrémités de la plaque soit typiquement tridimensionnel, l'écoulement global ne subit aucun changement dramatique par rapport à la structure 2D.

Corcione [78] en 2007, a fait une étude comparative en examinant des résultats antérieurs (expérimentaux, numériques et analytiques) sur des plaques horizontales. Il a été

démontré que les différences entre les prédictions des corrélations examinées, qui dans l'ensemble peuvent atteindre ± 50%, ou plus, diminuent de manière significative, lorsque les résultats sont regroupés selon le fluide de travail, c'est-à-dire l'air ou l'eau, et la forme de la plaque, c'est-à-dire une bande infinie carrée, rectangulaire ou bidimensionnelle; un tel écart entre les données étant attribuable aux différentes méthodes d'investigation, aux conditions de limites thermiques et aux effets de bord. Il a proposé de faire une interpolation entre l'ensemble des équations de corrélations de différents auteurs avec une approximation assez acceptable afin d'aider les concepteurs et les constructeurs de transfert de chaleur dans les applications.

I. 2. 4. Plaque inclinée

En général, les problèmes de la convection libre pour des plaques planes inclinées pour des conditions thermiques variables n'ont pas suscité beaucoup d'attention. Néanmoins, ceci a motivé les travaux cités dans les références **[3, 76, 79-83].**

L'influence de l'inclinaison de la paroi a été l'objet de recherche de plusieurs auteurs, leurs résultats montre une influence très importante de l'inclinaison sur les profils de vitesse et de température et les lois de transfert thermique, ainsi que sur le $Ra_{critique}$ de transition laminaire-turbulent. De manière générale, nous pouvons remarquer que l'effet de l'inclinaison diminue la vitesse de l'écoulement, et modifie le coefficient d'échange.

Le premier investigateur à étudier ce problème était **Schmidt [84]** qui a obtenu une belle collection de photographies Schlieren de flux de convection naturelle au-dessus et au-dessous d'une surface inclinée.

Tautz [85] en 1943, a montré que le coefficient de transfert de chaleur sur une plaque inclinée dans l'air était indépendant de l'angle jusqu'à 45° par rapport à la verticale et entre 45° et 90° diminué linéairement avec l'angle. Depuis lors, plusieurs papiers ont montré théoriquement qu'en négligeant le gradient de pression dans la direction normale à la plaque, la corrélation de transfert de chaleur pourrait être exprimée comme :

$$Nu_x \propto (Gr_x \cdot \cos\varphi \ Pr)^{1/4} \qquad (1.5)$$

Rich [86] en 1953, a présenté la première étude extensive, théorique et expérimentale, sur cette configuration dans l'air. Il a obtenu des coefficients de transfert locaux dans la

zone d'écoulement laminaire pour une plaque inclinée de 101,6 mm de largeur 9 406,4 mm de hauteur. Il a utilisé l'interféromètre Mach-Zehender dans la détermination du champ de température pour la gamme des nombres de Grashof locaux de $\mathbf{10^6}$ à $\mathbf{10^9}$. L'angle d'inclinaison de la plaque chauffée était compris entre **0 °** et **40 °** par rapport à la verticale. Ses résultats indiquent que le coefficient de transfert de chaleur pour une plaque chauffée inclinée pourrait être prédit, en utilisant les équations d'une plaque verticale, si le terme gravitationnel dans le nombre de Grashof était pris comme composant parallèlement à la surface inclinée.

En 1964, **Michiyoshi** **[87]** a appliqué la méthode approximative intégrale des équations d'un écoulement convectif naturel le long d'une plaque isotherme mince, inclinée, infiniment large (ce qui signifie que le flux était bidimensionnel), pour un nombre Prandtl de fluide proche de l'unité. Il a constaté que le coefficient de transfert de chaleur moyen de la surface inférieure est supérieur à celui de la surface supérieure et que le coefficient de transfert moyen augmente si la plaque approche à la position verticale. Dans cette analyse, il a négligé l'effet du gradient de pression longitudinale dans la couche limite induite par les forces de flottabilité et ses résultats ne peuvent donc pas être précis pour les cas où la plaque est proche de l'horizontale.

En 1968, **Kierkus** **[88]** a utilisé l'analyse de perturbation des équations de la couche limite pour obtenir des solutions pour les champs de vitesse et de température pour un écoulement laminaire de la convection libre sur une plaque isotherme inclinée. En utilisant un petit paramètre qui implique l'inclinaison de la surface et le nombre de Grashof comme paramètre de perturbation et en utilisant la solution de similarité pour une plaque verticale isotherme comme l'approximation de l'ordre zéro, il a déterminé une solution approximative de premier ordre pour les angles allant jusqu'à **45°**, comme angles d'inclinaison de la plaque, pour les deux régions, positive et négatifs. La vitesse, la température et les résultats de transfert de chaleur locaux de **Kierkus** **[88]** appuient sur la conclusion de **Rich** **[86].**

Vliet **[89]** semble être le premier qui a présenté des résultats expérimentaux de transfert de chaleur local pour la convection naturelle sur des surfaces inclinées à flux de chaleur uniforme utilisant de l'eau et de l'air en tant que fluides d'essai. Les données étaient pour les nombres de Rayleigh de $\mathbf{10^7}$ à $\mathbf{10^{16}}$ et les angles d'inclinaison de la verticale à **30°** de l'horizontale et comprenaient les résultats pour les régions d'écoulement laminaire, de

transition et turbulentes. Dans cette étude, de fausses parois ont été attachées de chaque côté de la plaque chauffée afin de réduire les effets de bord. Les résultats de **Vliet** étaient d'accord avec ceux de **Rich** **[86]** et corrélaient bien dans la région laminaire avec la théorie de la plaque verticale lorsque le composant de gravité le long de la surface était utilisé**.** La transition de l'écoulement laminaire vers l'écoulement turbulent a été fortement affectée par l'angle d'inclinaison, la valeur de transition de $Gr_x \times Pr$ diminuant à partir de $\mathbf{10^{13}}$ pour une surface verticale à environ $\mathbf{10^{8}}$ pour une surface inclinée à un angle de **30°** à l'horizontale.

Une étude expérimentale de la convection naturelle sur des plaques planes isothermes inclinées a également été menée par **Hassan et Mohamed** **[90]** en 1970**.** Leurs expériences ont été effectuées dans l'air et leurs résultats couvrent une large gamme d'angles d'inclinaison de la plaque à partir d'une plaque horizontale chauffée orientée vers le haut et d'une plaque horizontale chauffée orientée vers le bas. Pour les conditions où il était possible de comparer leurs résultats avec les résultats existants, un bon accord a été obtenu.

L'écoulement laminaire de la convection naturelle sur une surface isotherme inclinée a également été étudié par **Lee et Lock** **[91]** en 1972**.** Ils résolvent numériquement les équations de la couche limite appropriée pour le flux d'air et présentaient graphiquement les effets des angles d'inclinaison sur les profils de transfert de chaleur, de température, de pression et de vitesse.

Fuji et Imura **[92]** en 1972, ont entrepris une étude expérimentale concernant le transfert de chaleur convectif naturel à partir de plaques chauffées de largeur finie (30 cm de hauteur × 15 cm de largeur et 5 cm de hauteur × 10 cm de largeur) immergées dans de l'eau à des angles d'inclinaison arbitraires. Leur surface chauffée n'était ni isotherme, ni de flux de chaleur pariétal uniforme à la surface et l'étude portait sur des nombres de Rayleigh entre $\mathbf{10^{5}}$ et $\mathbf{10^{11}}$. Ils ont constaté que les nombres de Nusselt pour les plaques plus petites étaient légèrement plus grands que ceux de la plaque avec la plus grande hauteur. Pour la plaque inclinée chauffée vers le haut, la température de la paroi s'est révélée plus uniforme que celle de la plaque inclinée tournée vers le bas et plus l'angle d'inclinaison est importante**,** plus le nombre de Rayleigh de transition est faible. La cause de la variation observée du coefficient de transfert de chaleur avec l'angle d'inclinaison a été attribuée à une variation de la nature d'écoulement dans la couche limite. Ils ont également corrélé leurs résultats dans les régions de flux laminaire et turbulent. Pour la

face inférieure des plaques froides et la face supérieure des plaques chaudes **(Fig. I.2)**, la couche limite devient plus en plus instable avec l'augmentation de *Ra*.

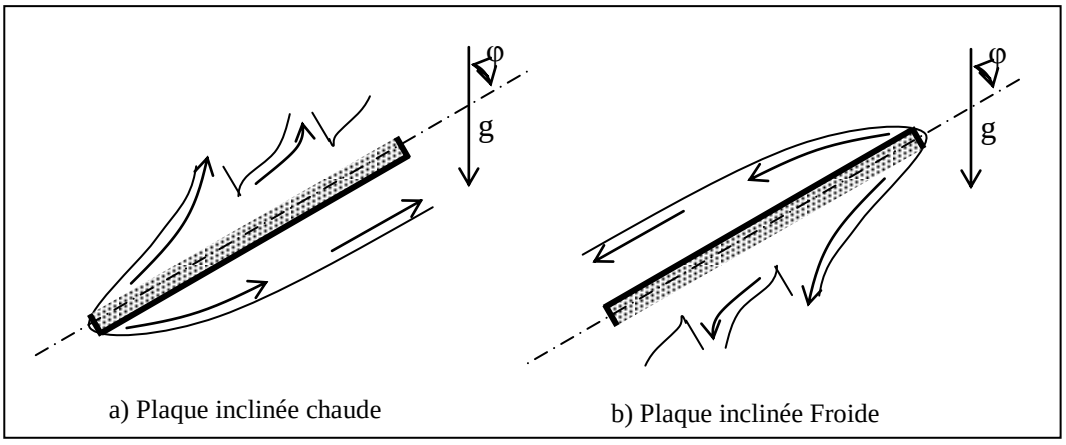
- Les résultats portés par **Fujii et Imura [93]** utilisent l'équation (1.6) pour $60° \leq \varphi \leq 90°$ avec un nombre de Rayleigh basé sur *g*.

$$Nu_L = 0.14\, Ra_L^{1/3} \left(\frac{1 + 0.0107\, Pr}{1 + 0.01\, Pr} \right), \qquad 0.024 \leq Pr \leq 2000 \tag{1.6}$$

- Pour une inclinaison de $\varphi \leq 45°$ et $10^5 \leq Ra_L \leq 10^9$, en remplace g par $g\cos\varphi$ dans la corrélation (1.7) pour les plaques verticales de **Churchill et Chu [38]**.

$$\overline{Nu}_L = 0.68 + 0.67\, Ra_L^{1/4} \left[1 + \left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}} \right)^{9/16} \right]^{-4/9} \tag{1.7}$$

En général, pour les plaques inclinées dans le cas instable, **Raithby et Hollands [2]** recommandent que le flux de chaleur soit calculé d'abord en utilisant $g\cos\varphi$ dans la formule de la plaque verticale et utilisant $g\sin\varphi$ dans la formule de la plaque horizontale (c à d, la composante normale de la gravité de la plaque) et que la valeur la plus grande de flux de chaleur soit prise.



a) Plaque inclinée chaude b) Plaque inclinée Froide

Fig. I.2 : Couches limites de la convection naturelle sur des surfaces inclinées [5].

Pour les cas stable :

- Pour une inclinaison de $\varphi \leq 88°$ et $10^5 \leq Ra_L \leq 10^{11}$, l'équation (1.7) est encore valide pour la face supérieure des plaques froides et pour la face inférieure des plaques chaudes avec la substitution de g par $g\cos\varphi$ dans le nombre de Rayleigh **[93]**.
- Pour un fluide au-dessous d'une plaque chaude ou au-dessus d'une plaque froide,

Fujii et Imura [93] proposent pour une plaque légèrement inclinée de largeur L

$$\overline{Nu}_L = 0.58\ Ra_L^{1/5} \qquad (1.8)$$

Ceci est valide pour $10^6 \le Ra_L \le 10^9$ si $87° \le \varphi \le 90°$, et pour $10^9 \le Ra_L \le 10^{11}$ si $89° \le \varphi \le 90°$. Ra_L est basé sur g (pas $g\cos\varphi$). Les résultats de **Fuji et Imura [93]** sont pour les plaques bidimensionnelles ; ceux dans lesquelles la largeur infinie a été approximé par l'élimination des effets des extrémités.

En 1975, **Vliet et Ross [94]** ont étudié le transfert de chaleur local pour la convection naturelle turbulente sur des surfaces verticales et inclinées vers le haut et vers le bas. Leur surface d'essai avait une largeur de 1,83 m et une hauteur de 7,32 m et subie à un flux de chaleur uniforme. Les résultats ont été obtenus pour des angles d'inclinaison de 30° à la verticale (orientée vers le haut) et jusqu'à 80° à la verticale (vers le bas), l'expérience a été effectuée pour l'air à des nombres de Grashof allant jusqu'à $\mathbf{10^{15}}$. Les résultats ont montré que l'emplacement de la transition était une fonction de l'angle de la plaque. Leurs résultats d'écoulement laminaire ont été corrélés en utilisant la composante de gravité le long de la surface et leurs résultats concordent avec ceux de **Rich [86].** Ils donnent la corrélation du nombre de Nusselt local pour les deux orientations par l'utilisation d'une seule équation dans laquelle la gravité est prise comme une composante le long de la surface. Dans la région d'écoulement turbulente, ils mettent une corrélation du nombre de Nusselt local pour leurs résultats dans une seule équation où la composante de gravité est modifiée par $g\cos^2\theta$ pour le cas de la plaque orientée vers le bas tandis que la corrélation est indépendante de l'angle d'inclinaison pour le cas de plaque orientée vers le haut.

En 1975, **Black et Norris [95]** ont utilisé un interféromètre différentiel pour fournir une visualisation de l'écoulement et les mesures du coefficient de transfert local à partir d'une plaque isotherme inclinée. Ils ont constaté que la structure d'écoulement dans la couche limite thermique turbulente peut être séparée en une sous-couche thermique et une région centrale contenant des fluctuations aléatoires. On a montré que la sous-couche thermique contenait des «ondes thermiques» qui traversent la surface chauffée et provoquent des variations significatives du coefficient de transfert local et une augmentation globale du taux de transfert de chaleur dans la région d'écoulement de transition mais n'a pas affecté les résultats dans les régions d'écoulement turbulent. Leurs

résultats pour le nombre de Nusselt local sont d'accord avec ceux obtenus par d'autres chercheurs.

Gryzagoridis et Klingenberg [96] en 1986, ont étudié expérimentalement l'écoulement de la convection naturelle sur une plaque isotherme inclinée dans l'air en utilisant une plaque ayant des dimensions de 200 mm de largeur, 100 mm de hauteur et 8 mm d'épaisseur. Leurs résultats montrent que pour les inclinaisons de plaque jusqu'à **60°** à partir de la verticale, la plaque peut être traitée comme verticale à condition que la composante de la force gravitationnelle parallèle à la surface soit utilisée. Pour les angles entre **60°** et **75°** un changement graduel est noté, tandis que pour les angles supérieurs à **75°**, le transfert de chaleur a montré un changement définitif par rapport à celui de la relation de plaque verticale. On a également constaté que la surface supérieure et la surface inférieure peuvent être traitées comme étant similaires pour tous les angles inférieurs à **60°** de la verticale. Leurs résultats donnent le nombre de Nusselt local à une distance choisie à partir du point de bord.

Le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire à partir de plaques inclinées avec un flux de chaleur constant a été étudié par **King et Reible [97]** en 1991. Leur surface chauffée était de 0,1524 m de largeur et 0,3048 m de hauteur dans l'eau. Les effets de bord ont été évités en appliquant une paroi sur chaque bord latéral pour éviter les écoulements entrants à partir les côtés. Leurs résultats sont d'accord avec la corrélation prédite par une solution de similarité pour la plaque plane en appliquant le $g\cos\theta$ dans la composante gravitationnel.

Wei et al. [98] ont mené une recherche numérique en 2002 pour étudie l'écoulement bidimensionnel de la convection libre à partir d'une plaque mince chauffée uniformément pour un angle d'inclinaison arbitraire. Le transfert de chaleur simultané des deux côtés de la plaque chauffée a été étudié. Ils ont constaté la complication des expressions empiriques des nombres de Nusselt local et moyen et que le nombre de Nusselt moyen ne pouvait pas être corrélé par une seule équation pour les angles d'inclinaison inférieurs à **10°** de l'horizontale. Cependant, il pourrait être obtenu une équation de corrélation pour le nombre de Nusselt moyen pour les angles supérieurs à **10°**.

Les résultats des coefficients de transfert de chaleur local et moyen à partir de plaques verticales et inclinées isothermes orientées vers le haut pour l'air ont été expérimentalement

étudiés par **Al-Arabi et Sakr [99]** en 1988. Leurs expériences ont utilisé une plaque en laiton de 1300 mm de hauteur et 650 mm de large dans l'air et a considéré des angles d'inclinaison de 0° à 90°. Leurs résultats couvrent à la fois les régions des écoulements laminaire et turbulente. D'après leurs résultats, ils ont obtenu un nombre de Rayleigh critique pour la région de transition vers le turbulente et ont obtenu des corrélations de coefficient de transfert de chaleur local et moyen pour les écoulements laminaire et turbulent.

L'investigation de **Chen, Tien et Armaly [100]** en 1986, étudie la convection naturelle en régime laminaire le long d'une plaque plane inclinée avec une évolution de température pariétale, ou du flux thermique pariétal, suivant une loi de puissance. Les équations de base sont mises d'abord sous forme adimensionnelle, ensuite résolues par une méthode de différences finies. Des solutions numériques pour l'air et l'eau, sont obtenues pour trois valeurs d'exposant dans chacune des conditions de surface. En conséquence, des corrélations sont obtenues pour les nombres de Nusselt locaux et globaux dans les cas spéciaux de température de paroi uniforme et de flux de chaleur uniforme. Des comparaisons portant sur le nombre de Nusselt sont faites pour le cas de flux de chaleur uniforme entre les résultats de référence **[100]** et les données expérimentales, et ils constatent un bon accord entre eux.

D'autres études sur l'écoulement de la convection libre sur les plaques inclinées sont décrites dans les références **[79], [80] , [81], [83], [101], [102] et [103].**

I. 3. Travaux antérieurs relatifs à la MHD

La magnétohydrodynamique parfois appelée aussi hydromagnétique, a subi d'importants développements, initiés en particulier au cours des années 1930-1950, à travers l'étude de problèmes astrophysiques ; mais on assiste surtout à l'avènement de cette théorie lorsque la MHD a bénéficié de l'intérêt de la communauté des physiciens pour la production d'énergie électrique par fusion nucléaire contrôlée dans les tokamaks et même pour d'autres applications industrielle, médicale etc.

La MHD est l'étude des mouvements des fluides conducteurs de l'électricité en présence de champs magnétique et électrique. En combinant champ magnétique et champ électrique, il est possible de créer des forces de Lorentz-Laplace. Ces forces sont capables d'agir sur l'eau de mer et ainsi de propulser un navire **[104]**.

Le champ magnétique est une grandeur physique engendrée par le déplacement de charges électriques (courant électrique) ou la proximité d'un matériau ayant une perméabilité magnétique non nulle (un aimant). Le champ généré est capable d'exercer une force sur d'autres charges électriques en mouvement ou sur des matériaux ayant une susceptibilité magnétique non nulle.

Le problème de la convection naturelle sous l'action du champ magnétique a attiré l'attention de plusieurs chercheurs et la première investigation de l'interaction entre un champ magnétique externe et la convection naturelle d'un fluide pur s'écoulant le long d'une plaque plane verticale a été faite par **Sparrow et Cess [105]** en 1961. Ils ont considérait le cas d'un écoulement, en régime de type couche limite laminaire, sur une plaque verticale isotherme. Ils ont conclu que, pour des métaux liquides, le transfert de chaleur par convection naturelle pouvait être notablement affecté par la présence d'un champ magnétique; alors qu'avec d'autres fluides ces effets étaient très petits.

L'écoulement permanent et transitoire de la convection naturelle d'un fluide électriquement conducteur à partir d'une plaque verticale sous l'action du champ magnétique est étudié par **Gupta [106]**. Dans le même cheminement d'idées, **Lykoudis [107]** a étudié la convection libre d'un fluide électriquement conducteur en présence MHD. Les résultats obtenus ont montré que la réduction du taux de transfert de chaleur à travers le mercure, due à l'application d'un champ magnétique transversal.

Néanmoins, un des facteurs les plus importants de l'étude de l'écoulement de fluide est la géométrie et l'orientation de la surface. Lors de la modélisation de l'écoulement du fluide, la géométrie sur laquelle circule le fluide affecte la façon dont le fluide s'écoule et d'autres propriétés. D'après la littérature, les géométries les plus fréquentes sont les surfaces verticales, horizontales, inclinées, parallèles, circulaires, coniques et sphériques.

Cependant, à notre connaissance, d'après la recherche exclusive de **Ghosh et Pop [3]** en 2005, le problème traitant la MHD de la convection naturelle le long d'une plaque de dimensions finies n'a reçoit aucune attention dans la littérature. Tous les travaux qu'ont été publié et qui intéressent à l'écoulement de la MHD de la convection naturelle externe sont basé sur le modèle de Schmidt & Beckmann **(Fig. I.3)** qui repose sur la monocouche limite sur une plaque semi-infinie appelé « classique ».

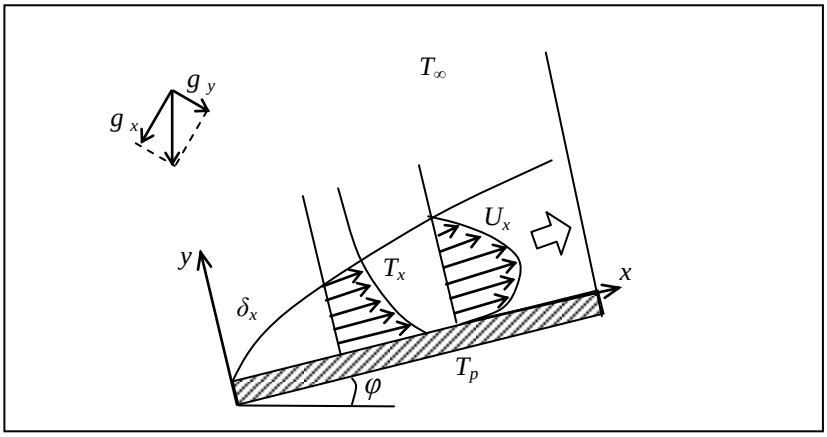


Fig. I.3 : Modèle classique de la convection libre proposé par Schmidt & Beckmann [23]

I. 3. 1. Plaque horizontale

Très peu sont les investigations qui sont intéressées à l'écoulement de la convection libre sous l'effet d'un champ magnétique. Parmi ces recherches on cite celle de **Anjali Devi [108];** ont analysé les effets de la réaction chimique, transfert de chaleur et de masse sur l'écoulement laminaire avec et sans présence d'un champ magnétique le long d'une plaque horizontale semi-infinie.

En 2011, **Ishak [109]** a étudié l'effet de la radiation sur la MHD le long d'une plaque étirée exponentiellement, il observe que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de nombre Prandtl mais diminue avec le paramètre magnétique et le paramètre de rayonnement.

Récemment, en présence magnétohydrodynamique, **Lavanya [110]** ont étudié en 2016, l'effet de rayonnement sur les couches limite d'un nanofluide le long d'une plaque étirée exponentiellement immergée dans un milieu poreux.

L'effet combiné de la dissipation visqueuse avec l'effet de Joule sur un écoulement laminaire permanent de transfert de chaleur par convection libre en présence d'un champ magnétique a été investigué par **Jaber [111]** en 2016, dont la plaque est perméable et étirée par une source de chaleur avec une loi de puissance ; il démontre qu'une élévation du paramètre magnétique ***M*** implique une augmentation de la température et le nombre de

Nusselt et une diminution de la vitesse. Ainsi le nombre d'Eckert augmente avec l'augmentation de nombre de Nusselt et le profil de température.

I. 3. 2. Plaque inclinée

Comparativement à la plaque verticale, la surface inclinée a reçue peu d'investigations, parmi les travaux qui sont intéressés on cite **Hossain et al. [112]** qui ont étudié pour des petites angles d'inclinaison, par rapport à l'horizontal, l'écoulement de la MHD de la convection libre. **Anghel et al. [113]** ont étudié l'effet combiné de transfert de chaleur et de masse sur une plaque plane inclinée. **Chen [114]** Analyse l'étude l'écoulement de la convection libre sur une plaque inclinée perméable avec une température et concentration de paroi variables.

L'étude de l'écoulement bidimensionnel de transfert de chaleur et de masse le long d'une plaque inclinée semi-infinie sous l'effet d'un champ magnétique et de source de chaleur est le sujet de **Alam et Rahman [115]** en 2006, alors que le même auteur, Alam et al. **[116]** a étudié, en 2013, les caractéristiques de transfert de chaleur et de masse en présence d'un champ magnétique une plaque inclinée, il a pris en considération les effets de courant de Hall.

Abd El Aziz [117] a étudié l'influence de la dépendance de la température avec la viscosité et de conductivité thermique sur le transfert de masse et de chaleur le long d'une plaque étirée, il a pris en compte l'effet ohmique.

Kumar [118] a présenté une solution numérique pour étudier l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux électriquement conducteur, sur une plaque inclinée semi-infinie, qui est prescrite le flux de masse avec la génération de chaleur. Il montre que la vitesse diminue avec l'augmentation du paramètre magnétique et l'angle d'inclinaison, la concentration diminue avec l'augmentation de nombre de Schmidt, le nombre de Prandtl réduit l'épaisseur de la couche limite thermique et le nombre de Nusselt s'élève avec le nombre de Prandtl et réduit avec l'augmentation de paramètre de source de chaleur.

Das et al. [119] ont utilisé une méthode analytique pour analyser la génération d'entropie dans les couches limites d'un écoulement MHD sur une plaque incliné entouré par un milieu poreux.

Ali et al. [120] montrent une analyse sur l'effet de la combinaison radiation-réaction chimique sur la MHD, l'étude tient en compte le cas d'une plaque inclinée dans un milieu poreux.

Devi et al. [121] ont étudié l'effet de la radiation et de transfert de masse sur l'écoulement non établi de la MHD de la convection libre sur une plaque inclinée

I. 3. 3. Plaque verticale

I. 3. 3. 1. Effets MHD sur un milieu poreux

L'écoulement de fluides dans les milieux poreux est resté un problème d'intérêt en raison de son large application dans l'industrie. Le transfert de chaleur dans le milieu poreux a une grande importance dans les problèmes de la géophysique, l'énergie géothermique, le contrôle de la pollution des eaux souterraines, les processus alimentaire, la métallurgie aussi bien dans l'isolation thermique des bâtiments vis a vis du flux solaire que dans le refroidissement des capteurs photovoltaïques en toiture etc.

Le modèle mathématique général qui décrit un écoulement en milieu poreux est connu sous le nom de **loi de Darcy** décrit la résistance des pores qui contient dans la région à l'écoulement de fluide. Des exemples d'écoulement de fluide dans des milieux poreux comprennent les écoulements de l'eau dans les aquifères, écoulement de fluide dans les lits garnis, problèmes d'irrigation, le stockage thermique dans les lits et les systèmes biologiques. D'autres applications comprennent l'ingénierie chimique et de réservoir**.**

De nombreuses études ont été réalisées dans l'écoulement de fluide en milieu poreux, notamment les travaux de **Raptis et Kafousias** [122] qui ont étudié le transfert de chaleur dans un milieu poreux autour d'une plaque verticale infinie sous l'action d'un champ magnétique constant vertical. Les effets du nombre de Grashof, et de la perméabilité (ou la porosité) ont été observés sur le champ de vitesse. Les résultats montrent que lorsque le nombre de Grashof augmente, la vitesse diminue alors que cette dernière augmente quand la perméabilité augmente.

Une méthode intégrale a été utilisée par **Cheng** [123], en1999, pour étudier l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide binaire électriquement conducteur sur une plaque verticale bordant un milieu poreux saturé et soumise à une

température et une concentration constante. Il a démontré que l'application d'un champ magnétique transversale, normale à la direction de l'écoulement, diminue les nombres de Nusselt et de Sherwood. De plus, le rapport entre l'épaisseur de la couche limite thermique et celle de la couche limite de concentration est indépendant de l'intensité du champ magnétique.

Plus récemment, l'effet d'un champ magnétique sur le transfert de chaleur et de masse sur une surface verticale dans un milieu poreux a fait l'objet de l'étude de **Postelnicu [124]** en2004**.**

Le but de travail de **Bourich et al. [125]** est de mettre en évidence ; analytiquement et numériquement ; l'impact de l'effet combiné de la thermo diffusion et du champ magnétique sur la convection naturelle induite au sein d'une couche poreuse horizontale soumise à un flux de chaleur uniforme dans la direction verticale par le bas et saturée par un fluide binaire électriquement conducteur. Il a été trouvé que l'imposition d'un champ magnétique retarde le démarrage de la convection et son intensification peut conduire à la suppression totale des mouvements convectifs et ramener le système vers un état diffusif.

En 2012, **Singh et Agarwal [126]** ont étudié le transfert de chaleur dans un fluide de deuxième classe sur une feuille étirée exponentiellement à travers un milieu poreux, **Hsiao et al. [127]** ont étudié en 2014, l'écoulement d'un fluide non newtonien en milieu poreux.

I. 3. 3. 2. Effets MHD sur les propriétés de fluide

L'intérêt considérable qui a été porté, ces dernières années, à la convection naturelle externe d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique est dû principalement à l'amélioration de la qualité et des caractéristiques du produit, ainsi sa présence dans plusieurs applications industrielles tels que : le refroidissement, les procédés de séparation en industries chimiques et pétrolières, le stockage des déchets nucléaires, les processus de séchage…etc.

Elbashbeshy [128] a étudié, en 2000 l'influence du champ magnétique sur l'écoulement d'un fluide incompressible, avec une diffusivité thermique et une viscosité dynamique thermo dépendantes. Dans le même cheminement d'idées, **Rahman, et al. [129]** ont adapté pour le cas d'une plaque verticale, l'effet de la température sur la

conductivité thermique avec une conduction thermique sur l'écoulement convectif en présence magnétohydrodynamique. **Nasrin et Alim [130]** ont présenté la dépendance de la température sur la conductivité thermique et la viscosité dans l'écoulement de la MHD de la convection libre combiné avec l'effet de Joule le long d'une plaque verticale semi-infinie. Par ailleurs, **Shrama et Singh [131]** ont étudié la convection naturelle avec génération de chaleur d'un fluide de conductivité électrique variable le long d'une plaque plane verticale et isotherme et ce sous l'effet d'un champ magnétique transversal.

Cherouana et al. [132] analysent l'influence du nombre de Richardson et celle de la présence et de l'intensité d'un champ magnétique sur le comportement hydrodynamique et thermique de l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien incompressible le long d'une plaque isotherme plane verticale. Ces résultats montrent que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique provoque la diminution globale du profil de vitesse, en diminuant leur valeur maximale et fait augmenter l'épaisseur de la couche limite thermique en privilégiant la vitesse horizontale. D'autre part, l'accroissement du nombre de Richardson entraine une réduction de l'épaisseur de la couche limite thermique contrairement à la vitesse verticale qui augmente avec le nombre de Richardson.

I. 3. 3. 3. Dissipation visqueuse

La dissipation visqueuse est l'énergie thermique produite par frottement entre les couches de fluides. Elle affecte le transfert de chaleur et la distribution de la température dans le régime des fluides. Dans la modélisation de l'écoulement de fluide, les paramètres sans dimension qui décrivent la dissipation visqueuse est le nombre d'Eckert ***(Ec)*.**

Plusieurs investigateurs ont été menés par cet axe de recherche. Par exemple, les résultats analytiques ont été réalisés par **Vajravelu et Hadjinicolaou [133]** en 1993 qui prennent en compte les effets de dissipation visqueuse et la génération interne de chaleur.

Récemment, **Chen [134],** a pris en compte l'effet de la dissipation visqueuse et le chauffage Ohmique dans son investigation de transfert de masse et de chaleur sur l'écoulement MHD de la convection libre sur une surface verticale. **Eldabe et Ouaf [135]** ont étudié les effets de la dissipation visqueuse sur un fluide micropolaire.

De plus, la dissipation visqueuse, l'effet de Joule et la production interne de chaleur ont été prises en compte dans l'équation d'énergie, une analyse mathématique a été effectuée sur les caractéristiques de transfert de chaleur et de mouvement dans une couche limite d'un fluide viscoélastique, incompressible et électriquement conducteur sur une feuille étirée linéairement par **Abel et al. [136] .** Une investigation numérique sur les couches limite d'un écoulement MHD sur une feuille chauffée étirée avec une viscosité variable a été analysée par **Pantokratoras [137].**

Kishore et al. [138], ont considérés que la chaleur due à la dissipation visqueuse est importante dans l'écoulement de la convection libre lorsque le champ d'écoulement est de taille extrême ou à une basse température ou à un grand champ gravitationnel ; ces effets sont également importante dans la géophysique et ainsi quelques opérations industrielles et sont généralement caractériser par le nombre de Eckert.

Dans l'article de **Renuka Devi et al. [139]** de l'année 2015, concernant l'effet de la radiation sur l'écoulement bidimensionnel des couches limites de transfert de chaleur et de masse d'une viscosité variable sur une surface poreuse étirée, on peut souligner que de nombreux procédés métallurgiques impliquent le refroidissement de bandes ou de filaments et que la dissipation visqueuse modifie les distributions de température en jouant un rôle comme une source d'énergie, ce qui conduit à affecter les taux de transfert de chaleur. Le mérite de l'effet de la dissipation visqueuse dépend du fait que la feuille soit refroidie ou chauffée.

Outre les autres recherches, le champ d'écoulement de fluide sur une surface obéit aux conditions de non glissement communément appelée la condition d'adhérance **[140]**, beaucoup d'études dans la littérature considérée dans cette thèse montrent que la plupart des études assument la condition d'adhérance. Certaines études ont considéré des conditions de glissement partiel; Parmi ceux-ci figurent notamment l'investigation de **Sahoo [141]** qui a analysé l'effet de glissment partiel, de dissipation visqueuse et de l'effet de Joule sur un écoulement MHD sur un fluide de deuxieme classe.

I. 3. 3. 4. Effets MHD en électrochimie

« L'électrochimie est l'étude des structures des milieux contenant des espèces conductrices en solution (électrolytes) et des phénomènes ayant lieu aux interfaces entre

ces électrolytes ou entre un milieu conducteur électronique et un électrolyte ». L'électrolyse en présence d'un champ magnétique se nomme la ***magnétoélectrolyse***, et l'étude des phénomènes apparaissant en magnétoélectrolyse est la ***magnétoélectrochimie***.

Cette discipline est à la croisée de trois sciences : la chimie, la mécanique des fluides et l'électromagnétisme. Les couplages entre ces trois disciplines dans les processus de magnétoélectrolyse ainsi que les prometteuses applications de ces procédés ont été étudiés dans de nombreux travaux, à différentes échelles et avec différents points de vue**.** Des articles de synthèse bibliographiques ont été proposés par **Fahidy [142]** en 1983 et par la suite par **Ulrich et Steiner [143]** en 1989.

