Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Option :Recherche Opérationnelle

par

Safi Chahira et Hadjadj Souria

Etude de la 2-indépendance dans les graphes

Soutenu publiquement le 17 Juin 2023 devant le jury composé de

H. Bibi	*M.C.B*	UYF Médéa	Président
A. Bendali Braham	*M.C.B*	UYF Médéa	Examinatrice
R. Lamdani	*M.C.B*	UYF Médéa	Examinateur
M. ZEMIR	*M.A.A*	UYF Médéa	Encadreur

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2022-2023

Dédicace

Je dédie ce travail à mon père pour avoir gagné sa vie honnêtement pour nous.

A tous mes frère et tous ma famille SAFI.

A tous famille de ma mère Aoufi.

A mes professeurs sans exception.

SAFI CHAHIRA

Dédicace

Je dédié ce modeste travaille a mes parents.

A tous mes frères et a ma grande famille HADJADJ.

A mes professeurs sans exception.

A tous ceux qui me connaissent de près ou de loin.

SOURIA HADJADJ

Résumé

Considérons le graphe $G = (V, E)$, un graphe simple avec n sommets et m arêtes, où $V(G)$ représente l'ensemble des sommets et $E(G)$ l'ensemble des arêtes. Un sous ensemble de sommets S de V est défini comme un ensemble 2-indépendant dans G lorsque le degré maximum du sous-graphe induit par S est au plus un. Un 2-indépendant S de G est dit maximal s'il n'existe aucun sommet v dans $V - S$ tel que $S \cup \{v\}$ soit également 2-indépendant. Le cardinal minimum (ou maximum) d'un 2-indépendant maximal de G est noté par $i_2(G)$
(où $\beta_2(G)$) où bien $\beta_2(G)$ est appelé le nombre de 2-indépendant. Dans notre modeste étude, nous allons déterminer les bornes inférieures et supérieures de i_2 et β_2 pour un type de graphe particulier appelé " chenille pleine ". De plus, nous allons déterminer la valeur exacte de β_2 et trouver une borne supérieure pour i_2 dans le cas des " chenilles alternées ".

Abstract

Let's consider the graph G=(V,E), a simple graph with n vertices and m edges, where V(G) represents the set of vertices and E(G) represents the set of edges. A subset of vertices S in V is qualified as 2-independent in G if the maximum degree of subgraph induced by S is less than or equal to one. A 2-independent set S in G is denoted by a maximal if there is no vertex v in V - S such that $S \cup \{v\}$ is also 2-independent. The minimum (or maximum) cardinality of a maximal 2-independent set in G denoted by $i_2(G)$ (or $\beta_2(G)$), where β_2 is referred to as the number of 2-independence. In our modlest study, we have determined the lower and upper bounds of i_2 and β_2 for a spicific graph structure called " full caterpillor ". Additionally, we have calculated the exact value of β_2 and found an upper bound for i_2 in the case of "alternating cuterpillars"

Remerciements

Nous souhaitons exprimer notre gratitude à **ALLAH** pour nous avoir accordé le courage et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail. Tout d'abord, nous tenous à remercier chaleureusement notre directeur de mémoire **Zemir Mohamed**, d'avoire accepté d'être le promoteur de ce sujet et de nous savoir prodigué de précieux conseils, orientation et encouragements qui ont grandement contribué à nos recherches.

Nous remercions vivement monsieur **Bibi Hamza**, maître de conférences à l'Université de Médea, pour l'intérêt porté à ce travail et pour avoir accepté de présider le jury d'examination.

Nos remerciements vont aussi à Mademoiselle **Bendali Braham Amel**, et Monsieur **Lamdani Rachid** maîtres de conférences à l'Université de Médea, pour avoir acceptés d'être membres de ce jury et vouloir examiner notre modeste travail de recherche.

Enfin, nous souhaitons également exprimer notre gratitude envers nos proches, notamment nos parents, pour leur soutien et leur encouragements, ainsi que tous ceux qui nous ont soutenus de prés ou de loin tout au long de ce travail.

Table des matières

Dédicace **i**

Dédicace **i**

Résumé **i**

Abstract **ii**

Remerciements **iii**

Introduction **1**

1 NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES **3**

1.1 Définitions et notations 3
1.1.1 Graphe 3
1.1.2 Voisinage et degré d'un sommet 4
1.1.3 Distance, excentricité, diamètre et rayon 5
1.2 Quelques graphes particuliers 5
1.2.1 Sous-graphe et sous-graphe induit 5
1.2.2 Graphe partiel 5
1.2.3 Graphe biparti et graphe biparti complet 6
1.3 Quelques graphes spécifiques 7
1.3.1 Chaîne et cycle 7
1.3.2 Graphe connexe 8
1.3.3 Graphe k-régulier 9
1.3.4 Arbre et forêt 9

1.3.5 Etoile 10
1.3.6 Double étoile 10
1.3.7 Graphe Complémentaire 11
1.4 Invariants de graphes 11
1.4.1 Isomorphisme 11
1.4.2 Stable 11
1.4.3 Clique 12
1.5 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum 12
1.6 Domination dans les graphes 12
1.6.1 Historique 12
1.6.2 Domination standard 13
1.6.3 Indépendance 13

2 Le nombre de k-indépendance dans certains graphe 14

2.1 Généralisation sur la k-indépendance 14
2.1.1 Propriété général de k-indépendant 15
2.2 Bornes sur β_k 15
2.3 Le nombre de k-indépendance des certains graphes particuliers 18

3 Etude de la 2-indépendance dans les graphes 21

3.1 Chenille 21
3.2 β_2 et i_2 pour une chenille pleine 22
3.3 β_2 et i_2 pour une chenille alternée 26

Conclusion et Perspectives 32

BIBLIOGRAPHY 33

Table des figures

1.1.1 Graphe G 4
1.2.1 Sous graphe de G induit par S = $\{a, b, c, e, f, g\}$ 6
1.2.2 Graphe partiel de G 6
1.2.3 (1) Graphe complet biparti, (2) Graphe biparti. 7
1.3.1 Le cycle C_5 et la chaîne P_4 7
1.3.2 D connexe, H non connexe avec deux composantes connexes. 8
1.3.3 Un graphe 4-régulier d'ordre 5 9
1.3.4 T Arbre, $T^{'}$ Forêt 10
1.3.5 Une étoile $K_{1,6}$ d'ordre 7. 10
1.3.6 L'étoile double $S_{3,2}$ 10
1.3.7 Un graphe G et son complémentaire $\bar{G}$ 11

2.2.1 $\beta_2(G) = 4 \geqslant \frac{6}{1+\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = 3$ 16
2.2.2 $\beta_2(G) = \lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ 16
2.3.1 $\beta(P_5) = 3$ et $\beta(C_7) = 3$ 19
2.3.2 $\beta_2(P_4) = 3$ et $\beta_2(C_8) = 5$ 20

3.1.1 Une chenille Ch avec C[Ch] =[3,0,2,0,4,0,0,0,1]. 22
3.2.1 Une chenille pleine 22
3.2.2 Un exemple de chenille de Cas 2 avec $\beta_2(ChP) = 9$ 25
3.2.3 La chenille avec $i_2(ChP) = 5 \leqslant \lfloor \frac{n+|s|}{2} \rfloor = 7$ 26
3.3.1 Une Chenille alternée. 26
3.3.2 La chenille ChA avec $\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + 2$ 28
3.3.3 La chenille alterne ChA avec $\beta_2(ChA) =\mid s \mid + \mid l \mid -1$ 30
3.3.4 La chenille ChA avec $\beta_2 = |s| + |l|$ 30

Introduction

La Théorie des graphes est une branche des mathématique discrètes, en forte croissance grâce à son rôle essentiel dans les sciences appliquées, incluant l'ingénierie et en particulier l'informatique, mais aussi la biologie, la génétique ou encore les sciences sociales. Généralement un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés sommets ou nœuds), reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches (appelées arêtes ou arcs). Chaque arête a pour extrémités deux points, éventuellement confondus. Le graphe est dit orienté si, pour chaque arête, on distingue une extrémité initiale et une extrémité terminale.

La notion de graphe a été introduite par l'anglais J.J.Sylvester en 1822, et ce n'est qu'en 1936 que parait le premier livre sur la théorie des graphes, écrit par D. Kônig. La théorie des graphes est apparue d'abord comme une curiosité mathématique avec le problème des ponts de Konigsberg, quand Euler (en 1736) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Konigsberg, une fois exactement et de revenir au point de départ. Elle est devenue une branche mathématique au début du XX^{eme} siècle, grâce aux travaux de Konig, de Kuratowski de Caylay et plus récemment, de Berge, d'Erdos et de Harary.

Un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes est la domination qui a été étudiée intensivement ces trois dernières décennies. Elle a commencé semble-t-il au 16^{eme} siécle en Inde *[12]* comme un problème de jeux d'échec. Le principe consiste à couvrir (dominer) l'ensemble des cases d'un échiquier par un nombre minimum de reines, c'est à dire que chaque place est occupée soit par une reine, soit en un seul mouvement de celle-ci Parmi les problèmes les plus importants et très étudié en théorie des graphes sont les problèmes de l'indépendance dans les graphes. Le problème original de l'indépendance consiste à trouver un ensemble de taille maximum d'un graphe. Etant donné un graphe $G = (V; E)$, un sous-ensemble $S \subseteq V$ est appelé ensemble indépendant de G si pour chaque sommet $v \in V - S$, $S \cup \{v\}$ n'est pas indépendant.