En électrochimie, l'utilisation du champ magnétique s'avère de plus en plus intéressante tant sur les propriétés des différents dépôts métalliques ou non préparés par magnétoélectrolyse que sur le transport de matière en solution et à l'interface électrode/solution ainsi que sur la cinétique réactionnelle.

L'étude des effets du champ magnétique sur le transport de matière sera limitée aux effets de la force électromagnétique. Il existe un autre effet du champ magnétique qui est dû uniquement au gradient de l'énergie magnétique présente dans la solution, de par la nature diamagnétique, paramagnétique ou ferromagnétique des ions et particules présents en solution. Pour une étude approfondie de ces effets, il est possible de se reporter à la thèse de **Nouri [144],** consacrée à ce sujet en plein développement.

Concernant, les effets de la MHD sur les processus d'électrodéposition, le champ magnétique affecte le déplacement des particules chargées en infléchissant leur trajectoire mais sans modifier l'intensité de leur vitesse. Il est ainsi utilisé pour courber leur trajectoire dans les accélérateurs de particules. Egalement, la MHD est un moyen d'améliorer les propriétés des revêtements métalliques obtenus par cette électrolyse, surtout ceux dont le dépôt est contrôlé par le transport de masse tels que le cuivre, l'argent ou le zinc. Il s'agit aussi d'un moyen d'étude des propriétés physico-chimiques des solutions électrolytiques permettant de s'affranchir de certains inconvénients des méthodes conventionnelles.

Le nombre de travaux sur l'électrochimie sous champ magnétique ne cesse d'augmenter car le champ magnétique est devenu un paramètre intéressant pour l'étude des processus électrochimiques. Il peut être utilisé pendant l'électrodéposition pour accroître la

vitesse de déposition ou pour modifier les propriétés physiques des dépôts. Ces effets sont attribués à la convection induite par le champ magnétique au voisinage de l'électrode.

De nombreux chercheurs tel que ceux cités dans les références **[145, 146]** ont contribués à élucider certains de ces effets du champ magnétique au sein de la solution, à l'interface électrode-solution ainsi que les modifications morphologiques engendrées sur les dépôts électrolytiques. Ainsi, on peut citer, les deux revues **[147]** qui proposent des synthèses de différents travaux et des explications aux phénomènes relevant de la magnéto-électrochimie.

Le travail de **Rabah** **[148]** porte sur l'étude de la convection créée par un champ magnétique perpendiculaire à la surface de l'électrode et les effets de cette convection sur l'électrodéposition du cuivre et de l'alliage cobalt-fer. Ainsi, il a étudié la nucléation du cuivre et a regardé les modifications qui pouvaient intervenir sur la qualité de dépôts métalliques (aspects, textures…) en comparant les effets dans les deux cas de géométrie limites (champ parallèle et champ perpendiculaire à l'électrode de travail).

De plus, contrairement aux propriétés physico-chimiques de la solution électrolytique, le transport de matière est modifié de manière significative par le champ magnétique. Plusieurs auteurs montrent que le champ magnétique augmente les courants limites lorsqu'il est appliqué sur l'ensemble de la cellule électrochimique **[149]**. L'augmentation du courant limite provient de l'existence d'un flux convectif, tangentiel à l'électrode, engendré par la force de Lorentz, qui diminue l'épaisseur de la couche de diffusion.

La plus grande part de ces travaux se sont intéressés à l'action d'un champ magnétique parallèle ou perpendiculaire à la surface de l'électrode de travail, gradient de concentration, propriété magnétique des électrodes (ferromagnétiques, paramagnétiques ou diamagnétiques), champ magnétique uniforme ou non uniforme etc.

I. 3. 3. 5. Effets MHD sur la réaction chimique

Egalement, l'application d'un écoulement magnétohydrodynamique avec le problème de transfert de chaleur devient importante dans l'industrie telle que l'ingénierie électrochimique et les processus de polymérisation. Plus précisément, elle peut influer et

contrôler les propriétés et la qualité des caractéristiques de produit fini et de la purification des matériaux dans les applications métallurgique.

L'écoulement de fluide est affecté par les réactions chimiques qui s'y produisent. Lorsque des réactions chimiques se produisent, l'énergie résultante est utilisée ou dissipée dans des processus et connus sous le nom de réactions endothermiques ou exothermiques. Par conséquent, les propriétés de fluide sont affectées. Dans certains cas, les réactions chimiques sont destructrices ou constructives **[150]. Bakr [151]**en 2011**,** a étudier le cas d'une plaque soumise à un flux de chaleur constant**. Kameswaran, et al [152]** ont étudié des réactions hétérogènes homogènes dans un écoulement de nanofluides en raison d'une feuille étirée poreuse. **Anjalidevi et Kandasamy [153]** étudient en 1999 l'effet de la réaction chimique sur un écoulement le long d'une plaque horizontale semi-infinie en présence de transfert de chaleur. Une année plus tard, les mêmes auteurs dans la référence **[154]** ont étudié l'effet de la réaction chimique sur un écoulement de transfert de chaleur et de masse en présence d'un champ magnétique le long d'une plaque verticale semi-infinie.

L'analyse d'un écoulement permanent bidimensionnel d'un fluide visqueux, incompressible et électriquement conducteur sur une feuille semi-infinie étendue d'une façon non-linéaire en présence d'une réaction chimique et sous l'influence d'un champ magnétique a été effectuée par **Raptis et Perdikis [155].**

I. 3. 3. 6. Effets de la diffusion croisée (transfert de masse)

L'étude de transfert de chaleur et de masse est nécessaire pour déterminer la qualité de produit fini. Cependant, il existe des composants de fluide qui entrent en réaction chimique entre eux. La dispersion est la répartition du matériau sur une grande surface. Lorsque le transfert de chaleur et de masse, dans l'écoulement de fluide, est mécanique d'une région à une autre, on parle de double dispersion. Le *transfert de masse* dû au *gradient de température* est appelé « ***effet de Soret »***, tandis que le *transfert de chaleur* causé par *le gradient de concentration* est appelé « ***effet Dufour »,*** ces effets ont un rôle vital si les gradients de température et de concentration sont élevés, alors, l'utilisation simultanée de transfert de chaleur et de masse donne lieu à l'effet de la diffusion croisée.

Parmi les auteurs qui ont travaillé sur ce sujet on cite **Anghel et al.** **[156]** qui investiguent les effets de Dufour et de Soret sur les couches limites de la convection naturelle d'une surface verticale immergée dans un milieu poreux.

Mansour et El-Shaer **[157]** étudient les effets de la réaction chimique et la stratification thermique sur la MHD de transfert de chaleur par convection libre et de transfert de masse sur une surface étendue immergée dans un milieu poreux tenant en compte l'effet de la diffusion croisée. Ils observent une réduction des distributions de la température et de la concentration avec la diminution des valeurs de nombre de Soret et avec l'augmentation de la valeur de nombre de Dufour.

L'effet de source de chaleur et de la diffusion thermique *« Effet de Soret »* sur une plaque poreuse verticale infinie sous l'effet d'un champ magnétique non-uniforme est étudié par **Singh et Singh** **[158]** et les équations gouvernantes sont résolues par la technique de perturbation**.** **Postelnicu** **[159]et Partha et al.** **[160]** présentent l'influence du champ magnétique et de la double dispersion sur le comportement de l'écoulement de transfert de masse et de chaleur par convection libre dans un milieu poreux, ils prisent on considération les effets de Soret et de Dufour.

Dans de nombreux cas, dans l'écoulement de fluide, ces effets sont importants qu'ils ne peuvent pas être ignorés **[161]**. Certaines études ont porté autres effets que les effets de la diffusion croisée, parmi lesquels **Hossain et Samand** **[162]** qui ont étudié numériquement le cas des conséquences de la réaction chimique, le rayonnement et la génération de chaleur le long d'une plaque étirée.

I. 3. 3. 7. Effets rayonnement sur la MHD

Le rayonnement est l'émission d'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques ou de particules de haute énergie qui provoquent l'ionisation. L'énergie transmise de cette façon peut être comme la chaleur, l'électricité ou la lumière. Lorsque cette émission est incidente sur l'écoulement de fluide, elle affecte certaines propriétés fluides **[163].**

En 2001**, Mansour et El-Shaer** **[157]** utilisent l'approximation de Rosseland pour décrire le flux de chaleur radiatif dans l'équation d'énergie dans l'étude des effets de Joule sur la convection libre magnétohydrodynamique. Ils étudient le cas des surfaces isotherme

et flux de chaleur uniforme, cas de décollement de plume le cas d'écoulement générer d'une plaque verticale adiabatique.

Rashad [164] a étudié l'effet combiné de la MHD et le rayonnement thermique sur la convection libre sur une plaque plate verticale immergée dans un milieu poreux. Il observe que la vitesse du fluide augmente avec une diminution du paramètre magnétique et du rapport de flottabilité et que la concentration de particules ainsi que de la couche limite est diminué en raison de l'augmentation du paramètre magnétique et si le rapport de flottabilité est diminué. La vitesse de dépôt thermo diffusion a diminué si le paramètre magnétique a été augmenté,

En effet, la prise en compte des effets de rayonnement dans l'écoulement de fluide donne lieu à un problème théoriquement difficile dans les équations gouvernantes ; différentielles ordinaires et partielles. Pour modéliser le mouvement du rayonnement thermique, l'approximation de Rosseland est appliquée **[165]**. Cette approximation suppose que le flux de chaleur est proportionnel à la variation de température et que la chaleur se transfert de la surface solide vers le fluide **[166].**

A des températures élevées, les effets de rayonnement induisent d'une manière significative la distribution de la température et du transfert de chaleur **[167].**

Kameswaran, et al. [152] étudient l'effet de la radiation sur l'écoulement MHD d'un fluide newtonien sur une feuille étirée exponentiellement et les effets de la dissipation visqueuse et le chauffage par frottement sont pris en compte.

I. 3. 3. 8. Ecoulement de fluide sur une feuille étirée

L'étude de l'écoulement sur des feuilles étirées a générée une grande importance dans ces dernières années dans la littérature vu ces nombreuse applications industrielles telles que l'aérodynamique, l'extrusion des feuilles plastiques, procédés de condensation des plaques métallique ou de verre dans les bains de refroidissement et dans l'industrie des polymères.

Lorsque des feuilles sont fabriquées, le matériau fondu est tiré de la fente et étiré pour obtenir l'épaisseur requise**.** Cette situation est similaire à la traction continue de feuilles de plastique dans la fabrication de sacs en plastique. Il est important d'étudier la vitesse de la

surface d'étirement par rapport au point d'extrusion. La vitesse à laquelle la feuille est extraite de la fente d'extrusion est décrite de différentes manières, à savoir: Linéaire, continue, instable et non linéaire comme exponentielle. Dans la plupart des études, il a été supposé que la vitesse de la feuille d'étirement est linéairement proportionnelle à la distance par rapport à la fente d'extrusion **[168],** dans les applications pratiques, il soutient que la vitesse d'étirement peut ne pas être linéaire. En effet, il existe de nombreuses autres études qui considèrent une feuille étendue exponentiellement, ceux-ci incluent les travaux des références **[109, 169].**

Le problème du cas d'un écoulement stationnaire de la MHD de la convection naturelle d'un fluide visqueux, incompressible en régime laminaire le long d'une feuille étendue a été étudié également par **Ahammad et Mollah [170].**

Takhar et al. [171] déterminent l'écoulement de transfert et de mass sur une plaque étendue sous l'effet du champ magnétique et de la réaction chimique de ces espèces. Ils concentrent ces regards sur le flux de chaleur qui peut être produit par les deux gradients de température et de concentration. L'étude de transfert de chaleur et de masse de l'écoulement MHD de la convection naturelle le long d'une feuille verticale étendue en présence d'un champ magnétique avec génération de chaleur été réalisé par **Samad et Mohebujjaman [172] .**

Mohammadein et Gorla [173] travaillent sur l'écoulement obtenus à partir d'un transfert de chaleur d'un fluide micropolaire au-dessus d'une feuille étendue avec une dissipation visqueuse et génération interne de chaleur. **Helmy [174]** présente l'effet de la MHD sur un fluide non-Newtonien sur une plaque étendue.

Ahmed [175] a étudié la convection MHD libre et forcée pour un écoulement oscillatoire d'un fluide incompressible, conducteur de l'électricité, dans une plaque poreuse posé verticalement. Il a trouvé que l'augmentation de la force magnétique cause la diminution de la vitesse du fluide et donc la diminution de l'échange thermique entre le fluide et la plaque.

I. 3. 4. Remarque importante

En fin, à notre connaissance, l'effet d'un champ magnétique sur la structure d'écoulement dû à la convection naturelle externe avec un autre modèle différent à ceux de Schmidt et Beckmann n'a jamais été examiné, à l'exception du cas traité par **Ghosh et Pop [3]** qui a utilisé une nouvelle approche dans son étude de l'écoulement MHD sur une surface plane tournante de dimensions finies avec une inclination arbitraire. En effet, cette approche est celle de **Lewandowski [1]** qui succède à un écart de 20%, sur le coefficient de transfert de chaleur, entre ces résultats avec ceux de l'expérimental malgré qu'il suppose que les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique sont identiques et qu'il néglige le terme des forces d'inertie devant les forces visqueuses ainsi que la vitesse transversale devant la longitudinale. Ce dernier a étudié l'écoulement hydrodynamique de la convection naturelle à partir d'une plaque inclinée de dimensions finies, comme il a montré que l'inclinaison de la plaque représente un critère décisif et important pour les régions des couches limites (région I et région II) en ce qui concerne l'hypothèse du profil de température. Ce nouveau modèle n'attire pas l'attention des investigateurs a part **Bouksani [2]** qui a élaboré ce modèle physique pour une variété de profil de température avec une méthode semi-analytique, pour plusieurs angles d'inclinaison et en absence d'un champ magnétique.

I. 5. Conclusion

Avec une telle bibliographie aussi riche et diversifiée tant par les développements théoriques que par les expériences ; tant par l'écoulement convectif conjugué à l'effet du champ magnétique que par la convection libre seulement. On a constaté que :

En ce qui concerne la littérature de la convection libre :

- ✓ L'importance de l'étude de la convection libre sur les plaques isothermes est d'intérêt reconnu. Concernant les plaques verticales et les plaques légèrement inclinées l'écoulement est connu, mais pour les plaques horizontales et fortement inclinées peu de travaux sont apparus. Cependant les investigations expérimentales sont en discordance avec la théorie classique développée pour les plaques horizontales et inclinées.

- ✓ Malgré les différentes tentatives complémentaires pour réduire les écarts qui atteignent des niveaux de 50 % et plus, les résultats obtenus en recourant à des précisions tant analytiques que numériques n'ont pas eu l'effet escompté.

- ✓ La raison fondamentale est que le modèle physique sur lequel s'articulent les diverses modélisations n'est pas conforme suivant les mécanismes réels déterminants.

- ✓ Les diverses études ont montré de façon redondante que la séparation a lieu d'une part et que l'existence du panache en dépit de sa nature et extension existe d'autre part. Il est alors évident que le modèle initial basé sur le concept de la plaque-infinie n'est pas valide. Son maintien dans la littérature est à notre point de vue lié à sa simplicité quant à la déduction mathématique.

De plus, à la lumière des études bibliographique effectuée sur l'écoulements de la convection naturelle conjuguée à l'effet d'un champ magnétique l'effet d'un champ magnétique sur la structure d'écoulement dû à la convection naturelle, l'objectif des travaux de recherches est de contribuer à la connaissance des phénomènes physiques ayant pour objet la thermique des plaques verticale, inclinée ou horizontale et afin d'étudier, d'observer et de déterminer l'influence de la variation d'un paramètre caractéristique, à savoir l'effet de Soret, de Dufour, loi de Darcy, le rayonnement, le nombre de Grashof etc. sur ce type d'écoulement, en variant le nombre de Hartmann, paramètre caractérisant la valeur du champ magnétique.

Cependant, à l'issue de cette vision sur les travaux de recherche qui ont contribués à l'évolution de l'effet d'un champ magnétique sur la structure d'écoulement dû à la convection naturelle, l'étude des plaques horizontales et inclinée reçoit relativement peu d'attention.

Par ailleurs, à notre connaissance, d'après la recherche exclusive de **Ghosh et Pop [3]**, le problème traitant la MHD de la convection naturelle le long d'une plaque de dimensions finies n'a reçue aucune attention dans la littérature. Tous les travaux qu'ont été publié et qui intéressent à l'écoulement de la MHD de la convection naturelle externe sont basé sur le modèle de Schmidt et Beckmann qui repose sur la monocouche limite le long d'une plaque semi-infinie, et en outre, aucun autre modèle n'a été jamais utilisé.

Alors, il nous est apparu indispensable d'étudier la possibilité d'appliquer le nouveau modèle physique proposé par **Lewandowski [1]** ; issue de la technique de la visualisation ; afin d'observer sa performance et pour mieux comprendre les effets qui peuvent être importé par une induction magnétique verticale à la surface réelle étudiée.

L'objectif des travaux à venir est précisément de combler ce manque de compréhension en mettant en évidence une plaque de dimensions finies

Chapitre II

Convection naturelle & la MHD

CHAPITRE II
CONVECTION NATURELLE EXTERNE & LA M.H.D

II. 1. Introduction

La convection naturelle est un mode de transfert de chaleur qui résulte de l'application d'un gradient de température à tout fluide placé dans le champ de pesanteur. Il représente un sujet d'intérêt considérable dans le domaine d'ingénierie et les applications sont nombreuses : la conception thermique dans le domaine des bâtiments, stockage cryogénique, la conception des fours, réacteurs nucléaires, collecteurs d'énergie solaire, etc.

En pratique, la convection naturelle, intervient le plus souvent dans les échanges thermiques entre une paroi et un fluide, qui est due à l'action simultanée des différences de température qui existent dans le milieu et d'un champ de gravité.

De plus, l'application d'un champ magnétique sur la convection naturelle a un intérêt immense dans plusieurs processus industriels, il entraîne des changements importants sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur. Il engendre une diminution dans le transfert de chaleur, ralentit considérablement les vitesses et rendre négligeable les phénomènes de transport.

Alors, avec l'application d'un champ magnétique externe, il est possible d'agir sur les écoulements sans aucun contact physique et ainsi supprimer les fluctuations, contrôler les transferts thermique et massique, et donc améliorer la qualité des produits obtenus. Donc, la maîtrise et la compréhension des phénomènes liés à la convection naturelle avec ou sans l'effet combiné du champ magnétique sont ainsi des enjeux majeurs dans la conception et le dimensionnement de ces systèmes.

II. 2. Eléments fondamentaux de la convection

La convection est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec mouvement de matière **[176-178].** Nous rappelons simplement que le gradient de température induit des variations de densité qui, sous l'action du champ de pesanteur, tendent à faire monter le fluide le long d'une paroi chaude, et à le faire descendre le long d'une paroi froide **(Figure II.1).** Ceci a donc pour résultat un mouvement global du fluide dans le domaine considéré.

C'est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu **[178, 179].** Parmi cette combinaison, la convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz **[178].** De là, l'interaction entre le solide et le fluide revêt une importance capitale.

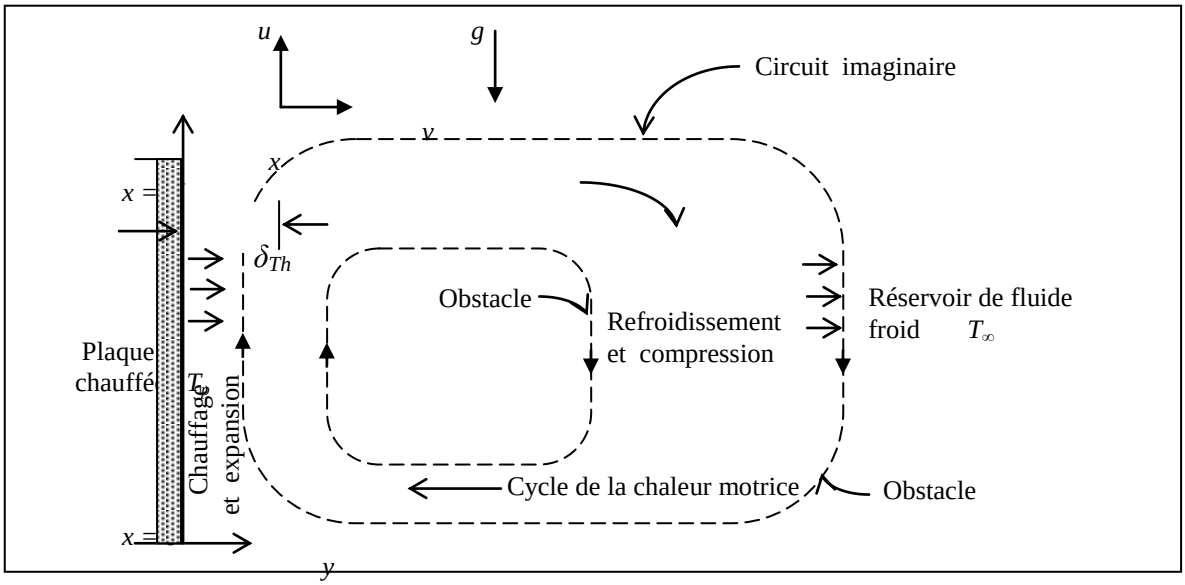


Fig. II.1 : Convection naturelle le long d'une plaque verticale, et le moteur chaleur responsable de commandement de l'écoulement [1].

II. 2. 1. Processus de transfert

Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord, la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules. Les molécules vont alors se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et

transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas, l'écoulement concerne le fluide avec transport d'énergie. En définitive, l'énergie est, à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement **[178-180]**.

II. 2. 2. Types de convection et régimes

On distingue deux types de convection en raison des phénomènes différents qui apparaissent, la convection libre ou naturelle et la convection forcée **[179].** La convection naturelle se distingue de la convection forcée par le mouvement du fluide qui n'est pas dû à un apport externe d'énergie mécanique **[176]**, mais qu'il trouve sa source au sein même du fluide, sous l'effet conjugué de gradients de masse volumique et d'un champ de pesanteur. Les variations de masse volumique motrices du transfert, sont généralement dues à des gradients de température **[176-181].**

On peut exprimer la quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide et un fluide au moyen d'une relation de proportionnalité entre le gradient de température et le flux transmis. Le coefficient d'échange de chaleur pour cette relation est complexe. Il est en fonction de l'écoulement du fluide, des propriétés thermiques du milieu fluide et de la géométrie du système. Sa valeur numérique n'est généralement pas uniforme sur une surface et elle dépend également du lieu où l'on mesure la température **[178]**. Sa détermination est donc l'objectif principal de l'interaction thermique solide-fluide.

Comme le transfert d'énergie par convection est très intimement lié au mouvement du fluide, il est nécessaire de connaître le mécanisme de l'écoulement du fluide avant d'examiner celui de l'écoulement de la chaleur. En convection naturelle, le couplage entre le champ thermique et hydrodynamique rend la tâche plus ardue. Cette complexité mène à la distinction des régimes du transfert thermique.

Lorsqu'un fluide s'écoule en mouvement laminaire le long d'une surface dont la température est différente de celle du fluide, la chaleur est transmise seulement par conduction moléculaire aussi bien à l'intérieur du fluide qu'à l'interface entre le fluide et la surface. Par contre dans un écoulement turbulent, le mécanisme de conduction est modifié et favorisé par d'innombrables tourbillons qui transportent la masse de fluide à travers les filets fluides. Ces petits volumes de fluide en se mélangeant avec d'autres volumes jouent

le rôle de porteurs d'énergie. Par conséquent, un accroissement de turbulence amène une augmentation de la quantité de chaleur s'écoulant par convection **[178-181]**.

Les écoulements de convection libre se répartissent en quatre grandes catégories :

- Panaches lorsqu'il n'y a pas de parois à proximité.
- Convection libre externe en présence d'une paroi.
- Convection libre interne dans des espaces confinés comportant une entrée et une sortie distinctes.
- Et enfin convection libre dans des enceintes closes ou partiellement ouvertes **[176]**.

Ces distinctions montrent la complexité d'un problème de convection, ce qui se traduit par des séparations nécessaires à la maîtrise industrielle.

II. 2. 3. Aspects dynamiques de la convection naturelle

Pour formaliser la convection, il faut décrire le couplage des champs de température, de pression et de vitesse à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie **[177, 179], [182-186].**

Dans la convection naturelle, le mouvement du fluide, prend naissance de la façon suivante : le fluide au contact du solide s'échauffe par conduction, alors sa température augmente et sa masse volumique diminue. Globalement, le poids de fluide au voisinage du solide est inférieur à celui qu'aurait le même fluide à la température T_∞. L'intégrale des forces de pression (poussée d'Archimède) est donc supérieure en module au poids de fluide qui se met donc en mouvement. Au niveau local, c'est le champ de pression, non hydrostatique, qui met les particules fluides en circulation. Si le fluide est plus chaud que le corps, l'écoulement se fera vers le bas, mais il y aura toujours de la convection **[181, 183].**

A l'époque, où Bénard et Rayleigh s'intéressent à la convection, Boussinesq propose une simplification de ces équations de conservation de façon à ne conserver que les ingrédients nécessaires et suffisants à la convection thermique **[186].**

II. 3. Position générale du problème de la convection libre

En fait, dans notre environnement quotidien, les manifestations de la convection libre sont plus présentes que les effets de la convection forcée, même si elles ne sont pas toujours directement perceptibles par nos sens : c'est ainsi que dans n'importe quelle salle d'habitation nous sommes entourés en permanence de mouvement d'air ; celui-ci se réchauffe en montant le long des parois les plus chaudes, et se refroidit en descendant le long des parois les plus froides. La diversité des situations est également plus grande en convection libre : par exemple l'inclinaison d'une paroi, qui est souvent sans effet dans un écoulement isotherme, devient ici un paramètre essentiel ; de même les effets de gravité sont significatifs dans les enceintes fermées anisothermes ou en physique de l'environnement, du fait des écarts de température entre la surface et l'ambiance **[176].**

Les domaines d'applications sont donc vastes, et concernent aussi bien l'isolation des canalisations que le refroidissement des circuits électriques et électroniques, la thermique des bâtiments et le confort humain, les panaches et la dispersion des effluents, ou encore la thermique de l'atmosphère et des océans **[176]**.

En ce qui concerne la mécanique des écoulements de convection naturelle on observe que, puisque les gradients de masse volumique à l'origine de mouvement sont eux-mêmes dus à des gradients de température, il y a là d'une part un couplage structurel entre bilan de quantité de mouvement et bilan d'énergie, c'est-à-dire entre champ de vitesse et champ de température, bien qu'elles soient traitées de façon détaillée dans de nombreux ouvrages de base de mécanique des fluides et de transfert de chaleur **[10]**.

D'autre part, une spécificité de la convection libre concerne les faibles niveaux de vitesse atteinte, avec des flux thermiques également modestes pour conséquence immédiate. Il en résulte d'abord que la convection libre constitue soit un obstacle lorsqu'on veut améliorer les échanges thermiques, soit une sorte d'isolation naturelle lorsqu'on veut au contraire les réduire, et ensuite que les échanges par rayonnement, souvent négligeables en convection forcée, pourront être ici du même ordre de grandeur que les échanges convectifs **[176]**.

Bien évidemment, les gradients de densité auxquels nous avons fait allusion se produisent aussi en convection forcée mais là, justement, leurs effets sont à peu près nuls.

Les cas intermédiaires, où ces effets sont comparables à ceux de l'écoulement forcé, constituent des situations de convection mixte **[176]**.

Ajoutons enfin que l'existence d'un gradient de masse volumique n'entraîne pas automatiquement un mouvement de convection naturelle : ainsi, entre deux plaques planes horizontales, si c'est la plaque supérieure qui est la plus chaude, le transfert thermique reste en général purement conductif **[176]**.

L'aspect le plus important des transferts en convection libre c'est ce qui se passe au voisinage des parois. On y retrouve en particulier des structures de couche limite.

Par conséquence, la détermination du coefficient de convection est un problème très difficile. Ecrire les équations de la mécanique des fluides et y adjoindre des relations concernant les échanges de chaleur conduit à un problème mathématique qui, généralement, n'a pas de solution analytique. De plus le nombre de paramètres qui interviennent dans ce genre de problème est important **[181].**

Deux voies ont été empruntées pour l'approche du coefficient de transfert :

La similitude permet de déterminer les groupements adimensionnels de façon très systématique, à partir des équations différentielles et à résoudre ces dérivées si elles se présentent sous une forme résoluble analytiquement **[181]**, ce qui permet d'élargir la classe du problème envisagée.

Le but de l'analyse dimensionnelle est le même que celui de la similitude mais on ne suppose pas connaître les équations différentielles qui régissent le problème**.** L'analyse dimensionnelle repose sur une énumération de toutes les grandeurs physiques qui interviennent dans le phénomène étudié. L'établissement de cette liste peut résulter soit de considérations physiques soit de résultats d'expériences qui montrent l'influence de certaines d'entre eux **[187-189].**

En conclusion, Les expressions très synthétiques des nombres de Nusselt sont généralisables à plusieurs situations. Les problèmes considérés sont caractérisés par :

- Une géométrie donnée, caractérisée au moins par une longueur de référence.
- Des conditions aux limites thermiques et mécaniques données (température ou flux

imposé sur la plaque, température amont du fluide ou température au loin ; vitesse nulle à la paroi, vitesse amont de fluide ou vitesse au loin… etc.).

- Un type d'écoulement donné, caractérisé par les valeurs du nombre de Rayleigh en convection naturelle.
- Un type de fluide donné, caractérisé par la valeur de nombre de Prandtl ; on distinguera les fluides usuels dont le nombre de Prandtl est de l'ordre de 1, les métaux liquides pour lesquels Pr vaut quelques 10^{-2} et les huiles caractérisées par des valeurs élevées de Pr.

Ainsi, on admet que deux problèmes sont thermiquement semblables s'ils sont caractérisés par des géométries semblables, des conditions aux limites adimensionnées identiques, la même valeur du nombre de Rayleigh et la même valeur du nombre de Prandtl. La valeur du nombre de Nusselt est alors la même **[187-189].**

Les expressions utilisées et liant les nombres *Nu, Gr, Pr* peuvent provenir :

a) d'une modélisation théorique ; la précision est alors liée à la connaissance des propriétés thermophysiques du fluide et à la précision des méthodes mathématiques et /ou numériques utilisées.

b) d'une approche semi-théorique et semi-expérimentale, avec une certaine part d'empirisme, à cause de la méconnaissance actuelle des écoulements turbulents. La précision escomptée est alors de 5 à 10% **[187-189].**

En raison des développements dans ces décennies de la puissance de calcul, la première méthode prend de plus en plus de l'importance en comparaison de la seconde méthode.

Au sein des méthodologies faisant appel à une résolution numérique une simplification a été introduite par Prandtl au début de siècle passé. Elle consiste en une séparation en deux zones de l'écoulement près de la paroi menant à une présentation simplifiée des équations de Navier-Stokes.

La connaissance détaillée des mécanismes qui ont lieu à la frontière solide-fluide conduit à l'appréhension de l'essentiel des échanges thermiques et à modéliser correctement les échanges.

II. 3. 1. Formulation mathématique

Nous considérons un volume de contrôle élémentaire pour analyser les variations au cours du temps, de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Cette méthode qui consiste à faire un bilan des quantités transportées et produites au cours du temps, dans un volume élémentaire de contrôle, a été largement étudiée dans les ouvrages de référence **[190, 191]** mentionnés. Nous nous rappelons brièvement leurs formes générales avec la signification physique des différents termes.

Le développement des équations différentielles de base régissant le transfert de chaleur par convection naturelle à partir d'une plaque verticale plane est décrit dans cette section. Les hypothèses simplificatrices sont énumérées et les facteurs particulièrement significatifs sont notés. Le système de coordonnées utilisé est représenté à la **figure II.2.**

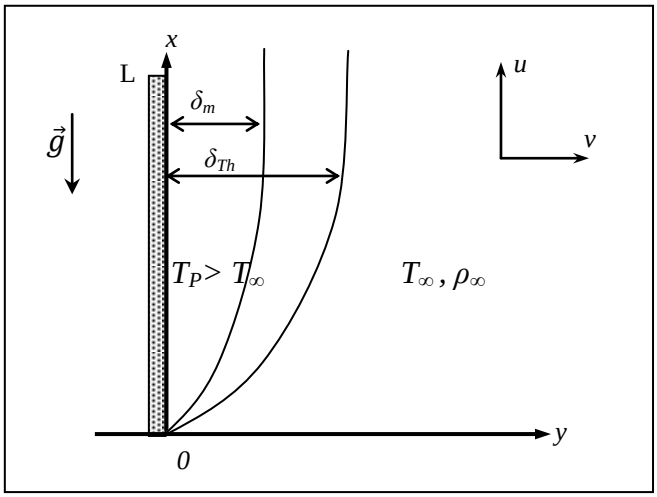


Fig. II.2 : Représentation schématique du modèle physique en convection libre pour une paroi verticale.

II. 3. 2. Équations gouvernantes de base et hypothèses simplificatrice

Les équations différentielles générales pour la continuité, quantité de mouvement et énergie peuvent être écrites comme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \qquad \text{(conservation de masse)}$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \vec{T} \; - \; \nabla p \qquad \text{(quantité de mouvement)} \qquad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} \; + \; \Lambda\right) = \nabla \cdot p\vec{V} + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{Dv^2}{Dt} + \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D(gy)}{Dt}$$

(conservation d'énergie)

Ensuite, si on suppose que :

1) le fluide est incompressible, laminaire et newtonien,

2) les propriétés $c_p, \sigma, \upsilon \; et \; \rho$ ne sont pas des fonctions de temps ou de position, le fluide est considéré pur, homogène et isotrope

3) la fonction de dissipation et l'effet de Joule sont négligeables.

Les trois équations se réduisent à :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \; \nabla p + \mu \, \nabla^2 \vec{V} \qquad (2.2)$$

$$\nabla^2 (\lambda T) + \dot{q} = \rho \, c_p \frac{D \, T}{Dt}$$

Ensuite, si on assume que :

1) Le régime est stationnaire,

2) La conductivité constante,

3) Le flux bidimensionnel,

4) La production de chaleur interne négligeable,

5) L'axe des x pris dans la direction de la gravité g,

Pour un écoulement laminaire bidimensionnel de la figure (II.2) et avec propriétés constantes, les équations gouvernantes s'écrivent comme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \rho g_x$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (2.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Où, $\nu = \mu / \rho_\infty$ est la viscosité cinématique et $\alpha = \lambda / (\rho_\infty C_P)$ est la diffusivité thermique.

Le système d'équation (2.3) est souvent pris comme point de départ pour l'analyse par convection naturelle. De plus, toutes les propriétés de transport sont supposées constantes et sont évaluées à une certaine température de référence, à l'exception de la partie de la masse volumique du terme de flottement, $\rho \cdot g_x$. Ce terme donne la force motrice du flux. Son expression donne

$$\rho g_x = (\rho g_x)_{T_r} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{T_r} (T - T_r)_{g_x} + \frac{(T-T_r)^2}{2}\, g_x + \cdots \tag{2.4}$$

Le coefficient d'expansion de volume peut être défini comme :

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \tag{2.5}$$

Et l'équation (2.4) devient :

$$\rho g_x = (\rho g_x)_{T_r} + (\rho\, \beta)_{T_r} (T - T_r)_{g_x} \tag{2.6}$$

L'approximation de Boussinesq dans les équations de couche limite mène à substituer l'équation (2.6) dans les équations (2.3) et dans chaque cas, gardant le terme dominant. Les équations qui résultent sont généralement considérées comme décrivant adéquatement le transfert de chaleur par convection naturelle sur une plaque plane.

Les hypothèses de la couche limite classique sont souvent appliquées à ces équations pour plus de simplification. Ces hypothèses, basées sur une analyse de l'ordre de grandeur, tel que :

a) La pression est constante à travers la couche limite et n'est fonction que de *x*,

b) La deuxième équation de quantité de mouvement de système d'équation (2.3) est supprimée,

c) La dissipation de la vitesse dans la direction x, $\partial^2 u / \partial x^2$ est supprimée.

d) La conduction de l'énergie thermique dans la direction x, $\partial^2 T / \partial x^2$ est supprimée.

Note: parfois, les équations (2.3) sont modifiées en introduisant la fonction de flux, en différenciant les équations de quantité de mouvement (la première par rapport à y et la seconde par rapport à x), puis en les ajoutant ensemble. Cela élimine le terme de pression directement.

En appliquant ces hypothèses classiques de la couche limite et en utilisant l'équation (2.6), les équations (2.3) deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g_x\beta\,(T - T_r) \qquad (2.7)$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Un problème est formulé, bien sûr, lorsque les équations appropriées sont assorties de conditions limites valables. Les problèmes de convection naturelle résultants sont généralement plus difficiles à résoudre que le problème d'écoulement forcé correspondant dû au couplage température-vitesse et la non-linéarité des équations originales.

Si le fluide est isotherme $\left(T = T_\infty\right)$, alors la force d'entraînement est nulle partout et les équations de continuité et de quantité de mouvement rapportent la solution du « fluide stagnant » $u = \upsilon = 0$. Quand le fluide est chauffé par la paroi, les équations de couche limite sont basées sur les conditions suivantes:

- Imperméable, non stagnant, paroi isotherme

$u = \upsilon = 0$ et $T = T_p$ à $y = 0$

- Stagnant, réservoir infini isotherme

$\upsilon = 0$ et $T = T_\infty$ à $y \to \infty$ (2.8)

Après cette mise en équation du modèle classique, une analyse à échelle d'ordre qualitatif sera entreprise afin de saisir l'importance de telle ou telle force, puis des analyses d'intégrale et de similitude seront effectuées pour accéder à des grandeurs quantifiables.

Dans le cas d'un transfert de chaleur par convection libre le long d'une plaque plane, les grandeurs qui interviennent pour l'évolution du flux thermique sont reliées par :

$$Q = j\,(C_p,\ \lambda_f,\ \rho,\ \mu,\ L,\ \beta,\ g,\ dT) \qquad (2.9)$$

L'analyse dimensionnelle montre qu'on peut écrire une relation entre les nombres adimensionnels sous la forme:

$$Nu = f\,(\mathrm{Pr}, Gr) \qquad (2.10)$$

Définis par :

$Nu = \frac{h \; L}{\lambda}$ Nombre de Nusselt

$Gr = \beta g d T \; \frac{\rho^2 \; L^3}{\mu^2}$ Nombre de Grashof

$Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$ Nombre de Prandtl

Certains auteurs définissent également le nombre de Rayleigh *Ra* tel que *Ra = Gr Pr* et la relation (2.10) devient :

$$Nu = f(Ra) \tag{2.11}$$

Ainsi, une démarche plus directe consiste à effectuer des expériences (quand c'est possible) et à présenter les résultats sous une forme compacte. La relation entre *Nu*, *Gr* et Pr s'écrit en général sous la forme :

$$Nu = a \cdot Gr^n \cdot Pr^m \tag{2.12}$$

Les grandeurs physiques qui interviennent dans les groupements adimensionnels doivent être calculées à la température de la couche limite, moyenne arithmétique entre la température de la paroi et du fluide. A ce sujet, un choix différent de la moyenne arithmétique est préconisé par certains auteurs.

II. 3. 3. Méthodes de résolution des équations de couche limite

Les ordres de grandeur que nous venons d'indiquer sont parfois suffisants pour une description qualitative des phénomènes, mais souvent nous avons besoin d'évaluations plus précises. C'est pourquoi, différentes méthodes ont été développées pour résoudre le système d'équations couplées. Beaucoup s'inspirent fortement des méthodes qui ont été développées en convection forcée pour la résolution de ces mêmes équations mais découplées.

Nous pouvons citer deux grandes classes de méthodes :

- Les méthodes analytiques ou semi-analytiques qui consistent à rechercher des solutions en poussant au maximum le calcul analytique des solutions. Dans cette catégorie deux classes émergent nettement, il s'agit :
  - Des méthodes de recherche de solutions affines ou semblables, dans ce cadre la recherche des similarités est la tâche la plus délicate;

- ❖ Des méthodes intégrales qui nécessitent des hypothèses supplémentaires sur l'allure des profils de vitesse ;

- ➢ Les méthodes numériques, qui consistent à trouver directement des solutions aux équations aux dérivées partielles paraboliques de couche limite. Dans les cas extrêmes on résout par cette voie les équations elliptiques de Navier-Stokes, de continuité et d'énergie.

II. 3. 3. 1. Recherche de solutions affines

Cette recherche part de la constatation expérimentale qu'il existe une similitude certaine entre les profils de vitesse effectués dans la traversée d'une couche limite, à différentes distances (cette similitude existe aussi pour les profils de température). L'idée consiste alors à rechercher une transformation qui, agissant sur les grandeurs caractéristiques du problème, permet de réaliser cette propriété.

Cependant, une contrainte conduit à réduire la classe des problèmes à solutions possibles par cette voie. On aura des solutions affines seulement si par exemple la condition de température imposée à la paroi vérifie une certaine condition. On peut trouver des exemples de conditions aux limites qui vérifient cette contrainte, en particulier, si l'on choisit :

$$T_p(x) - T_\infty = C\ x^{\ m} \tag{2.13}$$

D'autres classes de solutions peuvent encore être trouvées et c'est la dynamique exprimée par les articles de la littérature qui en est révélatrice **[182, 183].**

II. 3. 3. 2. Equations de Blasius en convection naturelle

Cette recherche de solutions affines est aussi incluse dans ce qui est appelé les solutions semblables. L'objectif est le même que précédemment, mais il se traduit, ici, dans la façon de transformer les équations aux dérivées partielles en équations différentielles.

Dans cette technique de similarité, il existe des conditions aux limites spécifiques qui permettent de résoudre les équations différentielles partielles gouvernantes en introduisant de nouvelles variables de transformation qui sont des fonctions des variables

indépendantes originales. Cela suppose implicitement que les solutions sont auto-similaires.

Une telle procédure donne un ensemble d'équations différentielles ordinaires. L'investigateur doit déterminer si ses équations et conditions aux limites satisfont aux critères de similarité, déterminer la transformation correcte et résoudre les équations différentielles ordinaires résultantes. Ces équations sont souvent résolues par des techniques numériques à l'aide d'un ordinateur. Les résultats sont parfois appelés des solutions *«exactes»*, bien que, bien sûr, ils ne sont pas exacts au sens mathématique général ; le point à garder à l'esprit lors de l'examen de la littérature.

La transformation qui conserve la propriété d'invariance et qui permet de combiner les variables de façon à former une seule variable d'espace dont dépendront les fonctions est la clé de voûte de l'approche **[176, 182, 187].** En posant :

$$\eta(x,y) = b(x)\, y \tag{2.14}$$

qui définit la variable de similitude et en effectuant la même transformation sur la fonction de courant et la température, soit :

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \nu\, c(x)\, f\,(x,y) = \nu c(x) f\,(\eta) \\ \theta\,(x,\,y) &= \frac{T\,(x,\,y) - T_\infty}{T_P - T_\infty} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Il est possible d'écrire alors :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_y{}' = \nu\; c(x) \frac{\partial \eta}{\partial y}\; f'(\eta) = \nu\, c(x)\; b(x)\; f'(\eta) \tag{2.16}$$

$$\upsilon = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_x{}' = -\nu\, c'(x)\; f(\eta) - \nu\; c(x) \frac{\partial\, \eta}{\partial x}\; f'(\eta) = -\nu\left[c\, f'\, y b' + c' f\right]$$

en remplaçant u, υ, etc., dans les équations, on obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} f''' + \frac{c'}{b}\; f\, f'' - \left(\frac{c'}{b} - \frac{c\, b'}{b^2}\right) f'^2 + \frac{T_P - T_\infty}{c\;\; b^3}\; \frac{g\;\; \beta}{\nu^2}\;\; \theta = 0 \\ \frac{\theta'}{\mathrm{Pr}} + \frac{c'}{b}\;\; f\;\theta' = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dans le cas d'une plaque à température constante les conditions aux limites s'écrivent :

$$f'(0) = f(0) = f'(\infty)$$

$$\theta(\infty) = 0 \qquad (2.18)$$

$$\theta(0) = 1$$

On obtient par suite de la détermination des coefficients, les équations différentielles ordinaires de Blasius qui s'écrivent :

$$f''' + 3 f f'' - 2 f'^2 + \theta = 0$$

$$\theta'' + 3 Pr\ f\ \theta' = 0 \qquad (2.19)$$

$$f'(0) = f(0) = f'(\infty) = \theta(\infty) = 0$$

$$\theta(0) = 1$$

Ces équations couplées ont été résolues par Pohlhausen pour le cas de la plaque verticale à température constante. La *figure II.3* donne les profils recherchés.

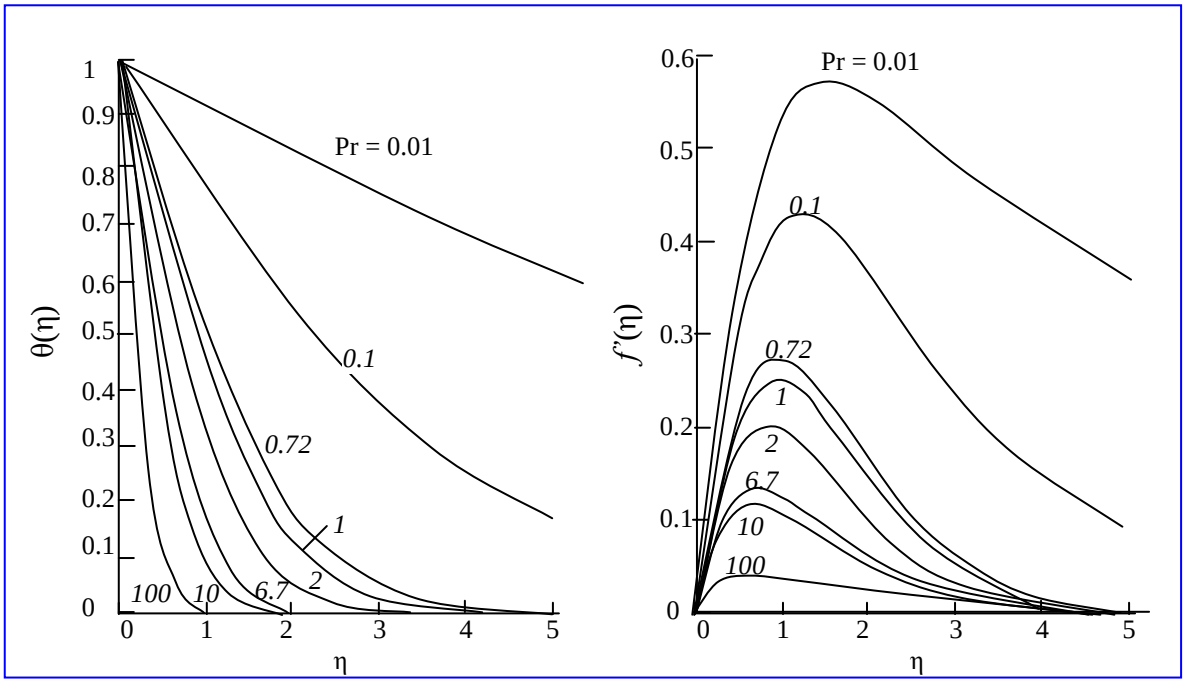


Fig. II.3: Solutions semblables pour la plaque verticale plane à température constante pour les vitesses et les températures, [187].

II. 3. 3. 3. Méthodes intégrales

La technique intégrale (dans sa forme la plus simple est souvent appelée la méthode de Von Karman-Polhausen) des équations gouvernantes donne une solution approximative car les formes de vitesse et de température doivent être supposées. Les avantages de la technique sont :

- ✓ Que le nombre de Prandtl est explicitement exprimé dans la solution
- ✓ Une gamme beaucoup plus large de géométries peut être manipulée.

Pour une plaque isotherme les équations différentielles partielles (2.7) sont intégrées de y à l'épaisseur δ de la couche limite. Ainsi on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta} u^2 dy\right] = -\nu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} - g\beta\left[\int_0^{\delta}(T-T_\infty)\,dy\right]$$
$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta} u\,(T-T_\infty)\,dy\right] = -\alpha \left.\frac{\partial\,(T-T_\infty)}{\partial\, y}\right|_{y=0} \qquad (2.20)$$

On choisit alors des profils de vitesse et de température qui vérifient au moins les conditions aux limites du problème. Le niveau de précision des résultats dépendra de l'approximation faite des profils. Par exemple, il est habituel de prendre :

$$u = u_x \cdot \frac{y}{\delta}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2$$
$$T - T_\infty = (T_p - T_\infty)\cdot\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad (2.21)$$

qui vérifient les conditions aux limites. On remplace ensuite u et T par leurs approximations dans les équations intégrées pour obtenir deux nouvelles équations, différentielles cette fois et dans lesquelles U et δ sont les nouvelles inconnues. Soit :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{U^2\,\delta}{105}\right] = \frac{g\,\beta\,(T_P - T_\infty)}{3} - \frac{\nu U}{\delta}$$
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{U\delta}{30}\right] = \frac{2\,\alpha}{\delta} \qquad (2.22)$$

En recherchant alors des solutions sous la forme : $U = C_1 \cdot x^n$ et $\delta = C_2 \cdot x^m$ et en égalant les termes de même puissance de x, on trouve: $m = \frac{1}{2}$ et $n = \frac{1}{4}$.

Ce qui donne :

$$U = 5{,}17\left(\mathrm{Pr} + \frac{20}{21}\right)^{-1/2}\left[\frac{g\,\beta\,(T_P - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{1/2} x^{1/2}$$

$$\delta = 3.93\left(\mathrm{Pr} + \frac{20}{21}\right)^{-1/4}\left[\frac{g\,\beta\,(T_P - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{1/4} x^{1/4} \qquad (2.23)$$

La densité de flux de chaleur peut être calculée de la façon suivante :

$$q'' = -\alpha\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \lambda\frac{2}{\delta}\,(T_P - T_\infty) \qquad (2.24)$$

soit $$Nu_x = \frac{q''\,x}{\lambda\,(T_P - T_\infty)} = \frac{2x}{\delta}$$

Ce qui donne après les calculs :

$$Nu_x = 0.508\cdot\left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot Gr_x^{\frac{1}{4}}$$

$$Nu_L = 0.68\cdot Pr^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot Gr_L^{\frac{1}{4}} \qquad (2.25)$$

Ceci ne donne qu'une différence de l'ordre de 5% par rapport aux solutions semblables, supposées plus exactes **[182, 183, 192]**.

II. 4. Cas de la convection naturelle conjuguée sous l'effet magnétique

II.4.1 Présentation générale

La magnétohydrodynamique (MHD) parfois appelée aussi hydromagnétique, est une branche de la physique permettant d'étudier les propriétés aussi bien des conducteurs fluides que des plasmas lorsqu'ils sont sujets à un champ magnétique. A ses débuts, cette théorie décrivait les propriétés dynamiques métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus), au gaz faiblement ionisés, aux plasmas et aux solutions aqueuses en présence de champ magnétique. Lorsqu'un fluide conducteur se déplace dans un champ magnétique, il est le siège d'un champ électrique qui y produit des courants électriques ; ceux-ci modifient le champ magnétique initial ; d'autre part, les forces de Lorentz appliquées à la matière le long des lignes de courant modifient le mouvement du fluide. Ainsi apparait une

interaction des effets électromagnétiques et hydrodynamiques qui constituent le domaine de la MHD.

L'écoulement de la convection naturelle d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique représente un sujet adéquat de recherche scientifique, à cause de sa présence dans maintes procédés industriels, tels que la géophysique, les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires, les collecteurs de l'énergie solaire et spécialement lors du processus de croissance cristalline **[176]**. Dans chacun des cas, un champ magnétique transversal suffisamment fort peut, en ralentissant l'écoulement, rendre négligeable les phénomènes de transport, tels que la convection thermique et l'inertie. Alors, un régime d'écoulement vertical et établi peut exister. A titre d'exemple, l'utilisation répandue de cristaux dans des applications électroniques et optiques a eu, pour conséquence, une recherche étendue envers la compréhension et le contrôle de la convection naturelle dans ces systèmes.

Dans ce contexte, la convection est étudiée avec la motivation de l'éviter ou de la réduire, à cause de son rôle important dans la formation des défauts tels que les hétérogénéités de composition dans le cristal. Avec l'application d'un champ magnétique externe, il est possible d'agir sur les écoulements sans aucun contact physique et ainsi supprimer les fluctuations, contrôler les transferts thermique et massique, et donc améliorer la qualité du cristal. A cet effet, le ralentissement magnétique pour contrôler l'écoulement induit par un gradient de température est devenu un moyen privilégié et qui fait l'objet de plusieurs applications industrielles **[176].** Le problème de la convection naturelle d'un fluide conducteur d'électricité le long d'une plaque subit à une température constante ou à un flux de chaleur constant sous l'action d'un champ magnétique a été intensivement étudié ces dernières années.

II. 4. 2. Position du problème

La magnétohydrodynamique est consacrée à l'étude des interactions entre le champ de vitesse et le champ d'induction magnétique, qui décrivent le mouvement d'un fluide conducteur dans un champ magnétique. Les équations MHD sont, essentiellement, les équations hydrodynamiques standards qui sont modifiées en utilisant les équations de Maxwell et la loi d'Ohm. Les équations prennent généralement la forme de:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u = 0 \qquad \text{(conservation de masse)} \qquad (2.26)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = -\nabla \cdot p + J \times B \qquad \text{(quantité de mouvement)} \qquad (2.27)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = -\nabla \cdot p + J \times B \qquad \text{(conservation d'énergie)} \qquad (2.28)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \qquad \text{(Loi de Ampère)} \qquad (2.29)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E \qquad \text{(Loi de Faraday)} \qquad (2.30)$$

$$E + u \times B = 0 \qquad \text{(Loi idéal d'Ohm)} \qquad (2.31)$$

Elle est donc régie par un système des équations de Maxwell et des équations de l'hydrodynamique.

L'écoulement de fluide en convection naturelle peut être exposé à un champ magnétique extérieur, uniforme et orienté arbitrairement dans le plan (*x*, *y*). Pour cela, on introduit les définitions suivantes à propos du vecteur de courant électrique $\vec{J}$ et les forces électromagnétiques de Lorentz $\vec{F}_{EM}$ dans les équations de quantité de mouvement.

Le vecteur du champ magnétique est :

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y \qquad (2.32)$$

Avec :

$\vec{e}_x$ *et* $\vec{e}_y$: Vecteurs unitaires respectivement des directions *x* et *y*.

B_x : Composante horizontale du champ magnétique.

B_y : Composante verticale du champ magnétique.

B_0 : Résultante du champ magnétique ; $B_0 = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$

Le vecteur de courant électrique $\vec{J}$ est défini par l'application de la loi d'Ohm, par ailleurs, ce vecteur est conservatif, alors :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{J} = \sigma\left[-\vec{\nabla}\phi + \vec{V} \Lambda \vec{B}\right] \\ div\, \vec{J} = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.33)$$

Où $\vec{V} = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y$ désigne le vecteur de la vitesse dans le plan *x-y*, σ étant la conductivité électrique, ϕ et $-\nabla\phi$ représente respectivement le potentiel électrique et le champ électrique associé.

La force électromagnétique $\vec{F}_{EM}$ générée par le potentiel électrique ϕ et le champ magnétique, qui s'appelle *la force de Lorentz*, est définie par :

$$\vec{F}_{EM} = \vec{J} \wedge \vec{B} \tag{2.34}$$

Dans cette étude, la plaque est soumise à un champ magnétique externe uniforme et constant et tant que le milieu est supposée électriquement isolant ϕ est constant (en état stationnaire, ce qui signifie que le champ électrique disparait partout or le potentiel électrique ϕ est constant),les équations mathématiques modélisant le problème sont obtenues en considérant le courant électrique $\vec{J}$ et la force électromagnétique $\vec{F}_{EM}$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{J} &= \sigma\left[\vec{V} \wedge \overrightarrow{B}\right] \\ \vec{F}_{EM} &= \sigma\left[\vec{V} \wedge \overrightarrow{B}\right] \wedge \overrightarrow{B} \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

II. 4. 3. Mise en équations du problème physique

Pour simplifier le modèle mathématique des écoulements MHD de la convection naturelle externe susceptibles de se développer dans ce problème et qui sont régis par les équations de conservation de masse ou de continuité, de quantité de mouvement et de conservation d'énergie, on prend en considération l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien incompressible le long d'une plaque plane verticale et isotherme, soumise à l'action d'un champ magnétique transversale et uniforme.

II. 4 .3. 1. Hypothèses simplificatrices

Dans cette étude, un certain nombre d'hypothèses sont adoptées afin de simplifier la résolution numérique des équations générales.

- Les écoulements hydrodynamique et thermique sont stationnaires ;
- Le fluide est incompressible, newtonien et conducteur ;
- La surface de la plaque est supposée portée à une température constante et

uniforme T_p ;

- Le fluide est pur, homogène, isotropes et les propriétés physiques du fluide considéré sont supposées constantes et uniformes, à l'exception de la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq où la masse volumique est supposée constante dans toutes les termes des équations de quantité de mouvement, sauf dans le terme de poussée, où elle est exprimée par la formule:

$$\rho = \rho_\infty \left[1 - \beta\left(T - T_\infty\right)\right] \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\rho_\infty}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p ; \qquad (2.36)$$

- Le champ électrique est considéré comme nul et les effets de polarisation et d'ionisation sont négligeables.
- Pas de génération de chaleur volumétrique ($\dot{q} = 0$) et la dissipation visqueuse est supposée négligeable ($\Lambda = 0$).
- L'effet de Joule est négligeable.

II. 4. 3. 2. Formulation des équations de transport :

Après la considération des hypothèses de simplification suscitées, le modèle mathématique gouvernant la convection libre sous l'effet d'un champ magnétique s'écrit de la même façon que celui du 1^{ier} problème de la convection libre (§**II.3.2.**).

Les équations générales régissant l'écoulement du fluide au dessus d'une plaque représentée par la **figure II.4** et rapportées à un système de coordonnées Cartésiennes sont données par:

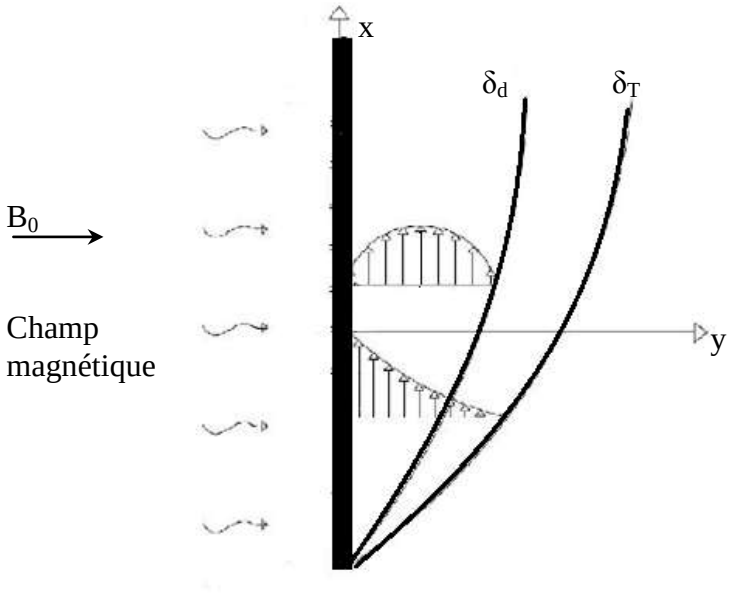


Fig. II.4 : modèle physique du problème MHD

❖ **Equation de la continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.37}$$

❖ **Equations de quantité de mouvement suivant x :**

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F_{EMX} \tag{2.38.a}$$

❖ **Equation de quantité de mouvement suivant y :**

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + g\,\beta\left(T - T_\infty\right) + F_{EMY} \tag{2.38.b}$$

❖ **Equation de l'énergie :**

$$\rho_0 C_p\left(\frac{\partial}{\partial x}(u\,T) + \frac{\partial T}{\partial y}(v\,T)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{2.39}$$

Les expressions des composantes de la force de Lorentz suivant les directions *x* et *y* sont explicitement comme suit :

$$\left.\begin{aligned} F_{EMX} &= \frac{\sigma}{\rho}\left(v\,B_x\,B_y - u\,B_x^2\right) \\ F_{EMY} &= \frac{\sigma}{\rho}\left(u\,B_x\,B_y - v\,B_y^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

Auxquelles nous rajouterons, les conditions aux limites.

à y = 0 $u = v = 0$, $T = T_p$

à $y \to \infty$ $u = 0$, $T = T_\infty$ (2.41)

II. 4. 3. 3. Equations du problème sous forme adimensionnelle :

On introduit les variables adimensionnelles pour réduire le nombre de paramètres et de faciliter la résolution du problème d'une manière analytique ou numérique. Pour cela nous avons pris les grandeurs de références par rapport auxquelles toutes les variables seront normalisées.

➢ Les variables adimensionnelles sont :

$$U_r = \sqrt{g\ \beta\ \Delta T\ \ L} = \frac{\upsilon}{L},\quad U = \frac{u}{U_r}\ ,\quad V = \frac{v}{U_r}\ ,\quad X = \frac{x}{L},\quad Y = \frac{y}{L},$$

$$P_m = \frac{p_m}{\frac{1}{2}\ \rho\ U_r^2}\ ,\qquad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \tag{2.42}$$

Après simplification et écriture en bidimensionnel, on obtient les équations adimensionnées suivantes, complétées par l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) - \frac{\partial P_m}{\partial X} + \theta + F_{EMX}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) - \frac{\partial P_m}{\partial Y} + Gr\ \theta + F_{EMY} \tag{2.43}$$

$$U\ \frac{\partial \theta}{\partial X} + V\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr\ \sqrt{Gr}}\ \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial\ X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right)$$

Dans le cas, où le champ magnétique étant appliqué suivant Y, les composantes de la force de Lorentz et de la densité du courant suivant X et Y sont données par les expressions suivantes:

$$F_{EMX} = Ha^2\left[V\cdot\cos(\gamma)\cdot\sin(\gamma) - \ U\cdot\sin^2(\gamma)\right] \tag{2.44.a}$$

$$F_{EMY} = Ha^2\left[U\cdot\cos(\gamma)\cdot\sin(\gamma) - \ V\cdot\cos^2(\gamma)\right] \tag{2.44.b}$$

Où :

$$F_{EMX} = -U\ \ Ha^2 \tag{2.45.a}$$

$$F_{EMY} = 0 \tag{2.45.b}$$

γ : Angle de l'orientation.

Ha est le nombre de Hartmann définie par:

$$Ha = BL\left(\sigma/\rho\nu\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.46}$$

Dans certaines littératures on trouve le paramètre magnétique adimensionnel ***M*** définit comme :

$$M = \frac{\sigma B_0^2 \; L^2}{\rho \; \nu} = \; Ha^2 \tag{2.47}$$

Les équations gouvernantes adimensionnelles (2.43) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \\
&U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) - \frac{\partial P_m}{\partial X} + \theta - MU \\
&U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) - \frac{\partial P_m}{\partial Y} + Gr\;\theta \\
&U\;\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\;\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr\;\sqrt{Gr}}\;\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Le nombre adimensionnel du Nusselt est donné comme

$$Nu = -X\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_{Y=0} \tag{2.49}$$

II. 4 .3. 4. Conditions aux limites

Le problème reste incomplet sans l'introduction les conditions aux limites. On considère la condition de non-glissement sur la paroi auxquelles nous rajouterons, naturellement, les conditions aux limites. Ces conditions aux limites pourront s'écrire par exemple :

$$\begin{aligned}
&\text{à} \quad Y = 0 \qquad U = V = 0, \qquad \theta = 1 \\
&\text{à} \quad Y \to \infty \qquad U = 0, \qquad \theta = 0
\end{aligned} \tag{2.50}$$

II. 5.Conclusion

Tout d'abord, nous faisons un rappel sur les éléments fondamentaux responsables sur le mécanisme de la convection libre.

Nous avons ensuite focalisé sur les équations gouvernantes et l'approximation de Boussinesq, en convection naturelle pour lier au minimum la température aux vitesses. Ce couplage qui mène au choix judicieux d'une telle méthode de résolution.

L'intérêt de l'étude du modèle physique, appelé classique, responsable de l'écoulement de la convection libre le long d'une plaque verticale est mis en évidence. Le développement est nécessaire dans la mesure où dans la littérature les approches des nombres de Nusselt pour les plaques inclinées reposent sur ce modèle, solutionnée analytiquement par la paroi verticale.

Dans ce chapitre, l'influence du champ magnétique sur l'écoulement de la convection libre le long d'une plaque verticale est aussi examinée dans le sens de l'apparition de l'effet conjugué.

Chapitre 3

Visualisation &

Modèle Proposé

CHAPITRE III
VISUALISATION ET MODELE PROPOSE

III.1. Introduction

Ce chapitre se propose de présenter les deux modèles physiques utilisés dans l'étude de transfert de chaleur convectif avec ou sans l'action du champ magnétique le long des plaques verticale, inclinée ou horizontale.

En effet, l'ancien modèle de Schmidt et Beckmann appelé classique qui est basé sur une seule couche limite et le deuxième est celle de **Lewandowski [1]** de bicouches. Ainsi, les photographies amenées à partir de la technique de visualisation ont été exposé pour justifier le modèle choisi dans ce travail de thèse.

En réalité, une différence considérable entre les résultats des considérations théoriques suivant le modèle classique et les investigations expérimentales apparaît dans le transfert thermique par convection naturelle à partir des surfaces isothermes planes. Cette anomalie n'est pas constante, mais elle varie avec l'angle d'inclinaison de la plaque.

De notables différences entre les relations du Nusselt, décrivant le cas de plaque verticale, obtenues par 25 auteurs, diffèrent par ± 20 % **[193, 194]**. Pour les plaques inclinées, les anomalies sont beaucoup plus grandes et montent à $\pm$ 45 % dans le régime laminaire et approximativement à $\pm 100\%$ dans le régime turbulent **[195]**. L'intervalle qui contient les résultats du cas d'une plaque horizontale obtenu par 19 investigateurs monte à 50% **[193-195]**.

Ceci était prévisible lors de l'analyse précédente où on a indiqué que face aux mesures expérimentales, les modèles théoriques ne sont pas nombreux. En fait, une dérivation juste au niveau des solutions analytiques par la plaque verticale est opérée sans précaution pour celles inclinées.

III. 2. Modèle classique du transfert thermique par convection libre

Le modèle proposé par Schmidt et Beckmann **[196]** appartient aux anciens modèles classiques du transfert de chaleur par convection. Ce modèle a été obtenu sur la base des résultats expérimentaux de la visualisation des couches limites thermiques d'une plaque verticale isotherme **[54]**.

La *figure III.1.a* présente une interprétation graphique de ce modèle. Les investigations suivantes ont été effectuées par **Lorenz, Saunders, Schuh, Ostrach, Sparrow, Gebhart** et également par **Fujii [93] , Takeuchi [197], Ling [198], Churchill [199] et autres [200].** Elles sont caractérisées par une amélioration de l'exactitude des calculs à cause de l'élimination consécutive des hypothèses simplificatrices ou de les définir plus exactement par l'addition des autres conditions aux limites. Cependant, indépendamment du fait si elles ont été conduites analytiquement ou numériquement, ces considérations sont toujours basées sur le même modèle physique de ce phénomène.

Le même modèle ; *figure III.1.b*, a été également adopté pour la description des résultats obtenus avec les plaques inclinées. L'épaisseur de couche limite augmente le long de la plaque, mais la poussée d'Archimède, présentée dans les équations de Navier-Stokes, est remplacée par ces composantes selon *x* et *y*. Ce cas a été étudié selon **Jaluria** par **Rich, Sugawa** et **Vilet [200]**, et également par **Kierkus [201] Hassan [62], Fujii [93]**, **Miller [202], Rasmus [203],** et selon **Churchill** par **Raithby [199]**, **Lewandowski [195]** et d'autres.

Le transfert thermique convectif à partir d'une plaque horizontale a été également expliqué par un modèle semblable ; *figure III.1.c*, basé sur une augmentation homogène de la couche limite sur la surface plane semi-infinie. L'étude de **Rotem et Claassen [61]** est un exemple standard d'utilisation de ce modèle pour une plaque horizontale. Ces scientifiques ont également publié les résultats des études de visualisation. Leurs photographies montrent non seulement le bord initial de la plaque horizontale, elles montrent également l'endroit où la couche limite transforme en panache. En ce moment, le modèle physique de ce phénomène admis par eux commence à être inadéquat. Par conséquent, selon l'analyse de leurs résultats de visualisation et également les photographies de **Schmidt [204],** l'analogie entre la croissance d'une couche limite thermique d'une plaque verticale et horizontale ne concerne pas la surface entière.

D'autres chercheurs de ce cas, basent sur une plaque semi-infinie, sont par exemple: selon **Jaluria** par **Pera et Blanc [200], Goldstein [75]** et d'autres.

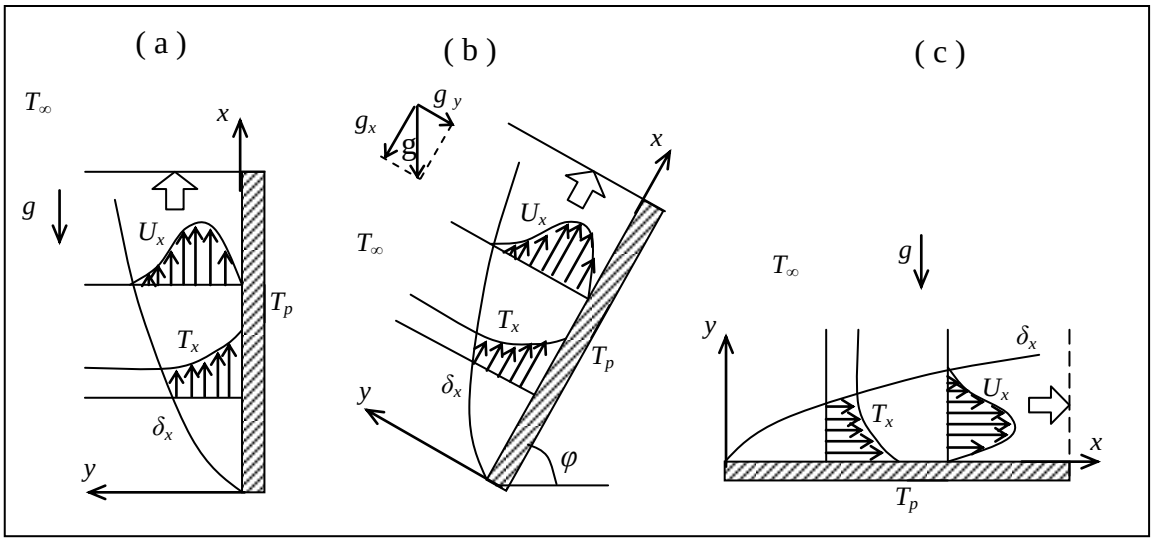


Fig. III.1 : Modèles théoriques de la convection libre pour une surface plane, [1].