Plus d'un siècle plus tard, en 1984, Fink et Jacobson *[15],[16]* a été le premier à publier sur l'indépendance dans les graphes(ont introduit la généralisation de l'indépendance) . En 1988, Odile Favaron *[13]* ont introduit d'autre résultat sur l'indépendance.

Les chapitres sur les quels s'articule notre travail sont au nombre de trois, en plus de l'introduction et de la conclusion. Le but du premier chapitre, est présenté les différentes définitions et notations fondamentales de la théorie des graphes, a fin de permettre une compréhension claire et approfondie de ce domaine. Nous aborderons ainsi les concept essentiels qui serviront de base pour la suite de notre étude. Et dans le deuxième chapitre sera dédié aux travaux de certaine chercheurs sur la k-indépendance dans des graphes particuliers. Nous examinerons les résultats obtenus pour comprendre comment la k-indépendant est étudiée dans ces contextes spécifiques. Troisième chapitre par introduire les bornes inférieures et supérieures de β_2 et i_2 pour les chenilles pleine. Nous poursuivrons ensuite en déterminant la valeur exacte de β_2 et on propose une borne supérieure pour i_2 dans le cas des chenille alternées.

Et en fin, nous donnons une conclusion sur le travail réalisé et quelques perspectives.

Chapitre 1

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

Le présent chapitre a pour objectif de présenter les différentes définitions et notations fondamentales de la théorie des graphes, a fin de permettre une compréhension claire et approfondie de ce domine. Nous aborderons ainsi les concept essentiels qui serviront de base pour la suite de notre étude.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe

Un **graphe non orienté** et **fini** G est un couple (V, E), où V est un ensemble d'éléments fini dénombrable et E est un sous-ensemble de paires de **sommets** de V, E $\subseteq \{uv, u, v \in V\}$. Un élément $v \in V$ present un **sommet**, et un élément $e = uv \in E$ est dit **arête**. L'entier $n = |V|$ (resp. $m = |E|$) représente l'**ordre** (resp. **taille**) de G. Si n = 1, on dit que G est **trivial**. Deux sommets u,v dans V sont dit **adjacents** ou **voisins** si l'arête $uv \in$ E. Dans ce cas, u et v représentent les extrémités de l'arête e, et e est dite **incidente** aux sommets u et v. Deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune.

Exemple 1.1.1 *La FIGURE 1.1.1 représente un graphe $G = (V, E)$. G est un graphe simple non orienté, avec un ensemble de sommets $V =$ { a, b, c, d, e, f, g } et un ensemble d'arêtes $E =$ { ab, bc, cd, bg, bf, ce, fe }. L'ordre de G est = $|$ V $|$ = 7 et sa taille est m = $|$ E$|$ = 7. Les sommets e*

et f sont adjacentes. Les arêtes bc et cd sont adjacentes. l'arête bf est incidente aux deux sommets b et f.

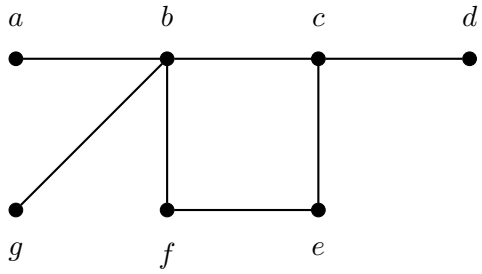


FIGURE 1.1.1 : Graphe G

1.1.2 Voisinage et degré d'un sommet

Pour un ensemble S $\subseteq V$ • **le voisinage ouvert** d'un sommet v, noté $N_G(v)$, est l'ensemble des sommets adjacents à v dans G, et défini par l'ensemble suivant : $N_G(v) = \{w \in V : w \in E\}$.
• **Le voisinage fermé** d'un sommet v est défini comme suit : $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
Pour un sous ensemble $S' \subseteq V$, • **le voisinage ouvert** est $N_G(S') = \bigcup_{v \in S'} N(v)$
• **le voisinage fermé** $N_G[S'] = \bigcup_{v \in S'} N(v) \bigcup S'$. • Le **degré** d'un sommet v dans G, noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes de G incidentes à v.
• Un sommet **isolé** est un sommet de degré nul.
• Un sommet de degré un est appelé sommet **pendant**.
• Le seul sommet **adjacent** à un sommet pendant est appelé **support**.
• Un sommet **universel** est un sommet de degré n - 1, ce sommet est adjacent à tous les autres sommets du graphe.
• Le **degré maximum** d'un graphe G, noté Δ(G), définie par

$$\Delta(G) = \max \{d_G(v) : v \in V\}.$$

• Le **degré minimum** d'un graphe G, noté δ(G), définie par

$$\delta(\mathrm{G}) = \min \{d_G(v) : v \in V\}.$$

• **La séquence de degrés** d'un graphe G, notée ($deg_G(v_1)$, $deg_G(v_2)$,..., $deg_G(v_n)$), est la séquence des degrés de tous ses sommets, généralement écrite dans un ordre décroissant ou croissant.

Exemple 1.1.2 *Dans le graphe G de la FIGURE 1.1.1, nous avons :*

- *Le voisinage ouvert du sommet c dans G est* $N_G(c) = \{b, e, d\}$.
- *Le voisinage fermé du sommet c dans G est* $N_G = \{b, c, f\} \cup \{c\} = \{b, d, e, c\}$.
- *Si S =*$\{a, e\}$ *alors* $N_G(G) = N_G(a) \cup N_G(e) = \{b\} \cup$
$\{c, f\} = \{b, c, f\}$.
- *Les sommets pendants* $\{d, a, g\}$.
- *Les sommets supports* $\{b, c\}$.
- $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 1$

1.1.3 Distance, excentricité, diamètre et rayon

La **distance** entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d_G(u, v)$ (ou simplement $d(u, v)$), est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.

L'excentricité d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est e(v) = max $\{d(v, w), w \in V\}$.

Le **diamètre** de G, noté diam(G), diam(G)= max $\{e(v), v \in V\}$ le **rayon** de G, noté rad(G), rad(G) = min $\{e(v), v \in V\}$.

Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé **centre**. Pour le graphe G illustré dans la FIGURE 1.1.1, d(a,c) = 2, diam(G) = 3 et rad(G) = 2.

1.2 Quelques graphes particuliers

1.2.1 Sous-graphe et sous-graphe induit

Soient G et H deux graphes. Si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(V)$, alors H est appelé sous graphe de G et on écrit $H \subseteq G$. Si de plus, H $\neq$ G, alors H est appelé un **sous-graphe propre** de G et on écrit H $\subset$ G. Pour un ensemble S $\subseteq$ V (G), le sous-graphe de G **induit** par S, noté $\langle$S$\rangle$, est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S.

Exemple 1 *Pour le graphe G un présenter la FIGURE 1.1.1, le sous-graphe induit par* $S = \{a, b, c, e, f, g\}$ *un présenter la FIGURE 1.2.1.*

1.2.2 Graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle graphe partiel de G tout graphe $G' = (V, E')$ tel que $E' \subseteq E$. Un sous-graphe d'un graphe partiel de G est appelé sous-graphe partiel de G.

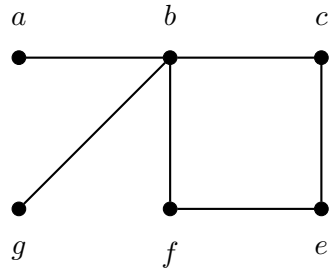


FIGURE 1.2.1 : Sous graphe de G induit par S = $\{a, b, c, e, f, g\}$

Exemple 2 *Pour le graphe G un présenter la FIGURE 1.1.1, le graph partiel un présenter la FIGURE 1.2.2 :*

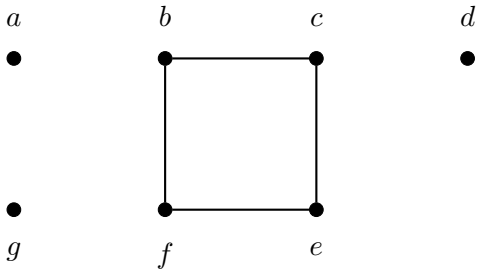
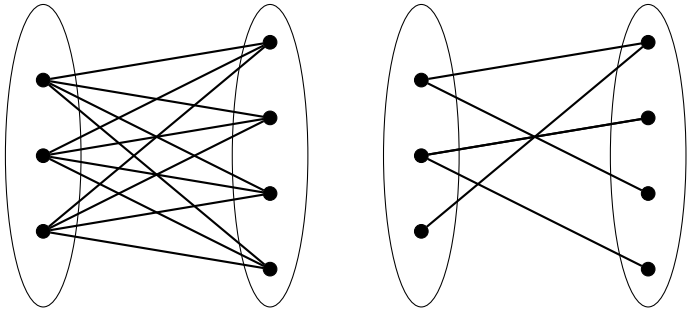


FIGURE 1.2.2 : Graphe partiel de G

1.2.3 Graphe biparti et graphe biparti complet

Un graphe est dit **biparti** s'il est possible de partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes $\langle V_1 \rangle$ et $\langle V_2 \rangle$ ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si, il ne contient pas de cycle de longueur impaire.
Il est dit **biparti complet** et est noté par $K_{p,q}$, si $|V_1| = p$, $|V_2| = q$, et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2.



(1) (2)

FIGURE 1.2.3 : (1) Graphe complet biparti, (2) Graphe biparti.