Selon **Kimur**a, et al. **[101]**, les flux convectifs naturels sur les plaques inclinées orientées vers le haut ont été étudiés expérimentalement, en mettant l'accent sur le rôle des flux opposés qui apparaissent sur les plaques légèrement inclinées par rapport à la ligne horizontale. Les champs d'écoulement sur les plaques et les températures de surface des plaques chauffées ont été visualisés à la fois avec du colorant et une thermométrie à cristaux liquides **(figure III.2)**. Les résultats ont montré que les flux descendants et ascendants apparaissaient sur les plaques lorsque les angles d'inclinaison des plaques étaient inférieurs à **15 °**.

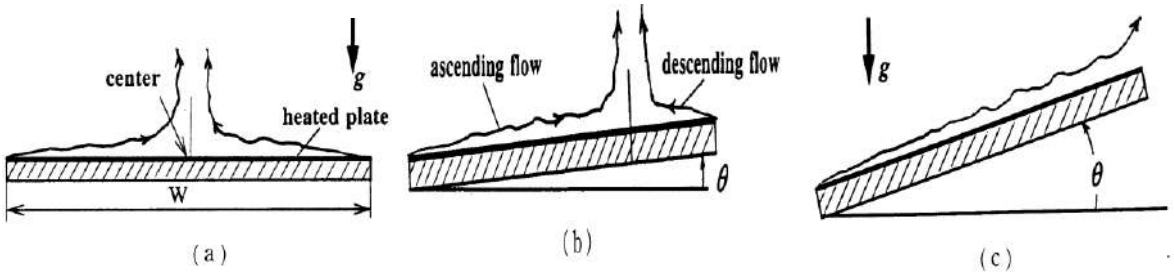


Fig. III.2 : Champ d'écoulement d'une plaque : a) horizontale, b) & c) inclinée [101]

Les deux écoulements se sont collés à une certaine distance du bord de la plaque, puis se sont détachés de la plaque pour devenir un panache thermique. On a constaté que la distance ci-dessus était déterminée uniquement par les angles d'inclinaison et était

indépendante des tailles et des flux de chaleur des plaques. Les coefficients locaux de transfert de chaleur des plaques ont également été mesurés. Les résultats ont montré que le transfert de chaleur de la plaque a été amélioré par l'apparition des flux descendants.

Les résultats des expériences de visualisation, effectués sur des vraies plaques par **Al-Arabi [65]**, Sparrow et Keun-Shik ; dans l'article de Chang et Han **[205]** ; et d'autres **[195]** suggèrent qu'il soit nécessaire d'utiliser un autre modèle du phénomène. Ce pressentiment n'est que la traduction de l'inadéquation du modèle classique aux phénomènes physiques observés.

Cependant, à notre connaissance, aucun travail consacré aux surfaces horizontales, basées sur n'importe quel autre modèle que celle de la plaque semi-infinie, n'a été publié, à l'exception de **Lewandowski [1]**.

La compréhension donc du modèle classique est fondamentale. Elle est développée par une plaque verticale. Pour celles inclinées il suffit d'adopter les résultats selon l'inclinaison.

III.3. Nécessité d'un nouveau modèle

A ce jour, les investigations **[206]** ont prouvé que les méthodes de mesure et les équipements utilisés peuvent causer des erreurs malgré que leur grandeur est constante et indépendante de l'angle d'inclinaison de la plaque. La seule exception est la méthode de gradient, dans laquelle l'exactitude peut être influencée par l'angle d'inclinaison de la surface, spécialement dans le cas de l'emplacement incorrect ou accidentel des points expérimentaux (thermocouples) sur la surface de mesure **[207]**. Cette méthode, cependant, est utilisée fréquemment comme une méthode qualitative ainsi qu'une méthode quantitative (de grandeur), donc ne peut être la raison principale pour l'anomalie des relations mentionnées précédemment.

Alors, il s'agit de s'assurer de l'invalidité de l'unicité de la couche limite et sur laquelle repose le modèle initial décrit, et appelé modèle classique.

Devant ces disparités mises en évidence, une approche semi-expérimentale et à finalité qualitative a été effectué par **Lewandowski [1]** et **Bouksani [2]**.

III.4. Physique du modèle proposé

Dans ce modèle suggéré à la *figure 2.3* pour le transfert thermique par convection libre en présence magnétohydrodynamique à partir des surfaces planes isothermes de dimensions finies, la transition d'un cas à l'autre procède à la fois un déplacement du point de séparation, c'est le même modèle apporté par **Lewandowski [1]** mais sans l'effet du champ magnétique comme sera présenté ultérieurement. Donc, le cas d'une plaque inclinée est pratiquement un modèle général concernant les plaques orientées arbitrairement dans un espace illimité (*figure III.3.b*), en positions verticales (*figure III.3.a*) et horizontales (*figure III.3.c*) constituent seulement des cas particuliers.

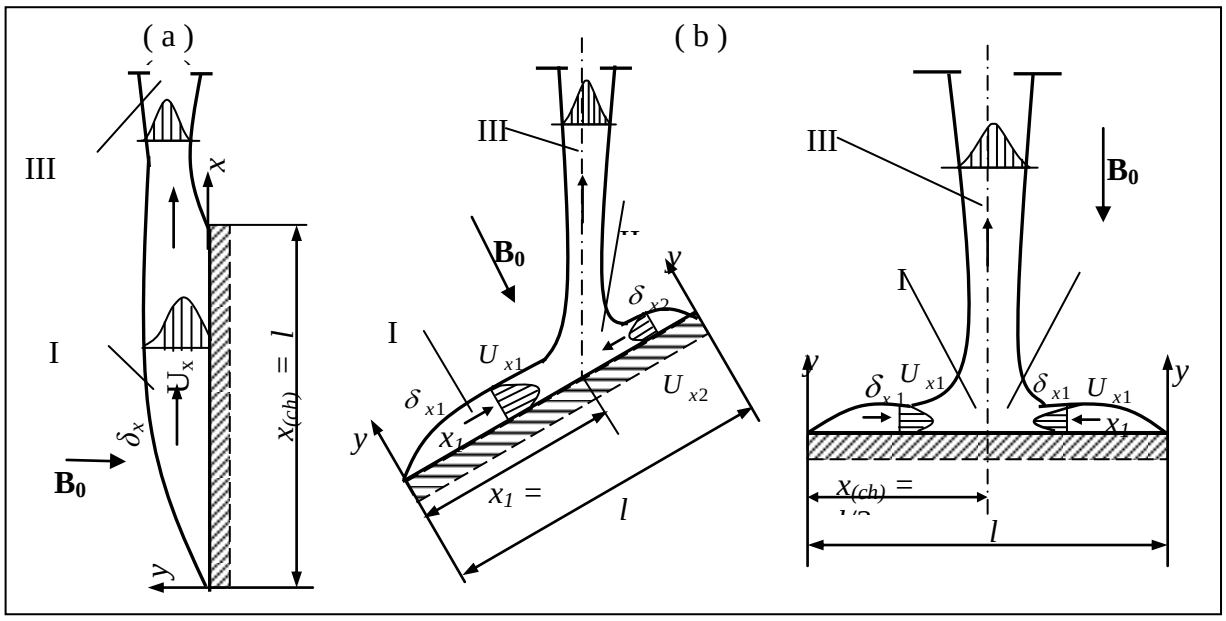


FIG. III.3 : Modèle propose du transfert thermique par convection libre en présence magnétohydrodynamique a partir des plaques a) verticale; b) inclinée; c) horizontale [1].

La polyvalence du modèle suggéré prend en considération qu'un changement de l'angle d'inclinaison a comme conséquence des changements faciles de la participation des régions I et II dans l'échange thermique, tandis que la participation de la région III reste constante. Pour les deux cas particuliers -horizontale et verticale- la différence entre les régions I et II disparaît graduellement dans le premier cas, tandis que dans le deuxième cas c'est la région II qui disparaît graduellement. Comme effet final, pour les plaques horizontales les deux couches limites symétriques existent, se développent à partir de chaque bord (région I = région II) et se transforment au point de séparation en écoulement de convection libre (panache). D'autre part, dans le cas de plaque verticale le modèle est identique au modèle classique développé au chapitre III, parce qu'une seule

couche limite apparaît (région II = 0) puis se convertissant en sillage et ensuite en panache (région III) **[208].**

III. 4. 1. Modèle original proposé par Lewandowski

En effet, ce modèle proposé par Lewandowski pour un transfert de chaleur par convection naturelle dont il a utilisé une méthode de résolution semi-analytique et il a introduit les hypothèses simplificatrices typiques pour la convection libre comme:

a) le fluide est incompressible et son écoulement est laminaire,
b) les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité,
c) les vitesses longitudinales le long de la plaque sont très supérieures à celles transversales; $U_x >> V_x$.
d) les propriétés physiques de fluide dans les couches limites et dans la région calme sont constantes,
e) la température de la plaque est constante,
f) les épaisseurs des couches limites thermique et mécanique sont identiques.

III.4.2. Résultats de visualisation de convection libre sur des plaques inclinées

Dans cette optique, une technique de visualisation élaborée a été appliquée pour les surfaces horizontales et les surfaces inclinées. L'analyse des observations visuelles et à l'aide d'une caméra numérique, démontre que le développement des couches limites de la convection libre pour une plaque isotherme et de dimensions finies, horizontales ou inclinées, s'effectue des deux côtés pour finir en panache thermique; comme il est montré dans la *figure III.4.1* et *III.4.2*. Ce résultat a été confirmé par d'autres visualisations menées par des expérimentateurs **[101]**.

Les résultats de la recherche visuelle présentés par **Lewandowski [207]** sur les plaques rondes ne se réfèrent pas à la gamme entière d'angle d'inclinaison de plaque, mais ils sont confinés à des petites inclinaisons, satisfaisant la condition de la symétrie axiale. Dans la gamme des grands angles ($\varphi > 12°$), les expériences ont été effectuées sur des plaques rectangulaires, cette gamme représente plus strictement le modèle bidimensionnel du phénomène.

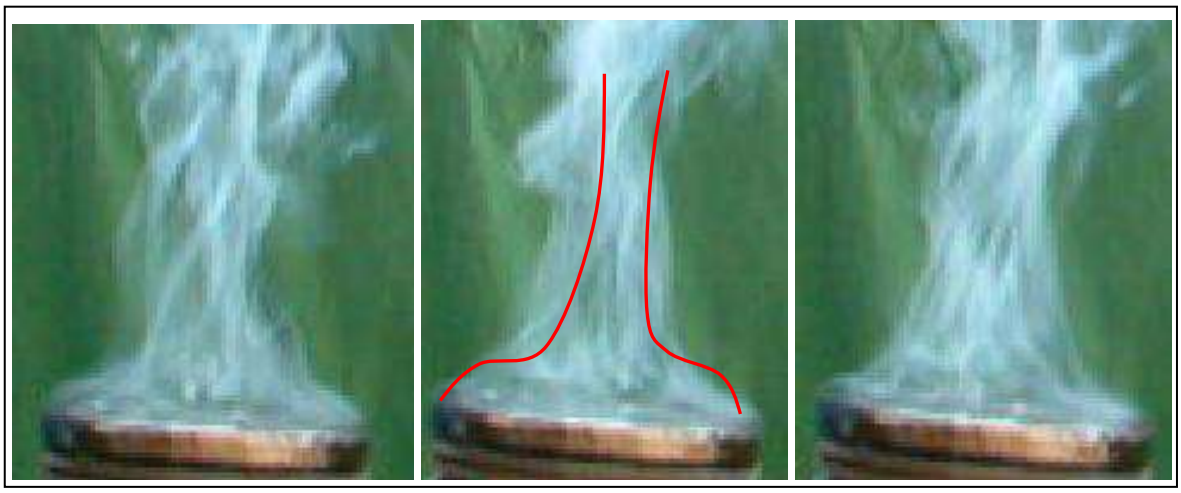


Fig. 3.4.1 : Visualisation type des couches limites sur des plaques horizontales [2].

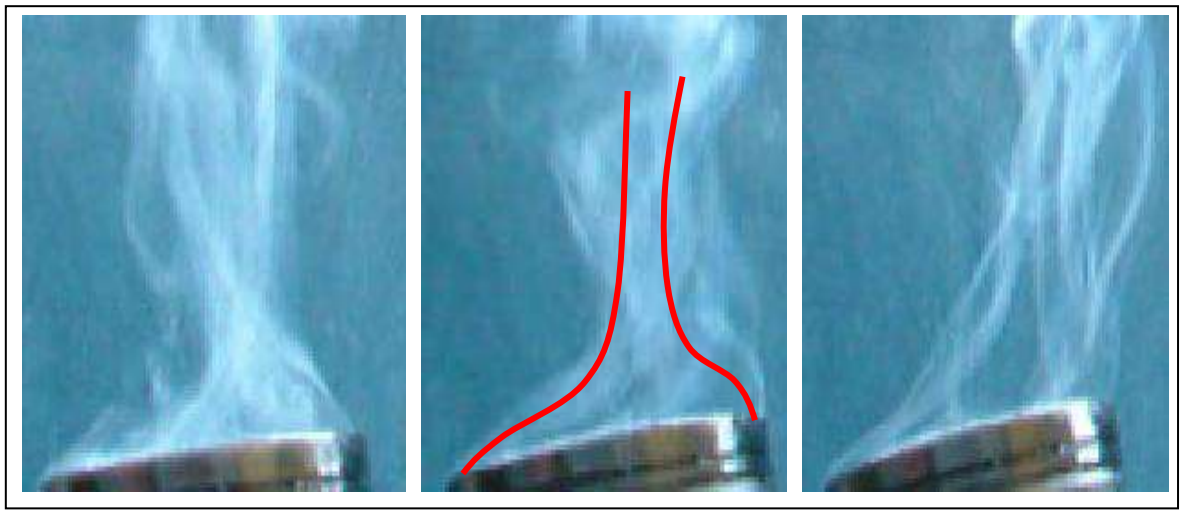


Fig. 3.4.2 : Visualisation type des couches limites sur des plaques inclinées [2].

Les photographies et le procédé expérimental de l'étude de **Lewandowski** sur le transfert thermique par convection naturelle d'une plaque inclinée ronde, comme équipement utilisé, ont été décrites en détail dans les références **[195, 206, 207]**.

Les photographies présentées dans la *figure III.5*, de **Fumiyoshi** et col. **[101]**, concernent le transfert de chaleur par convection naturelle pour une plaque carré ($d=0.05m$) isotherme légèrement inclinée ($\varphi \leq 15°$). Les plaques inclinées par $\varphi = 0°$, $5°$, $10°$, $15°$ ont été choisie comme exemple pour la présentation.

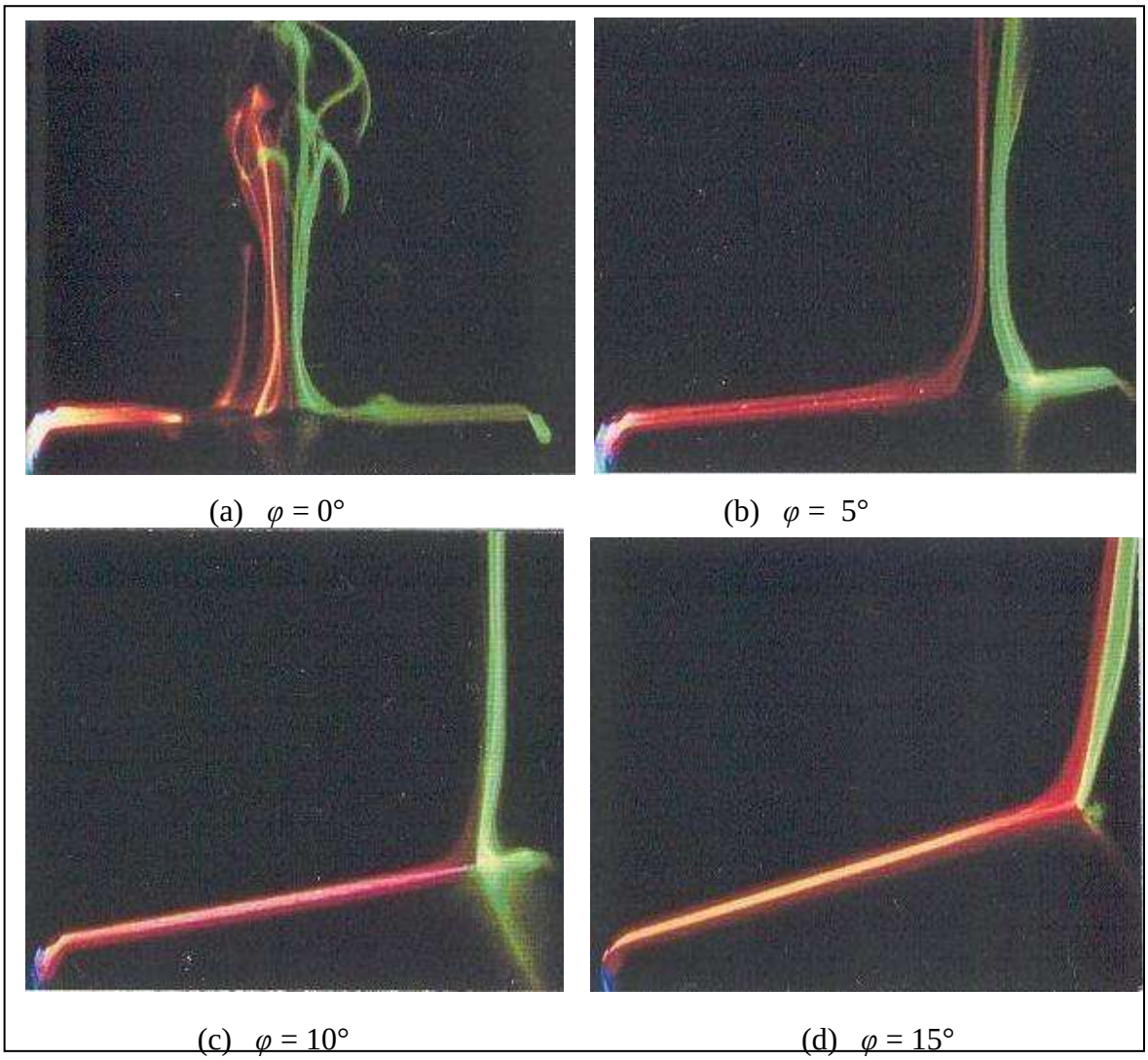


Fig. III.5 : Visualisation de champ d'écoulement sur des plaques horizontale et inclinées (d = 50mm, q" = 1000W/m^2 , Ra = 6*10^7), [101].

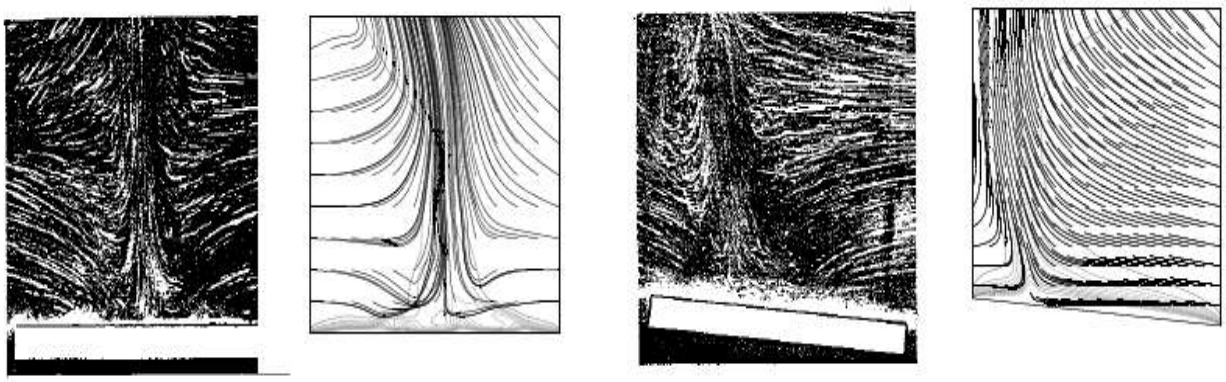


Fig. III.6 : Comparaison entre la visualisation expérimentale de fujii et Imura (1972) et la simulation numérique de la convection libre sur une plaque horizontale chauffée (à gauche) et légèrement inclinée (φ= 5 °, à droite), Ra = 6 * 10^7, Pr = 7) [93].

L'analyse des photographies de tout les cas d'angles d'inclinaison, démontre que pour une plaque horizontale les couches limites se développent identiquement à partir des deux extrémités opposées et se transforment ensuite en panache au-dessus de la plaque. La ligne centrale, de ce flux axialement symétrique de convection libre, est verticale sur la surface, et traverse l'axe de symétrie de plaque. Pour un angle d'inclinaison élevé le point de séparation des couches limites, par lesquelles la ligne centrale passe, se déplace à un bord et les couches limites opposées (identiques pour le cas horizontal) commencent à différencier de plus en plus l'une de l'autre. Enfin, Il est curieux de noter la disparition totale de la deuxième région de couche limite pour le cas de la plaque verticale.

III. 4. 3. Comparaison entre les Résultats théoriques et expérimentaux

Les recherches traitant le modèle classique, couvrant le transfert de chaleur par convection naturelle sur des plaques horizontales ou inclinées; discutent l'unicité de la couche limite malgré que les expériences de la visualisation démontrent que le développement des couches limites de la convection libre pour la plaque isotherme et de dimension finie, horizontales ou inclinées, s'effectue des deux cotés pour finir en panache thermique.

Les diverses études ont montré de façon redondante que la séparation ait lieu d'une part et que l'existence du panache en dépit de sa nature et en extension existe d'autre part. Il est alors évident que le modèle initial basé sur le concept de la plaque-infinie n'est pas valide. Son maintien dans la littérature est à notre point de vue lié à sa simplicité quant à la déduction mathématique, au moins, ce concept valable pour la plaque verticale n'est pas tout à fait représentatif sur les autres cas.

La comparaison des résultats expérimentaux et théoriques nous pousse à penser de proposer un nouveau modèle mathématique adéquat au comportement de l'écoulement montré dans les expériences de la visualisation, en vérifiant sa description au phénomène physique.

C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de **Lewandowski [1]**. Ils ont la tâche de contribuer à la connaissance des phénomènes physiques ayant pour objet la thermique des plaques inclinées. Dans un autre sens, une méthodologie a été apportée

afin de valider les résultats expérimentaux obtenus et qui s'avèrent discordants en rapport des approches théoriques.

De plus, la solution simultanée de ces équations obtenues par la méthode analytique avait été effectuée numériquement et les résultats obtenus ont été comparé avec des données expérimentales.

Dans ses calculs, la détermination du nombre de Nusselt devrait également être basée sur une dimension caractéristique linéaire désignée (x_{ch}). L'algorithme utilisé rend le calcul des résultats d'autres investigateurs possibles, élaboré sous une forme applicable jusqu'ici. Ensuite il est nécessaire de connaître en plus les dimensions (d) des plaques chauffées utilisées pour déterminer $Nu_{(ch)}$ selon la relation :

$$Nu_{(ch)} = Nu_{(d)} \frac{x_{(ch)}}{d} \qquad (3.1)$$

L'aspect quantitatif des résultats obtenus expérimentalement et l'effet de l'utilisation de la théorie suggérée pour calculer les résultats obtenus pour une plaque ronde inclinée sont présentés à la *figure III.7.*

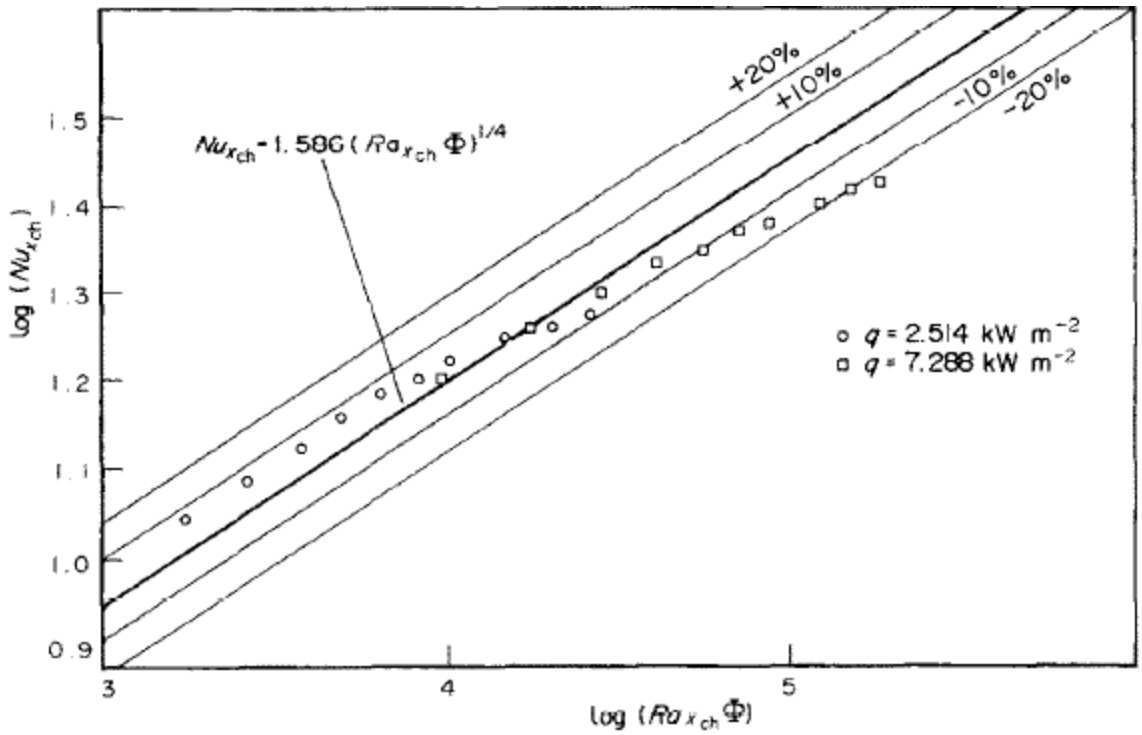


Fig. III.7. Vérification de résultats de modélisation du modèle proposé par Lewandowski [1].

L'élaboration des investigations expérimentales sur une plaque horizontale et verticale **[206]** selon la nouvelle théorie suggérée par Lewandowski est montrée dans la *figure III.*8.

Ainsi, les résultats des investigations expérimentales d'une plaque inclinée ($\varphi = 45°$, $60°$, $75°$ et $90°$) avaient été également élaborés d'une manière semblable. Les résultats de ces expériences traitant l'air, avaient été présentés sous forme des relations des nombres locaux de Nusselt et de Rayleigh. L'effet est présenté dans la *figure III.9.*

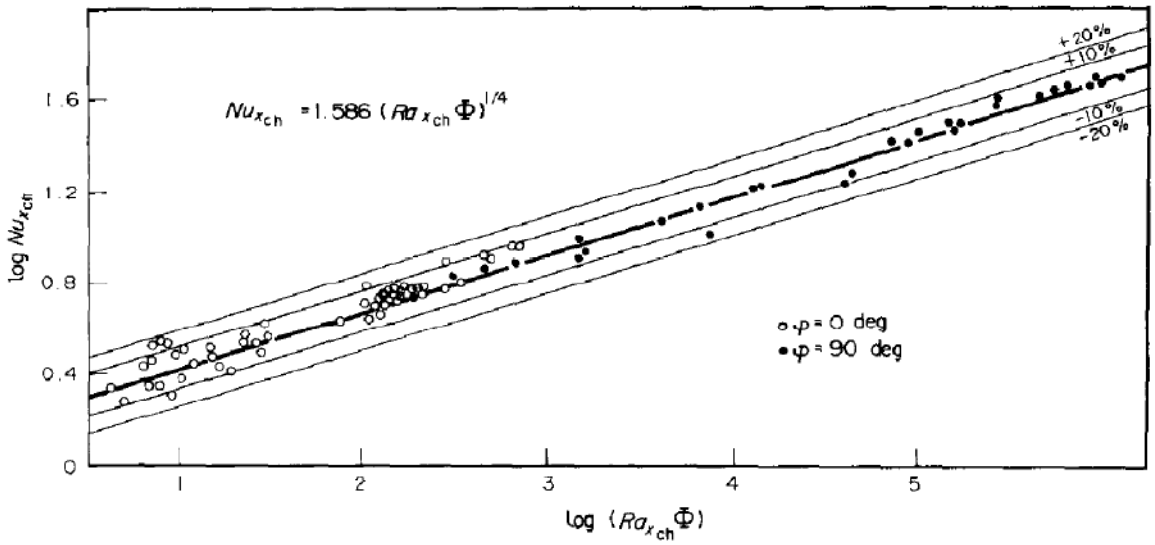


Fig. III.8 : Résultats des investigations expérimentales pour des plaques verticale et horizontale [206] élaborées conformément à la théorie proposée par Lewandowski [1]

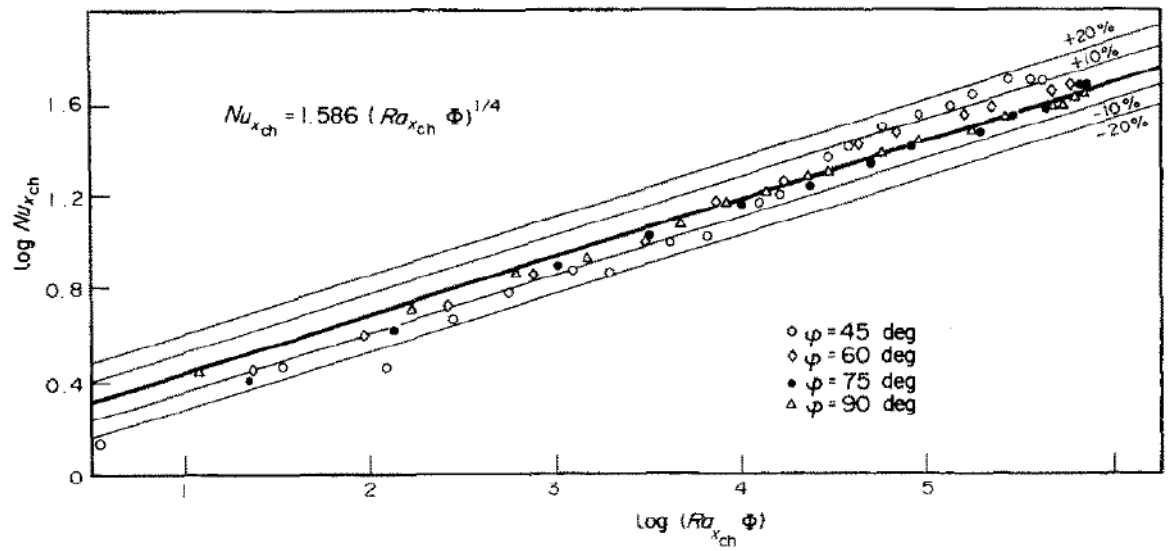


Fig. III.9 : Résultats des investigations expérimentales de Kierkus [209] pour une inclinaison φ = 45°, 60°, 75°, 90° comparés au modèle suggéré par Lewandowski [1].

L'analyse des *figures III.7* à *III.9* montre clairement qu'environ *95%* des résultats expérimentaux fait partie d'une marge de ± 20%, par conséquent on peut affirmer que la vérification de la théorie suggérée a donné des résultats positifs.

III. 5. Conclusion

Les recherches traitant le modèle de Schmidt et Beckmann, couvrant le transfert de chaleur par convection naturelle sur des plaques horizontales ou inclinées, cependant le passage de calcul analytique à partir des résultats de la paroi verticale vers les plaques inclinées ou horizontales n'est pas accompagné d'une vérification de la validité du modèle classique par la disposition des plaques. Cette remarque est capitale car si des phénomènes physiques différents apparaissent, c'est toute la validité des résultats dérivés qui sont remis en question

A ce titre, dans notre avis, même les calculs les plus précis basés sur un modèle imprécis du point de vue physique ne sont pas corrects comme les calculs approximatifs de point de vue mathématique mais basés, au contraire, sur un modèle reproduisant plus précisément la physique du phénomène.

Le modèle suggéré du phénomène du transfert thermique par convection libre le long des plaques, isothermes, inclinées montre une convergence avec les résultats des investigations expérimentales qui ne peuvent pas être seulement accidentelles. Même les résultats préliminaires suggèrent qu'il soit possible de décrire tous les cas d'inclinaison de la plaque chauffée avec une relation de critères et puis de comparer les résultats avec un graphe simple. Ainsi, la comparaison des résultats obtenus pour différents angles d'inclinaisons avec les corrélations utilisées dans la littérature présente une bonne concordance entre eux.

Évidemment, le modèle bidimensionnel et la solution simplifiée sont seulement une première approximation du phénomène et la solution, semi-analytique de **Lewandowski [1]** peut probablement inspirer d'autres investigateurs pour résoudre plus précisément les équations différentielles partielles simultanées décrivant le modèle présenté ci-dessus avec des méthodes proposées par **Kierkus [201], Chen et col.[76], Yu et Lin [210]** ou un des méthodes numériques, par exemple celui de **Takeuchi et col. [197]**.

Cependant, les résultats obtenus s'inscrivent dans une démarche qui a pu aboutir à des comparaisons. Le modèle développé permet de mieux quantifier les échanges thermiques par convection naturelle le long des plaques horizontales et inclinées.

CHAPITRE IV

MODELISATION

CHAPITRE IV
MODELISATION

IV.1. Introduction

Comme montré précédemment, se satisfaire du modèle classique, initialement déterminé par les conditions de paroi d'une plaque verticale et son exploitation pour la convection naturelle pour des plaques inclinées ou horizontales n'est pas une voie acceptable. La visualisation précédente aussi que d'autres visualisations ont mis en évidence que le concept de couche limite unidirectionnelle est physiquement en désaccord à la réalité.

On présente une nouvelle approche par un modèle de convection naturelle en présence magnétohydrodynamique et dissipation Ohmique au-dessus des plaques inclinées de dimensions finies et une solution de similitude des équations différentielles gouvernantes simplifiée qui sera présentée. Dans ce modèle on distingue deux régions séparées avec des mouvements différents de fluide. Dans la première région, la direction de l'écoulement dans la couche limite converge vers la composante de la force de flottement ; parallèle à la plaque ; tandis que la seconde zone la direction de l'écoulement est opposée.