1.3 Quelques graphes spécifiques

1.3.1 Chaîne et cycle

Une **chaîne** C dans un graphe G = (V, E) est une séquence finie de sommets $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier k - 1 représente la **longueur** de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont les **extrémités** de la chaîne C.

Une chaîne est dite **élémentaire** (resp. simple) si tous ses sommets (resp. arêtes) sont distincts. Une **corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne.
Une chaîne **minimale** induite par n sommets, notée par P_n. est une chaîne élémentaire sans corde.

Un **cycle** C_n est une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

Exemple 1.3.1 *Le cycle C_5 et la chaîne P_4 sont représentés par la FIGURE 1.3.1.*

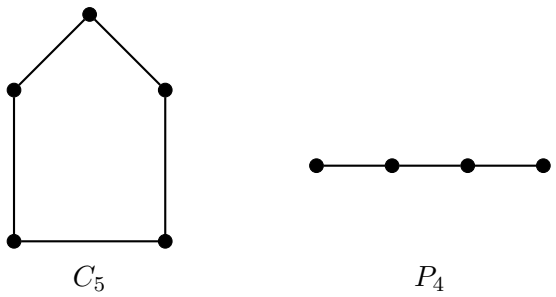


FIGURE 1.3.1 : Le cycle C_5 et la chaîne P_4

1.3.2 Graphe connexe

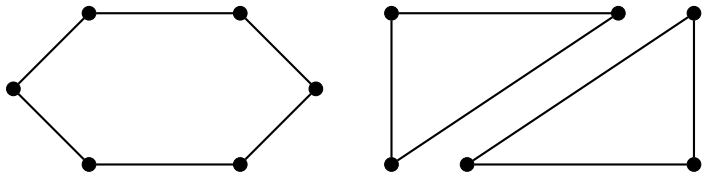
Le graphe $G = (V, E)$ est dit **connexe** si pour toute paire de ses sommets (x, y) de V il exite une chaîne reliant x à y. **Une composante connexe** d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

Une arête $e \in E$ est dit **isthme** (arête d'articulation du graphe G) si le graphe $G' = (V, E - \{e\})$ possède plus de composantes connexes que G i.e si G est connexe alors $G - \{e\}$ n'est pas connexe.

Un sommet $v \in V$ est dit sommet **d'articulation** si le graphe $G' = (V - \{v\}, E)$ a plus de composantes connexes que G i.e. si G est connexe alors $G - \{v\}$ n'est pas connexe.

Un graphe ne possédant qu'une seule composante connexe est simplement un graphe connexe. Un sommet isolé (de degré : $d(x) = 0$) constitue toujours une composante connexe à lui seule.

Exemple 1.3.2 *Le graphe D est connexe puisqu'il contient une seule composante connexe, et le graphe H est non connexe car il contient deux composantes connexes, dans la FIGURE 1.3.2.*



(D) (H)

FIGURE 1.3.2 : D connexe, H non connexe avec deux composantes connexes.

1.3.3 Graphe k-régulier

Un graphe G est dit **régulier** si tous ses sommets ont le même degré. De plus, G est dit k-régulier si d_G(v) = k pour tout sommet v de G. Ainsi, un graphe complet K_n est un graphe (n - 1)-régulier, et sont des graphes sans arête. les cycles sans cordes C_n sont des graphes 2-réguliers. les graphes 3-réguliers sont dits cubiques.

Exemple 1.3.3 *Un graphe 4-régulier d'ordre 5 est représenté dans la FIGURE 1.3.3.*

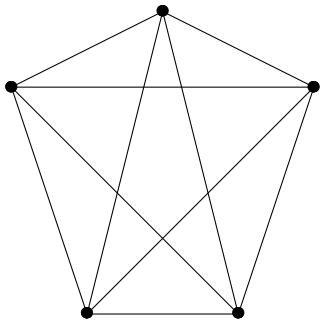


FIGURE 1.3.3 : Un graphe 4-régulier d'ordre 5

1.3.4 Arbre et forêt

Un **arbre** T est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de T de degré un sont appelés sommets pendants (ou feuilles), et les sommets adjacents aux feuilles sont appelés supports.
Une **forêt** est un graphe non-connexe où chaque composante connexe est un arbre.(Voir la FIGURE 1.3.4).

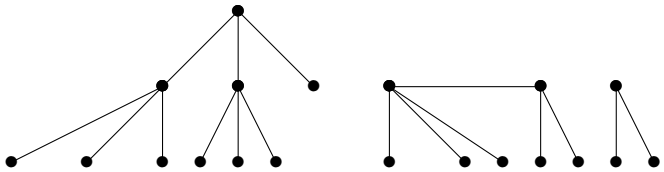


FIGURE 1.3.4 : T Arbre, T' Forêt

1.3.5 Etoile

Une **étoile** notée $K_{1.q}$, est un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| =$ q. Le sommet de V_1 est appelé **centre**.

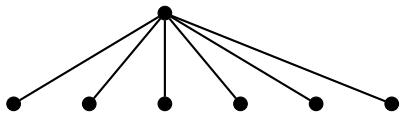


FIGURE 1.3.5 : Une étoile $K_{1,6}$ d'ordre 7.

1.3.6 Double étoile

Un double étoile notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendant de l'étoile S_p au sommet non pendant de l'étoile S_q

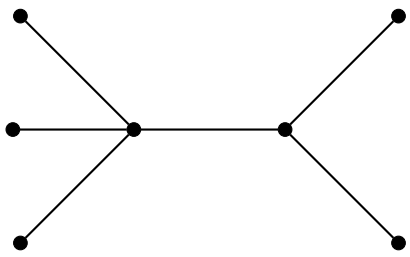


FIGURE 1.3.6 : L'étoile double $S_{3,2}$

1.3.7 Graphe Complémentaire

Etant donné un graphe G d'ordre n, **le complémentaire** de G, noté $\bar{G}$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est celui de G et talque deux sommets distincts de soient adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G et ou bien $V(G) = V(\bar{G})$ et $E(\bar{G}) = \{uv : u, v \in V(G)$ et $uv \notin E(G)\}$.

La somme d'un graphe et son complémentaire est le graphe complet (K_n).

Remarque 1.3.1 *Le complémentaire du graphe $\bar{G}$ est le graphe G.*

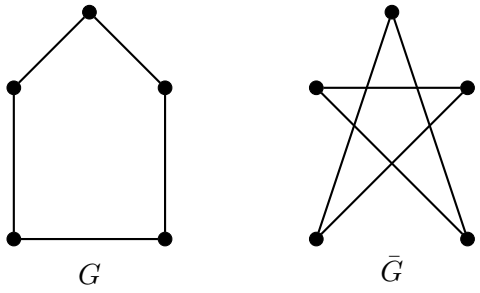


FIGURE 1.3.7 : Un graphe G et son complémentaire $\bar{G}$

1.4 Invariants de graphes

1.4.1 Isomorphisme

Soient G = (V, E) et $G^{'}$ = ($V^{'}$, $E^{'}$) deux graphes. On dit que G et $G^{'}$ sont **isomorphes** et on écrit G $\simeq G^{'}$, s'il existe une bijection φ : V $\longrightarrow V^{'}$ telle que pour tout x, y $\in$ V , xy $\in$ E si et seulement si $\varphi(x)\varphi(y) \in E^{'}$. Une telle application φ est appelée isomorphisme.

1.4.2 Stable

On appelle **stable**(indépendant) d'un graphe $G = (V, E)$ une sous ensemble de sommets de V deux a deux non adjacents. Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximal. La cardinalité d'un stable maximum est appelleé le nombre de stabilité, et est notée par $\alpha(G)$.

1.4.3 Clique

Une **clique** de G est un ensemble de sommets adjacents deux-à-deux. La taille d'une clique est égale au nombre de ses sommets. Une clique de G est maximum si elle est de taille maximale dans G. La cardinalité d'une clique maximum est appelée nombre de clique, et notée $\omega(G)$.

Une clique est un sous graphe complet quelconques d'un graphe G. Une clique de p sommets est notée K_p.

1.5 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

Un sous ensemble S de V est dit **minimal** par rapport à une propriété ρ s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subset S$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété ρ. Un sous ensemble S de V est dit **maximal** par rapport à une propriété ρ s'il n'existe pas un sous ensemble S' tel que $S \subset S'$ et le sous graphe induit par S' vérifie la propriété ρ.

Un sous ensemble S de V est dit **minimum** ou de **taille minimale** par rapport à une propriété ρ s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété ρ et $|S'| < |S|$. Un sous ensemble S de V est dit **maximum** ou de **taille maximale** par rapport à une propriété ρ s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété ρ et $|S'| > |S|$.

1.6 Domination dans les graphes

1.6.1 Historique

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants a commencé dans les années soixante, le sujet trouve son origine en 1862 dans les jeux d'échecs quand De Jaenisch *[12]* étudia le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur un échiquier n × n de sorte que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles, tout en sachant que les règles du jeu des échecs permet à une reine de se déplacer à travers les cases horizontalement, verticalement ou diagonalement. Pour un échiquier 8 × 8, cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier. Dans ce cas, le problème est appelé (le problème des cinq reines) qui est à l'origine de l'étude mathématique de la domination.

En 1892, Ball *[1]* a traité la question de De Jaenish en considérant d'autres conditions supplémentaires.