IV.2. But de travail

L'importance de l'étude de la convection libre sur la plaque isotherme est d'intérêt reconnue. La connaissance des mécanismes concernant les flux de convection naturelle le long des surfaces verticales est bien répondue, mais le cas des surfaces horizontales et inclinées est limité à des résultats expérimentaux d'une part, et ces observations conduisent à des conclusions controversées d'autre part.

En effet, pour les plaques horizontales et inclinées, le transfert thermique par convection naturelle à partir de surfaces planes isothermes indiquent une différence

considérable entre les études expérimentales et les résultats des considérations théoriques selon le modèle transcrit de la plaque verticale classique.

Le modèle physique utilisé pour la description de la plaque verticale, proposée par Schmidt et Beckmann, est construit à partir d'**une seule couche limite** et la modélisation en conséquence est conçue sur cette base. Divers travaux selon cette hypothèse, i.e. plaque infinie, montrent que les divers tentatives complémentaires pour réduire les variations qui atteignent des nivaux de 50% de différences en rapport des résultats expérimentaux, en recourant à des détails précis ainsi que de précision en méthodologie d'analyse numérique, n'ont pas eu les effets escomptés.

A notre avis, la raison fondamentale est que le modèle physique sur lequel s'articule la modélisation montrée dans les divers travaux, n'est pas conforme au mécanisme de détermination réelle.

Par ailleurs, le domaine de la magnétohydrodynamique est en plein essor et d'actualité. De plus, on observe une floraison des travaux de transferts thermiques avec dissipation en milieu magnétisé.

C'est dans ce contexte que le travail projeté est conçu. Il a pour tâche **d'élaborer le nouveau modèle bi-couche limite**, tenant compte de dimensions nécessairement finies des plaques et dont l'importance sera de décrire plus correctement les phénomènes physiques ayant pour objet le transfert thermique par convection naturelle sur des plaques inclinées dans des surfaces inclinées en général, horizontales ou verticales en particuliers. En mettant en évidence la problématique discutée par une recherche et une compilation adéquate sur l'état de l'art.

Les aspects suivants seront donc graduellement développés :

1- Le premier aspect de la problématique du sujet consiste à étendre la formulation préalablement présentée en mémoire de magister **[2]**, pour une plaque non conventionnelle caractérisée par ses dimensions finies et par conséquent par deux couches hydrodynamiques se développant à partir des deux bouts. Alors, l'objectif est de :

   - ✓ Faire appeler le nouveau modèle physique ; inventé par Lewandowski en 1991 **[1]** et qui a prouvé sa satisfaction dans la description des mécanismes réels déterminants le phénomène d'une manière plus précise ;

- ✓ Utiliser ensuite un **modèle mathématique assez rigoureux** et le résoudre **numériquement** en utilisant le code **BVP4**c du MATLAB.
- ✓ De plus, afin d'**améliorer l'exactitude** des calculs, en explicitant les termes d'accumulation dans les équations gouvernantes, **éliminant consécutivement les hypothèses simplificatrices** comme le cas de $\delta_{Thermique} = \delta_{Dynamique}$ **, et faire appeler à chaque fois** les **hypothèses négligées auparavant**, tel que la vitesse transversale ignorée devant la vitesse longitudinale.

2- Dans le second aspect, notre attention fut focalisée sur l'influence d'inclinaison sur l'écoulement, et comme un changement de l'angle d'inclinaison a comme conséquence des changements faciles de la participation des régions I et II dans l'échange thermique, il sera intéressant de comprendre l'influence de ce dernier sur les couches limites dynamique et thermique, et cela, pour plusieurs valeurs de Prandtl, Grashof et de Nusselt.

3- Enfin, le dernier aspect se particularise par la présence d'un fluide en MHD, les effets du champ magnétique et la dissipation ohmique sur les profils des vitesses et des températures seront méthodiquement analysés.

IV.3. Mise en évidence de toutes régions

Les considérations aux limites de la couche limite de la région dans le cas du modèle physique bidimensionnel du phénomène **(fig. IV.1)** peuvent être exprimées comme suit **:**

Dans ce modèle les trois régions du transfert thermique convectif sont indiquées :

1. Dans la région I, la poussée d'Archimède est parallèle à g_x et son sens se conforme à la vitesse longitudinale de fluide *U*. C'est une région d'importance décisive, en ce qui concerne le transfert thermique, parce que l'épaisseur de la couche limite (δ_x) est plus petit, tandis que sa longueur (x) est plus grande que dans la région II.

2. La région II diffère de la région I dans le sens de la vitesse de fluide dans la couche limite et dans les conséquences résultant de ce fait comme, par exemple, formes différentes de la couche limite $\partial\delta/\partial x$ et de x.

3. La Région III, ou le flux de chaleur par convection libre, comme il est montré clairement dans les références **[4, 54, 61, 62, 65, 75, 196-205, 207],** que, lorsqu'il quitte la plaque devient le même pour tous les cas. Pour cela cette région a été omise dans les calculs présentés ci-dessous.

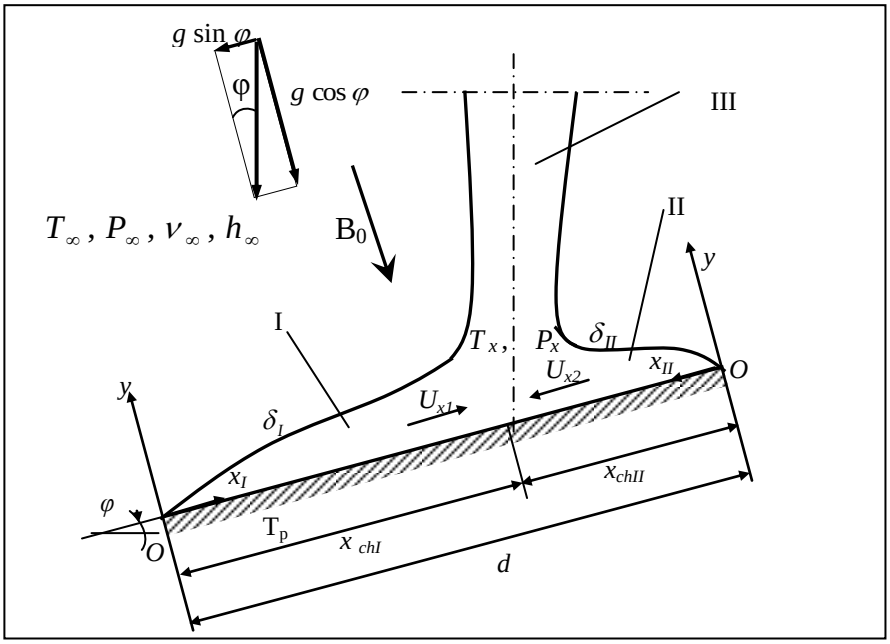


Fig. IV.1 : Schématisation du modèle bidimensionnel proposé du phénomène physique.

IV. 4. Analyse mathématique

Considérant un écoulement magnétohydrodynamique (MHD) avec un transfert de chaleur par convection naturelle au-dessus d'une plaque finie de longueur L et inclinée par un angle φ par rapport à l'horizontal, cet écoulement est laminaire permanent. Avec, la coordonnée x est mesurée à partir de la limite de chaque extrémités de la plaque et la coordonnée y est perpendiculaire à la plaque, l'accélération gravitaire g est dirigée vers le bas et l'intensité du champ magnétique B_0 est uniforme et appliqué suivant la direction de l'axe des y qui est normale au sens d'écoulement du fluide. Une source de chaleur est placé à l'intérieur de l'écoulement afin d'aboutir à l'effet de Joule.

Ainsi, on suppose que l'inclinaison de la plaque conduit à l'obtention de deux écoulements principaux des couches limites (régions I and II), une de chaque extrémité.
Le fluide est supposé Newtonien, électriquement conducteur. La température de paroi T_p est maintenue constante et supérieure à la température ambiante T_∞.

Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées constantes sauf pour la variation de la masse volumique qui est induit par les forces de la flottabilité. Avec ces hypothèses et l'application de l'approximation de Boussinesq, les équations gouvernantes les couches limites laminaire d'un écoulement de transfert de chaleur par convection libre en présence magnétohydrodynamique peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{4.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\pm g\beta(T-T_\infty)\,sin\varphi\,-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}u \tag{4.2}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+g\beta(T-T_\infty)\,cos\varphi \tag{4.3}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\sigma B_0^2}{\rho c_p}u^2 \tag{4.4}$$

Où les signes + et – se rapportent à la région I et II, respectivement.
β est le coefficient d'expansion thermique; σ est la perméabilité magnétique; ν est la viscosité cinématique; α est la diffusivité thermique et C_p est la capacité calorifique spécifique.

Il faut mentionner que P est la différence de pression statique induit par les forces de flottabilité (c.à.d. $\overline{P}=0$ hors la couche limite). Les équations (4.2) et (4.3) de la quantité de mouvement suivant x et y respectivement peuvent être combiné afin de déterminer le gradient de pression de l'équation (4.3) induit par les force de flottabilité tel que:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\,g\cdot\beta\,\cdot cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_y^\delta(T-T_\infty)\,dy \tag{4.5}$$

Cela conduit à:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm g\beta(T-T_\infty)\,sin\varphi+g\beta\,cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial x}\int_y^\delta(T-T_\infty)\,dy\,-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}u \tag{4.6}$$

Les conditions aux limites sont définies tel que :

- Pour $y=0$:

- Dans la première région (I) : à $x = 0$;

$$u = 0; \qquad v = 0 \quad \text{et} \quad T = T_w$$

- Dans la deuxième région (II) : à $x = L$; (4.7)

$$u = 0; \qquad v = 0 \quad \text{et} \quad T = T_w$$

- Pour $y \to \infty \ (or: \ y = \delta)$:

$$u = 0; \qquad v = 0 \quad \text{et} \quad T = T_\infty$$

Il est noté ici que pour une plaque verticale $\varphi = 90°$, le terme de gradient de pression dû aux forces de flottabilité saute de l'équation (4.6), alors que pour une plaque horizontale $\varphi = 0°$, l'équation (4.6) est à l'exclusion du terme de force de flottabilité et à cause de l'inclinaison de la plaque, les couches limite ne sont pas similaires.

Les coordonnées cartésiennes (x, y) utilisées dans les équations (4.4), (4.6) et (4.7) seront adimensionnelisées, en introduisant les quantités adimensionnelles $[\xi(x), \eta(x,y)]$ utilisées par Chen **[76]** pour $0° \le \varphi < 90°$ suivantes:

$$\xi = \xi(x), \qquad \eta = \frac{y}{\xi(x)} = \frac{y}{x}\left(\frac{Gr_x \times cos\varphi}{5}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{4.8}$$

Avec ξ, dépend que de x, est un paramètre non-similaire et η est un variable de pseudo-similarité. Pour les couches limites similaire, $\xi = 0$ et η est réduit en vrais variable de similarité. Encore, on introduit la fonction de courant réduite $f(\xi,\eta)$ et la température adimensionnelle $\theta(\xi,\eta)$ définit, respectivement, par:

$$f(\xi,\eta) = \frac{\psi(x,y)}{5\nu\,(Gr_x \times cos\varphi/5)^{\frac{1}{5}}}$$

$$\theta(\xi,\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \tag{4.9}$$

Ici Gr_x est le nombre de Grashof local et Ψ est la fonction de courant qui satisfit l'équation de continuité et qui est liée aux composantes de vitesse tel que $u = \partial\Psi/\partial y$ et $v = -\partial\Psi/\partial x$. Ainsi, les équations suivantes sont obtenues:

$$f''' + 3ff'' - f'^2 \pm \xi \cdot \theta - Mf' + \frac{1}{5}\left[2 \cdot \eta\,\theta + 2\int_{\eta}^{\infty} \theta\, d\eta + 3\,\xi \int_{\eta}^{\infty} \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\, d\eta\right] = 3\,\xi\left[f'\frac{\partial f'}{\partial\xi} - f''\frac{\partial f}{\partial\xi}\right] \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + 3f\theta' + 5ME_c f'^2 = 3\,\xi\left[f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - \theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right] \quad (4.11)$$

Avec les conditions aux limites :

$$f(\xi,0) = \; f'(\xi,0) = 0;$$

- Dans la 1ière région (I) : $\theta(\xi,0) = 1;$

$$f'(0,\eta) = 0; \quad \theta(0,\eta) = 0; \qquad f(\xi,\infty) = \; f'(\xi,\infty) = 0; \quad (4.12)$$

- Dans la 2ième région (II) : $\theta(\xi,\infty) = 0;$

$$f'(0,\eta) = 0; \quad \theta(0,\eta) = 0;$$

Dans les équations qui suit, la prime indique la dérivé partielle selon η, Pr est le nombre de Prandtl, et ξ est a déterminé pour satisfaire l'expression suivante :

$$\xi(x) = \left(\frac{Gr_x \times \cos\varphi}{5}\right)^{1/5} \tan\varphi \quad (4.13)$$

A ce titre, dans notre avis, même les calculs les plus précis basés sur un modèle imprécis du point de vue physique ne sont pas corrects comme les calculs approximatifs de point de vue mathématique mais basés, au contraire, sur un modèle reproduisant plus précisément la physique du phénomène. Pour cela, dans cette thèse, on prescrit a donné des profils de solution des fonctions (f, θ) à partir des solutions exactes pour le système d'équations :

$$f''' + 3 f\ f'' - f'^2 \pm \xi \cdot \theta - M\ f' + \frac{1}{5}\left[2 \cdot \eta\, \theta + 2 \int_{\eta}^{\infty} \theta d\eta \right] = 0 \qquad (4.14)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}} \theta'' + 3 f\, \theta' + 5 E_c M\ f'^2 = 0 \qquad (4.15)$$

Avec les quantités adimensionnelles ci-dessous représentent le paramètre du champ magnétique M, le nombre de Eckert E_c, le nombre de Grashof local Gr_x et le nombre de prandtl Pr respectivement :

$$M = \frac{\sigma B_0^2\, x^2}{\rho \cdot \nu} \cdot \left(\frac{Gr_x \times \cos\varphi}{5} \right)^{-\frac{2}{5}}$$

$$E_c = \frac{5\, \nu^2 \left(\frac{Gr_x \times \cos\varphi}{5} \right)^{\frac{4}{5}}}{C_p\, \Delta T\ x^2}, \qquad (4.16)$$

$$Gr_x = \frac{g\, \beta\, \Delta T\, x^3}{\nu^2}$$

$$Pr = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Le nombre de Nusselt local $Nu_x = h \cdot x / \lambda$ pour chaque région peut être exprimé comme :

$$Nu_{x\,I/II} = -\theta'(\xi, 0) \left[\frac{Gr_x \times \cos\varphi}{5} \right]^{1/5} \qquad (4.17)$$

Il est noté ici que le cas de M = 0 et E_c = 0, ainsi, la convection libre au-dessus d'une plaque isotherme finis a été étudié par **Lewandowski [1].** Aussi, il est noté ici que l'épaisseur de les couches limite devient similaire lorsque la longueur de séparation de la 1ière région x_I est égale à x_{ch} du point de séparation qui est varié avec l'angle d'inclinaison et de nombre de Rayleigh.

D'autre part, il est intéressant en pratique de détermine le nombre de Nusselt global $Nu_d = \bar{h} \cdot x_{ch} / \lambda$ pour les calcules de transfert thermique tel que :

$$Nu_{g\ I/II} = -\theta'(\xi, 0) \left[\frac{Gr_d \times \cos\varphi}{5} \right]^{1/5} \qquad (4.18)$$

Dans cette équation Gr_d et ξ sont évalués, respectivement, à la distance de point de séparation x_{cr} à partir de la plaque dans la direction de l'écoulement extraite de la référence **[1]**, les équations correspondantes sont :

$$Gr_d = Gr_x \left(\frac{d}{x_{cr}} \right)^3 \tag{4.19}$$

$$\xi = \left(\frac{Gr_d \times \cos\varphi}{5} \right)^{1/5} \tan\varphi \tag{4.20}$$

IV.7 Conclusion

Le problème que nous présentons est une étude sur le transfert thermique par convection naturelle à partir des surfaces isothermes planes de dimensions finies inclinée arbitrairement, en présence d'un champ magnétique horizontal uniforme, et avec dissipation Ohmique, dont la finalité est l'élaboration d'un nouveau modèle physique pour décrire plus correctement les phénomènes physiques ayant lieu, et par conséquence, de réduire la différence considérable entre les résultats des considérations théoriques, suivant le modèle de la monocouche limite de Schmidt et Beckmann, et les investigations expérimentales.

Le modèle proposé est une conséquence de la visualisation de transfert thermique convectif à partir des expériences sur des plaques inclinées réelles (de dimensions finies) et une solution de similitude des équations différentielles gouvernantes simplifiée qui sera présentée. Ensuite les équations différentielles ordinaires similaires seront résolues par le code BVP4 du MATLAB et les résultats numériques obtenus pour différents angles d'inclinaisons sont reportés graphiquement en fonction de plusieurs paramètres participant dans le problème afin de facilité leur interprétation et qu'on peut juger sur la performance du modèle étudié dans le cas d'une plaque isotherme verticale, inclinée ou horizontale.

Il est noté ici que le cas de M = 0 et E_c = 0, ainsi, la convection libre au-dessus d'une plaque isotherme finis a été étudié par **Lewandowski [1].**

Aussi, il est noté ici que l'épaisseur de les couches limite devient similaire lorsque la longueur de séparation de la 1^{ière} région x_1 est égale à x_{cr} du point de séparation qui est varié avec l'angle d'inclinaison et de nombre de Rayleigh.

CHAPITRE V

RESULTATS & DISCUSSION

CHAPITRE V
RESULTATS & DISCUSSION

V.1. Introduction

Au cours des dernières années on assiste à une augmentation fulgurante de la performance des ordinateurs, qui permet d'utiliser des techniques numériques de plus en plus efficaces pour la résolution de systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles. Dans cette partie nous présentons une investigation numérique pour la simulation de la convection naturelle laminaire conjuguée à l'effet du champ magnétique et la dissipation Ohmique.

Pour mener à bien ce travail, il a fallu tracer une ligne de conduite à suivre et fixer des objectifs au préalable, pour ne pas dévier de l'horizon fixé au début. Le cap le plus simple à suivre fut de répondre aux questionnements qui sont à l'origine de nos investigations et qui sont la genèse même de cet ouvrage.

Ces objectifs furent, dans un premier temps, de distinguer la différence entre les deux régions où se développe la couche limite car, contrairement au cas vertical, la gravité influe différemment sur l'écoulement de couche limite à travers des forces de flottabilité, pour une large gamme de valeur de Grashof et de Prandtl. Dans ce cas l'objectif de l'étude est d'examiner l'exactitude des calculs effectués et la validité du modèle physique suggéré.

Dans un second temps, notre attention fut focalisée sur l'effet de l'intensité d'un champ magnétique uniforme et l'effet de Joule sur l'écoulement et comprendre l'influence de ce dernier sur les couches limites dynamique et thermique.

V.2. Description des objectifs de l'étude

L'objectif principal de cette thèse est d'élaborer un nouveau modèle physique capable de décrire plus correctement les phénomènes physiques ayant lieu sur des plaques

isothermes verticale, horizontale et inclinée, de dimensions finies. Dans ce chapitre, nous nous intéressons tout particulièrement à la modélisation numérique des écoulements de la convection naturelle en présence magnétohydrodynamique.

Suivant l'inclinaison de la plaque, la direction de l'écoulement le long de la paroi, ascendant ou descendant, nous distinguons deux régions distinctes séparées par la ligne centrale qui traverse le point de séparation, que nous mettons en évidence dans la figure IV.1, présentée le chapitre précédent. La simulation des équations combinées, de dynamique des fluides de Navier-Stokes et d'électromagnétisme de Maxwell, dans le domaine avoisinant la surface de la plaque avec l'idée de mettre en évidence le développement des couches limites, vise à réaliser une étude comparative entre ces deux zones et ainsi mieux distinguer les différences de comportement entre les deux parties.

L'analyse des résultats est subdivisée sous trois axes :

- Tout d'abord, afin de vérifier la performance du modèle physique proposé, les résultats obtenus à partir de la méthode de calcul approximative utilisée sont comparés avec ceux de la littérature et à cause de l'ordre comparable d'exactitude des résultats obtenus on peut juger la consistance des calculs et la validité du modèle proposé.

- Dans un deuxième temps, l'étude est axée sur l'influence de l'inclinaison sur le mécanisme d'écoulement dû au transfert de chaleur par convection naturelle uniquement, ces objectifs furent de :
  - Distinguer la différence entre les deux régions où se développe la couche limite car, contrairement au cas horizontal, la gravité influe différemment sur l'écoulement de couche limite à travers les forces de flottabilité.
  - Focaliser notre attention sur l'influence du nombre de Grashof sur l'écoulement et comprendre l'influence de ce dernier sur les couches limites dynamique et thermique et, ainsi que la variation du nombre de Prandtl, et cela pour souligner la différence entre les deux régions I & II.

- Enfin, le dernier point de ce chapitre s'inscrit dans le cadre de l'intensification des transferts thermiques et de contrôle de l'écoulement de convection naturelle le long des plaques isothermes réelles, horizontale, verticale et inclinée par l'introduction d'un

champ magnétique avec une dissipation ohmique. L'objectif est ici de présenter comment optimiser la thermique et/ou la dynamique de l'écoulement.

V. 2. 1. Solution numérique

Le système des équations (4.14), (4.15), avec les conditions aux limites (4.12) valables pour $0° \leq \varphi < 90°$, sont résolus numériquement. Tous d'abord, les équations (4.14) et (4.15) sont réduites à un système des équations différentielles de 1ier ordre afin de les exprimer en forme de différences finies et les résoudre par une méthode itérative le long des couches limites. On peut examiner l'exactitude de la condition initiale proposée qui manque par la comparaison avec la valeur calculée à partir des différentes variables aux points extrêmes avec les valeurs données. Les calculs sont portés en utilisant le code BVP4c du MATLAB software qui calcule les fonctions de vitesse et de température avec une grande précision. Cependant, ce code de calcul, utilisé dans cette partie numérique, est basé sur la méthode des différences finies suivant le schéma implicite pure, a été développé et validé. Ainsi, les profils des vitesses et des températures adimensionnelles obtenus des résultats numériques sont reportés graphiquement en fonction de plusieurs paramètres participant dans le problème.

V. 2. 2. L'algorithme BVP4c

Le code de calcule BVP4c du Matlab est utilisé pour résoudre les problèmes des valeurs limites entre deux points **[211]**. Le résolveur BVP4c du Matlab calcule la solution en utilisant la méthode d'alignement, en faisant les contrôles de l'erreur résiduelle. Pour utiliser le solveur BVP4c, l'équation d'ordre supérieur doit être transformée en une forme explicite de premier ordre **[212].** Contrôle de la taille de l'imperfection est naturel dans le sens de l'analyse d'erreur vers l'arrière, bien qu'il puisse être plus simple et plus naturel pour contrôler l'erreur locale **[213].**

L'algorithme repose sur une structure d'itération pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires. En particulier, bvp4c est un code à différence finie qui implémente la formule de Lobatto III.a en trois étapes (voir Annexe). C'est une formule de collocation et le polynôme de collocation fournit une solution continue C^{-1} uniforme dans x ∈ [a, b] et précise de quatrième ordre. La sélection des maillages et le contrôle des erreurs sont basés sur le résidu de la solution continue. Comme il s'agit d'un schéma d'itération,

son efficacité dépendra en fin de compte de la capacité à fournir à l'algorithme une estimation initiale de la solution et à contrôler la taille de pas à chaque pas de temps, une caractéristique qui ne sont pas dans les méthodes antérieurs. La littérature illustre la puissance et la facilité d'utilisation de la construction dans le solveur de valeur limite de MATLAB, ainsi, il convient de la classer en tant que robuste et précise.

En particulier, le BVP4c de Matlab prend par défaut la tolérance 10^{-3} sur l'erreur relative et une tolérance de 10^{-6} sur l'erreur absolue **[214]**. Outre son utilisation dans la résolution de problèmes aux limites, le solveur BVP4c a été utilisé pour valider d'autres solutions numériques que celles observées dans **[215-217].** Le solveur a également été étendu pour inclure un solveur de sixième ordre **[218]**.

Pour résoudre le problème de la présente étude, on suit les étapes de l'organigramme suivant :

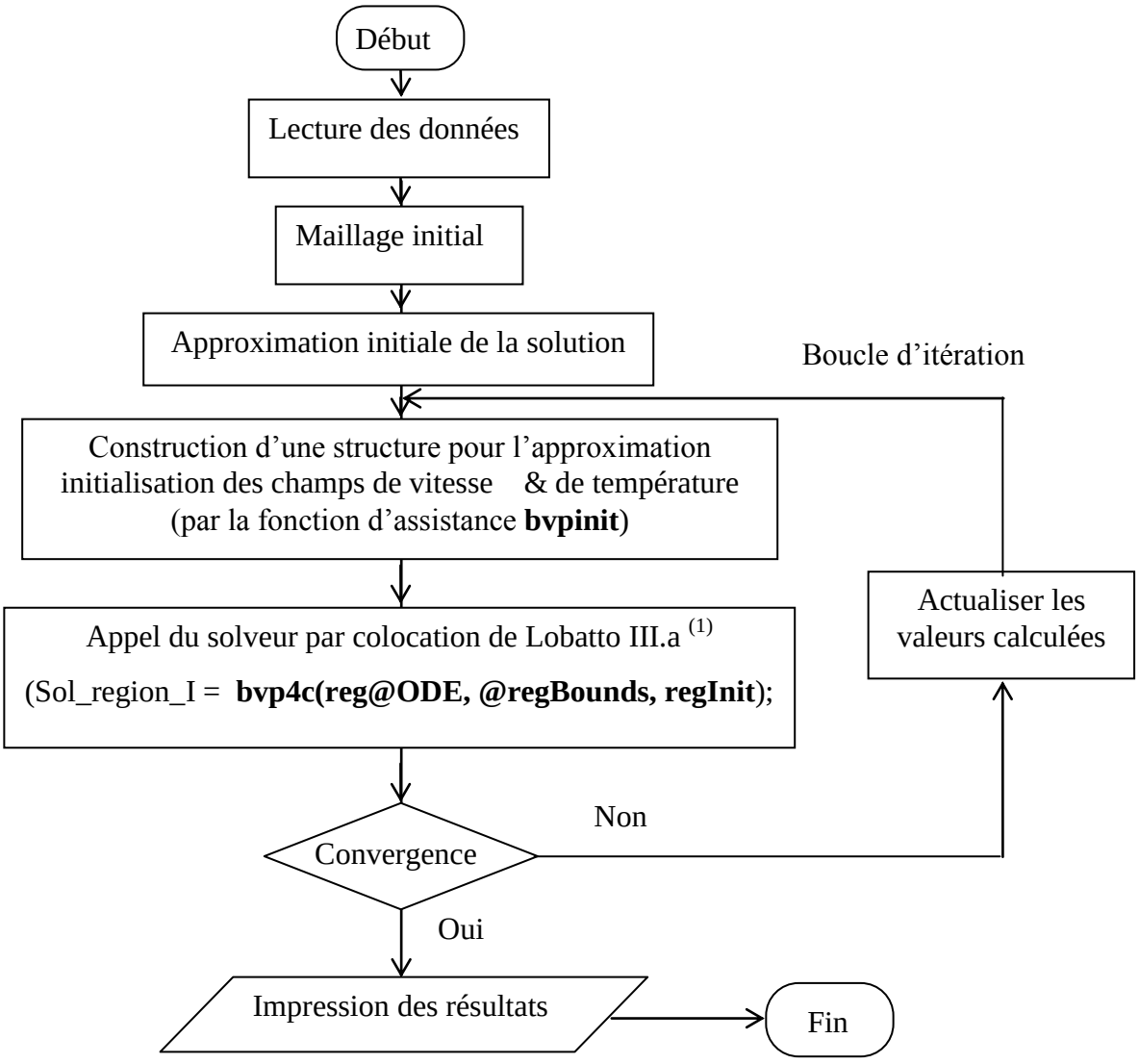


Fig. V. 1. Organigramme du code de calcul selon l'algorithme de BVP4c de Matlab

V. 3. Résultats et Discussion

Afin d'acquérir à la perspicacité physique, la discussion des profils de vitesse et de température est assignée aux valeurs numériques des paramètres rencontrés dans le problème ; c'est à dire les calculs numériques qui sont portés pour les différentes valeurs des nombres de Grashof et de Prandtl Pr, angle d'inclinaison φ, paramètre du champ magnétique M, nombre d'Eckert E_c et leur effets sur l'écoulement et les caractéristiques du transfert de chaleur sont analysés graphiquement.

V. 3. 1. Validation du code de calcul et du modèle physique

Afin de valider notre code de calcul numérique et de vérifier l'exactitude des résultats obtenus de ce nouveau modèle, on procède à une comparaison des résultats obtenus avec ceux donnés par la méthode semi-analytique de **Lewandowski [1],** dans le cas d'un écoulement dû au transfert de chaleur par convection naturelle seulement, sans champ magnétique **(M = 0)** et sans dissipation thermique **(E_c=0)** .

Les figures (V.2 à V.11) représentent l'évolution de la vitesse et de la température adimensionnelles en fonction de la coordonnée adimensionnelle **η** , dans les deux régions I **(en rouge)** et II **(en bleu)**, pour plusieurs valeurs de nombres de Prandtl, de Grashof et d'inclinaisons.

D'une façon générale ; pour les deux régions I et II ; ces figures montrent en outre que la vitesse adimensionnelle prend une valeur nulle (condition d'adhérence), puis augmente rapidement près de la paroi car les courants chauds ascendants sont plus intenses près de celle-ci. Ensuite, redescend progressivement pour atteindre une valeur égale à l'unité très loin de la plaque.

Pour la température, les courbes sont décroissantes et prennent la valeur maximale (égale à l'unité) au niveau de la paroi étant donnée d'une plaque isotherme ; puis décroissent et tendent asymptotiquement vers zéro (température du milieu infini ; loin de la plaque).

L'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour une inclinaison de 60° est représentée aussi. La comparaison illustrée sur cette figure s'avère satisfaisante étant donné que l'écart entre les deux études ne dépasse pas 5 % et 20% pour respectivement, la région I et la région II.

Dans le sens de cheminement de la validation du modèle suggéré, les figures de (V.2 à V. 7) représentent l'influence de l'inclinaison de la plaque sur les couches limites des deux régions I et II. On constate la différence flagrante dans les couches limites des plaques horizontales, inclinées et verticales.

L'analyse de la visualisation photographique prouve que les deux couches limites opposées de la plaque horizontale ($\varphi = 0°$) augmentent d'une façon identique à partir des deux bouts extrêmes. Pour cette raison les figures (V.2 et V.3) montrent une fusion dans la distribution de vitesse et de la température des deux régions I et II.

Les figures (V.4 et V.5) décrivent le comportement des profils de vitesse et de température. On observe qu'une élévation de l'angle d'inclinaison φ est accompagné avec un développement qui augmente de plus en plus dans le profil de vitesse de la 1ière région par rapport à la 2ième région qui va en décroissement de plus en plus jusqu'à sa disparition due au point de séparation ; sur lequel la ligne du centre passe ; qui se déplace vers une extrémité et la couche limite opposée (identique dans le cas horizontal) devient différente de plus en plus par rapport à l'autre. L'influence de l'angle d'inclinaison sur la température du fluide montre que les couches limites thermique diminuent dans la 1ière région et augmente dans la 2ième région avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison de la plaque.

Dans les figures (V.6 et V.7) pour des inclinaisons proche au vertical ($\varphi = 76{,}86°$), il est claire que l'écoulement de transfert de chaleur par convection naturelle est dominé que par la 1ière région seulement, parce que la 2ième région est disparue. Le profil de vitesse est disparu et le profil de température de la 1ière région est plus petit que le profil de la 2ième région qui transforme en panache thermique. Alors le résultat peut expliquer la disparition de la 2ième couche limite dans les photographies de la visualisation.

Donc, les résultats obtenus présentent une satisfaction asymptotique et supportent le modèle physique suggéré et la méthode numérique utilisée.

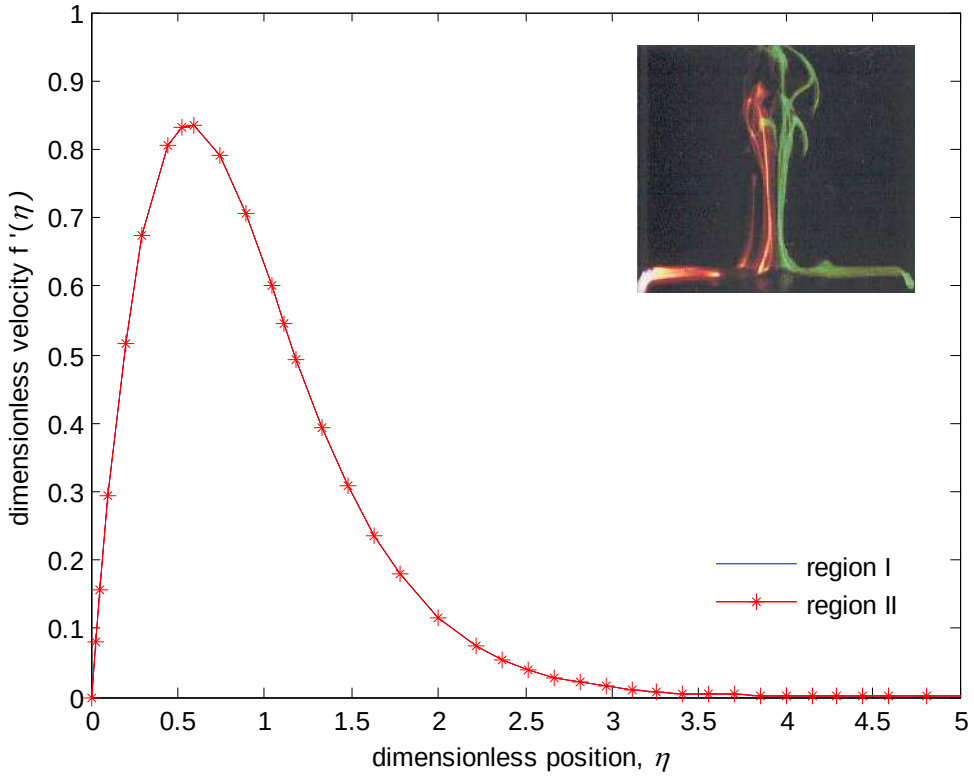


Fig. V.2 **: Variation de vitesse en fonction de η pour une plaque horizontale (φ = 0°)**
Pour : Pr = 0.72, Gr = 0.5*10^3, M = 0 et E_c=0.