En 1964, les frères Yaglom *[21]* étudièrent les problèmes posés par De Jaenish et Ball. L'appellation (coeficient de stabilité externe) fut introduisé par Berge *[2]* pour définir le nombre de domination et en 1962, Ore *[20]* fut le premier à employer les termes (ensemble dominant) et (nombre de domination)qu'il nota d(G).

L'étude moderne de la domination a débuté après l'apparition de l'article de Cockayne et Hedetniemi *[11]* en 1977. Les auteurs de *[11]* ont été les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination.

1.6.2 Domination standard

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ est **un dominant** de G si tout sommet de V - S est adjacent à au moins un sommet de S, c'est-à-dire si N[S] = V. Le **nombre de domination** $\gamma(G)$ et le **nombre de domination supérieur** $\Gamma(G)$ de G sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un ensemble dominant minimal sur G. Un ensemble dominant minimal de G de cardinal minimum est appelé γ-**ensemble**, et un ensemble dominant minimal de G de cardinal maximum est appelé Γ-**ensemble**.

1.6.3 Indépendance

Un ensemble S de sommets est dit **stable** (ou indépendant) si les sommets de S sont non adjacents deux à deux. **Le nombre de domination stable** $i(G)$ et **le nombre de stabilité** $\beta_0(G)$ sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un stable maximal dans G. Comme tout stable maximal est un ensemble dominant minimal *[3]*, on a :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G)$$

Chapitre 2

Le nombre de k-indépendance dans certains graphe

Le deuxième chapitre sera dédié aux travaux de certains chercheurs sur la k-indépendance dans des graphes particuliers nous examinerons de prés les résultats obtenus pour comprendre comment la k-indépendant est étudiée dans ces contextes spécifiques.

2.1 Généralisation sur la k-indépendance

En 1984, losr d'un conférence à kalamazoo (USA), FinK et Jacobson ont introduit la généralisation de l'indépendance des graphe. Les articles publiés *[15]*, *[16]* dans les actes de la conférence contiennent la définition de ce nouveau paramètre, quelques propriétés et deux conjectures.

Définition 2.1.1 *Soit un graphe G et k un entier positive ($k \geq 1$). Un sous ensemble S de V (G) est un k-indépendant si le sous-graphe induit par les sommets de S est de degré maximum au plus k - 1, ou encore $\Delta(G[S]) \leq k - 1$.*
Un ensemble k-indépendant S de G est maximal si pour tout sommet v dans V - S, $S \cup \{v\}$ n'est pas k-indépendants.

Définition 2.1.2 *Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble k-indépendant de G est appelée le nombre de k-indépendant est noté par $\beta_k(G)$(resp. i_k (G)). Un ensemble k-indépendant de G de cardinal maximum est noté $\beta_k(G)$-ensemble.*

Théorème 2.1.1 [10] *Soit S un ensemble k-indépendant d'un graphe G. Alors S est maximal si et seulement si pour chaque sommet $v \in V - S$ satisfait une condition suivante :*

- *v est adjacent à au moins k sommets en S. Ou*
- *v est adjacent à un sommet $u \in S$ qui à exactement $k-1$ voisin en S.*

2.1.1 Propriété général de k-indépendant

1. Tout sous-ensemble d'un k-indépendant est k-indépendant.
2. Tout ensemble de k sommets est k-indépendant d'où $i_k(G)$ pour tout graphe G.
3. Tout ensemble k-indépendant est $(K+1)$-indépendant et donc $\beta_k(G) \leq \beta_{k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier $K \geq 1$. De plus V est le seul $(\Delta+1)$-indépendant maximal. mais n'est pas un Δ-indépendant. On en déduit que pour tout graphe G, $i_{\Delta+1}(G) = n$ et

$$\beta(G) = \beta_1(G) \leq \beta_2(G) \leq ....\beta_\Delta(G) < \beta_{\Delta+1}(G) = n.$$

Pour $K = 1$ on retrouve les définitions de l'indépendance usuelle. Donc pour tout graphe G, $i_1(G) = i(G), \beta_1(G) = \beta(G)$. Par définition $i_k(G) \leq \beta_k(G)$ pour tout graphe G

2.2 Bornes sur β_k

En général, la détermination de la valeur exacte de nombre de k-indépendant est un problème $NP - complete$ *[17]* pour un graphe quelconque. Pour cela, les chercheurs ont essayé l'encadre ce paramètre par des bornes . Le premier minorant obtenu par Favaron *[11]* est donné par le Théorème suivant :

Théorème 2.2.1 [13] *Si G est un graphe d'ordre n sans sommet isolé, deg(v) la séquence de degrés d'un graphe G, alors pour tout entier $k \geq 1$*

$$\beta_k(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{n}{1+k \times deg(v)}$$

Dans [14]*, Favaron et al ont présenté une borne supérieure de $\beta_k(G)$.*

Théorème 2.2.2 [14] *Pour tout graphe G et tout entier $k \leq \delta$*

$$\beta_k(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta+\delta-K+1}$$

Proposition 2.2.1 [7] *Si G est un graphe de n sommets, m arêtes et k un entier positif avec $k \leq \delta$, alors $\beta_k(G) = \frac{\Delta n}{\Delta+\delta-K+1}$ si et seulement si $V = X \cup Y$, où $|X| = \frac{\Delta n}{\Delta+\delta-K+1}$, G[X] est*

(k - 1)-régulier, chaque sommets de X a exactement $\delta - k + 1$ voisins dans Y et chaque sommet de Y a Δ voisins dans X.

Dans [19]*, G. Hopkins et W. Staton ont présenté une borne inférieures pour $\beta_k(G)$.*

Corollaire 2.2.1 [19] *Pour tout graphe G d'ordre n, et Δ degré maximum et $K \geq 1$ un entier*

$$\beta_k(G) \geq \frac{n}{1+\lfloor \frac{\Delta}{k} \rfloor}$$

Exemple 3 *pour un graphe G on a $\Delta(G) = 3$ si $k = 2$*

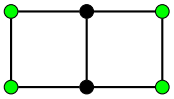


FIGURE 2.2.1 : $\beta_2(G) = 4 \geqslant \frac{6}{1+\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = 3$

Les auteurs de [8] *ont donné les résultat suivant :*

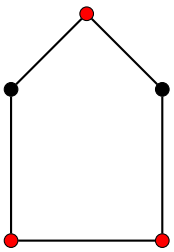
Corollaire 2.2.2 [8] *Pour tout graphe G d'ordre n et degré maximum. $\Delta(G) \geq 1$*

$$\beta_\Delta(G) \geq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil.$$

Théorème 2.2.3 [8] *Pour tout graphe G d'ordre n et Δ degré maximum, $\Delta(G) \geq 1$*

$$\beta_\Delta(G) = \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \ .$$

si et seulement si $G \in \{ p_2, p_3, C_3, C_4, C_5, C_7 \}$.



C_5

FIGURE 2.2.2 : $\beta_2(G) = \lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$

Théorème 2.2.4 [18] *Si G est un graphe d'ordre n, de taille $m \neq 0$, de degré maximum Δ, de degré minimum δ et k un entier positif avec $k \leq \delta$, alors :*

$$\beta_k(G) \leq \frac{m}{\delta - k + 1}$$

Proposition 2.2.2 [7] *Soit G un graphe de taille $m \neq 0$, de degré minimum δ et k un entier positif avec $k \leq \delta$, alors $\beta_k(G) = \frac{m}{\delta - k + 1}$ si et seulement si $k = 1$ et G est biparti δ-semi-régulier.*

Théorème 2.2.5 [18] *Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré maximum Δ et soit k un entier positif avec $K \leq \Delta$. Alors :*

$$\beta_k(G) \leq \frac{2\Delta n - 2m}{2\Delta - k + 1}$$

Proposition 2.2.3 [7] *Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré maximum Δ, et soit k un entier positif avec $k \leq \Delta$. Alors $\beta_k(G) = \frac{2\Delta n - 2m}{2\Delta - k + 1}$ si et seulement si $V = X \cup Y$, où $|X| = \frac{2\Delta n - m}{2\Delta - k + 1}$, D[X] est (k - 1)-régulier, chaque sommet de Y a Δ voisins dans X et G est régulier.*

Théorème 2.2.6 [7] *Soit G un graphe connexe de degré maximum Δ, de degré minimum δ et k un entier positif avec $k \leq \Delta$. Alors :*

$$\beta_k(G) \leq n - \delta + k - 1$$

avec égalité si et seulement si $V = X \cup Y, |X| = n - \delta + k - 1, G[X]$ est (K - 1)-régulier, tout sommet de X est adjacent à tout sommet de Y et $k \leq \delta$.

Blidia, Bouchou et Volkmann *[4]* ont prouvé un résultat de type Nordhaus-Gaddum pour $\beta_k(G)$.

Théorème 2.2.7 [4] *Soit G un graphe d'ordre n et $k \leq min$ { Δ (G),$\Delta(\bar{G})$ }, donc*

$$\beta_k(G) + \beta_k(\bar{G}) \leq n + 2k - 1$$

et

$$\beta_k(G) \times \beta_k(\bar{G}) \leq (n + 2k - 1)^2/4.$$

Donc [5]*, on donné d'autre résultat sur le nombre de k_ indépendance β_k(G).*

Théorème 2.2.8 [5] *Pour tout graphe G et touts entiers j, k avec $1 \leq j \leq k$*

$$\beta_{k+1}(G) \leq \beta_j(G) + \beta_{k-j+1}\ (G)\ .$$

Corollaire 2.2.3 [5] *Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$*

1. $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_k(G) + \beta(G)$.
2. $\beta_{k+1}(G) \leq 2\beta_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}(G)$.
3. $\beta_{k+1}(G) \leq (k+1)\beta(G)$.

Théorème 2.2.9 [5] *Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$,*

$$\beta_k(G) \leq k\beta(G).$$

Maintenant, nous accordons une condition nécessaire à l'égalité

$$\beta_k(G) = \lceil \frac{k}{j} \rceil \beta_j(G).$$

Si j=k-1.

D'autres résultats dans [8] *sont donnés par Bouchou et Blidia.*

Théorème 2.2.10 [8] *Soit un graphe G d'ordre n et Δ degré maximum et j, k un entier, $1 \leq j \leq k \leq \Delta(G) + 1$,*

$$\beta_k(G) \leq \lceil \frac{k}{j} \rceil \beta_j(G).$$

Théorème 2.2.11 [8] *Pour tout graphe G d'ordre n et un entier $k \geq 2$,*

$$\beta_k(G) \leq 2\beta_{k-1}(G) .$$

Théorème 2.2.12 [13] *Si G est sans $K_{1,3}$ et $K \leq \Delta$, alors*

$$\beta_k < \beta_{2k+1}$$

2.3 Le nombre de k-indépendance des certains graphes particuliers

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats exactes de

β_k pour certains graphes particuliers.

Les résultats suivants etablissent la conjecteure de Fink et Jacobson *[15],[16]* ;

Observation 2.3.1 [15][16] *Soit P_n une chaîne . Alors*

$$\beta(P_n) < \beta_2(P_n) < \beta_3(P_n) = n$$

Observation 2.3.2 [15][16] *Soit un cycle C_n différent de C_4. Alors*

$$\beta(C_n) < \beta_2(C_n) < \beta_3(C_n) = n$$

Observation 2.3.3 [15][16] *Soit K_n une clique d'ordre n. Alors $\beta_k(G) = k$ pour $1 \leq k \leq n$.*

$$\beta(k_n) < \beta_2(K_n) < \beta_3(K_n) < .... < \beta_n(k_n) = n$$

Observation 2.3.4 [15][16] *Pour les chaînes P_n et les cycles C_n*

$$\beta(P_n) = \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \text{ et } \beta(C_n) = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor$$

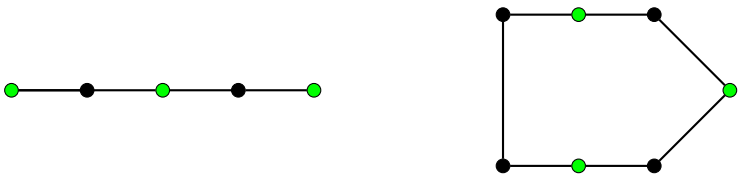


FIGURE 2.3.1 : $\beta(P_5) = 3$ et $\beta(C_7) = 3$

Lemme 2.3.1 [9] *Soit $n \equiv r(mod3)$, ou $r \in \{0, 1, 2\}$. Alors*

1. $\beta_2(P_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + r$.
2. $\beta_2(C_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$. *Si $r = 2$ et* $\beta_2(C_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. *Si $r \neq 2$*

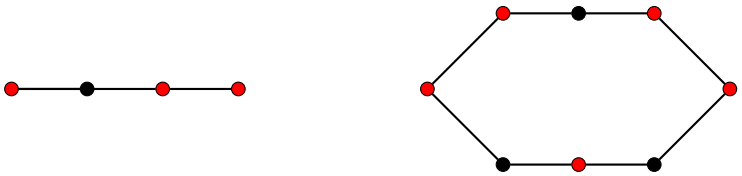


FIGURE 2.3.2 : $\beta_2(P_4) = 3$ et $\beta_2(C_8) = 5$

Chapitre 3

Etude de la 2-indépendance dans les graphes

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les bornes inférieurs et supérieures de β_2 et i_2 pour les chenilles planes. Nous suivrons ensuite en déterminant la valeur exacte de β_2 et en proposant une borne supérieure pour i_2 dans le cas des chenilles alternées.

3.1 Chenille

Définition 3.1.1 *Une **chenille** Ch est un arbre non trivial dont la suppression de ses sommets pendants donne une chaîne $P_s = v_1, v_2, \ldots, v_s$ appelée le squelette de la chenille tel que chaque sommet de Ch est ou bien sur la chaîne ou bien adjacent à un sommet de la chaîne P_s.*

Le graphe d'une chenille est constitué de sommets supports, de sommets troncs formant la chaîne P_n, ainsi que, les sommets pendants, appelés aussi, feuilles. Si s est l'ensemble des sommets support, pour $v \in s$, on note par :

•L_v : L'ensemble des sommets pendant, adjacents au sommet support v dans Ch.

•$s_f = \{ v \in s : |l_v| = 1 \}$ L'ensemble des sommets supports faibles de Ch.

Le code d'une chenille Ch est C[Ch] = [k_1,k_2,....,k_n] ou k_n est le nombre de sommets pendants adjacents au sommet support v_i,$k_n \neq 0$.

Exemple 3.1.1 *Dans l'exemple de la FIGURE 3.1.1, on a une chenille Ch avec C[Ch] = [3,0,2,0,4,0,0,0,1].*

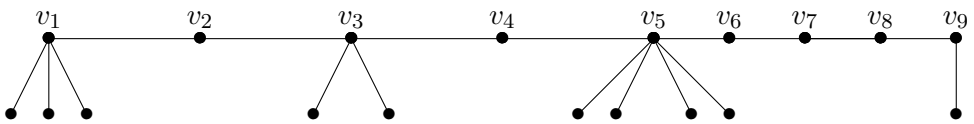


FIGURE 3.1.1 : Une chenille Ch avec C[Ch] =[3,0,2,0,4,0,0,0,1].

3.2 β_2 et i_2 pour une chenille pleine

Définition 3.2.1 *Une chenille ChP de code C[ChP] = [$k_1, k_2, ..., k_n$],est dite* ***chenille pleine*** *si $k_i \geq 1$ pour tout i tel que 1≤ i ≤n.*

Exemple 3.2.1 *Dans l'exemple de la FIGURE 3.2.1, on a une chenille pleine ChP avec C[ChP]=[1,2,2,4,1,1,2].*

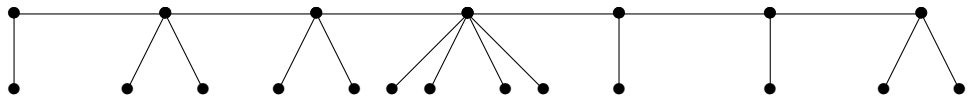


FIGURE 3.2.1 : Une chenille pleine

Observation 3.2.1 *Soit ChP une chenille pleine obtenue d'une chenille $ChP^{'}$ pleine non triviale, et une étoile $K_{1,p}$ avec le sommet central v attachée par une arête vw (w l'un des supports extrêmes de $ChP^{'}$), S est une $\beta_2(ChP)$. Alors*

- *Si p=1, alors* $\beta_2(ChP) = \begin{cases} \beta_2(ChP') + 1 & si \quad w \in S \\ \beta_2(ChP') + 2 & si \quad w \notin S \end{cases}$
- *Si $p \geq 2$, alors $\beta_2(ChP) = \beta_2 ChP^{'} + p$*

Preuve.

1- Soit $S^{'}$ un $\beta_2(ChP^{'})$-ensemble quelconque. chaque $\beta_2(ChP)$-ensemble peut être étendue à un ensemble 2-indépendant de ChP en ajoutant v ou $\{v, v^{'}\}$. Sans perte de généralité.

Si w ∈ S, alors v ∉ S. D'où $\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP^{'}) + 1$.

Si w ∉ S, alors v ∈ S. D'où $\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP^{'}) + 2$.

2-Soit $S^{'}$ un $\beta_2(ChP^{'})$ ensemble quelconque. Alors c'est claire que $S^{'} \cup L_v$ est un ensemble 2-indépendant de ChP, et donc $\beta_2(ChP) \geq \beta_2(ChP^{'}) + |L_v|$.

On considère parmi tous les $\beta_2(ChP)$-ensemble, soit S l'un qui contient un nombre maximum des feuilles. S'il existe une feuille $v^{'} \in L_v$ telle que $v^{'} \notin$ S, alors v $\in$ S (sinon S $\cup\{v^{'}\}$ est un ensemble 2-indépendant supérieure à S). Mais $\{v^{'}\}\cup$ S -$\{v\}$ est un ensemble 2-indépendant contenant plus de feuilles que S (contradiction), D'où $L_v \subset$ S et donc $S - L_v$ est un ensemble 2-indépendant de $ChP^{'}$.

Il en résulte que $\beta_2(ChP) - |L_v| \leq \beta_2(ChP^{'})$ et l'égalité est vérifie. ■

Théorème 3.2.1 *Soit ChP une chenille pleine d'ordre n avec l sommets pendants et s_f sommet supports faibles. Alors*

$$| \, l \, | + \lceil \tfrac{|s_f|}{2} \rceil \leq \beta_2(ChP) \leq | \, l \, | + | \, s_f \, |.$$

Preuve. 1-Pour montrer que $\beta_2(ChP) \geq | \ l \ | + \lceil \frac{|s_f|}{2} \rceil$. On procède par induction sur l'ordre de ChP. Si $diam(ChP) \in \{1, 2\}$, alors le résultat est vérifie, si $diam(ChP) = 3$, alors ChP est une double étoile $S_{p,q}$, où $\beta_2(ChP) = p + q$ si min $\{p, q\} \geq 2$ et $\beta_2(ChP) = 2 + max\{p, q\}$. Si $p = 1$ où $q = 1$ Le résultat est encore vérifié.