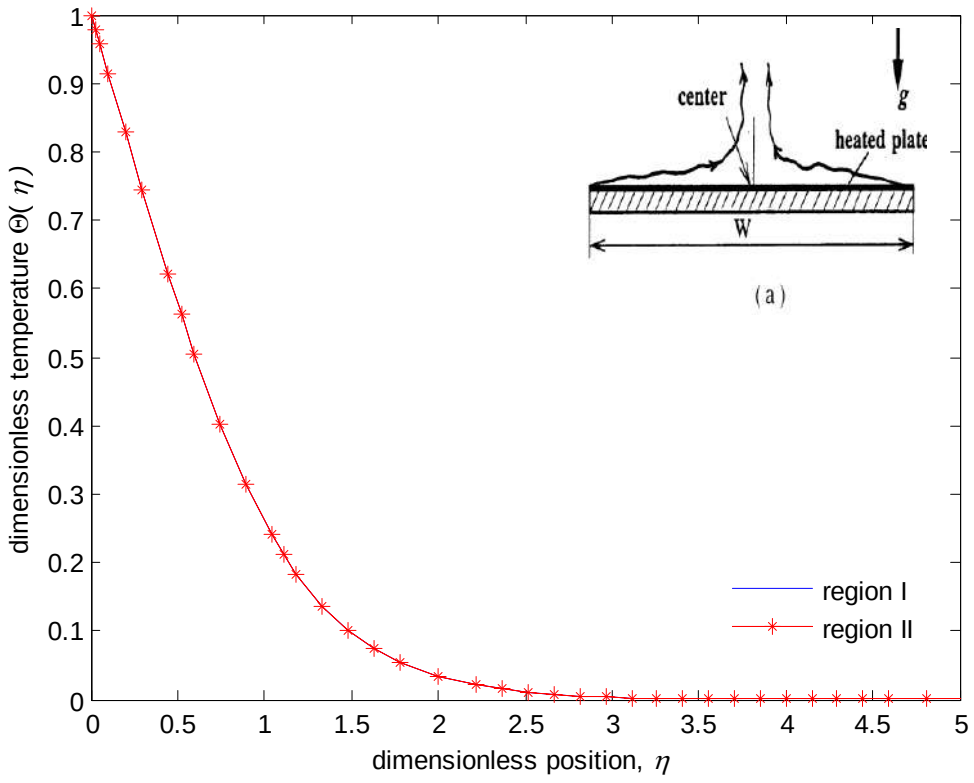


Fig. V.3 **: Variation de température en fonction de η pour une plaque horizontale (φ = 0°)**
Pour : Pr = 0.72, Gr = 0.5*10^3, M = 0 et E_c=0.

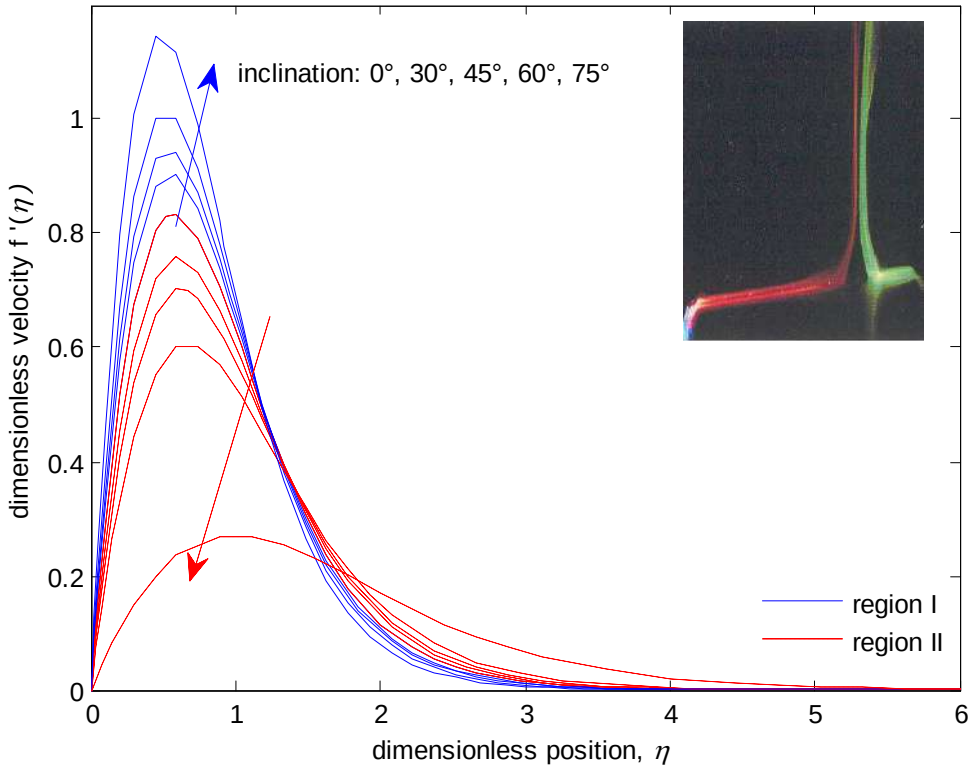


Fig. V.4 **: Variation de vitesse en fonction de η pour plusieurs valeurs d'inclinaison (φ = 0°, 30°, 45°, 60° et 75°) pour Pr = 0.72, Gr = 0.5*10^3, M = 0 et E_c=0.**

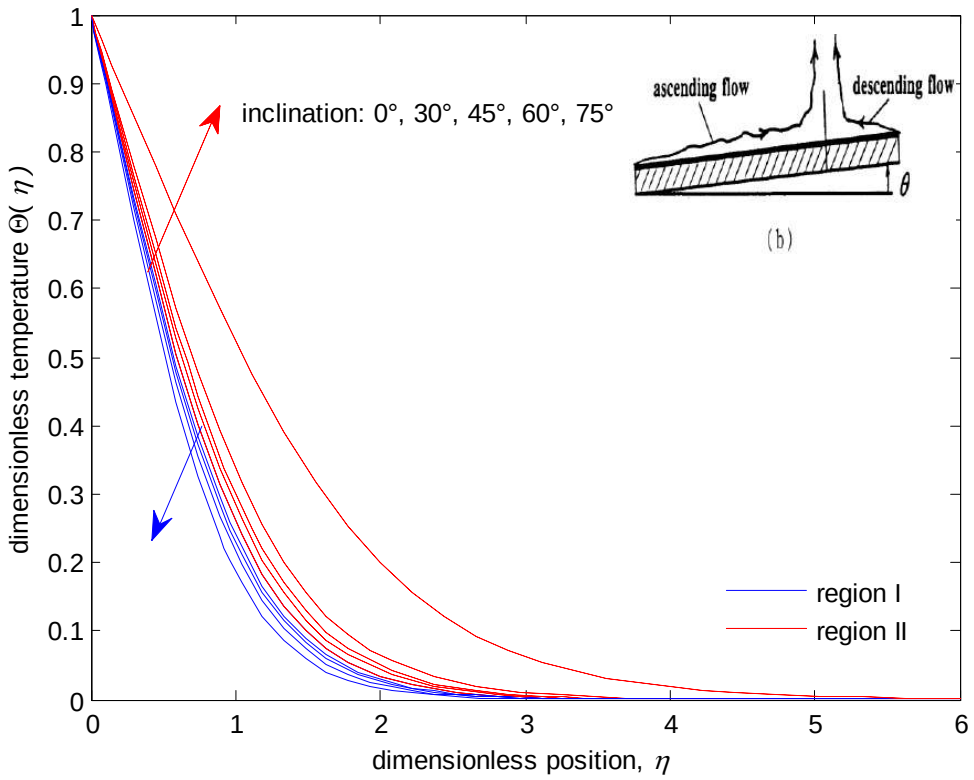


Fig. V.5 **: Variation de température en fonction de η pour plusieurs valeur d'inclinaison (φ = 0°, 30°, 45°, 60° et 75°) pour Pr = 0.72, Gr = 0.5*10^3, M = 0 et E_c=0.**

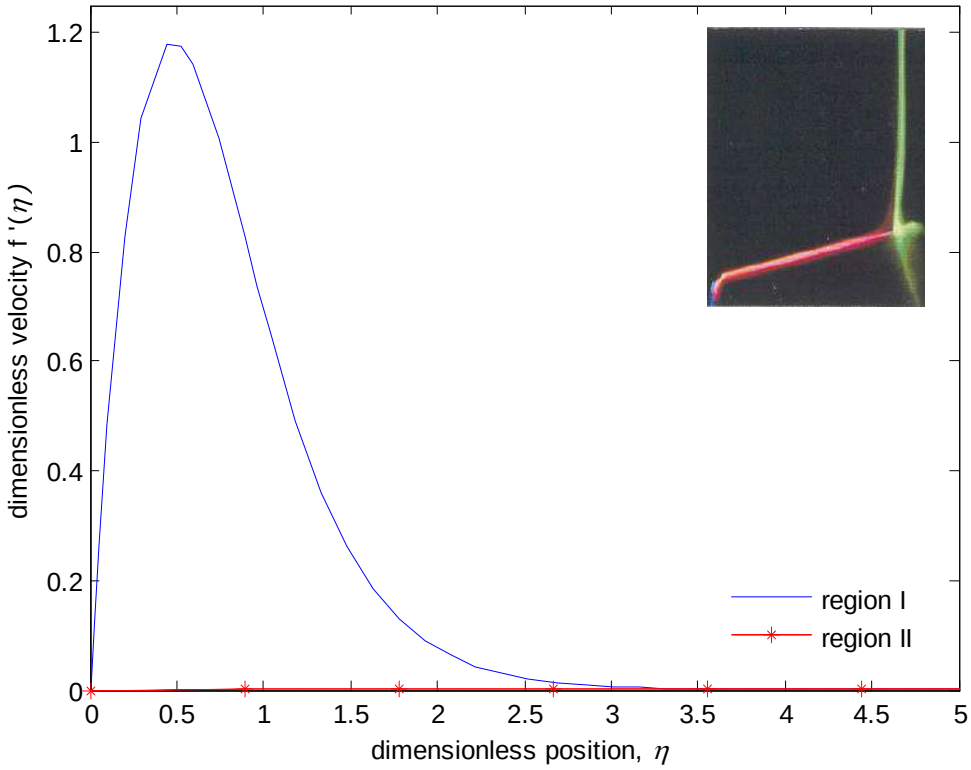


Fig. V.6 **: Variation de vitesse en fonction de η pour une inclinaison proche à la verticale (φ = 76.86°) pour Pr = 0.72, Gr = 0.5*10^3, M = 0 et E_c=0.**

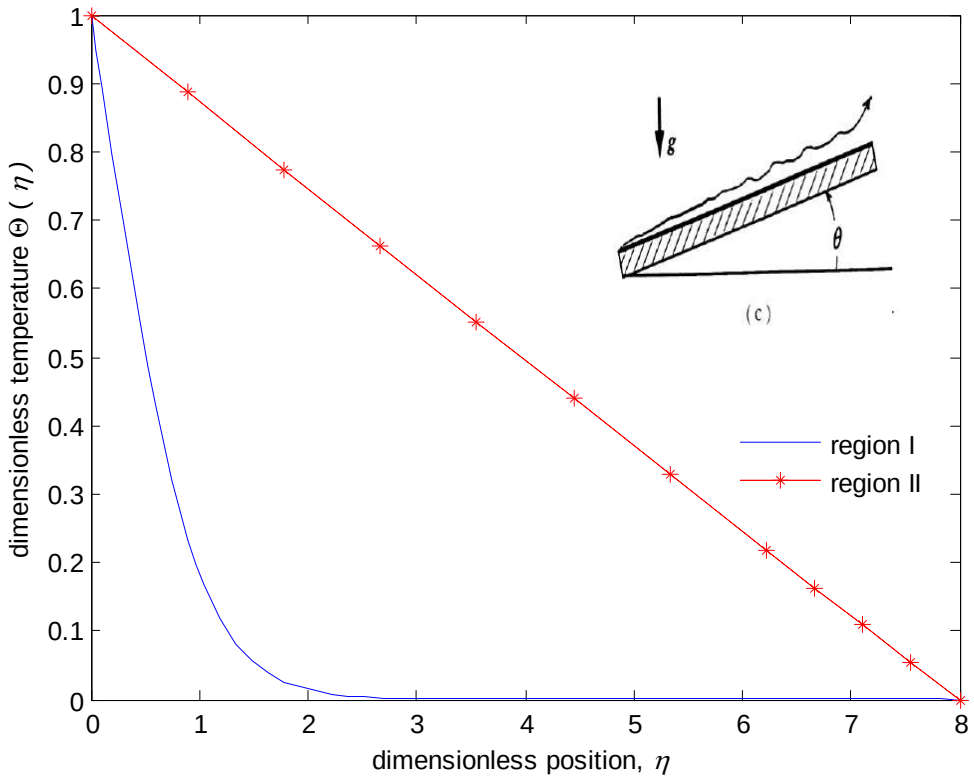


Fig. V.7 **: Variation de température en fonction de η pour une inclinaison proche à la verticale (φ = 76.86°) pour Pr = 0.72, Gr = 0.5*10^3, M = 0 et E_c=0.**

Les figures (V.8) et (V.9) représentent l'influence du **nombre de Grashof**, qui compare l'effet de la poussée d'Archimède (force motrice) aux forces de viscosité (forces résistives) dans l'écoulement de transfert de chaleur par convection naturelle seul **(M=0)** et **(E_c=0).**

Pour une plaque inclinée **(φ = 60°)**, la couche limite opposée de la 2ième région devient différente de plus en plus par rapport à la couche limite de la 1ière région qui est plus étendue ($x_I > x_{II}$), et comme le nombre de Grashof est fonction de la dimension caractéristique du système étudié, on constate qu'un accroissement du nombre de Grashof conduit à une augmentation de profil de vitesse de la zone prépondérante (région I). Cependant, le profil de vitesse correspondant à la 2nde région, qui va disparaître, va diminuer.

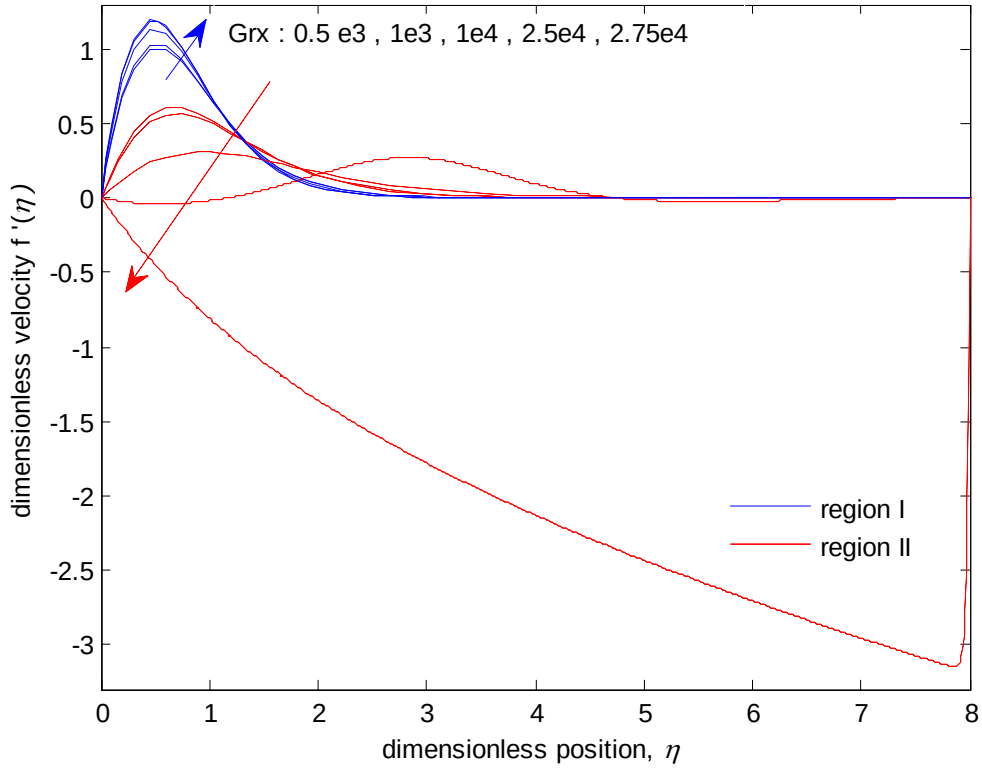


Fig. V.**8 : Pour plusieurs valeurs de *Gr*, le profil de vitesse en fonction de η pour une inclinaison de la plaque (φ = 60°) et pour Pr = 0.72, M = 0 et E_c=0.**

De plus, l'augmentation du nombre de Grashof provoque une légère croissance de la couche limite thermique en la refoulant loin de la paroi, suivant la direction transversale, pour qu'il se transforme en panache. C'est pour cette raison que le profil de température augmente dans la 2ième région Cependant, il reste presque constant dans la 1ière.

D'autre part, il paraît une valeur critique du nombre de Grashof qui est liée avec l'angle d'inclinaison et qui mène la deuxième région instable afin de se transformé par la suite en 3^{ième} région (panache)

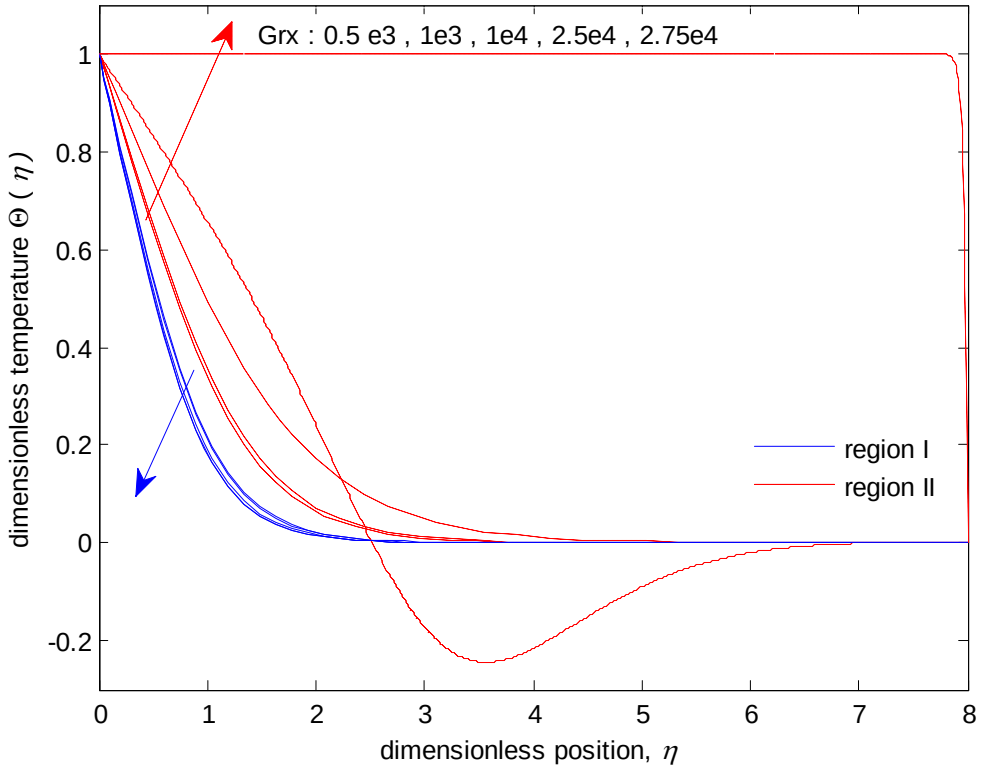


Fig. V.**9 : Pour plusieurs valeurs de *Gr*, le profil de température en fonction de η pour une inclinaison de la plaque (φ = 60°) et pour Pr = 0.72, M = 0 et E_c=0.**

A côté de l'investigation semi-analytique de **Lewandowski [1]** qui étudie que le cas de Pr=1, la présente thèse examine une variété de nombre de Prandtl. Ce dernier caractérise l'importance relative des deux mécanismes qui pilotent la convection du fluide : la diffusion de quantité de mouvement et la diffusion de la chaleur.

Les profils de vitesse et de température sont tracés dans les figures (V.10) et (V.11) pour une inclinaison de la plaque **(φ = 60°)**. Plus ***Pr*** est grand, plus le mouvement du fluide est piloté par le processus thermique et le profil de température est fortement influencé par le profil de vitesse. Pour un nombre de Prandtl faible, cas de métaux liquide et les huiles, la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse n'influence que très peu le profil de température. Ainsi, on constate que le profil de vitesse pour l'air (Pr=0.72) est toujours plus grands que celle de l'eau (Pr=7) pour les deux régions I et II.

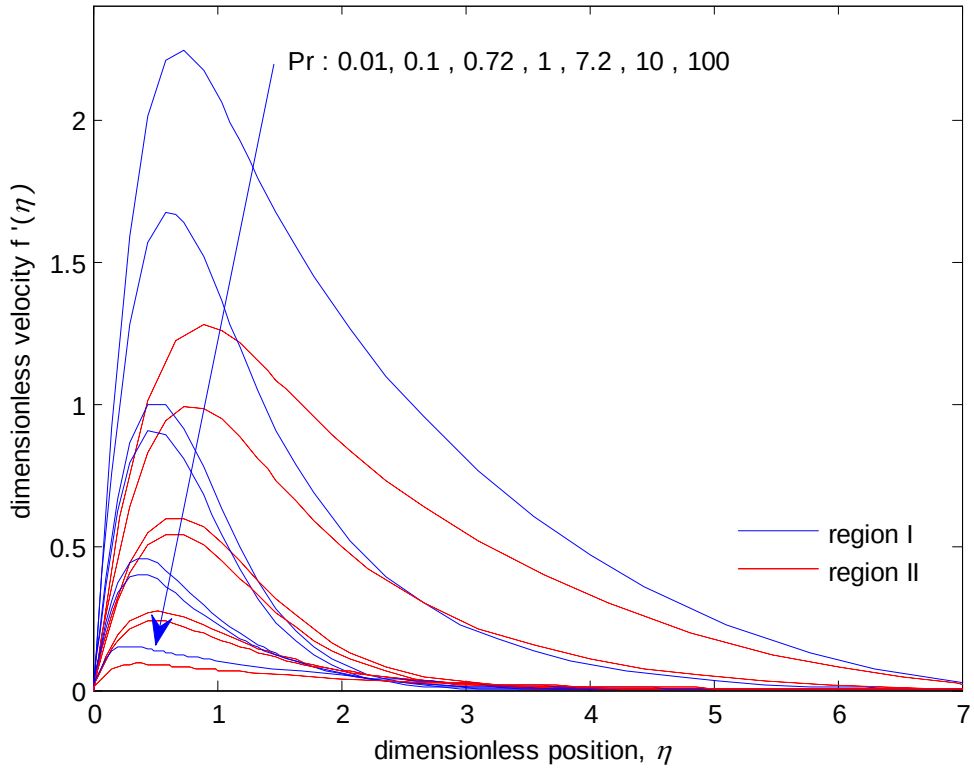


Fig. V.**10 : Pour plusieurs valeurs de *Pr*, le profil de vitesse en fonction de η pour une inclinaison de la plaque (φ = 60°) et pour Gr = 0.5*10^3, M = 0 et E_c=0.**

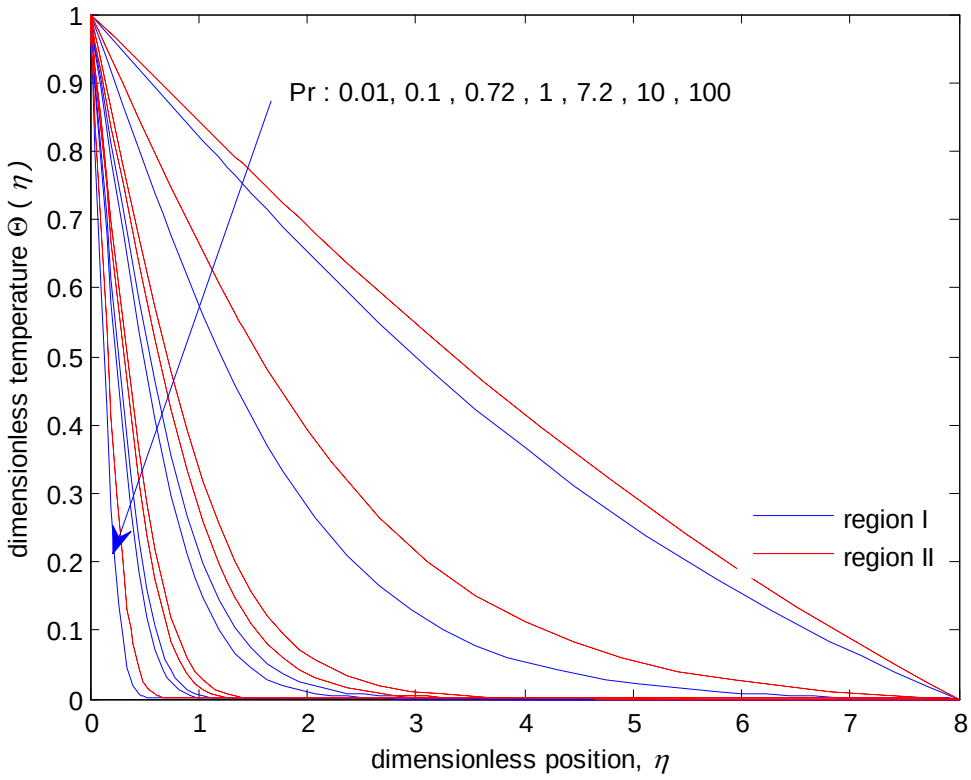


Fig. V.**11 : Pour plusieurs valeurs de *Pr*, le profil de température en fonction de η pour une inclinaison de la plaque (φ = 60°) et pour Gr = 0.5*10^3, M = 0 et E_c=0.**

Pour une inclinaison $(\varphi = 60°)$, la figure (V.12) illustre la variation du nombre de Nusselt local (Nu_x) ; qui représente le rapport entre le transfert thermique total et le transfert thermique par conduction; avec le nombre de Rayleigh local (Ra_x) qui exprime le rapport entre les effets de la poussée d'Archimède, et ceux de la viscosité.

Dans cette phase, on néglige la présence du champ magnétique $(M = 0)$ et la dissipation ohmique $(E_c = 0)$. En effet, **le nombre de Nusselt** est lié au coefficient d'échange convectif (h) qui dépend de l'écoulement du fluide, des propriétés thermiques du milieu fluide et de la géométrie du système.

D'autre part, lorsque le nombre de Rayleigh qui est qu'une variante du nombre de Grashof est faible, les forces de diffusion thermique et visqueuse sont prépondérantes et le transfert de chaleur s'effectue principalement par conduction.

La figure (V.12) montre qu'une augmentation du nombre de Rayleigh entraine une élévation du flux convectif, donc le nombre de Nusselt augmente. Ainsi, puisque le profil de température dans la 2ième région est plus grand, parce que l'échange thermique dans la 2ième région va transformer en panache, est plus grand que la 1ière région.

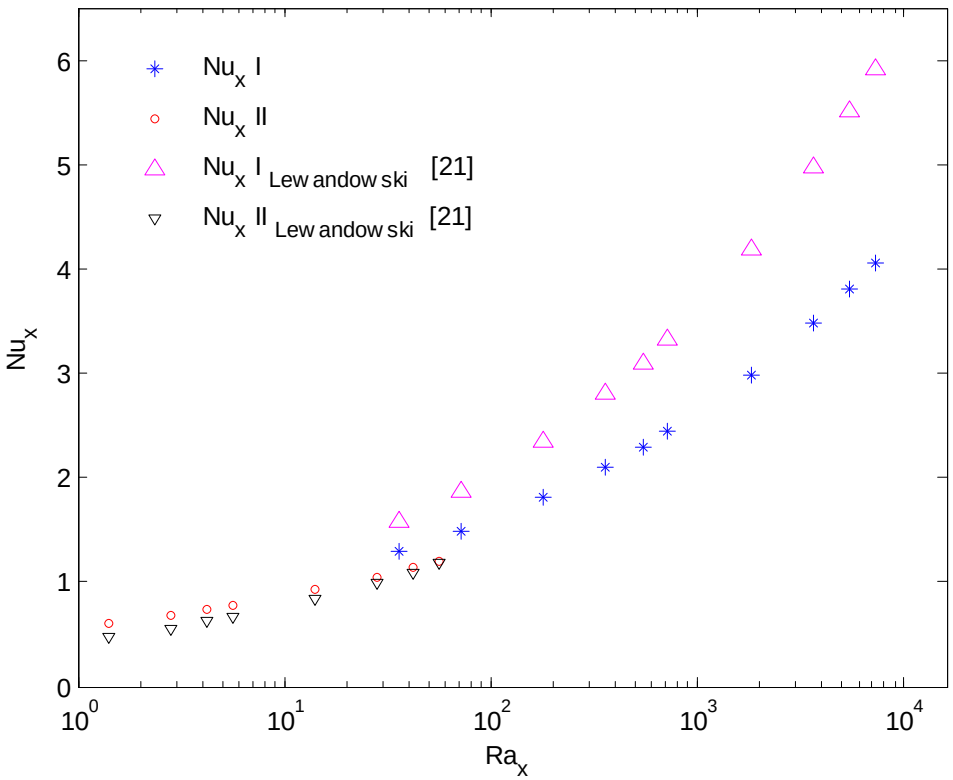


Fig. V.12 : Variation de nombre de Nusselt local avec le nombre de Rayleigh local pour une plaque inclinée *(φ = 60°)* sans champ magnétique et sans effet de Joule (M=0 et E_c=0).

Le comportement et la tendance de notre courbes sont similaire à ceux obtenues par **Lewandowski [1]** dans son étude de la convection naturelle sur une plaque inclinée de dimensions finies ; dont il utilise la même théorie avec une méthode de résolution semi-analytique . On note qu'il y a un très bon agreement entre les résultats obtenus avec ceux de Lewandowski **[1]** que ce soit pour la $1^{ière}$ région ou pour la $2^{ième}$.

V. 3. 2. Influence de l'intensité du champ magnétique

L'influence du champ magnétique sur les profils de vitesse et de température est illustrée sur les figures (V.13) et (V.14) respectivement. Il est évident que le paramètre du champ magnétique M a un effet retardataire sur la vitesse de fluide. Ceci est à cause de l'existence de l'effet des forces opposées qui s'appelle « force de Lorentz » et qui provoque une légère croissance de la couche limite thermique en la refoulant loin de la paroi, suivant la direction transversale. Cependant, il limite l'action du champ dynamique en réduisant les valeurs maximales atteintes par la composante verticale du champ de vitesse.

Il est à noter que le champ magnétique privilégie la vitesse horizontale qui fait augmenter l'étendue de la couche limite thermique, car c'est cette vitesse qui transporte la chaleur au sein de l'écoulement. Alors, il va aplatir l'épaisseur de la couche limite dynamique, et par conséquence, il induit un accroissement sur la valeur absolue du gradient vitesse à la surface, donc le profil de vitesse est amoindri alors que le profil de température va s'amplifié à cause de l'élévation du champ magnétique M .

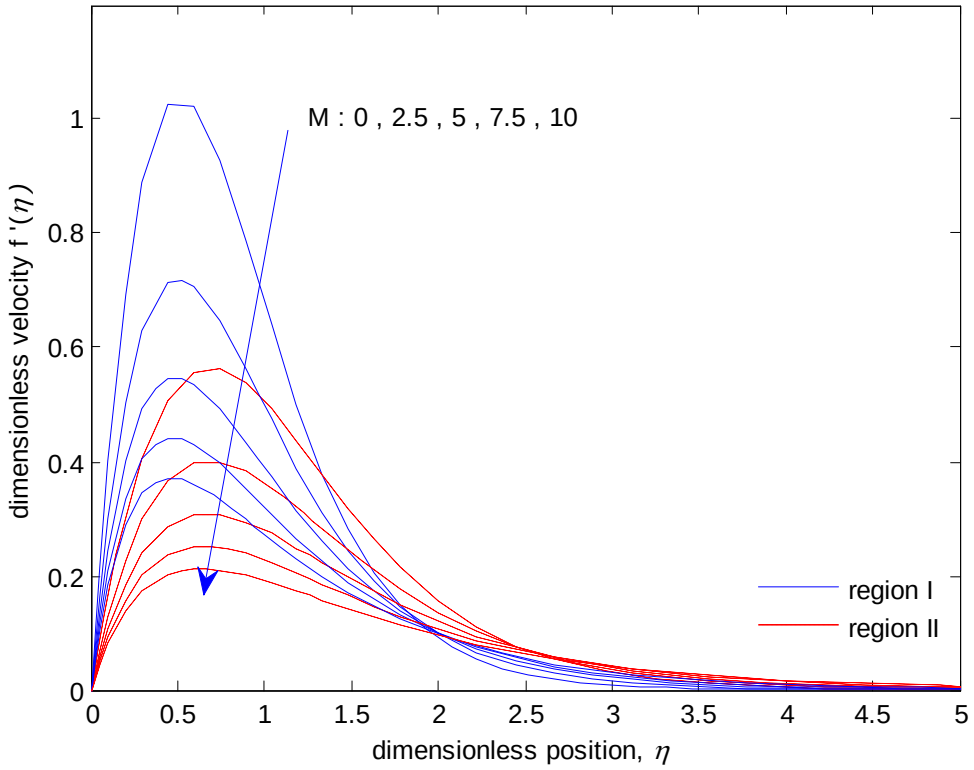


Fig. V.13 : Profil de vitesse en fonction de η pour plusieurs valeurs du champ magnétique M, pour une inclinaison (φ = 60°) et pour Gr = 0.5*10^3, Pr = 0.72 et E_c=0.

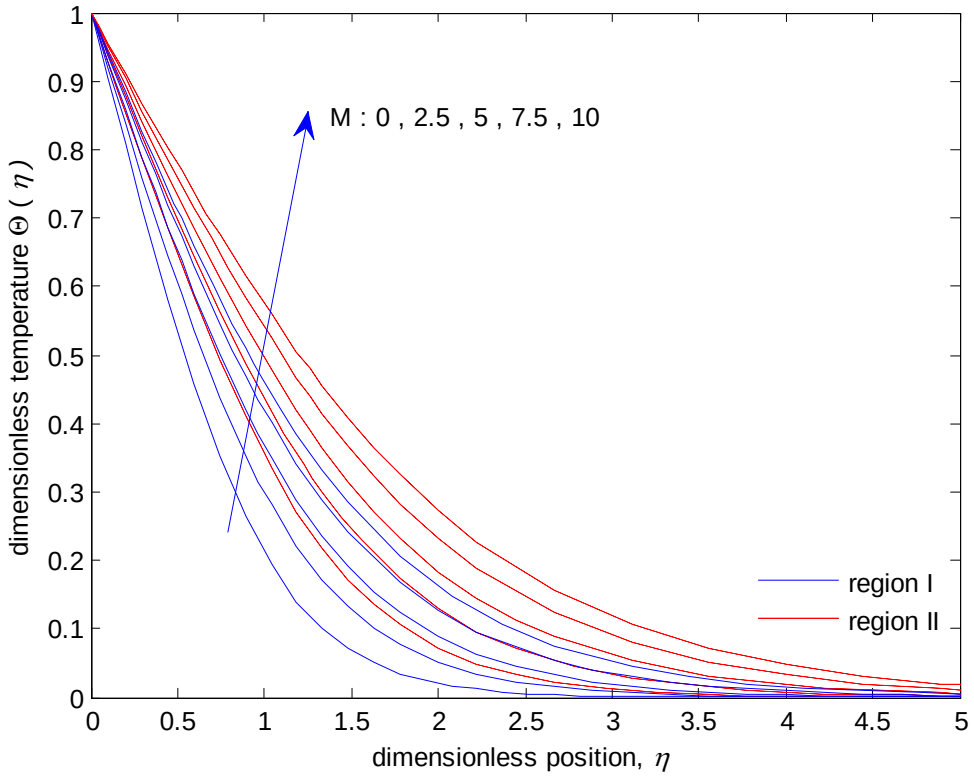


Fig. V.14 : Profil de température en fonction de η Pour plusieurs valeurs du champ magnétique M, pour une inclinaison (φ = 60°) et pour Gr = 0.5*10^3, Pr = 0.72 et E_c=0.

V. 3. 3. Influence de la dissipation thermique

L'influence de nombre d'Eckert E_c sur la vitesse et la température adimensionnelles est montrée dans les figures (V.15) et (V.16). On s'aperçoit que l'élévation du nombre d'Eckert provoque un accroissement de la température à cause de l'énergie de chaleur emmagasinée dans le fluide due au frottement thermique, et par conséquence, la distribution de la vitesse dans les deux régions augmente.

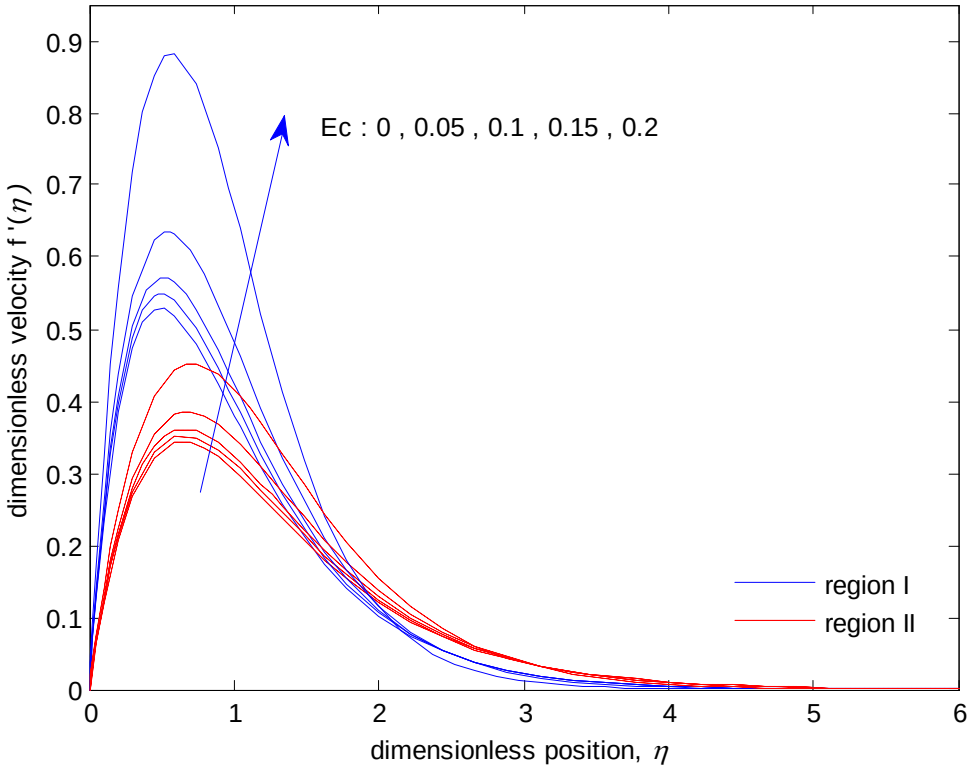


Fig. V.15 : Profil de vitesse en fonction de η Pour plusieurs valeurs du nombre d'Eckert E_c , pour une inclinaison (φ = 60°) et pour Gr = 0.5*10^3, Pr = 0.72 et M=5.

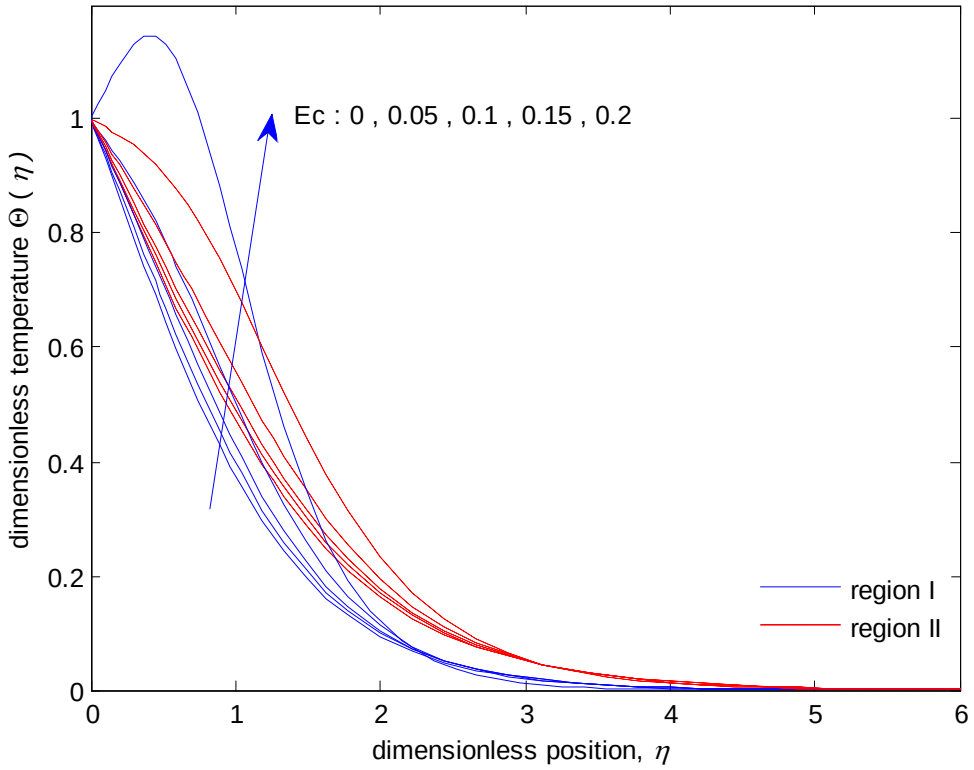


Fig. V.16 : Profil de température en fonction de η Pour plusieurs valeurs du nombre d'Eckert E_c , pour une inclinaison (φ = 60°) et pour Gr = 0.5*10^3, Pr = 0.72 et M=5.

Finalement, la figure (V.17) décrit la dépendance du nombre de Nusselt global avec le nombre de Rayleigh global, où il a été tracé pour $M = 0, 2.5, 5, 7.5$ et 10, et afin de les comparer avec ceux de Lewandowski par la suite. On trouve que pour un intervalle du nombre de Rayleigh global $Ra_d < 10^4$, le nombre de Nusselt Nu_d augmente avec l'élévation de Rayleigh Ra_d , comme il est remarquable qu'une élévation de paramètre du champ magnétique M engendre une réduction de l'épaisseur de la couche limite dynamique et augmente celle de la thermique dans les deux régions I et II, donc le Nusselt global Nu_d diminue. D'autre part, la petite différence entre les résultats de Lewandowski et ceux pour M=0 est due aux termes de la vitesse verticale et de le terme d'inertie négligés dans l'investigation de Lewandowski.

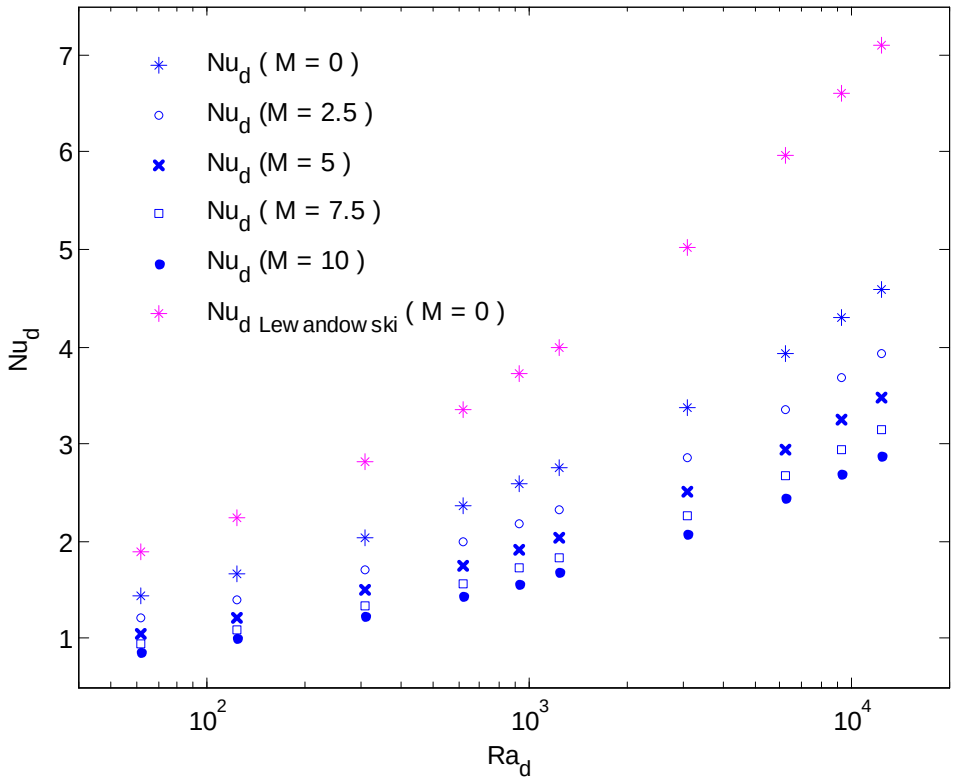


Fig. V.17 : Variation de nombre de Nusselt global avec le nombre de Rayleigh global pour plusieurs valeurs du champ magnétique M, pour une inclinaison (φ = 60°) et E_c=0.

V. 4. Conclusion

La présente étude essais d'appliquer une nouvelle approche de modèle physique des couches limites ; inspirer à partir des expériences de la visualisation ; d'un écoulement de transfert de chaleur par convection naturelle en présence magnétohydrodynamique (MHD) et dissipation Ohmique sur des plaques réelles de dimensions finies à une inclinaison arbitraire. En utilisant des transformations convenables, des équations différentielles partielles gouvernantes sont transformées en système d'équations différentielles ordinaires similaires et de les résoudre par la suite d'une manière simplifiée par le code BVP4 du MATLAB comme il est montré précédemment.

Dans cette étude numérique, on a pris en considération pour plusieurs valeurs de Prandtl les termes de dissipation visqueuse et la vitesse transversale ignorée dans l'investigation de **Lewandowski [1]**, la chose qui donne plus de précision malgré l'élimination du terme de droite des équations (4.10) et (4.11) et avoir une très bonne concordance avec les résultats de la littérature.

Pour une plaque isotherme, les résultats obtenues peuvent se résumé tel que :

- L'analyse qualitative des résultats numériques avec les photographies de visualisation montre une très bonne concordance, donc, la validité du modèle suggéré.
- Avec l'élévation de l'angle d'inclinaison φ, le profil de vitesse agrandit dans la $1^{ière}$ région et s'amoindrit de plus en plus dans la $2^{ième}$ région jusqu'à sa disparition, cependant, les couches limites thermiques diminuent dans la $1^{ière}$ région et augmentent dans la $2^{ième}$.
- Une hausse sur la valeur du nombre de Grashof provoque un accroissement de profil de vitesse de la zone la plus étendue, la $1^{ière}$ région, et une réduction dans la seconde qui va disparaître. Cependant, le profil de température augmente dans la $2^{ième}$ région, qui va transformer en plume, et reste presque constant dans la $1^{ière}$.
- Il apparait une valeur critique du nombre de Grashof qui est proportionnelle à l'angle d'inclinaison et qui peut mène la $2^{ième}$ région instable avant de se transforme en plume.
- Les épaisseurs de la couche limite thermique et dynamique s'abaissent dans les deux régions si le nombre de Prandtl s'accroit.
- L'augmentation de l'intensité du champ magnétique provoque la diminution globale du profil de vitesse, en diminuant leur valeur maximale et fait augmenter l'épaisseur de la couche limite thermique en privilégiant la vitesse horizontale. De ce fait, le paramètre du champ magnétique M a un effet retardataire sur la vitesse du fluide, donc le profil de vitesse diminue, cependant, le profil de température augmente dans les deux régions I et II.
- L'augmentation du paramètre du champ magnétique M engendre une diminution sur le nombre de Nusselt global.
- L'élévation du nombre d'Eckert E_c rehausse la distribution de vitesse et de température dans les deux régions d'écoulement.

Conclusion Générale

CONCLUSION GENERALE

L'étude menée dans le présent manuscrit porte un regard particulier sur la convection naturelle le long d'une plaque arbitrairement inclinée en présence d'un champ magnétique et dissipation ohmique, et plus précisément sur les plaques de dimensions finies, ainsi, ce qui nous a semblé judicieux fut de continuer l'objectif de sujet de magister **[2]**; l'élaboration du nouveau modèle physique, inventé par Lewandowski **[1]**. L'intérêt du travail réside d'une part dans un aspect de recherche fondamentale, pour décrire plus correctement les phénomènes physiques ayant lieu, et d'autre part, lié à la compréhension du phénomène de convection. Ainsi, nous sommes arrivés aux conclusions suivantes :

Ces dernières années, un intérêt croissant s'est manifesté pour l'étude des écoulements magnétohydrodynamique de la convection naturelle. Cet intérêt se mesure par l'importance de la littérature sur ce sujet et se justifie par la diversité des configurations tant scientifiques qu'industrielles.

Avec une telle bibliographie aussi riche et diversifiée tant par les développements théoriques que par les expériences ; tant par l'écoulement convectif conjugué à l'effet du champ magnétique que par la convection libre seulement. On a constaté que :

A propos de la littérature de la convection libre :

- ✓ Concernant les plaques verticales et les plaques légèrement inclinées l'écoulement est connu, mais pour les plaques horizontales et fortement inclinées peu de travaux sont apparus. Cependant les investigations expérimentales sont en discordance avec la théorie classique développée pour les plaques horizontales et inclinées.

- ✓ Malgré les différentes tentatives complémentaires pour réduire les écarts qui atteignent des niveaux de 50 % et plus, les résultats obtenus en recourant à des précisions tant analytiques que numériques n'ont pas eu l'effet escompté.

- ✓ La raison fondamentale, de cette disparité, est que le modèle physique sur lequel s'articulent les diverses modélisations n'est pas conforme suivant les mécanismes réels déterminants.

De plus, les études visant à déterminer les caractéristiques et les changements importants entraîner par un champ magnétique sur la structure de l'écoulement servent à :

- ✓ contribuer à la connaissance des phénomènes physiques ayant pour objet la thermique des plaques verticale, inclinée ou horizontale
- ✓ étudier l'influence de la variation d'un paramètre caractéristique, à savoir l'effet de Soret, de Dufour, loi de Darcy, le rayonnement, le nombre de Grashof etc. sur ce type d'écoulement.

D'autre part, La technique de la visualisation a mis en évidence que le concept de couche limite unidirectionnelle est physiquement en désaccord à la réalité. Elle a montrée de façon redondante que :

- ➢ la séparation ait lieu d'une part et que l'existence du panache existe d'autre part. Il est alors évident que le modèle initial basé sur le concept de la plaque-infinie n'est pas valide.

- ➢ Son maintien dans la littérature est à notre point de vue lié à sa simplicité quant à la déduction mathématique, au moins, ce concept valable pour la plaque verticale n'est pas tout à fait représentatif sur les autres cas.

Dans un second temps, notre attention fut focalisée sur la position du problème, parce que, à notre avis, même les calculs les plus précis basés sur un modèle imprécis du point de vue physique ne sont pas corrects comme les calculs approximatifs de point de vue mathématique mais basés, au contraire, sur un modèle reproduisant plus précisément la physique du phénomène.

Dans ce contexte, L'analyse des photographies de tous les cas d'angles d'inclinaison a permit à **Lewandowski [1]** de suggérer un nouveau modèle pour la convection libre sur une plaque réelle, qui est pratiquement un modèle général concernant les plaques orientées

arbitrairement, les positions verticale et horizontale constituent seulement des cas particuliers. Il est intéressant de noter la bonne concordance des résultats obtenus **[2]**.

Par ailleurs, à notre connaissance, tous les travaux qu'ont été publié et qui s'intéressent à l'écoulement de la MHD de la convection naturelle externe sont basés sur le modèle de Schmidt & Beckmann, à part la recherche exclusive de **Ghosh et Pop [3]** qui ont étudié le cas d'une plaque de dimensions finies, cette dernière investigation n'a reçue aucune attention dans la littérature.

Alors, il nous est apparu indispensable de combler ce manque de compréhension, en mettant en évidence une plaque de dimension finie, en élaborant un nouveau modèle physique capable de décrire plus correctement les phénomènes physiques ayant lieu. L'objectif est de distinguer la différence entre les deux régions où se développe la couche limite car, contrairement au cas vertical, la gravité influe différemment sur l'écoulement de couche limite à travers les forces de flottabilité. La discussion des résultats obtenus, par le code de calcul BVP4c du Matlab, est subdivisée en deux parties :

D'abord, il est noté ici que le cas de M = 0 et $E_c = 0$, ramène l'étude similaire à celle de **Lewandowski [1]** qui a utilisé la même approche. En effet, cette approche a permit à l'auteur d'obtenir un écart de **20%** sur le coefficient de transfert de chaleur, entre ces résultats avec ceux de l'expérimental, est considérée comme référence de base.

La 1^{ière} partie de cette étude numérique, sert à étudier la consistance de la méthode utilisée et d'examiner la validité du modèle suggéré. De plus, on a pris en considération pour **plusieurs valeurs de Prandtl, les termes de dissipation visqueuse** et la **vitesse transversale**, ignorées dans l'investigation précitée de **Lewandowski [1]**, la chose qui donne plus de précision malgré l'élimination des termes du pseudo similarité $\left(\frac{\partial}{\partial \xi} = 0\right)$, à la droite des équations gouvernantes (4.10 & 4.11), et d'avoir une très bonne concordance avec les résultats de la littérature.

Pour une plaque isotherme, les résultats obtenus peuvent se résumer tels que :

- L'analyse qualitative des résultats numériques avec les photographies de visualisation, pour différentes inclinaison, présente une satisfaction asymptotique et supportent le modèle physique suggéré.

- L'ordre de grandeur comparable d'exactitude des résultats obtenus avec ceux de la littérature confirme la robustesse et la consistance du code utilisé.

- Une hausse sur la valeur du nombre de Grashof provoque un accroissement de profil de vitesse de la zone la plus étendue, la $1^{ière}$ région, et une réduction dans la seconde qui va disparaître. Cependant, le profil de température augmente dans la $2^{ième}$ région, qui va transformer en plume, et reste presque constant dans la $1^{ière}$.

- Il apparait une valeur critique du nombre de Grashof qui est proportionnelle à l'angle d'inclinaison et qui peut mener la $2^{ième}$ région instable avant de se transformer en panache thermique.

- Les épaisseurs de la couche limite thermique et dynamique s'abaissent dans les deux régions si le nombre de Prandtl s'accroit.

Dans la deuxième partie, l'étude de l'influence de l'intensité d'un champ magnétique uniforme constant et de l'effet de Joule, en utilisant la nouvelle approche, s'inscrit dans le cadre de l'intensification des transferts thermiques. En effet, l'objectif est de contrôler l'écoulement induit par le gradient de température et d'engendrer une stabilité d'écoulement oscillatoire dans le transfert de chaleur par la convection libre le long des plaques isothermes réelles, horizontale verticale et inclinée. Ces problématiques sont essentielles pour la conception et le dimensionnement des systèmes industriels. Les résultats obtenus peuvent se résumer tels que :

- L'intensité du champ magnétique a un effet retardataire sur la vitesse du fluide, elle provoque une diminution globale de son profil, en diminuant leur valeur maximale et fait augmenter l'épaisseur de la couche limite thermique en privilégiant la vitesse horizontale, dans les deux régions I et II.

- Cependant, il limite l'action du champ dynamique en réduisant les valeurs maximales atteintes par la composante verticale du champ de vitesse. Donc, la couche limite dynamique va aplatir dans les deux régions I & II.

- Il faut noter que le champ magnétique privilégie la vitesse horizontale qui fait augmenter l'étendue de la couche limite thermique, car c'est cette vitesse qui transporte la chaleur au sein de l'écoulement. Pour cette raison, le profil de

température va s'amplifié, dans la 2ième région plus que dans la 1ière, à cause de l'élévation du champ magnétique M , le nombre de Nusselt global diminue.

- A cause de l'énergie de chaleur emmagasinée dans le fluide due au frottement thermique, l'élévation du nombre d'Eckert provoque un accroissement de la température, et par conséquence, la distribution de la vitesse augmente dans les deux régions.

En perspective, nous envisageons de compléter ce travail par l'étude de la comparaison des résultats obtenus avec des données expérimentales, ainsi de prendre en considération les termes, de la pseudo-similarité, de droite des équations (4.10) et (4.11).

Références

Références

1. Lewandowski, W.M., *Natural convection heat transfer from plates of finite dimensions.* International journal of heat and mass transfer, 1991. **34**(3): p. 875-885.
2. Bouksani, M., *Modélisation du transfert de chaleur par convection naturelle sur une plaque inclinée*, Thèse de magister. Université de Médéa, 2005.
3. Ghosh, S.K. and I. Pop, *A new approach on MHD natural convection boundary layer flow past a flat plate of finite dimensions.* International Journal of Heat Mass Transfer, 2005. **42**: p. 587–595.
4. Bejan A., *Convection Heat Transfer*, edition: Wiley, New York, 1995.
5. Raithby, G.D. and G.T. Hollands, *Natural convection*, in *Handbook of Heat Transfer*1988, McGraw-Hill: New York, 1988.
3. Eckert, E.R.G., and R.M. Jr. Drake. *Analysis of Heat and Mass Transfer*. United States: Hemisphere Publishing,New York, NY, 1987.
4. Rohsenow, W.M., J.P. Hartnett, and E.N. Ganic. *Handbook of Heat Transfer Fundamentals (2nd Edition)*. United States: McGraw-Hill Book Co.,New York, NY, 1985.
8. Bejan, A., *Convection heat transfer*, John wiley & sons, 2013.
9. Bejan, A., *Heat Transfer, John Wiley and Sons Inc*, USA, 1993.
10. Candel, S., *Mécaniques des fluides; cours*, Dunod, 1995.
11. Padet, J., *Convection libre.* Principes des transferts convectifs, 2010.
12. Bejan, A. and A.D. Kraus, *Heat transfer handbook.* Vol. 1, John Wiley & Sons, 2003.
13. Sacadura, J.F., *Initiation aux transferts thermiques*, I.N.S.A de LYON: Centre d'actualisation scientifique et technique, 1982.
14. Sparrow, E. and J. Gregg, *Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux.* Trans. ASME, 1956. **78**(1): p. 435-440.
15. Giblin, R., *Les Lois de la convection naturelle.* 1971.
16. Eckert, E.R.G., *Heat and mass transfer*, New York: 2nd edition, Mc graw hill book company, 1959.
17. Ostrach, *An Analysis of Laminar Free-convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force.* NACA TN- 1111, 1953: p. 63-78.
18. Sparrow, E.M. and J.L. Gregg, *Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux.* Transaction of the A.S.M.E, 1956. **78**: p. 435-440.

19. Millan, P., *Etude expérimentale des champs dynamiques et thermiques de convection naturelle dans des enceintes fermées à nombres de Rayleigh élevés*1985, Thèse de doctorat d'état en sciences, U.P.S Toulouse,1985.
20. Kuiken, H.K., *Boundary layer conditions in free convection.* J. of Engr. Math., 1968. **2**(1): p. 95-105.
21. Welty, J.R., C.E. Wicks, and R.E. Wilson, *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer*, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1969.
22. Pohlhausen, E., *Der Warmeaustausch Zwischen Festen Korpen und Flussigkeiten mit kleiner Reiburg and kleiner warmeleitung.* Z Angew Math Mech, 1911. **1**(115).
23. Schmidt, E. and W. Beckmann, *Das Temperatur-und Geschwindigkeitsfeld Von einer Warme AbgebendenSenkrechten Platte bei naturlicher Konvektion.* Forsch-Ing-Wes., 1930. **1**(391).
24. Jakob, M., *Heat transfer*. Vol. 1, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1962.
25. Schlichting, H., *Boundary-layer theory*, New York: 6th Ed. , McGraw-Hill, 1968.
26. Julian, D.V., *An experimental study of natural convection heat transfer from a uniformly heated vertical plate immersed in mercury*, Ph. D. Dissertation. Manhatten, Kansas State Univ, 1968.
27. Chang, K.C., et al., *Free convection of a low Prandtl number fluid in contact with a uniformly heated vertical plate*, Argonne National Labortory ANL-6835, 1964.
28. Sahel, E.P. and J.K. Ferrell, *Heat transfer review.* Industrial and Engineering Chemistry, 1969. **61**(1): p. 31-40.
29. Gill, W.N., et al., *Fluid dynamics review.* Industrial and Engineering Chemistry, 1970. **62**(4): p. 49-79.
30. Eckert, E.R.G. and e. al, *Heat transfer -a review of 1968 literature.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 1970. **13**: p. 225-262.
31. Ede, A.J., *Natural convection on free vertical surfaces*, Mech. Eng. Research Laboratory Report, Heat: Glasgow, 1956, p. 141.
32. Ede, A.J., *Advances in free convection*, in *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, Inc.: New York, 1967. p. 1-64.
33. Ostrach, S., *Theory of Laminar Flows*, in *High Speed Aerodynamics and Jet Prcmulsion*, Oxford University Press,1964, p. 528-718.
34. Gebhart, B., *Natural convection flolws and stability*, in *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, Inc.: New York, 1973 p. 273-348.
35. Gebhart, B., *Instability, transition and turbulence in buoyancy-induced flows*, in *in*

Annual Review of Fluid Mechanics, M.v. Dyke, W.G. Vincenti, and J.V. Wehausen, Editors. Annual Review Inc.: California, USA, 1973, p. 213-246.

36. Squire, H.B., *Modern developments in fluid mechanics*, in *high speed flow*, 1st edn. Oxford University Press: London, 1956.
37. Churchill, S.W., *A correlation for laminar free convection from a vertical plate.* Trans Am Soc Eng Series C J Heat Transf, 1973. **95**(4): p. 540-541.
38. Churchill, S.W. and H.H. Chu, *Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate.* Int. J. Heat Mass Transfer, 1975. **18**(11): p. 1323-1329.
39. Holman, J.P. and P.R.S. White, *Heat transfer*, New York: 7th edn. McGraw-Hill, 1992.
40. Burmeister, L.C., *Convective heat transfer*, John Wiley & Sons, 1993.
41. Bejan, A., *Convection heat transfer*, New York: 2nd edn. Wiley, 1995.
42. Kakac, S. and Y. Yener, *Convective heat transfer*, Boca Raton: 2nd edn. CRC Press LLC, 1995.
43. Oosthuizen, P.H. and D. Naylor, *Introduction to convective heat transfer analysis*, New York: 1st edn. McGraw-Hill, 1999.
44. Thomas, L.C., *Heat transfer*, Tulsa: 2nd edn. Capstone Publishing Corporation, 2000.
45. Kays, W., M. Crawford, and B. Weigand, *Convective heat and mass transfer*, Boston: 4th edn. McGraw-Hill Higher Education, 2005.
46. Pop, I. and D. Ingham, *Convective heat transfer*, New York: 1st edn. Pergamon Press, 2001.
47. Oleg, G.M. and P.K. Pavel, *Free-convective heat transfer*, Berlin: 1st edn. Springer, 2005.
48. Mickle, F. and S.T. Marient, *Convective heat transfer*, London and Washington: 1st edn. Wiley and ISTE, 2009.
49. Incropera, F., et al., *Fundamentals of heat and mass transfer*, New York: 6th edn. Wiley, 2006.
50. Jaluria, Y., *Natural convection: heat and mass transfer*, New York: 1st edn. Pergamon Press, 1980.
51. McAdams, W.H., *Heat transmission*, New York: 3rd edn. McGraw-Hill, 1954.
52. Wong, K.F.V., *Intermediate Heat Transfer*, New York: Marcel Dekker, Inc, 2003.
53. Oosthuizen, P.H. and A.Y. Kalendar, *Natural Convective Heat Transfer from Narrow Plates*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013.
54. Schmidt, E., *Schlierenaufnahmen des Temperaturfeldes in der Nähe wärmeabgebender Körper.* Forschung im Ingenieurwesen, 1932. **3**(4): p. 181-189.

55. Weise, R., *Wärmeübergang durch freie Konvektion an quadratischen Platten.* Forschung im Ingenieurwesen, 1935. **6**(6): p. 281-292.
56. Kraus, W., *Temperatur-und Geschwindigkeitsfeld bei freier Konvektion um eine waagerechte quadratische Platte,* Hirzel, 1940.
57. Fishenden, M.W. and O.A. Saunders, *An introduction to heat transfer*, Clarendon Press, 1950.
58. Bosworth, R.C.L., *Heat transfer phenomena, the flow of heat in physical systems*, Associated General Publications, 1952.
59. Mikheyev, M., *Fundamentals of heat transfer,* Mir, 1968.
60. Husar, R. and E. Sparrow, *Patterns of free convection flow adjacent to horizontal heated surfaces.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 1968. **11**(7): p. 1206IN31207-IN41208.
61. Rotem, Z. and L. Claassen, *Natural convection above unconfined horizontal surfaces.* Journal of Fluid mechanics, 1969. **39**(1): p. 173-192.
62. Hassan, K.-E. and S.A. Mohamed, *Natural convection from isothermal flat surfaces.* International journal of heat and mass transfer, 1970. **13**(12): p. 1873-1886.
63. Pera, L. and B. Gebhart, *On the stability of natural convection boundary layer flow over horizontal and slightly inclined surfaces.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 1973. **16**(6): p. 1147-1163.
64. Pera, L. and B. Gebhart, *Natural convection boundary layer flow over horizontal and slightly inclined surfaces.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 1973. **16**(6): p. 1131IN71137-1136IN81146.
65. Al-Arabi, M. and M. El-Riedy, *Natural convection heat transfer from isothermal horizontal plates of different shapes.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 1976. **19**(12): p. 1399-1404.
66. Ishiguro, R., et al. *Heat transfer and flow instability of natural convection over upward-facing horizontal surfaces*. in *Proceedings Sixth Int. Heat Transfer Conf*. 1978.
67. Yousef, W., J. Tarasuk, and W. McKeen, *Free convection heat transfer from upward-facing isothermal horizontal surfaces.* Journal of Heat Transfer, 1982. **104**(3): p. 493-500.
68. Lewandowski, W.M., et al., *Free convection heat transfer and fluid flow above horizontal rectangular plates.* Applied Energy, 2000. **66**(2): p. 177-197.
69. Pretot, S., B. Zeghmati, and G. Le Palec, *Theoretical and experimental study of natural convection on a horizontal plate.* Applied thermal engineering, 2000. **20**(10): p. 873-891.

70. Martorell, I., J. Herrero, and F.X. Grau, *Natural convection from narrow horizontal plates at moderate Rayleigh numbers.* International Journal of heat and mass transfer, 2003. **46**(13): p. 2389-2402.
71. Kitamura, K., et al., *Fluid flow and heat transfer of natural convection adjacent to upward-facing, rectangular plates of arbitrary aspect ratios.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015. **89**: p. 320-332.
72. Kozanoglu, B. and J. Lopez, *Thermal boundary layer and the characteristic length on natural convection over a horizontal plate.* Heat and mass transfer, 2007. **43**(4): p. 333-339.
73. Stewartson, K., *On the free convection from a horizontal plate.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 1958. **9**(3): p. 276-282.
74. Gill, W.N., D.W. Zeh, and E. Del Casal, *Free convection on a horizontal plate.* Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 1965. **16**(4): p. 539-541.
75. Goldstein, R. and K.-S. Lau, *Laminar natural convection from a horizontal plate and the influence of plate-edge extensions.* Journal of Fluid Mechanics, 1983. **129**: p. 55-75.
76. Chen, T., H.-C. Tien, and B.F. Armaly, *Natural convection on horizontal, inclined, and vertical plates with variable surface temperature or heat flux.* International journal of heat and mass transfer, 1986. **29**(10): p. 1465-1478.
77. Wei, J., B. Yu, and Y. Kawaguchi, *Simultaneous natural-convection heat transfer above and below an isothermal horizontal thin plate.* Numerical Heat Transfer: Part A: Applications, 2003. **44**(1): p. 39-58.
78. Corcione, M., *Heat transfer correlations for free convection from upward-facing horizontal rectangular surfaces.* WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer, 2007. **2**(3): p. 48-60.
79. Jeschke, P. and H. Beer, *Longitudinal vortices in a laminar natural convection boundary layer flow on an inclined flat plate and their influence on heat transfer.* J Fluid Mech, 2001. **43**(2): p. 313-339.
80. Kimura, F., et al., *Fluid flow and heat transfer of natural convection adjacent to upward-facing inclined heated plates.* Heat Transf Asian Res, 2003. **32**(3): p. 278-291.
81. Komori, K., et al., *Fluid flow and heat transfer in the transition process of natural convection over an inclined plate.* Heat Transf Asian Res, 2001. **30**(8): p. 648-659.
82. Lloyd, J. and E. Sparrow, *On the instability of natural convection flow on inclined plates.* Journal of Fluid Mechanics, 1970. **42**(3): p. 465-470.
83. Sparrow, E.M. and R.B. Husar, *Longitudinal vortices in natural convection flow on*

inclined plates. J Fluid Mech, 1969. **37**: p. 251-255.

84. Schmidt, E., *Schlieren pictureD of the temperature field in the neighbourhood of bodies with heat removal.* Forsch. Geb. Ingen, 1932. **3**: p. 181.
85. Tautz, H., *wärme abgebende durch freie konvektion an einar quadratischen platte verschiedener neigung*, ed. I.d.U. Diplom Arbeit aus der, Leipzig, 1943.
86. Rich, B.R., *An investigation of heat transfer from an inclined flat plate in free convection.* Trans. ASME, 1953. **75**: p. 488-499.
87. Michiyoshi, I., *Heat transfer from inclined thin flat plate by natural convection.* Jpn Soc Mech Eng Bull, 1964. **7**(28): p. 745-750.
88. Kierkus, W.T., *An analysis of laminar free convection flow and heat transfer about an inclined isothermal plate.* Int J Heat Mass Transf, 1968. **11**(2): p. 241-253.
89. Vliet, G.C., *Natural convection local heat transfer on constant-heat-flux inclined surfaces.* J Heat Transf, 1969. **91**(4): p. 511-516.
90. Hassan, K.E. and S.A. Mohamed, *Natural convection from isothermal flat surfaces.* Int J Heat Mass Transf, 1970. **13**(12): p. 1873-1886.
91. Lee, J.B. and G.S.H. Lock, *Laminar boundary-layer free convection along an inclined isothermal surfaces.* Trans CSME, 1972. **1**: p. 189-196.
92. Fuji, T. and H. Imura, *Natural-convection heat transfer from a plate with arbitrary inclination.* Int J Heat Mass Transf, 1972. **15**(4): p. 755-764.
93. Fujii, T. and H. Imura, *Natural convection heat transfer from a plate with arbitrary inclination* Int. J. Heat Mass Transfer, 1972. **15**(4): p. 755-767.
94. Vliet, G.C. and D.C. Ross, *Turbulent natural convection on upward and downward facing inclined constant heat flux surfaces.* J Heat Transf, 1975. **97**(4): p. 549-554.
95. Black, W.Z. and J.K. Norris, *The thermal structure of free convection turbulence from inclined isothermal surfaces and its influence on heat transfer.* Int J Heat Mass Transf, 1975. **18**(1): p. 43-50.
96. Gryzagoridis, J. and B.E. Klingenberg, *Natural convection from upper and lower surfaces of an inclined isothermal plate.* Int Commun Heat Mass Transf, 1986. **13**(2): p. 163-169.
97. King, J.A. and D.D. Reible, *Laminar natural convection heat transfer from inclined surfaces.* Int J Heat Mass Transf, 1991. **34**(7): p. 1901–1904.
98. Wei, J.J., et al., *Numerical study of simultaneous natural convection heat transfer from both surfaces of a uniformly heated thin plate with arbitrary inclination.* Heat Mass Transf/Waerme- und Stoffuebertragung, 2002. **38**(4-5): p. 309-317.