Supposons pour que chaque chenille $ChP^{'}$ non trivial d'ordre $n^{'}$ avec $n^{'} > n$, on a
$\beta_2(ChP^{'}) \geq | \, l^{'} \, | + \lceil \frac{|s_f^{'}|}{2} \rceil$.

Soit ChP une chenille d'ordre n, avec diam $diam(ChP) \geq 4$. Soit v l'un des sommets supports extrêmes de ChP, et w est l'avant dernier sommet support dans la chenille ChP.

Soit $ChP^{'} = ChP - \{|L_v| \bigcup \{v\}\}$. Alors $n^{'} = n - (|L_v| + 1)$ et $ChP^{'}$ non triviale. Nous considérons deux cas.

Cas 1 : Si $deg_{ChP}(v) \geq 3$. par l'observation 3.2.1, et puisque $|L_v| \geq 2$, alors
$\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP^{'}) + |L_v|$, avec $l^{'} = l - |L_v|$ et $|s_f^{'}| = |s_f|$.
En appliquant l'hypothèse d'indiction à $ChP^{'}$.
$\beta_2(ChP) - |L_v| = \beta_2(ChP^{'}) \geq l^{'} + \lceil \frac{|s_f^{'}|}{2} \rceil = |l| - |L_v| + \lceil \frac{|s_f|}{2} \rceil$.
Donc $\beta_2(ChP) \geq |l| + \lceil \frac{|s_f|}{2} \rceil$.
Cas 2 : Si $deg_{ChP}(v) = 2$ on a $|L_v| = 1$ et v est un support faible Nous considérons deux sous cas.

Cas 2.1 Si deg_{ChP}(w) ≥ 4, alors $|l^{'}| = |l| - |L_v|$ et $|s_f^{'}| = |s_f| - 1$.
D'après l'observation 3.2.1, $\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP^{'}) + 2$. En appliquant l'hypothèse d'indiction à $ChP^{'}$.
$\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP)^{'}) + 2 \geq |l^{'}| + \lceil \frac{|s_f^{'}|}{2} \rceil + 2$

$$= (l-1) + \lceil \tfrac{s_f-1}{2} \rceil + 2$$
$$= l + \lceil \tfrac{s_f-1}{2} \rceil + 1$$
$$= l + \lceil \tfrac{s_f+1}{2} \rceil$$
$$\geq l + \lceil \tfrac{s_f}{2} \rceil.$$

Cas 2.2 Si $deg_{ChP}(w) = 3$, alors $l^{'} = l - 1$. On distingue deux sous cas :

Cas 2.2.1 Si w $\notin$ S, alors v $\in$ S, dans ce cas là $|s_f^{'}| = |s_f| - 1$.

Et par même raisonnement que **Cas 2.1**, ou a encore : $\beta_2(ChP) \geq |l| + \lceil \frac{|s_f|}{2} \rceil$.

Cas 2.2.2 Si w $\in$ S, et sans perte de généralité v $\notin$ S, et on va perdre en considération le sommet v.

D'après l'observation 3.2.1 $\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP^{'}) + 1$.

$\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP^{'}) + 1 \geq |l^{'}| + \lceil \frac{|s_f|}{2} \rceil + 1$

$$= |l| - 1 + \lceil \tfrac{|s_f|}{2} \rceil + 1$$
$$= |l| + \lceil \tfrac{|s_f|}{2} \rceil.$$

2-Pour montrer que $\beta_2(ChP) \leq |l| + |s_f|$. On procède par induction de l'ordre de ChP, si $diam(ChP) = 3$, alors le résultat est vérifie.

Si $diam(ChP) = 3$, alors ChP est une double étoile $K_{p,q}$, c'est facile de vérifier que $\beta_2(ChP) \leq |l| + |s_f|$. Donc le résultat est vérifie.

Supposons que pour chaque chenille $ChP^{'}$ d'ordre $n^{'}$ avec $n^{'} < n$ avec $\beta_2(ChP^{'}) \leq |l^{'}| + |s_f^{'}|$

Soit ChP une chenille pleine d'ordre n, avec $diam(ChP) \geqslant 4$. Soit v l'un des sommets supports extrême de ChP, et w est l'avant dernier sommet support dans la chenille ChP pour ($diam(ChA) \geqslant 4$).

Soit($ChP^{'} = ChP - L_v \cup \{v\}$). Alors ($n^{'} = n - |L_v| + 1$) et $ChP^{'}$ est non trivial. Nous considérons deux cas :

Cas 1 Si $deg_{ChP}(v) = 2$, alors $|L_v| = 1$ et v est un sommet support faible de ChP. Nous considérons deux sous-cas :

Cas 1.1 Si deg_{ChP}(w) ≥ 4 alors $|\ l^{'}| = |l| - 1$ et $|s_f^{'}| = |s_f| - 1$.

D'après l'observation 3.2.1

$\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP^{'}) + 2 \leq |l^{'}| + |s_f^{'}| + 2 = |l| - 1 + |s_f| - 1 + 2$.

$$= |l| + |s_f| - 2 + 2$$

D'où $\beta_2(ChP) \leq |l| + |s_f|$.

Cas 1.2 Si de_{ChP}(w) = 3, alors $|l^{'}| = |l| - 1$ et $|s_f^{'}| = |s_f| - 1$. On distingue deux sous-cas :

Cas 1.2.1 Si w $\notin$ S, alors v $\in$ S. Et par même raisonnement que **Cas 1.1**, ou a encore : $\beta_2(ChP) \leq |l| + |s_f|$.

Cas 1.2.2 Si w $\in$ S, et sans perte de généralité v $\notin$ S. Et d'après l'observation 3.2.1, on a $\beta_2(ChP) = \beta_2(ChP^{'}) + 1 \leq |l^{'}| + |s_f^{'}| + 1 = |l| - 1 + |s_f| - 1 + 1.$

$$= |l| + |s_f| - 1.$$
$$\leq |l| + |s_f|.$$

D'où $\beta_2(ChP) \leq |l| + |s_f|$.

Cas 2 Si deg_{ChP} (v) ≥ 3, et on suppose que $|L_v| = p$, alors $|l^{'}| = |l| - p$ et $|s_f^{'}| = |s_f|$. Et d'après l'observation 3.2.1, on a en appliquant l'hypothèse d'indiction à $ChP^{'}$.

$\beta_2(ChP) - p = \beta_2(ChP^{'}) \leq |l^{'}| + |s_f^{'}| = |l| - p + |s_f|$.

D'où $\beta_2(ChP) \leq |l| + |s_f|$ ■

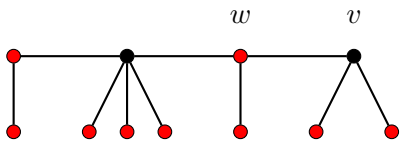


FIGURE 3.2.2 : Un exemple de chenille de Cas 2 avec $\beta_2(ChP) = 9$

Blidia et al. *[6]* ont détermine la borne supérieure de i_2 pour les graphes bipartis, on a aspiré la même idée pour détermine la borne supérieure de i_2 concernant les chenilles pleines .

Théorème 3.2.2 *Soit ChP une chenille pleine d'ordre n avec s sommets supports. Alors*

$$i_2(ChP) \leq \lfloor \frac{n+|s|}{2} \rfloor$$

Preuve.

Tout chenille est un graphe biparti. On peut vérifier facilement le résultat si $diam(ChP) \in \{1, 2\}$. Supposons donc que $diam(ChP) \geq 3$ et soit D un ensemble des feuilles définis comme suit pour chaque sommet support de ChP, nous mettons dans D exactement une de ses feuilles. Clairement $|D| = |s|$.

Soit A et B la bipartition du sous-graphe induit par les sommets de $V(ChP) - D$, avec $|A| \leq |B|$. Puisque $diam(ChP) \geq 3, |A| \neq 0, |B| \neq 0$ et $|B| \geq \lfloor \frac{n-|s|}{2} \rfloor \geq |A|$.

Chaque feuille de A est adjacente à un sommet support de B, et chaque sommet support de A est adjacente a un sommet de B et un sommet de D. Donc A ∪ D est un ensemble 2-indépendant maximal de ChP.

Par conséquent : $i_2(ChP) \leqslant |A \cup D| \leq \lfloor \frac{n-|s|}{2} \rfloor + |s| = \lfloor \frac{n+|s|}{2} \rfloor$. ■

Exemple 4 *Un exemple de chenille le sommet on rouge c'est le* $i_2(G)$

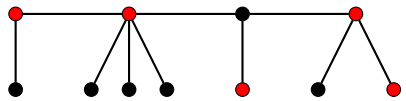


FIGURE 3.2.3 : La chenille avec $i_2(ChP) = 5 \leqslant \lfloor \frac{n+|s|}{2} \rfloor = 7$

3.3 β_2 et i_2 pour une chenille alternée

Définition 3.3.1 *Une chenille de code C[ChA]=[*$k_1, k_2, ..., k_n$*], est dite* ***chenille alternée*** *si et seulement si* $k_i \neq 0$ *pour* $i \equiv 1$ *[2] et* $k_i = 0$ *pour* $i \equiv 0$ *[2].*

Exemple 3.3.1 *Dans l'exemple de la FIGURE 3.3.1, on a une chenille alternée ChA avec C(ChA)=(1,0,2,0,1,0,2).*

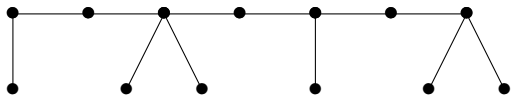


FIGURE 3.3.1 : Une Chenille alternée.

Observation 3.3.1 *Soit ChA une chenille alternée obtenue d'une chenille alternée* ChA' *no trivial, et une étoile* $k_{1,p}(p \geq 3)$ *de sommets central v attachée par une arête* wv' *où* v' *est l'une des sommets pendants et w est le dernier sommet support, avec* $|L_\omega| \geqslant 3$.
Alors $\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA') + p$.

Preuve. Même preuve que celle de l'observation 3.2.1 ■

Observation 3.3.2 *Soit ChA une chenille alternée obtenue d'une chenille alternée $ChA^{'}$ non trivial, et une étoile $k_{1,p}(p \geqslant 3)$ de sommet central υ attachée par une arête $\vartheta\omega$ où ϑ est l'une des feuilles de sommet v et w est le dernière sommet support de $ChA^{'}$, avec $|L_\omega| = 1$.*

$$Alors\ \beta_2(ChA) = \begin{cases} \beta_2(ChA^{'}) + p - 1 \quad si \quad w \quad \in S \\ \beta_2(ChA^{'}) + p \quad sinon \end{cases}$$

Preuve.

Soit S un $\beta_2(ChA)$-ensemble quelconque et soit $S^{'}$ un $\beta_2(ChA^{'})$-ensemble de $(ChA^{'})$.
Alors c'est clair que $S^{'} \cup L_\upsilon$ est un ensemble 2-indépendant de la chenille ChA (c'est le cas où $\omega \notin$ S), est donc $\beta_2(ChA) \geqslant \beta_2(ChA^{'}) + p$.

On considère parmi tout les $\beta_2(ChA)$-ensemble, soit S l'un qui contient un nombre maximum des sommets pendants. S'il exits un sommet pendant $\upsilon'' \in L_\upsilon(\upsilon'' \neq \upsilon^{'})$, tel que $\upsilon'' \notin S$, alors $\upsilon \in S, (sinonS \cup \{\upsilon''\}$ est un ensemble 2-indépendant supérieur à S). Mais $\upsilon'' \cup S - \{\upsilon\}$ est un ensemble 2-indépendant contenant plus des sommets pendants que S, une contradiction. Et sans perte de généralité $\upsilon' \in S$ (car $\omega \notin S$ et $\upsilon \notin S$). D'où $L_\upsilon \subset$ S et donc $S - L_\upsilon$ est un ensemble 2-indépendant de $ChA^{'}$.

Il en résulte que $\beta_2(ChA^{'}) \geqslant \beta_2(ChA) - p$, est l'égalité est vérifie.

Soit un $\beta_2(ChA^{'})$-ensemble quelconque et soit $S^{'}$ un $\beta_2(ChA^{'})$-ensemble de $ChA^{'}$.
Maintenant, on suppose que $\omega \in S$. Alors $S^{'} \cup (L_\upsilon - \{\upsilon\})$ est un ensemble 2-indépendant de ChA, et donc $\beta_2(ChA) \geqslant \beta_2(ChA^{'}) + p - 1$. Soit S un $\beta_2(ChA)$-ensemble qui contient un nombre maximum des feuilles parmi tout les $\beta_2(ChA)$-ensemble. S'il existe une feuilles $\upsilon'' \in L_\upsilon - \{\upsilon\}$ est un ensemble 2-indépendant de ChA, et donc $\beta_2(ChA^{'})$-ensembles. S'il existe une feuilles parmi tout les $\beta_2(ChA)$-ensemble. S'il existe une feuilles $\upsilon'' \in L_v(\upsilon'' \neq \upsilon')$, telle que $\upsilon'' \notin$ S et sans perte de généralité, alors $\upsilon \in S$.

Mais $\{\upsilon''\} \cup S - \{\upsilon\}$ est un ensemble 2-indépendant contenant plus des feuilles que S, une contradiction. Et sans perte de généralité $\upsilon' \notin S$. D'où $L_\upsilon - \{\upsilon'\} \subset S$ et donc S-$(L_\upsilon - \{\upsilon\})$ est un ensemble 2-indépendant de généralité $\upsilon \notin S$. D'où $L_\upsilon - \{\upsilon'\} \subset$ S et donc S-$(L_\upsilon - \{\upsilon'\})$ est un ensemble 2-indépendant de $ChA^{'}$. On obtient $\beta_2(ChA^{'}) \geqslant \beta_2(ChA) - p + 1$. et l'égalité est atteinte.

■

Observation 3.3.3 *Soit ChA une chenille alternée obtenue d'une chenille alternée $ChA^{'}$ non triviale et une chaine $P_3 = xyz$ en ajoutant une arête xw ou w est un dernier sommet support de $ChA^{'}$. Alors*

$$\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + 2$$

Preuve.

Soit $S^{'}$ est un $\beta_2(ChA^{'})$-ensemble, alors $S^{'} \cup \{y, z\}$ est un ensemble 2-indépendant de ChA donc $\beta_2(ChA) \geq \beta_2(ChA^{'} + 2)$.

Soit S est un $\beta_2(ChA)$-ensemble, c'est claire que $1 \leq |S \cap \{x, y, z\}| \leq 2$. Si $|S \cap \{x, y, z\}| = 1$ alors sans perte de généralité, z ∈ S mais S ∪$\{y\}$ est un ensemble 2-indépendant plus large de ChA, contradiction.

Donc $|S \cap \{x, y, z\}| = 2$. Aussi S ∩$V(ChA^{'})$ est un ensemble 2-indépendant de $ChA^{'}$. Ce implique que $\beta_2(ChA^{'}) \geq \beta_2(ChA) - 2$.

Par conséquent $\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + 2$. ■

Exemple 5

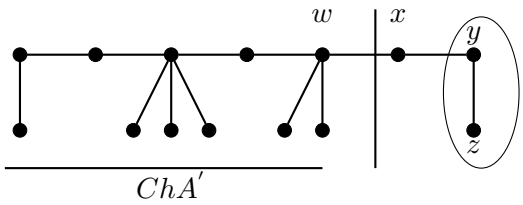


FIGURE 3.3.2 : La chenille ChA avec $\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + 2$

Théorème 3.3.1 *Soit ChA une chenille alternée d'ordre n≥ 5 avec l feuilles et s sommets supports. Alors*

$$\beta_2(ChA) = \begin{cases} |\, l \,| + |\, s \,| - 1 & \textbf{\textit{si}} \ \exists \ \ v \in V(ChA) : |L_v| \geq 2. \\ |l| + |s| & \textbf{\textit{sinon.}} \end{cases}$$

Preuve. On procède par induction sur l'ordre de ChA. Si $diam(ChA) = 4$, alors est une double étoile $S_{p,q}$ avec l'arête uv subdivisé une fois (u et v des sommets supports).

Où $\beta_2(ChA) = 4$ si p = q = 1, et $\beta_2(ChA)$ = p + q + 1 si min { p,q } ≥ 2.

Et $\beta_2(ChA)$ = 2 + max { p,q } si min { p,q } = 1 et p ≠ q, et alors le résultat est vérifie.

Supposons pour que chaque chenille $ChA^{'}$ d'ordre $n^{'}$ avec $n^{'} \leq n$, on a $\beta_2(ChA^{'}) = |l^{'}| + |s^{'}| - 1$.

Soit ChA une chenille d'ordre n, avec $diam(ChA) \geq 6$ et soit v le dernier sommet support de ChA et w est l'avant dernier sommet support dans la chenille ChA. Soit $ChA^{'} = ChA - N[v]$. Alors $n^{'} = n -$ | N[v] | et $ChA^{'}$ non trivial. Nous considérons deux cas.

Cas 1 Si deg_{ChA}(v)$\geq$ 3. Nous considérons encore deux sous -cas

Cas 1.1 Si deg_{ChA}(v)$\geq$ 4. Par l'observation 3.3.1, alors $\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + |L_v|$, avec $|l^{'}| = |l| - (|L_v| - 1)$ et $|s^{'}| = |s| - 1$.

En appliquant l'hypothèse d'induction à $ChA^{'}$.

$\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + |L_v| = |l^{'}| + |s^{'}| - 1 + |L_v|$

$= |l| - (|L_v| - 1) + (|s| - 1) - 1 + |L_v|$

$= |l| + |s| - 1.$

Cas 1.2 Si deg_{Chp}(w) = 3, Par l'observation 3.3.2, puisque $|L_w| = 1$. Nous considérons deux sous-cas.

Cas 1.2.1 Si w $\notin$ S, alors $\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'})$ + p avec $|l^{'}| = |l| - p + 1$ et $|s^{'}| = |s| - 1$.

En appliquent l'hypothèse d'induction à $ChA^{'}$.

$\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + p = |l^{'}| + |s^{'}| - 1 + p$

$= (|l| - p + 1) + (|s| - 1) - 1 + p$

$= |l| + |s| - 1.$

Cas 1.2.2 Si $w \in S$, alors tous les sommets pendants de $ChA^{'}$ sont des supports faibles, d'où $\beta_2(ChA^{'}) = |l^{'}| + |s^{'}|$ et on a $\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + p - 1$, avec $|l^{'}| = |l| - p + 1 =$ et $|s^{'}| = |s| - 1$.