99. Al-Arabi, M. and B. Sakr, *Natural convection heat transfer from inclined isothermal plates.* Int J Heat Mass Transf, 1988. **31**(3): p. 559-566.
100. Chen, T.S., H.C. Tien, and B.F. Armaly, *Natural convection on horizontal, inclined, and vertical plates with variable surface temperature or heat flux.* Int. J. Heat Mass Transfer, 1986. **29**(10): p. 1465-1478.
101. Kimura, F., et al., *Fluid flow and heat transfer of natural convection at a slightly inclined, upward-facing, heated plate.* Heat Transf Asian Res, 2002. **31**(5): p. 362-375.
102. Lloyd, J.R. and E.M. Sparrow, *On the instability of natural convection flow on inclined plates.* J Fluid Mech, 1970. **42**: p. 465-470.
103. Sparrow, E.M., J.W. Ramsey, and E.A. Mass, *Effect of finite width on heat transfer and fluid flow about an inclined rectangular plate.* J Heat Transf, 1979. **101**(2): p. 199-204.
104. Mathon, P., *Influences des forces électromagnétiques sur les processus électrochimiques-Application à la propulsion MHD,* thèse de doctorat. Institut Polytechnique de Grenoble, 2008.
105. Sparrow, M.E. and D.R. Cess, *The effect of magnetic field on free convection heat and mass transfer.* Int. J. Heat Mass Transfer, 1961: p. 3, pp. 267-274.
106. Gupta, A.S., *Steady and transient free convection of an electrically conducting fluid from a vertical plate in the presence of magnetic field.* Appl. Sci. Res., 1961. **9A**: p. 319-333.
107. Lykoudis, P.S., *Natural convection of an electrically conducting fluid in the presence of a magnetic field.* Int. J. Heat Mass Transfer, 1962. **5**: p. 23-34.
108. Anjali Devi, S.P. and R. Kandasamy, *Effects of chemical reaction,heat and mass transfer on laminar flow along a semi infinite horizontal plate.* Heat and Mass Transfer, 1999. **35**(6): p. 465-467.
109. Ishak, A., *MHD boundary layer flow due to an exponentially stretching sheet with radiation effect.* Sains Malaysiana, 2011. **40**(4): p. 391-395.
110. Lavanya, M., et al., *Radiation effects on MHD boundary layer flow of a nanofluid past an exponential permiable stretching sheet embedded in a porous medium.* Asian Journal of Science and Technology, 2016. **7**(4).
111. Jaber, K.K., *Joule Heating and Viscous Dissipation on Effects on MHD Flow over a Stretching Porous Sheet Subjected to Power Law Heat Flux in Presence of Heat Source.* Open Journal of Fluid Dynamics, 2016. **6**(3): p. 156.
112. A.Hossain, M., I. Pop, and M. Ahmad, *MHD free convection flow from an isothermal plate inclined at a small angle to the horizontal.* J. Theoretical and Appl. fluid Mech., 1996. **1**: p. 194-207.

113. Anghel, M., et al., *Combined heat and mass transfer by free convection past an inclined flat plate.* Int. J. Appl. Mech. and Engng., 2001. **2**: p. 473-497.
114. Chen, C.H., *Heat and mass transfer in MHD flow by natural convection from a permeable inclined surface with variable wall temperature and concentration.* Acta, 2004. **172**: p. 219-235.
115. Alam, M.S. and M.M. Rahman, *MHD free convective heat and mass transfer flow past an inclined surface with heat generation.* Thammasat Int. Sc. Tech., 2006. **11**(4).
116. Alam, M.S., M. Ali, and M.D. Hossain, *Heat and mass transfer in MHD free convection flow over inclined plate with hall current.* International Journal of Engineering and Science (IJES), 2013. **2**(7): p. 81-88.
117. Abd El Aziz, M., *Temperature dependent viscosity and thermal conductivity effects on combined heat and mass transfer in MHD three-dimensional flow over a stretching surface with Ohmic heating.* Meccanica, 2007. **42**: p. 375-386.
118. Kumar, H., *Heat and mass transfer over an isothermal inclined plate at constant concentration gradient and with heat source.* World Applied Sciences Journal, 2013. **24**(3): p. 364-369.
119. Das, S., B.C. Sarkar, and R.N. Jana, *Entropy generation in MHD free convective boundary layer flow past an inclined flat plate embedded in a porous medium with Hall currents* International Journal of computer Applications, 2013. **84**(9): p. 36-46.
120. Ali, F., et al., *Conjugate effects of heat and mass transferon MHD free convection flow over an inclined plate embedded in a pourous medium.* PLOS ONE, 2013. **8**(6).
121. Devi, R., et al., *Radiation and mass transfer effects on MHD natural convection flow over an inclined plate.* IJMER, 2014. **4**(2): p. 90-104.
122. Raptis, A. and N. Kafousias, *Heat transfer in flow through a porous medium bounded by an infinite vertical plate under the action of a magnetic field.* International journal of energy research, 1982. **6**(3): p. 241-245.
123. Cheng, C.Y., *Effect of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media – an integral approach.* Int. Comm. Heat Mass transfer, 1999. **26**: p. 935-943.
124. Postelnicu, A., *Influence of magnetic field on heat and mass transfer from vertical surfaces in porous media considering Soret and Dufour effects.* Int. J. Heat Mass Transfer., 2004. **47**: p. 1467-1472.
125. Bourich, M., M. Hasnaoui, and A. Amahmid, *Effet Soret sur la convection hydromagnétique dans une couche poreuse horizontale.* Journées Internationales de

Thermique, 2007.

126. Singh, V. and S. Agarwal, *Heat transfer in a second grade fluid over an exponentially stretching sheet through porous medium with thermal radiation and elastic deformation under the effect of magnetic field.* International Journal of Applied Mathematics, 2012. **8**: p. 41-63.
127. Hsiao, C.Y., et al., *Influence of thermophoretic particle deposition on MHD free convection flow of non-Newtonien fluids from a vertical plate embedded in porous media considering Soret and Dufour effects.* Applied Mathematics and Computation, 2014. **244**: p. 390-397.
128. Elbashbeshy, E.M.A., *Free convection flow with variable viscosity and thermal diffusivity along a vertical plate in the presence of the magnetic field.* Int. J. of Engineering Sciences, 2000: p. 38, 207-213.
129. Rahman, M.M., et al., *Effects of temperature dependent thermal conductivity on MHD Free convection flow along a vertical flat plate with heat conduction, Nonlinear Analysis.* Model. and Cont., 2008. **13**(4): p. 513-524.
130. Nasrin, R. and M.A. Alim, *MHD free convection flow along a vertical flat plate with thermal conductivity and viscosity depending on temperature.* Journal of Naval Architecture and Marine Engineering, 2009. **6**: p. 72-83.
131. Shrama, R. and G. Singh, *Steady MHD Natural Convection Flow with Variable Electrical Conductivity and Heat Generation along an Isothermal Vertical Plat.* J. of Science and Engineering, 2010: p. 235-242.
132. Cherouana, H., Y.K. Benkehla, and N. Labsi, *Etude de l'écoulement d'un fluide newtonien le long d'une plaque plane verticale soumise à un champ magnétique*, in *https://www.researchgate.net/publication/310425622*.
133. Vajravelu, K. and A. Hadjinicolaou, *Heat transfer in a viscous fluid over a stretching sheet with viscous dissipation and internal heat generation.* Int. Commun. Heat Mass, 1993. **20**: p. 417-430.
134. Chen, C.-H., *Combined heat and mass transfer in MHD free convection from a vertical surface with Ohmic heating and viscous dissipation.* International Journal of Engineering Science, 2004. **42**: p. 699-713.
135. Eldabe, N.T.M. and M.E.M. Ouaf, *Chebyshev finite difference method for heat and mass transfer in a hydromagnetic flow of a micropolar fluid past a stretching surface with Ohmic heating and viscous dissipation,.* Applied Mathematics and Computation, 2006. **177**: p. 561-571.

136. Abel, M.S., E. Sanjayanand, and M.M. Nandeppanavar, *Viscoelastic MHD Flow and Heat Transfer over a Stretching Sheet with Viscous and Ohmic Dissipations.* " Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008. **13**(9): p. 1808-1821.
137. Pantokratoras, A., *Study of MHD Boundary Layer Flow over a Heated Stretching Sheet with Variable Viscosity: A Numerical Reinvestigation.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 2008. **51**(1-2): p. 104-110.
138. Kishore, P.M., V. Rajesh, and S.V. Verma, *Effects of Heat transfer and viscous dissipation on MHD free convection flow past an exponentially accelerated vertical plate with variable temperature.* Journal of Naval Architecture and Marine Engineering, 2010. **7**: p. 101-110.
139. Renuka Devi, R.L.V., A. Neeraja, and N.B. Reddy, *Radiation Effect on MHD Slip Flow past a Stretching Sheet with Variable Viscosity and Heat Source/Sink.* International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR), 2015. **3**(5): p. 8-17.
140. Prabhakara, S. and M. Deshpande, *The no-slip boundary condition in fluid mechanics.* Resonance, 2004. **9**(5): p. 61-7.
141. Sahoo, B., *Effects of slip, viscous dissipation and Joule heating on the MHD flow and heat transfer of a second grade fluid past a radially stretching sheet.* Appl. Math.Mech., 2010. **31**(2): p. 159-173.
142. Fahidy, T.Z., *Magnetoelectrolysis.* J. Applied Electrochem., 1983. **13**: p. 553-563.
143. Ulrich, T. and E. Steiner, *Magnetic field effects in chemical kinetics and related phenomena.* Chemical Review, 1989. **89**: p. 51-147.
144. Nouri, A., *Etude de l'influence des forces magnétiques sur l'hydrodynamique et le transfert de matière en électrochimie* 2008: Thèse INP Grenoble.
145. O'Brien, R.N. and K.S.V. Sathanam, J. Appl. Electrochem, 1997. **27**: p. 573.
146. O'Brien, R.N. and K.S.V. Sathanam, Electrochim. Acta, 1987. **32**: p. 1679.
147. Bund, A., et al., Electrochim. Acta, 2003. **49**: p. 147.
148. Rabah, L., *Convection par gradient de susceptibilité magnétique.Effets sur l'électrodéposition du cuivre et de l'alliage cobalt-fer.*2007: Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, France.
149. Mohanta, S. and T.Z. Fahidy, *Mass transfer in a magnetoelectrolytic flow cell.* Electrochimica Acta, 1974. **19**(12): p. 835-840.
150. Mukhopadhyay, S. and K. Vajravelu, *MHD boundary layer flow and heat transfer over*

an exponentially stretching sheet embedded in thermally stratified medium. Alexandria Engineering Journal, 2013. **52**: p. 259-265.

151. Bakr, A.A., *Effect of chemical reaction on MHD free convection and mass transfer flow of a micropolar fluid with oscillatory plate velocity and constant heat source in a rotating frame of reference.* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011. **16**: p. 698-710.
152. Kameswaran, P.K., et al., *On radiation effects on hydromagnetic newtonian liquid flow due to an exponential stretching sheet.* Boundary values problems, 2012.
153. Anjalidevi, S.P. and R. Kandasamy, *Effects of chemical reaction heat and mass transfer on laminar flow along a semi infinite horizontal plate.* Heat Mass Transfer, 1999: p. 35-465.
154. Anjalidevi, S.P. and R. Kandasamy, *Effects of chemical reaction heat and mass transfer on MHD flow past a semi infinite plate.* Z. Angew. Math. Mech., 2000: p. 80-697.
155. Raptis, A. and C. Perdikis, , *Viscous flow over a non-linearly stretching sheet in the presence of a chemical reaction and magnetic field.* Int. J. Nonlinear Mech., 2006. **41**: p. 527–529.
156. Anghel, M., H.S. Takhar, and I. Pop, *Dufour and Soret effects on free convection boundary layer over a vertical surface embedded in a porous medium.* Stud. Univ. Babes-Bolyai, Math., 2000. **45**: p. 11-21.
157. Mansour, M.A. and N.A. El-Shaer, *Radiative effects on magnetohydrodynamic natural convection flows saturated in porous media.* Journal of Magnetism and Magnetic Materials 2001. **237**: p. 327-341.
158. Singh, N.P. and A.K. Singh, *MHD free convection and mass transfer flow past a flat plate.* The Arabian Jounal for Science and Engineering, 2003. **32**(1A).
159. Postelnicu, A., *Influence of Magnetic Field on Heat and Mass Transferfrom Vertical Surfaces in Porous Media Considering Soret and Dufour Effects.* Int. J. Heat Mass Transfer, 2004. **47**: p. 1467-1472.
160. Partha, M.K., P.V.S.N. Murthy, and G.P. Raja Sekhar, *Soret and Dufour Effects in Non-Darcy Porous Media.* Trans. ASME J. Heat Transfer., 2006. **128**: p. 605-610.
161. Alam, M.S. and M.M. Rahman, *Dufour and Soret effects on MHD free convective heat and mass transfer flow past a vertical porous flat plate embedded in a pourous medium.* Journal of Naval Architecture and Marine Engineering, 2005. **1**: p. 55-65.
162. Hossain, M.S. and M.A. Samand, *Heat and Mass Transfer of an MHD Free Convection Flow along a Stretching Sheet with Chemical Reaction, Radiation and Heat Generation*

in Presence of Magnetic Field. Research Journal of Mathematics and Statistics, 2013. **5**(1-2): p. 5-17.

163. Makanda, G., *Numerical Study of Convective Fluid Flow in Porous and Non-Pourous Media*2015, Univ. Kwazulu-Natal: Thesis of Doctor of Philosophy.
164. Rashad, A.M., *Influence of radiation on MHD free convection from a vertical flat plate embedded in porous media with thermophoretic deposition of particles.* Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2007. **13**: p. 2213-2222.
165. Mustafa, M., et al., *Radiation effects in three dimensional flow over a bi-directional exponentially stretching sheet.* Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers, 2015. **47**: p. 43-49.
166. El-Kabeir, S.M.M. and E.A. El-Sayed, *Effects of thermal radiation and viscous dissipation on MHD viscoelastic free convection past a vertical isothermal cone surface with chemical reaction.* International Journal of Energy and Technology, 2012. **4**: p. 1-7.
167. Prakash, D. and M. Muthtamilselvan, *Effect of radiation on transient MHD flow of micropolar fluid between porous vertical channel with boundary conditions of the third kind.* Ain Shams Engineering Journal, 2014. **5**: p. 1277-1286.
168. Mandal, I.C. and S. Mukhopadhyay, *Heat transfer analysis for fluid flow over an exponentially stretching porous sheet with surface heat flux in porous medium.* Ain Shams Engineering Journal, 2013. **4**: p. 103-110.
169. Kechil, S.A. and I. Hashim, *Series Solution of Flowover Nonlinearly Stretching Sheet with Chemical Reaction and Magnetic Field.* Physics Letters A, 2008. **372**(13): p. 2258-2263.
170. Ahammad, M.U. and M.S.H. Mollah, *Numerical study of MHD free convection flow and mass transfer over a stretching sheet considering Dufour & Soret effects in the presence of Magnetic Field.* International Journal of Engineering & Technology, 2011. **11** (05): p. 98-106
171. Takhar, H.S., A.J. Chamkha, and G. Nath, *Flow and mass transfer on a stretching sheet with a magnetic field and chemically reactive species.* Int. J. Engng. Sci., 2000. **38**: p. 1303-1310.
172. Samad, M.A. and M. Mohebujjaman, *MHD Heat and Mass Transfer Free Convection Flow along a Vertical Stretching Sheet in Presence of Magnetic Field with Heat Generation.* Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, 2009. **1**(3): p. 98-106.
173. Mohammadein, A.A. and R. Gorla, *Heat transfer in a micropolar fluid over a stretching*

sheet with viscous dissipation and internal heat generation. Int. J. of Numerical Methods for Heat and Fluid flow, 2001. **11**(1): p. 50-58.

174. Helmy, K.A., *Effects of the magnetic field on a non-Newtonian conducting fluid past a stretching plate.* Can. J. Phys, 1994. **72**: p. 290-292.
175. Ahmed, S., *Free and forced convective MHD oscillatory flow over an infinite porous surface in an oscillating free stream.* Latin American applied research, 2010. **40**(2).
176. Padet, J., *Principes des transferts convectifs*, Polytechnica Paris, France, 1997.
177. G., K.J., *Heat transfer by convection*, in *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, G.D.W. Perry R. H., and Maloney J. O., Editor, McGraw-Hill: New York, 1999.
178. F., K., *Transmission de Chaleur et Thermodynamique*. Edition Masson, Paris ed, Edition Masson, Paris, 1967.
179. Welty, J.R., et al., *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer*, John Wiley & Sons, 2009.
180. Holman, J., *Heat Transfer, 8th editionMcGraw-Hill.* Inc. New York, 1997.
181. Oosthuizen, P.H. and D. Naylor, *An introduction to convective heat transfer analysis*, McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics, 1999.
182. Sacadura, J., *Initiation aux transferts thermiques, Tec*. Et Doc, Lavoisier, 4ieme tirage, Paris, 1993.
183. Schlichting, H. and K. Gersten, *Boundary-Layer Theor*, 2000.
184. Incropera, F. and D. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons Inc., New York, *1996*.
185. Middleman, S., *Introduction to Mass and Heat Transfer: Principles of Analysis and Design*, Wiley Online Library, 1997.
186. B., L., *Transferts thermiques* I.N.P.d. Grenoble, Editor 1987.
187. Giblin, R., *Transmission de la chaleur par convection naturelle*, éditions Eyrolles, Paris, 1974.
188. Taine, J., J.-P. Petit, and R. Séméria, *Transferts thermiques: mécanique des fluides anisothermes: cours et données de base*. 2ième édition, Paris ed, Dunod, 1998.
189. Leontiev, A., *Théorie des echanges de masse et de chaleur*, Moscow: Mir Publishing House, 1985.
190. Bird, R.B., W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena John Wiley & Sons.* New York, 1960: p. 413.
191. Platten, J. and J. Legros, *Convection in fluids.* Berlin etc., Springer-Verlag, 1984.
192. Çengel, Y.A., *Heat Transfer: A Practical Approach*, McGraw-Hill, 1998.

193. Lewandowski, W. and P. Kubski, *Methodical investigation of free convection from vertical and horizontal plates.* Heat and Mass Transfer, 1983. **17**(3): p. 147-154.

194. Lewandowski W. M., *Systematyczne badania przejmowania ciepta od plyty poziomej do cieczy w przestrzeni nieograniczonej w warunkach konwekcji naturalnej (Systematic investigations of heat transfer from a horizontal plate to a fluid in an unlimited space in the conditions of natural convection)*, Technical University of Gdańsk, 1980.

195. Lewandowski W. M., *Wymiana ciepla od plaskich powierzchni w warunkach laminarnej konweckji swobodnej (Heat transfer from flat surfaces under conditions of laminar free convection).* Zesz. Nauk. Politech. Gdańsk., t. Mechanika, 1987. **412**(53): p. 1-90.

196. Schmidt, E. and W. Beckmann, *Das Temperatur-und Geschwindigkeitsfeld vor einer Wärme abgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion.* Forschung im Ingenieurwesen, 1930. **1**(10): p. 341-349.

197. Takeuchi, M., Y. Ota, and Y. Tanaka, *Laminar natural convection heat transfer from a flat plate in a thermally stratified fluid.* Trans. JSME, 1974. **40**: p. 1046.

198. Ling, F., *A simple laboratory apparatus for measurements of natural convection heat transfer over a flat plate in vertical, inclined and horizontal positions.* Int. J, Mech. Eng. Educ, 1982. **11**: p. 245.

199. Churchill, S., *Free convection around immersed bodies. In Single phase Connective Heat Transfer , Heat Exchanger Design Handbook, edited by K. J. Bell, Hemisphere, Washington, DC,* Hemisphere Publishing, New York, Sec, 1983.

200. Jaluria, Y., *Natural convection: heat and mass transfer*. Vol. 5. 1980: Pergamon.

201. Kierkus, W.T., *An analysis of laminar free convection flow and heat transfer about an inclined isothermal plate.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 1968. **11**(2): p. 241IN9253-252.

202. Miller, R.M. and B. Gebhart, *An experimental study of the natural convection flow over a heated ridge in air.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 1978. **21**(9): p. 1229-1239.

203. Rasmus A., *Heat transfer from a plate of any orientation in an unlimited space under conditions of natural convection for great Prandtl number factors* 1979, Technical University of Gdańsk.

204. Schmidt E. in *Proc.. IV th Int. Congr. for Applied Mech.* 1934. Cambridge.

205. Chang, K.S. and I.C. Han, *Natural convective heat transfer over inclined short plates.* International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 1988. **4**(5): p. 665-673.

206. Lewandowski, W. and P. Kubski, *Effect of the use of the balance and gradient methods as a result of experimental investigations of natural convection action with regard to the conception and construction of measuring apparatus.* Heat and Mass Transfer, 1984. **18**(4): p. 247-256.
207. Lewandowski, W., *The mechanism of natural convection heat transfer from isothermal vertical, horizontal and inclined plates.* Arch. Thermod, 1986. **4**: p. 235-255.
208. M., L.W., *Konwekcyjne i hydrodynamiczne strumienie swobodne « Jets and plumes ».* Inż. Chem. i. Proc., 1985. **6**(4): p. 695.
209. Kierkus, W., *Analiza konwekcji swobodnej dookola skosnej izotermicznej powierzchni plaskiej (Analysis of free convection around an inclined isothermal flat surface)*, Technical university of Warsaw, 1965.
210. Yu, W.-S. and H.-T. Lin, *Free convection heat transfer from an isothermal plate with arbitrary inclination.* Heat and Mass Transfer, 1988. **23**(4): p. 203-211.
211. Shampine, L.F. and P.H. Muir, *Estimating conditioning of BVPs for ODEs.* Mathematical and Computer Modelling, 2004. **40**(11-12): p. 1309-1321.
212. Budd, C., O. Koch, and E. Weinmüller, *From nonlinear PDEs to singular ODEs.* Applied Numerical Mathematics, 2006. **56**(3-4): p. 413-422.
213. Shampine, L., *Solving ODEs and DDEs with residual control.* Applied Numerical Mathematics, 2005. **52**(1): p. 113-127.
214. Shampine, L.F., *Singular boundary value problems for ODEs.* Applied Mathematics and Computation, 2003. **138**(1): p. 99-112.
215. Shateyi, S., S.S. Motsa, and P. Sibanda, *The effects of thermal radiation, hall currents, soret, and dufour on MHD flow by mixed convection over a vertical surface in porous media.* Mathematical problems in Engineering, **2010**.
216. Motsa, S. and S. Shateyi, *A new approach for the solution of three-dimensional magnetohydrodynamic rotating flow over a shrinking sheet.* Mathematical Problems in Engineering, **2010**.
217. Narayana, M. and P. Sibanda, *On the solution of double-diffusive convective flow due to a cone by a linearization method.* Journal of Applied Mathematics, **2012**.
218. Hale, N. and D.R. Moore, *A Sixth-Order Extension to the MatlabPackage bvp4c of J. Kierzenka and L. Shampine*, in *Technical Report NA-08/04*, Oxford University Computing Laboratory, 2008.

Annexe

Description de la méthode numérique utilisée dans le chapitre V

Nous allons être amenés à étudier un problème d'équations différentielles ordinaires (EDO) aux limites, dont le comportement est très différent de celui d'un problème aux valeurs initiales. Dans l'application, L'ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées (4.14) - (4.15) est fortement non linéaire et ne peut être résolu analytiquement, avec les conditions aux limites (4.12), ils forment un problème aux limites à deux points qui peut être résolu pour certaines valeurs des paramètres le régissant. La méthode des différences finies qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation (III.A) et le polynôme de collocation fournit une solution continue qui est du quatrième ordre en précision, de manière uniforme dans l'intervalle d'intégration. La sélection du maillage et l'erreur de contrôle sont basés sur le résidu de la solution en continu. La technique de collocation utilise un maillage de points pour diviser l'intervalle en sous-intervalles d'intégration. Le solveur bvp4c détermine une solution numérique en résolvant un système d'équations algébriques résultant avec les conditions aux limites, et les conditions de collocation imposées sur tous les sous-intervalles. Le solveur estime alors l'erreur de la solution numérique sur chaque sous-interval. Si la solution ne satisfait pas aux critères de tolérance, le solveur adapte le maillage et répète le processus. L'utilisateur doit fournir les points du maillage initial ainsi qu'une approximation initiale de la solution aux points de maillage.

1. Equations différentielles ordinaires

Les équations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui changent continuellement. Ils se posent en modèles à travers les mathématiques, les sciences et l'ingénierie. En soi, un système d'équations différentielles possède de nombreuses solutions. Communément une solution d'intérêt est déterminée en spécifiant les valeurs de toutes ses composantes en un seul point ($x = a$), c'est ce que l'on appelle un problème aux valeurs initiales **(IVP)**. Cependant, dans de nombreuses applications, la solution est déterminée de manière plus complexe.

Un problème de valeur aux limites **(BVP)** définit des valeurs ou encore des équations pour les composantes de la solution à plus d'un point. Contrairement aux **(IVP)**, un problème de valeur aux limites peut, ne pas avoir de solution, avoir un nombre fini, ou bien en avoir une infinité. De ce fait, les programmes de résolution des **BVP**, exige de ses utilisateurs de fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent, il existe des paramètres qui doivent être déterminés de telle sorte que le **BVP** a une solution.

Ce qui suit montre comment formuler, résoudre et tracer la solution d'un **BVP** avec le programme **BVP4c** Matlab. Il vise à rendre la résolution d'un problème type d'un **BVP** aussi facile que possible.

2. Problème de valeur aux limites

Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, le problème de valeur initiale $y' = f(x, y)$, avec $y(a)$ donné, possède une solution unique. Les problèmes de valeur aux limites à deux bouts sont illustrés par l'équation :

$$y'' + y = 0 \qquad \textbf{(III.1)}$$

Avec les conditions aux limites suivantes : $y(a) = A, y(b) = B$.

Une manière d'analyser ces problèmes est de considérer une famille de solutions de IVP. Soit $y(x,\ s)$, la solution de l'équation (III.1) avec les valeurs initiales $y(a) = A$ et $y'(a) = s$. Chaque $y(x,\ s)$ s'étend jusqu'à $x = b$, maintenant la question est de déterminer les valeurs de « s » pour lesquelles $y(b,\ s) = B$.

S'il existe une solution « S » pour cette équation algébrique, la valeur $y(x,\ s)$ correspondante constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités aisément.

Soit $U(x,)$ la solution définie par $y(a) = A$, $y'(a) = 0$ et $V(x)$ la solution définie par $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$. La linéarité implique que $y\,(x, s) = U(x) + s \cdot V\,(x)$, et la condition à la limite $B = y(b, s) = U(b) + s \cdot V\,(b)$ n'est autre qu'une équation algébrique linéaire qui définit la pente initiale inconnue S.

3. Méthode numérique

En générale pour résoudre ce genre de problème la méthode la plus connue à laquelle ont recours les ingénieures n'est autre que la méthode de **Runge-Kutta** avec une **technique de tir**, ce qui peut surprendre que la routine bvp4c n'est pas un code de technique de tir (Shooting method).

En effet **BVP4c** met en œuvre une méthode de collocation pour la résolution des problèmes de valeurs aux limites de la forme

$$\boldsymbol{y' = f(x, y, p),} \qquad \boldsymbol{a \le x \le b} \qquad \textbf{(III.2)}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\boldsymbol{g(y(a), y(b), p) = 0} \qquad \textbf{(III.3)}$$

Ici « p » est un vecteur de paramètres inconnus. Par souci de simplicité, il n'est pas pris en compte dans les expressions qui suivent. La solution approximative $S(x)$ est une fonction polynomiale d'ordre trois continue sur chaque sous-intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ du maillage $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ qui satisfait les conditions aux limites suivantes :

$$\boldsymbol{g(s(a),\ s(b)) = 0} \qquad \textbf{(III.4)}$$

Et qui satisfait les équations différentielles (polynômes de collocation) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle :

$$\boldsymbol{S'(x_n) = f\left(x_n\ ,\ S(x_n)\right)} \qquad \textbf{(III.6)}$$

$$\boldsymbol{S'\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right) = f\left(\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right), s\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)\right)} \qquad \textbf{(III.7)}$$

$$\boldsymbol{S'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, s(x_{n+1}))} \qquad \textbf{(III.8)}$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébriques non linéaires pour les coefficients définissant $S(x)$. A la différence de la technique de tir, la solution $y(x)$ est évaluée sur tout l'intervalle $[a, b]$ avec prise en compte des conditions aux limites à touts moments.

La méthode de base de **BVP4c** est une méthode aux différences finies qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation (III.A). Il peut être démontré **[24],** que $S(x)$ est une approximation de quatrième ordre pour une solution isolée $y(x)$, c'est à dire, $\|y(x) - s(x)\| \le C \cdot h^4$.

Ici, "h" est la valeur maximale du pas $\boldsymbol{h_n = x_{n+1} - x_n}$ et " C " est une constante. Nous insistons sur le fait important que cette borne soit vraie pour tout " x " dans l'intervalle $[a, b]$, ce qui n'est pas le cas pour certaines méthodes de collocation populaires. Après $S(x)$ est calculé sur un maillage avec **BVP4c**.

En raison du fait que les problèmes de valeurs aux limites peuvent avoir plus d'une solution, les codes de résolution obligent ses utilisateurs à fournir une estimation pour la

solution souhaitée. L'estimation comprend une estimation d'un maillage initial, les codes ensuite adaptent le maillage de manière à obtenir une solution numérique précise avec un nombre réduit de nœuds. La partie la plus ardue pour résoudre un **BVP** est l'estimation en elle-même puisque réussir à trouver une approximation adéquate du premier est extrêmement difficile venir avec suffisamment bonne supposition est souvent la partie la plus difficile.

Le code **BVP4c** adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de remédier aux mauvaises suppositions. Le fait que $S(x)$ est régulière sur $[a\ ,\ b]$ ainsi que les collocations aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que la dérivée $S(x)$ est également continue sur l'intervalle $[a\ ,b]$ ce qui induit à un résiduel noté $r(x)$ dans l'équation différentielle défini par:

$$\boldsymbol{r(x) = S'(x) - f(x\ , S(x)\ )} \qquad \textbf{(III.9)}$$

Autrement dit, $S(x)$ est la solution exacte des équations différentielles ordinaires perturbées.

$$\boldsymbol{S'(x) = f(x\ , S(x) + r(x)\ )} \qquad \textbf{(III.10)}$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites est $g(s(a), s(b))$.

La routine **BVP4c** contrôle les tailles de ces résidus, si ces derniers sont uniformément petits, $S(x)$ s'avère être une bonne solution dans le sens que c'est la solution exacte d'un problème relativement proche de celui fourni au solveur. La routine est basée sur des algorithmes plausibles, même lorsque le maillage initial est non satisfaisant, elle continue à fournir des résultats corrects quand "h" tends vers "0". **[24]**

4. Syntaxe de bvp4c sur Matlab

Bvp4c est une routine sous MATLAB qui permet de résoudre des problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires. La syntaxe de cette méthode est:

sol = bvp4c(@odefun,@bcfun,solinit,options), avec les arguments suivants:

Odefun	Une fonction qui évalue la **BVP** sous la forme d'un système équivalent constitué d'équations différentielles de premier ordre. Il peut avoir la forme : $\boldsymbol{function\ dydx\ =\ odefun(x, y)}$, où "$x$" est un scalaire, et "$dydx$" et "$y$" sont des vecteurs colonnes.

Bcfun	Une fonction qui calcule le résidu dans les conditions aux limites. **bcfun** peut avoir la forme : $\boldsymbol{function\ res\ =\ bcfun(ya, yb)}$ où "ya" et "yb" sont des vecteurs colonnes correspondants à la solution numérique aux points $x\ =\ a$ et $x\ =\ b$, respectivement. ✓ Les premiers éléments $ya\ (1)$ & $yb\ (1)$ sont les valeurs de y à $x\ =\ a$ & $x\ =\ b$ ✓ Les éléments seconds $ya\ (2)$ & $yb\ (2)$ sont les valeurs de dy/dx en $x = a$ & $x = b$. ✓ L'argument de sortie res est un vecteur colonne constitué par les valeurs des résidus.
Solinit	Une structure contenant la proposition initiale d'une solution. **Solinit** peuvent être créés en utilisant la fonction **bvpinit** : $\boldsymbol{solinit\ =\ bvpinit(x, yinit)}$; où "$x$" est un vecteur représentant l'estimation des points du maillage initial que le procédé dans **BVP4c** devrait d'abord utiliser. ✓ Pour un **BVP** avec un domaine $[a, b]$, le premier élément de "x" est "a", et le dernier élément est "b". ✓ Le maillage initial peut être choisi en utilisant : $\boldsymbol{x = linspace(a, b, N)}$; *or* $\boldsymbol{x = [a: increment: b]}$; ✓ Le vecteur "$yinit$" est l'estimation initiale de la solution, il peut être constant ou en fonction de "x".
Sol	**Sol** est une structure contenant la solution. Il est renvoyé par la routine **BVP4c**. Il possède les champs suivants: "$\boldsymbol{sol.x}$" : Maillage sélectionné par **BVP4c**. Le nombre final de points de maillage est déterminé par le solveur **BVP4c** pendant le processus de solution. "$\boldsymbol{sol.y}$" : Champ de solution dans les points de maillage de "$\boldsymbol{sol.x}$" La structure de sol peut avoir n'importe quel nom. Il est plus commode d'utiliser des sous-fonctions afin de placer toutes les fonctions requises par **BVP4c** dans un seul fichier M-file.
Options	Le solveur cherche à contrôler l'erreur dans la solution à travers la valeur des résidus dans les conditions aux limites, à la fois pour chaque sous-intervalle et les limites du système. Des dispositions sont prises pour la spécification de l'erreur absolue dans les solutions et l'erreur relative autorisée à se propager entre itérations. $\boldsymbol{options\ =\ bvpset('RelTol', 10\text{^}(-6), 'Abstol', 10\text{^}(-6),\ 'Nmax', 5000, 'Stats', 'off', 'Vectorized', 'on')}$; Où, **l'erreur relative**, $RelTol = 10\text{^}\ (-6)$. **l'erreur absolue**, $Abstol = 10\text{^}(-6)$. Le nombre maximal de point de maillage autorisé, $Nmax = 5000$.