En appliquant l'hypothèse d'induction à $ChA^{'}$.

$\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + p - 1 = |l^{'}| + |s^{'}| + p - 1$

$= (|l| - p + 1) + (|s| - 1) + p - 1$

$= |l| + |s| - 1.$

Cas 2. Si deg_{ChP}(v) = 2. (Nous considérons deux sous)cas.

Cas 2.1 Si deg_{ChP}(w) $\geq$ 4. D'après l'observation 3.3.3, on a

$\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + 2$, avec $|l^{'}| =| l | -1$ et $|s^{'}| = |s| - 1$.

En appliquant l'hypothèse d'induction à $ChA^{'}$.

$\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + 2 = |l^{'}| + |s^{'}| - 1 + 2$

$= (|l| - 1) + (|s| - 1) - 1 + 2$

$= |l| + |s| - 1.$

Cas 2.2 Si deg_{ChP}(w) = 3. Nous considérons encore deux sous-cas.

Cas 2.2.1 Si w $\in$ S, alors tout les sommets supports de $ChA^{'}$ sont des supports faibles, d'où $\beta_2(ChA^{'}) = |l^{'}| + |s^{'}|$ et on a $\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + 2$, avec $|l^{'}| = |l| - 1$.

En appliquant l'hypothèse d'induction à $ChA^{'}$.

$\beta_2(ChA) = \beta_2(ChA^{'}) + 2 = |l^{'}| + |s^{'}| + 2$

$= (|l| - 1) + (|s| - 1) + 2$

$= |l| + |s\,|$.

Cas 2.2.2 Si w $\notin$ S, alors il existe au moins un support w de $ChA^{'}$ de sorte que $|L_w| \geq 2$.

Même preuve que celle de le Cas 2.1

d'où $\beta_2(ChA) = = |l| + |s| - 1$ ■

Exemple 6

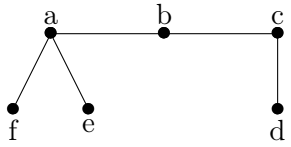


FIGURE 3.3.3 : La chenille alterne ChA avec $\beta_2(ChA) =\mid s \mid + \mid l \mid -1$

$s = \{a, c\}$

$l = \{f, e, d\}$

$S = \{a, e, c, d\}$ *donc* $\beta_2(G) =\mid S \mid = 4$

$\beta_2(G) =\mid s \mid + \mid l \mid -1 = 3 + 2 - 1 = 4$ *donc le résultat vérifie que* $\beta_2(ChA) = 4$

Exemple 7

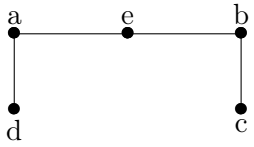


FIGURE 3.3.4 : La chenille ChA avec $\beta_2 = |s| + |l|$

$s = \{a, b\}$

$l = \{c, d\}$

$S = \{a, b, c, d\}$ *donc* $\beta_2(ChA) =\mid S \mid = 4$ *et* $\beta_2(ChA) =\mid l \mid + \mid s \mid = 2 + 2 = 4$

donc le résultat vérifie que $\beta_2(ChA) = 4$

Théorème 3.3.2 *Soit ChA une chenille alternée d'ordre $n \geq 5$, avec s sommets supports et l sommets pendants. Alors*

$$i_2(ChA) \leq \begin{cases} 2|s| \quad si \quad \exists v \in V(ChA) : |L_v| \geq 2. \\ 2|s| - 1 \quad sinon \end{cases}$$

Preuve. Une chenille ChA avec $n \geq 5$ est un graphe biparti. Le résultat est facile a vérifier si le $diam(ChA) = 4$.

Supposons donc que $diam(ChA) \geq 6$ et que A soit un ensemble de feuilles défini comme suit : pour chaque sommet support de ChA , nous mettons dans A exactement une de ses feuilles clairement $|A| = |s|$.

Soit X et Y la partition du sous graphs induite par les sommets $V(ChA) - A$.
L'ensemble contient uniquement les sommets supports et $|X| \leq |Y|$, puisque $diam(ChA) \geq 6, X \neq \varnothing$ et $Y \neq \varnothing$, on a $|X| = |s| \leq |Y| = n - 2|s|$, s'il existe au moins un sommet support v tel que $|L_v| \geq 2$.

Chaque feuille de Y est adjacent à un sommet support de X, chaque sommet support de X est adjacent a un sommet de Y et un sommet de A, et chaque sommet de Y différent de feuille et du sommet support est dominé deux fois par X. Ainsi $Y \cup A$ est un ensemble 2-indépendant maximal de ChA et de manière similaire, $X \cup A$ est un ensemble 2-indépendant de ChA. Par conséquent, $i_2(ChA) \leq |X \cup A| = 2|s|$.

Maintenant, supposant que tous les supports de la chenille ChA sont des supports faibles. Dans ce cas $|Y| < |X|$, avec $|Y| = |s| - 1$ et $|X| = |s|$.

Et puisque on a la même description que celle qui précède, on obtient

$i_2(ChA) \leq |Y \cup A| = 2|s| - 1$.

■

Conclusion et Perspectives

Ce travail se consacre à résoudre le problème de recherche des bornes et des valeurs exactes du nombre de 2-indépendant β_2 et du nombre inférieur de 2-indépendant i_2 dans différents types de chenilles. Cette étude nous a permis de prendre conscience les difficultés méthodologiques dans ce domaine et d'approfondir nos connaissances en théorie des graphes.
Notre modeste contribution consiste à déterminer les bornes et les valeurs exactes de β_2 et i_2 lorsque G est une chenille pleine ou une chenille alternée.
A l'avenir, de nombreux problèmes. Demeurent ouverts dans ce domaine et méritent une étude ultérieure. parmi ces problèmes, on peut notamment mentionner :

1. Déterminer des bornes inférieures et supérieures, ainsi que des valeurs exactes de β_2 et i_2 pour d'autres types des chenilles .
2. Déterminer des valeurs exactes, ou des bornes relatives aux paramètres β_2 et i_2 pour les arbres, et les graphes à structure simple.
3. Etudier les relations entre le nombre de 2-indépendant β_2 et d'autres paramètres de graphes.
4. Caractériser les graphes G pour les quels $\beta_2(G) = i_2(G)$.

Bibliographie

[1] W.W. Ball Rouse, Mathematical recreation and problems of past and present times, MacMillan, London, 1892.

[2] C. Berge, Graphes et Hypergraphes, Paris Dunod, 1970.

[3] C. Berge, Theory of Graphs and its Applications, Collection Universitaire de Mathématiques, vol. 2, Dunod, Paris, 1958.

[4] M. Blidia, A. Bouchou, L. Volkmann, Bounds on the k-independence and k-chromatic numbers of graphs. Ars Combin. 113 (2014) 33-46.

[5] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron and N. Meddah. Maximal k-indépendant sets in graphs. Discussiones Mathematicae Graph theory 28(1)(2008)151- 163.

[6] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron et N. Meddah, "k-indépendance in graphs with emphasis on trees", Discrete Math.307(2007)2209-2216.

[7] A. Bouchou and M. Blidia, Papiers en préparation.

[8] A. Bouchou, M. Blidia. On the k-independence number in graphs, Australasian Journal of Combinatorics 59(2)(2014),311 - 322.

[9] M. Chellali, Nader Jafari Rad. On k-independence critical graphs, Australasian Journal of Combinatorics 53(2012), 289 - 298.

[10] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann, k-Domination and k-Independence in Graphs : A Survey, Graphs Combin. 28(1)(2012),1 - 55.

[11] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination, Networks,7 :247- 261, 1977.

[12] C.F. De Jaenisch. Trait des applications de l'analyse mathematique au jeu des Echecs , Petrograd, 1862.

[13] O. Favaron. k-domination and k-independance in graphs . Ars Combin. 25(1988)C159 - 167.

[14] O. Favaron. La k-domination et la k-indépendance dans les graphes. Séminaire à l'université de Blida, Avril 2005.

[15] J.F. Fink and M.S. Jacobson, n-domination, n dependance and Forbidden sub-graphs in :Graph Theory with applications to Algorithms and Computer (kalamazoo, Mich.1984)eds .Alavi, Chartrand, Lesniak, Lick and wall, Wiley, New-York (1985)283 - 300.

[16] J.F. Fink and M.S. Jacobson, n-dependance and forbidden subgraphs in : Graph Theory with applications to Algorithms and Computer (Kalamazoo, Mich.1984)eds .Alavi, Chartrand, Lesniak, Lick and wall, Wiley, New-York (1985)301 - 311.

[17] M. S. Jacobson and K. Peters, Complexity questions for n-domination and related parameters, Congressus Numerantium 68 (1989) 7-22.

[18] A. Hansberg and A. Pepper, On k-domination and j-dependence in graphs, Discrete Applied Mathematics 161 (10-11) (2013) 1472-1480.

[19] G. Hopkins and W. Staton, Vertex partitions and k-small subsets of graphs, Ars Combin. 22(1986), 19 - 24.

[20] O. Ore, Theory of graphs, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 38 (Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1962.

[21] A.M. Yaglom and A.M. Yaglom, Challenging mathematical problems with elementary solution, In volume 1, Combinatorial analyse and probability theory, San Fransisco, 1964, Holden-Day.